PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

TOUFIC HINDI

Deux types nouveaux d'extension de formes linéaires positives et continues

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1978, tome 15, fascicule 1
, p. 51-81
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1978__15_1_51_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1978 t.15-1

DEUX TYPES NOUVEAUX D'EXTENSION DE FORMES LINEAIRES POSITIVES ET CONTINUES

Par Toufic HINDI

Résumé : Soit M un sous-espace fermé d'un espace de Banach ordonné V. On introduit d'abord la propriété d'extension dominée (notée P.E.D.) : un couple (M, V) possède cette propriété, si et seulement si, toute forme linéaire positive et continue définie sur M se prolonge en une forme linéaire positive et continue définie sur V, et si, de plus, l'image d'un segment d'ordre de V', par la surjection canonique sur M', est un segment d'ordre de M'. L'étude de la P.E.D. est particulièrement poussée lorsque V possède des propriétés complémentaires (réticulé ; propriété de décomposition de Riesz, régulier). On introduit ensuite la propriété d'extension minimum (notée P.E.M.) : un couple (M, V) possède cette propriété, si et seulement si, toute forme linéaire positive et continue définie sur M possède une plus petite extension linéaire positive et continue définie sur V.

Introduction et notations

Dans ce qui suit, V désigne un espace de Banach ordonné par un cône convexe saillant V^+, et M un sous-espace fermé de V, ordonné par le cône M^+, trace du cône V^+ sur M. V' désigne l'espace de Banach ordonné par le cône V'^+ dual du cône V^+, B(V) la boule unité de V, $B(V^+)$ la partie positive de la boule unité de V, R l'application restriction de V' sur M', K un convexe compact ayant O comme point extrémal, $A_o(K)$ l'espace des fonctions affines continues nulles en O.

On dit que l'espace V est positivement engendré si $V = V^+ - V^+$. Le théorème de Baire montre que, s'il en est ainsi, il existe $\alpha \geq 1$ tel que, pour tout point x de V, il existe deux points x_1 et x_2 de V^+, vérifiant $x = x_1 - x_2$ et $\|x_1\| + \|x_2\| \leq \alpha \|x\|$. On dit alors que V est α-engendré. Si

V est α'-engendré pour tout $\alpha' > \alpha$, on dit qu'il est approximativement α-engendré. On dit que l'espace V est α-normal, si pour trois points

x, y, z de V, tels que $x \leqslant y \leqslant z$, on a $\|y\| \leqslant \alpha \max(\|x\|, \|z\|)$. L'espace V est approximativement α-engendré, si et seulement si, V' est α-normal ; et l'espace V est α-normal, si et seulement si, V' est α-engendré (voir [3]). On dit que V est approximativement filtrant, si pour tout $\alpha > 1$, pour tout entier n, pour n points quelconques $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans B(V), il existe un point x dans $\alpha B(V)$, tel que $x_i \leqslant x$, pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Un espace approximativement filtrant est bien sûr positivement engendré (voir [3]). Un espace vectoriel ordonné V possède la propriété de décomposition de Riesz (notée R.D.P.), si, pour trois points quelconques x, y, z de V^+, tels que $x = u+v$, $u \leqslant y$, $v \leqslant z$. L'espace V est réticulé si la borne supérieure de deux points de V existe ; le sous-espace M est fortement réticulé dans V, si la borne supérieure de deux points de M existe dans V et appartient à M. On dira que V est un R-espace s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes (théorème d'Andô [3]) :
(a) V' est réticulé ; (b) V est positivement engendré, normal et possède la R.D.P.. On dira que V est un espace simplicial s'il est approximativement filtrant, normal et possède la R.D.P. ; si, de plus, il est réticulé, on dira qu'il est M-espace (voir [4], [9], [12]). Un espace simplicial est bien sûr un R-espace ; il en est de même d'un espace réticulé. On dira que V est régulier, s'il vérifie les deux conditions suivantes :

[R_1] : Si x et y sont deux points de V, tels que : $-y \leqslant x \leqslant y$, alors on a $\|x\| \leqslant \|y\|$.

[R_2] : Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout x dans V, il existe y dans V^+, tel que $x, -x \leqslant y$ et $\|y\| \leqslant \|x\| + \varepsilon$.

Si l'espace V est, de plus, réticulé, la condition [R_2] se transforme en
[R'_2] : Pour tout x dans V, on a $\|x\| = \| |x| \|$.

Le théorème de Davies (voir [8]), variante du théorème d'Andô, affirme que l'espace V est régulier et possède la R.D.P., si et seulement si, V' est régulier et réticulé.

On dira que le couple (M, V) possède la propriété d'extension uniforme (notée P.E.V.), s'il existe $a \geq 1$, tel que, pour tout f de M'^{+}, il existe une extension $\tilde{f}$ de f dans V'^{+}, telle que : $\|\tilde{f}\| \leq a \|f\|$ (H. Fakhoury [10]). Le coefficient d'extension pour un couple (M, V) est le plus petit nombre a qui vérifie ce qui précède.

On commence par introduire la P.E.D.. On étudie le transfert de certaines propriétés de l'espace V au sous-espace M, moyennant l'hypothèse que le couple (M, V) possède la P.E.D.. On étudie ensuite la relation entre la P.E.U. et la P.E.D., puis on donne quelques conditions nécessaires et suffisantes générales pour qu'un couple (M, V) possède la P.E.D.. Cette étude ne se précise totalement que dans le cadre des R-espaces qui apparait comme le plus adéquat. On obtiendra des caractérisations intéressantes des sous-espaces M tels que le couple (M, V) possède la P.E.D. ; notamment, si l'espace V est réticulé, on montrera que M est fortement réticulé dans V, si et seulement si, le couple (M, V) possède la P.E.D.. Les théorèmes 22 et 24 fournissent d'autres exemples de caractérisations intéressantes.

On introduit ensuite la P.E.M. qui donne une caractérisation des idéaux d'un R-espace et montre l'existence, dans ce cas, d'un relèvement linéaire positif et continu de M' dans V' (corollaire 33).

On termine en donnant quelques exemples, remarques et problèmes.

Cet article développe une Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (séance du 29 octobre 1973)

1 - La propriété d'extension dominée (P.E.D.).

Définition 1 : Le couple (M, V) possède la propriété d'extension dominée (P.E.D.) si $R(V'^{+}) = M'^{+}$, et si :
Pour tout f dans M'^{+} et tout g dans V'^{+} vérifiant $0 \leq f \leq R(g)$ il existe une extension $\tilde{f}$ de f dans V'^{+} vérifiant $0 \leq \tilde{f} \leq g$.

Remarquons que, dans les cas les plus fréquents (V normal), la condition $R(V'^{+}) = M'^{+}$ est superflue puisqu'on peut la déduire de la seconde condition. En effet si f est dans M'^{+}, le théorème de Hahn-Banach assure l'existence d'un extension $\bar{f}$ de f dans V'. L'espace V étant normal, V' est positivement engendré. Il existe donc un point g dans V'^{+} tel que $\bar{f} \leqslant g$. Par suite, on a $0 \leqslant f \leqslant R(g)$. La seconde condition de la définition 1 assure l'existence d'un $\tilde{f}$ dans V'^{+} tel que $R(\tilde{f}) = f$.

Il est facile de voir que cette seconde condition est équivalente au fait que l'image de tout segment d'ordre de V' par R est un segment d'ordre de M' ; et que cette propriété entraîne que l'image d'une face (resp. génératrice extrémale) de V'^{+} est une face (resp. génératrice extrémale) de M'^{+}. La réciproque de cette dernière assertion est discutée dans la remarque 34.

Moyennant la P.E.D., certaines propriétés de V se transmettent à M :

<u>Proposition 2</u> : Supposons que le couple (M, V) possède la P.E.D..

(a) Si V est positivement engendré, il en est de même pour M.

(b) Si V est un R-espace, il en est de même pour M.

<u>Démonstration</u> : -(a) Il suffit de montrer que l'espace M' est normal. Or, M' est normal, si et seulement si, tout segment d'ordre est borné pour la norme (voir [2]). En fait, il suffit de se limiter aux segments d'ordre de la forme [0, f] où f appartient à M'^{+}. Comme $R(V'^{+}) = M'^{+}$, il existe un élément $\tilde{f}$ de V'^{+} tel que $R(\tilde{f}) = f$. Comme le couple (M, V) possède la P.E.D., tout g dans le segment d'ordre [0, f] se prolonge en un $\tilde{g}$ dans le segment d'ordre $[0, \tilde{f}]$. L'espace V étant positivement engendré, V' est normal et $[0, \tilde{f}]$ est borné. Il en est de même, à fortiori, pour le segment d'ordre [0, f] .

(b) L'assertion (a) montre que M est positivement engendré. Il est normal car c'est un sous-espace d'un espace normal.

L'espace M' est donc positivement engendré et normal. Montrons qu'il possède la R.D.P.. Soient f, g, h trois formes linéaires de M'^{+} vérifiant $f \leqslant g + h$. Il existe $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ dans V'^{+} telles que $R(\tilde{g}) = g$ et $R(\tilde{h}) = h$. On a donc $0 \leqslant f \leqslant R(\tilde{g} + \tilde{h})$. Par hypothèse, il existe f dans V'^{+} telle que $R(\tilde{f}) = f$ et

$0 \leqslant \tilde{f} \leqslant \tilde{g} + \tilde{h}$. L'espace V' étant réticulé, il possède la R.D.P. ; il s'en suit qu'il existe $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ dans V'^+, telles que $\tilde{f} = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$, $\tilde{f}_1 \leqslant \tilde{g}$, $\tilde{f}_2 \leqslant \tilde{h}$. On a donc, en posant $f_1 = R(\tilde{f}_1)$ et $f_2 = R(\tilde{f}_2)$: $f = f_1 + f_2$, $f_1 \leqslant g$, $f_2 \leqslant h$. L'espace M' est donc un R-espace. Etant un dual, M' est réticulé (voir [3]).

Remarquons que M et V peuvent être des R-espaces sans que le couple (M, V) possède la P.E.D. (Exemple 35).

On verra ultérieurement, que, si V est un R-espace régulier, il en est de même pour M (proposition 18).

Etudions, à présent, le rapport entre la P.E.U. et la P.E.D. .

<u>Proposition 3</u> : V étant positivement engendré et normal, si le couple (M, V) possède la P.E.D., il possède la P.E.U. .

<u>Démonstration</u> : - Soit f une forme linéaire de M'^+ de norme 1 ; d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une extension $\bar{f}$ de f dans V' de norme 1. L'espace V étant normal, il existe $\beta \geqslant 1$ tel que V' soit β-engendré. Il existe donc $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ dans V'^+ telles que $\bar{f} = \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2$ et $\|\tilde{f}_1\| + \|\tilde{f}_2\| \leqslant \beta \; \|\bar{f}\| = \beta$. On a donc $\bar{f} \leqslant \tilde{f}_1$ et par suite $0 \leqslant f \leqslant R(\tilde{f}_1)$.

Par hypothèse, il existe une extension $\tilde{f}$ de f dans V'^+ telle que $0 \leqslant \tilde{f} \leqslant \tilde{f}_1$. L'espace V étant positivement engendré, il existe $\alpha \geqslant 1$ tel que V' soit α-normal. Il s'en suit que $\|\tilde{f}\| \leqslant \alpha \; \|\tilde{f}_1\| \leqslant \alpha\beta$. Ceci achève la démonstration.

<u>Remarques</u> : (1) Le rapport entre la P.E.U. et la P.E.D. se précisera totalement dans le cas où V est un R-espace régulier (lemme 23 et théorème 24).

(2) La P.E.D. est une propriété strictement plus forte que la P.E.U. (Exemple 35).

(3) Le contre-exemple 36 répond par la négative au problème de savoir si, lorsque le couple (M, V) possède la P.E.D., il y a nécessairement réalisarion simultanée de la P.E.U. et de la P.E.D. dans le sens suivant : il existe un nombre $a \geqslant 1$ tel que, pour tout f dans M'^+ et tout g dans V'^+ vérifiant $0 \leqslant f \leqslant R(g)$, il existe une extension $\tilde{f}$ de f dans V'^+ vérifiant simultanément $0 \leqslant \tilde{f} \leqslant g$ et $\|\tilde{f}\| \leqslant a\|f\|$.

Le contre-exemple répond, du même coup, par la négative au problème plus général suivant :

Si φ est une surjection linéaire positive d'un cône réticulé C sur un cône réticulé C', telle que l'image par φ de tout segment d'ordre de C est un segment d'ordre de C', a-t-on, pout tout point x et tout point y dans C, la relation : $\varphi(\inf(x, y)) = \inf(\varphi(x), \varphi(y))$?

Cependant, la proposition 4 montre que, si M est cofinal dans V et si le couple (M, V) possède la P.E.D., il y a réalisation simultanée de la P.E,U. et de la P.E.D..

Proposition 4 : Les assertions suivantes sont équivalentes ;

(i) M est cofinal dans V ;

(ii) $M+V^+$ est fermé et toute forme linéaire de V'^+, qui s'annule sur M, s'annule sur V ;

(iii) $M+V^+$ est fermé et il existe $a \geq 1$ tel que pour tout f dans M'^+, et pour toute extension f de f dans V'^+, on ait $\|\tilde{f}\| \leq a\|f\|$.

Démonstration : - (i)$\Longrightarrow$ (ii) : La première condition de (ii) provient du fait que $M + V^+ = V$. La seconde condition est une conséquence immédiate du fait que, si x est un point quelconque de V, il existe deux points y et z de M tels que $y \leq x \leq z$.

(ii)$\Longrightarrow$(i) : La seconde condition de (ii) s'écrit : $V'^+ \cap \overset{\circ}{M} = \{0\}$. En prenant les polaires des deux membres de l'égalité, il vient que $V = \overline{M + V^+}$ et M est cofinal dans V.

(i)$\Longrightarrow$(iii) : La première condition de (iii) est évidemment réalisée. Supposons que la seconde ne le soit pas. Il existe alors une suite de formes linéaires (f_n) de M'^+ et il existe une suite $(\tilde{f}_n)$ d'extensions positives et continues des f_n telles que $\|\tilde{f}_n\| \geq 4^n \|f_n\|$. Posons $f'_n = \dfrac{f_n}{2^n \|f_n\|}$ et $\tilde{f}'_n = \dfrac{\tilde{f}_n}{2^n \|f_n\|}$

De toute évidence, les $\tilde{f}'_n$ sont des extensions des f'_n, et l'on a $\|f'_n\| = \dfrac{1}{2^n}$; donc la suite (f'_n) converge en norme vers 0.

Soit x un point quelconque de V, l'hypothèse montre l'existence de deux points y et z de M tels que $y \leqslant x \leqslant z$. Les formes f'_n étant positives, il vient que $f'_n(y) = \tilde{f}'_n(y) \leqslant \tilde{f}'_n(x) \leqslant \tilde{f}'_n(z) = f'_n(z)$. Comme les suites $(f'_n(y))$ et $(f'_n(z))$ convergent vers 0, il en est de même de la suite $(\tilde{f}'_n(x))$. Par conséquent, la suite $(\tilde{f}'_n)$ converge faiblement vers 0. L'ensemble $\{\tilde{f}'_n\} \cup \{0\}$ étant alors faiblement compact, il est fortement borné ; ce qui contredit le fait que $\|\tilde{f}'_n\| > 2^n$.

<u>(iii)$\Longrightarrow$(ii)</u> : Supposons que la seconde condition de (ii) ne soit pas réalisée. Il existe alors une forme linéaire $h \neq 0$ de V'^+ qui s'annule sur M. Soient f une forme linéaire de M'^+ et $\tilde{f}$ une extension quelconque de f appartenant à V'^+. Posons $\tilde{f}_n = \tilde{f} + nh$, où n est un entier. Toutes les formes linéaires $\tilde{f}_n$ sont aussi des extensions linéaires positives et continues de f et $\|\tilde{f}_n\| \geqslant n\|h\| - \|\tilde{f}\|$. Cette dernière inégalité montre que $\|\tilde{f}_n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. Ceci contredit (iii).

Remarquons que, si M est cofinal dans V, le couple (M, V) ne possède pas nécessairement la P.E.D. (Exemple 37).

Donnons, à présent, quelques conditions nécessaires et suffisantes pour que le couple (M, V) possède la P.E.D. .

<u>Lemme 5</u> : Soit M un sous-espace fermé d'un espace de Banach ordonné V. Toute forme linéaire positive et continue sur M se prolonge en une forme linéaire positive et continue sur V, si et seulement si, le convexe $M^\circ + V'^+$ est $\sigma(V', V)$ fermé.

<u>Démonstration</u> : - Les convexes M° et V'^+ étant faiblement fermés, contenant 0 et positivement homogènes, on a

$(M^\circ + V'^+)^\circ = M^{\circ\circ} \cap (V'^+)^\circ = M \cap V^+ = M^+$. Le théorème des bipolaires montre alors que $\overline{M^\circ + V'^+} = (M^+)^\circ$, l'adhérence étant prise pour la topologie faible $\sigma(V', V)$.

Montrons la nécessité de la condition. Soit f un élément de $(M^+)^\circ$, c'est-à-dire une forme linéaire continue sur V telle que sa restriction R(f) à M soit positive. L'hypothèse assure l'existence d'un f_1 dans V'^+ qui prolonge R(f) à V. Il est licite d'écrire : $f = (f - f_1) + f_1$. On en déduit que f appartient à

$M^\circ + V'^+$, et par suite que $\overline{M^\circ + V'^+} = M^\circ + V'^+$.

Montrons la suffisance de la condition. Soit f une forme linéaire positive et continue sur M. Le théorème de Hahn-Banach assure l'existence d'un prolongement $\tilde{f}$ de f à V. Du fait que $M^\circ + V'$ est $\sigma(V', V)$ fermé, on a l'égalité $(M^+)^\circ = M^\circ + V'^+$. La forme linéaire $\tilde{f}$ appartenant à $(M^+)^\circ$, s'écrit $\tilde{f} = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$, où $\tilde{f}_1$ appartient à M° et $\tilde{f}_2$ à V'^+. Il est clair alors que la forme linéaire $\tilde{f}_2$ de V'^+ est une extension de f.

Soit g un élément de V'^+ ; désignons par (I) l'implication suivante :

(I) Si t est un point de M, tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux points x et y de $-V^+$, vérifiant $\|x\| \leqslant \varepsilon$; $g(y) \geqslant -1$; $x+y \leqslant t$,

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux points x' et y' de -M, vérifiant $\|x'\| \leqslant \varepsilon$; $g(y') \geqslant -1$; $x' + y' \leqslant t$.

<u>Proposition 6</u> : Soit M un sous-espace fermé d'un espace de Banach ordonné V. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Le couple (M, V) possède la P.E.D. ;

(ii) $M^\circ + V'^+$ est $\sigma(V', V)$ fermé, et pour tout g de V'^+, on a :

(a) $(M^\circ + V'^+) \cap (M^\circ + g - V'^+) = M^\circ + (V'^+ \cap g - V'^+)$.

Si de plus, V et M sont positivement engendrés, ce qui précède équivaut à la condition (iii).

(iii) $M^\circ + V'^+$ est $\sigma(V', V)$ fermé, et pour tout g de V'^+, l'implication (I) est vérifiée.

<u>Démonstration</u> : <u>(i)$\Longrightarrow$(ii)</u> : la première condition de (ii) est une conséquence immédiate du lemme 5. Pour montrer l'égalité (a), il suffit de montrer l'inclusion du terme de gauche de l'égalité dans celui de droite. Soit donc f un élément du terme de gauche. On vérifie immédiatement que $0 \leqslant R(f) \leqslant R(g)$. Par hypothèse, il existe un prolongement f de R(f) dans V'^+ vérifiant $0 \leqslant \tilde{f} \leqslant g$. L'écriture de f sous la forme $f = (f - \tilde{f}) + \tilde{f}$, montre que f appartient au terme de droite.

<u>(ii)$\Longrightarrow$(i)</u> : soit f dans M'^+ et g dans V'^+, vérifiant $0 \leqslant f \leqslant R(g)$. La première condition de (ii) assure l'existence d'un prolongement positif $\tilde{f}$ de f dans V'^+. Posons $h = g - \tilde{f}$; alors $R(h) = R(g) - f$ est positive, ce

qui signifie que h appartient à $M^{+\circ} = M^\circ + V'^+$. D'autre part, $\tilde{f}$ étant positive, on a $h \leq g$, et par suite $h \in g - V'^+ \subset M^\circ + g - V'^+$. L'hypothèse assure l'existence de h_1 et h_2 dans V', vérifiant $h_1 \in M^\circ$, $0 \leq h_2 \leq g$ et $h = h_1 + h_2$. Posons $\bar{f} = g - h_2$; $\bar{f}$ est une extension linéaire positive et continue de f vérifiant $0 \leq \bar{f} \leq g$.

<u>(ii)$\Longleftrightarrow$(iii)</u> : Moyennant l'hypothèse que le convexe $M^\circ + V'^+$ est $\sigma(V', V)$ fermé, les deux membres de l'égalité (a) sont $\sigma(V', V)$ fermées. Ceci est clair pour le membre de gauche (a). Quant au membre de droite, c'est la somme du fermé M° et du compact $V'^+ \cap g - V'^+$ (V' étant normal). Ainsi, du fait que les deux membres de (a) sont des convexes fermés contenant 0, le théorème des bipolaires assure que l'égalité (a) est équivalente à l'égalité (a') des polaires des deux membres de l'égalité (a). Pour le calcul des polaires, on constatera que les convexes M°, $M^\circ + V'^+$, $M^\circ + g - V'^+$, $M^\circ + (V' \cap g - V'^+)$ et $V'^+ \cap g - V'^+$, sont faiblement fermés et contiennent 0, et que les convexes M° et $M^\circ + V'^+$ sont positivement engendrés. Ainsi on a

(a') $\overline{M^+ + \{y \in -M^+ \ ;\ g(y) \geq -1\}} = M \cap \overline{V^+ + \{z \in -V^+ \ ;\ g(z) \geq -1\}}$.

L'espace V étant positivement engendré, il existe $\alpha \geq 1$ tel que $B(V) \subset \alpha(B(V^+) - B(V^+))$ (voir [3]). On a donc

$$\begin{aligned}\overline{V^+ + \{z \in -V^+ \ ;\ g(z) \geq -1\}} &= \bigcap_{\varepsilon>0} (V^+ + \{z \in -V^+ \ ;\ g(z) \geq -1\} + \varepsilon B(V))\\ &= \bigcap_{\varepsilon>0} (V^+ + \{z \in -V^+ \ ;\ g(z) \geq -1\} + \varepsilon B(V^+) - \varepsilon B(V^+))\\ &= \bigcap_{\varepsilon>0} (V^+ + \{z \in -V^+ \ ;\ g(z) \geq -1\} - \varepsilon B(V^+)) .\end{aligned}$$

Le sous-espace M étant positivement engendré, on a de même ·

$$\overline{M^+ + \{y \in -M^+ \ ;\ g(y) \geq -1\}} = \bigcap_{\varepsilon>0} (M^+ + \{y \in -M^+ \ ;\ g(y) \geq -1\} - \varepsilon B(M^+)).$$

Par suite, l'égalité (a') est équivalente à (a") :

(a") $$\bigcap_{\varepsilon>0} (M^+ + \{y \in -M^+ \ ;\ g(y) \geq -1\} - \varepsilon B(M^+)) = M \cap \Big[\bigcap_{\varepsilon>0} (V^+ + \{z \in -V^+ \ ;\ g(z) \geq -1\} - \varepsilon B(V^+))\Big] .$$

Le membre de gauche de l'égalité (a") étant toujours inclus dans le membre de droite, (a") est donc équivalente à l'inclusion inverse qui s'exprime exactement par l'implication (I).

<u>Corollaire</u> 7 : | Soit M un sous-espace fermé d'un espace de Banach ordonné positivement engendré et normal V. Si M est fortement réticulé dans V, le couple (M, V) possède la P.E.D. .

<u>Démonstration</u> : - Il suffit de vérifier l'implication (I) car le couple (M, V) possédant la P.E.U. (voir [10]), $M^{\circ} + V'^{+}$ est faiblement fermé. Soient donc g dans V'^{+} et un point t dans M, tels que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux points x et y dans $-V^{+}$ vérifiant $\|x\| \leqslant \varepsilon$; $g(y) \geqslant -1$; $x+y \leqslant t$. Le sous-espace M étant fortement réticulé dans V, on a $x+y \leqslant \inf(t, 0) \leqslant t$. On en déduit que $g(x)-1 \leqslant g(x+y) \leqslant g(\inf(t, 0))$.

Par ailleurs, on a $0 \geqslant g(x) \geqslant -\|g\| \|x\| \geqslant -\|g\| \varepsilon$.
Il s'en suit que $g(\inf(t, 0)) \geqslant -\|g\| \varepsilon - 1$, pour tout $\varepsilon > 0$; ce qui implique que $g(\inf(t, 0)) \geqslant -1$.

Il suffit donc de choisir, pour tout $\varepsilon > 0$: $x' = 0$ et $y' = \inf(t, 0)$.

Si V est un espace de Banach ordonné, il peut être considéré comme sous-espace fermé de l'espace V'' .

Soit M un sous-espace fermé de V. Alors M'' est isométrique au sous-espace $M^{\circ\circ}$ de V'' ($M^{\circ\circ}$ désignant le polaire de M° dans V''). Cette identification se fait par l'intermédiaire de l'isométrie linéaire suivante : $m \longrightarrow \tilde{m}$ définie par :

$$\tilde{m}(f) = m(R(f)), \text{ pour tout } f \text{ dans } V'.$$

En fait, il existe sur l'espace M'' deux ordres canoniques : celui induit par V'' sur M'' (moyennant l'isométrie entre M'' et $M^{\circ\circ}$) et l'ordre dual de l'ordre de M'. L'isométrie linéaire $m \longrightarrow \tilde{m}$ est un isomorphisme pour l'ordre, si et seulement si, les deux ordres canoniques coïncident sur M''. Pour le premier ordre, une forme linéaire m de M'' est positive, si et seulement si, $\tilde{m}(f) = m(R(f))$ est positive pour tout f dans V'^{+}. Ainsi, m est positive, si et seulement si, $m(f) \geqslant 0$, pour tout f dans l'adhérence forte de $R(V'^{+})$. Pour le second ordre, m est positive, si et seulement si, $m(f) \geqslant 0$, pour tout f dans M'^{+}. Si le cône convexe fermé $\overline{R(V'^{+})}$ est strictement inclus dans M'^{+}, le théorème de Hahn-Banach nous permet d'exhiber une forme linéaire m de M'' qui soit positive pour le premier ordre et non positive pour le second. Il apparaît donc que :

<u>Lemme 8</u> : Les deux ordres canoniques sur M'' coïncident, si et seulement si, $\overline{R(V'^{+})} = M'^{+}$ (l'adhérence étant prise pour la topologie forte).

Dans le cas où V et M sont réticulés, x désignant un point de M, on notera par x^{+}_{M} (resp. $|x|_{M}$) la partie positive de x (resp. le module de x) relativement à l'ordre propre de M. La partie positive de x (resp. le module de x) relativement à l'ordre de V, sera notée par x^{+}_{V} (resp. $|x|_{V}$). Alors, M est fortement réticulé dans V, si et seulement si, $x^{+}_{M} = x^{+}_{V}$ (resp. $|x_{M}| = |x|_{V}$) [6].

<u>Lemme 9</u> : Soit V un espace vectoriel réticulé. Pour toute forme linéaire l sur V, et pour tout point u de V^{+}, il existe une forme linéaire m sur V, telle que $0 \leqslant m \leqslant l$; $m(u) = l(u)$; $m(v) = 0$ pour tout v de V tel que $(u,|v|) = 0$.

<u>Démonstration</u> : - Posons pour tout point x de V^{+} $m(x) = \sup_{n \geqslant 0} l(\inf(x, nu))$.

Du fait que l est positive, m(x) est bien définie et on a $0 \leqslant m(x) \leqslant l(x)$ et $m(u) = l(u)$.

Pour tout point v de V^{+} tel que $\inf(u, v) = 0$, on a $m(v) = 0$ car $\inf(v, nu) = 0$, pour tout $n \geqslant 0$. Du fait que $|m(v)| \leqslant |m|(|v|)$ [6], on a $m(v) = 0$, pour tout point v de V tel que $\inf(u,|v|) = 0$.

Pour montrer que m peut s'étendre à tout V en une forme linéaire positive, il suffit, du fait que V est positivement engendré, de montrer que m est additive sur V^{+} [6] . Soient donc x et y deux points de V^{+} ; remarquons que

$$m(x) + m(y) = \sup_{p,\, q \geqslant 0} l(\inf(x, pu) + \inf(y, qu)).$$

- Soient $p, q \geqslant 0$ deux entiers quelconques, on a

$$\inf(x, pu) + \inf(y, qu) \leqslant \inf(x+y, (p+q)u).$$

- La forme linéaire l étant positive, on en déduit que : $m(x) + m(y) \leqslant m(x+y)$.

Inversement, soit n un entier positif ; on a

$\inf(x, nu) + \inf(y, nu) = \inf(x+y, 2nu, x + nu, y + nu)$.

Or, $2nu$, $x+nu$, $y + nu \geqslant nu$ (x et y étant positifs),

On a donc $\inf(x + y, nu) \leqslant \inf(x, nu) + \inf(y, nu)$.

Par suite, on a $m(x + y) \leqslant m(x) + m(y)$, Ceci achève la démonstration.

<u>Proposition 10</u> : Si V est un espace de Banach réticulé, V est fortement réticulé dans V", et par suite, le couple (V, V") possède la P.E.D. .

<u>Démonstration</u> : Soit x un point quelconque de V, Les remarques précédentes permettent de considérer comme sous-espace de V", Il s'agit de montrer que $\bar{x}^+_V = \bar{x}^+_{V''}$.

Puisque V' est positivement engendré, il suffit de montrer que $\bar{x}^+_V$ et $\bar{x}^+_{V''}$, considérés comme formes linéaires sur V', coïncident sur V'^+,

Soit l dans V'^+. On a, par définition :

$$\bar{x}^+_V(l) = l(x^+_V) \text{ et } \bar{x}^+_{V''}(l) = \sup_{\substack{0 \leqslant m \leqslant l \\ m \in V'^+}} \bar{x}(m) = \sup_{\substack{0 \leqslant m \leqslant l \\ m \in V'^+}} m(x),$$

Or, les inégalités $x \leqslant x^+_V$ et $0 \leqslant m \leqslant l$, impliquent $m(x) \leqslant m(x^+_V) \leqslant l(x^+_V) = \bar{x}^+_V(l)$. Par suite, on a $\bar{x}^+_{V''}(l) \leqslant \bar{x}^+_V(l)$.

D'autre part, le lemme 9 assure l'existence d'une forme linéaire positive m sur l'espace réticulé V', telle que $0 \leqslant m_0 \leqslant l$, $m_0(x^+_V) = l(x^+_V)$ et $m_0(x^-_V) = 0$ (puisque l'on a $\inf(x^+_V, x^-_V) = 0$) ; on a donc $m_0(x) = m_0(x^+_V - x^-_V) = l(x^+_V)$, Or, V étant positivement engendré, toute forme linéaire positive est continue, Il s'en suit que m_0 appartient à V'^+ ; ce qui démontre que V est fortement réticulé dans V", Or, V" étant positivement engendré et normal, le corollaire 7 implique que le couple (M, V) possède la P.E.D.

<u>Lemme 11</u> : Soit M un sous-espace fermé d'un R-espace V, Si le couple (M, V) possède la P.E,D., M" est fortement réticulé dans V".

<u>Démonstration</u> : - La proposition 2, b) montre que M est un R-espace ; par suite, M' et M" sont réticulés. Le lemme 8 montre qu'il est légitime de considérer M"

comme sous-espace de Banach ordonné de V". On peut donc écrire : $\tilde{m}^{+}_{M^{\circ\circ}} = \widetilde{m^{+}_{M''}}$.

Il s'agit de montrer que $\tilde{m}^{+}_{M^{\circ\circ}} = \tilde{m}^{+}_{V''}$. Soit f dans V". Par définition on a

$$\tilde{m}^{+}_{M^{\circ\circ}}(f) = \widetilde{m^{+}_{M''}}(f) = m^{+}_{M''}(R(f)) = \sup_{\substack{0 \leqslant g \leqslant R(f) \\ g \in M'^{+}}} m(g) = \sup_{g \in [0,\, R(f)]} m(g)$$

$$\tilde{m}^{+}_{V''}(f) = \sup_{\substack{0 \leqslant h \leqslant f \\ h \in V'^{+}}} \tilde{m}(h) = \sup_{\substack{0 \leqslant h \leqslant f \\ h \in V'^{+}}} m(R(h)) = \sup_{g \in R([0,\, f])} m(g)$$

Comme le couple (M, V) possède la P.E.D., l'image par R du segment d'ordre $[0, f]$ est le segment d'ordre $[0, R(f)]$. Par suite, on a : $\tilde{m}^{+}_{V''}(f) = \tilde{m}^{+}_{M^{\circ\circ}}(f)$. Cette égalité est vraie pour tout f dans V' car V' est positivement engendré ; d'où la conclusion.

Le corollaire 7 permet de démontrer :

<u>Proposition 12</u> : Soit M un sous-espace fermé d'un R-espace V. Si le couple (M, V) possède la P.E.D., le couple (M", V") possède la P.E.D.

<u>Proposition 13</u> : Soit M un sous-espace fermé réticulé pour son ordre propre, d'un R-espace V. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) M est fortement réticulé dans V ;

(ii) Le couple (M, V) possède la P.E.D. .

<u>Démonstration</u> : - L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est déjà démontrée. Montrons (ii) $\Longrightarrow$ (i). M étant réticulé pour son ordre propre, la proposition 10 montre que M est fortement réticulé dans M". D'autre part, le lemme 11 montre que M" est fortement réticulé dans V". Pour tout point x dans M, on a donc : $\tilde{\tilde{x}}^{+}_{M} = \tilde{\tilde{x}}^{+}_{V''}$. Ceci joint aux inclusions suivantes $M \subset V \subset V''$, montre que $\tilde{\tilde{x}}^{+}_{M} = \tilde{\tilde{x}}^{+}_{V}$; donc, on a $x^{+}_{M} = x^{+}_{V}$.

<u>Théorème 14</u> : Soit M un sous-espace fermé d'un espace de Banach réticulé V. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) M est fortement réticulé dans V ;

(ii) Le couple (M, V) possède la P.E.D..

Démonstration : - Il suffit de démontrer (ii)$\Longrightarrow$ (i). La proposition 10 montre que V est fortement réticulé dans V''. Si x désigne un point quelconque de M, on a donc : $\tilde{\tilde{x}}^{+}_{V} = \tilde{\tilde{x}}^{+}_{V''}$. Or, le lemme 11 montre que $\tilde{\tilde{x}}^{+}_{M''} = \tilde{\tilde{x}}^{+}_{V''}$; d'où $\tilde{\tilde{x}}^{+}_{V} = \tilde{\tilde{x}}^{+}_{M''}$.
Ainsi, moyennant les isomorphismes isométriques d'espaces de Banach ordonnés, on peut affirmer que x^{+}_{V} appartient à $M'' \cap V$. Or, il est immédiat de vérifier que $M'' \cap V = M$. Donc M est fortement réticulé dans V.

Remarquons que le théorème 14 n'est pas valable dans le cas où V est quelconque. En fait, il n'est même pas valable dans le cadre des R-espaces (voir Remarque 38).

Proposition 15 : Soit M un sous-espace fermé d'un espace de Banach ordonné V, tel que $\overline{R(V'^{+})} = M'^{+}$ (adhérence forte). Si le couple (M'', V'') possède la P.E.D., le couple (M, V) possède la P.E.D. .

Démonstration : - Le lemme 8 nous permet de considérer M'' comme sous-espace ordonné de V''. Dénotons par R_V la restriction canonique de V' sur M' et par $R_{V''}$ la restriction canonique de V' sur M' et par $R_{V''}$ la restriction canonique de V''' sur M'''.
Soit f dans M'^{+}, f peut être considéré comme une application linéaire positive et continue définie sur M''. Puisque $R_{V''}(V'''^{+}) = M'''^{+}$, il existe un g dans V'''^{+} qui prolonge f à V''. La restriction de g à V est une extension linéaire positive et continue de f à V. Par suite, on a $R_V(V'^{+}) = M'^{+}$.

Soient f dans M'^{+} et g dans V'^{+} vérifiant $0 \leq f \leq R_V(g)$. Soient $\bar{f}$ (resp. $\bar{g}$) les éléments de M'''^{+}(resp. V'''^{+}) définis par les injections canoniques de M' dans M''' (resp. de V' dans V'''). Montrons qu'on a 0 $\bar{f}$ $R_{V''}(\bar{g})$. Pour cela, montrons que, pour tout point m dans M''^{+}, on a $\bar{f}(m)$ $(R_{V''}(g))(m)$. Or, $\bar{f}(m) = m(f)$ et $(R_{V''}(\bar{g}))(m) = \bar{g}(m) = m(g) = m(R_V(g))(m$ $M^{\circ\circ}$ $V'')$.

Comme $0 \leq f \leq R_V(g)$ et que m est positive, il s'en suit que $\bar{f}(m) \leq (R_{V''}(g))(m)$. Comme le couple ($M''$, V'') possède la P.E.D., il existe f_1 dans V'''^{+}, vérifiant $R_{V''}(f_1) = \bar{f}$ et $0 \leq f_1 \leq \bar{g}$.

Posons $f'_1 = f_1/V$; f'_1 est une extension positive de f à V telle que,

$0 \leq f'_1 \leq \bar{g}/V = g$; ce qui achève la démonstration.

Les propositions 12 et 15 donnent le corollaire suivant :

<u>Corollaire 16</u> : Soit M un sous-espace fermé d'un R-espace V, tel que $\overline{R(V'^+)} = M'^+$ (adhérence forte). Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Le couple (M, V) possède la P.E.D. ;

(ii) Le couple (M", V") possède la P.E.D. .

Le théorème 14 et la proposition 15, donnent le corollaire suivant :

<u>Corollaire 17</u> : Soit M un sous-espace fermé d'un espace de Banach ordonné V, tel que $\overline{R(V'^+)} = M'^+$ (adhérence forte). Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) M est fortement réticulé dans V ;

(ii) M" est fortement réticulé dans V".

<u>Proposition 18</u> : Soit M un sous-espace fermé d'un espace de Banach ordonné V, tel que le couple (M, V) possède la P.E.D.. Si V est un R-espace régulier, il en est de même pour M.

<u>Démonstration</u> : - Le lemme 11 montre que M" est fortement réticulé dans V". Le théorème de Davies montre que V" est réticulé régulier. Or, un sous-espace fortement réticulé d'un espace réticulé régulier, est lui-même régulier. Ceci provient du fait que $|x|_{M''} = |x|_{V''}$ pour tout point x dans M" et que la seconde condition de régularité $[R'_2]$ s'écrit $\|x\| = \||x|\|$. Ainsi, M" est réticulé régulier, le théorème de Davies assure que M' est réticulé régulier, et par suite, que M est un R-espace régulier.

<u>Proposition 19</u> : Soit M un sous-espace fermé d'un R-espace régulier V, tel que la norme sur V" vérifie la condition suivante :

Pour tout x, y dans V''^+, on a : $(0 \leq x \leq y$ et $\|x\| = \|y\|) \Longrightarrow (x=y)$.

Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Le couple (M, V) possède la P.E.D. ;

(ii) M est un R-espace régulier.

Démonstration : - Il reste à démontrer (ii) $\Longrightarrow$ (i). Pour cela, il suffit, d'après la proposition 15, de montrer que $\overline{R(V'^{+})} = M'^{+}$ et que le couple (M", V") possède la P.E.D.. L'espace V" étant réticulé (théorème de Davies), le théorème 14 montre qu'il suffit, pour cela, de montrer que $\overline{R(V'^{+})} = M'^{+}$ et que M" est fortement réticulé dans V".

Soit m un point de $M^{\circ\circ}$; on désignera par $m_{M''}$ le module de m relativement à l'ordre dual de l'ordre de M', et par $m_{M^{\circ\circ}}$ le module de m (s'il existe) relativement à l'ordre induit sur $M^{\circ\circ}$ par l'ordre de V". Le théorème de Davies assure que M" et V" sont réticulés réguliers. Comme $\overline{R(V'^{+})}$ est inclus dans M'^{+}, le cône des éléments positifs de $M^{\circ\circ}$ relativement à l'ordre dual de l'ordre de M' est inclus dans le cône des éléments positifs de $M^{\circ\circ}$, relativement à l'ordre induit par V''^{+}. On en conclut que : $0 \leqslant |m|_{V''} \leqslant |m|_{M''}$. Comme M" et V" sont réguliers, on peut écrire : $\|m\| = \| |m|_{V''} \| = \| |m|_{M''} \|$. L'hypothèse montre alors que $|m|_{V''} = |m|_{M''}$. Par suite, on a $|m|_{V''} = |m|_{M''} = |m|_{M^{\circ\circ}}$, ce qui montre que les ordres canoniques sur $M^{\circ\circ}$ coïncident (et par conséquent $\overline{R(V'^{+})} = M'^{+}$), et que $M^{\circ\circ}$ est fortement réticulé dans V". Ceci achève la démonstration.

Remarques : - (1) La proposition 19 est vraie pour les espaces V qui sont des $L^{p}(\mu)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$. Voir la remarque 39.

(2) Si, dans la proposition 19, V est réticulé, le théorème 14 implique le résultat suivant : M est fortement réticulé dans V, si et seulement si, M possède la R.D.P. et est régulier.

(3) Si on laisse tomber la condition sur V", la proposition 19 n'est plus vraie. Voir l'exemple 40.

(4) Si V est un R-espace régulier additif, il est réticulé.

En effet, V''' est alors additif (voir [4]), et par suite, il vérifie la condition de la proposition 19. Il en résulte que le couple (V, V") possède la P.E.D., V" étant réticulé régulier. Le théorème 14 montre alors que V est fortement réticulé dans V" ; ce qui achève la démonstration.

<u>Lemme 20</u> : Soient V un espace de Banach, a et b deux nombres non négatifs, A et B deux voisinages convexes fermés de O.

Moyennant l'isométrie canonique de V sur un sous-espace fermé de V'', on a l'égalité : $\overline{aA \cap bB} = a\bar{A} \cap b\bar{B}$ (les adhérences étant prises dans V'' relativement à la topologie faible $\sigma(V'', V')$).

<u>Démonstration</u> : - Le théorème des bipolaires montre que $(aA \cap bB)^\circ = \overline{\mathrm{conv}}(\frac{1}{a} A^\circ \cup \frac{1}{b} B^\circ)$ (l'adhérence étant prise relativement à la topologie faible $\sigma(V', V)$). Comme les convexes A° et B° sont $\sigma(V', V)$ compacts (voir [5]), on a

$(aA \cap bB)^\circ = \mathrm{conv}\,(\frac{1}{a} A^\circ \cup \frac{1}{b} B^\circ)$. En prenant les polaires dans V'' des deux membres de cette égalité, on a

$(aA \cap bB)^{\circ\circ} = (\frac{1}{a} A^\circ)^\circ \cap (\frac{1}{b} B^\circ)^\circ$, c'est-à-dire, $\overline{aA \cap bB} = a\bar{A} \cap b\bar{B}$.

Soit V un R-espace régulier. Dénotons par $\|x\|$ sa norme et par $\|m\|$ la norme obtenue par dualité sur V''. Le théorème de Davies assure que $\|m\|$ est une norme régulière.

Soit g une forme linéaire de V'^+ ; posons, pour tout point m dans V'' : $a(m) = \|m\| + |m|(g)$. Alors a(m) est une norme régulière sur V'', équivalente à la norme $\|m\|$

En effet, l'inégalité triangulaire pour les modules et l'hypothèse que g est positive, montrent que a(m) est une norme.

Elle est équivalente à la norme initiale $\|m\|$, car on a $\|m\| \leqslant a(m) \leqslant \|m\| + \||m|.\|\|g\|$; comme $\|m\|$ est régulière, on a $\|m\| = \||m|.\|$; et par suite $\|m\| \leqslant a(m) \leqslant (1+\|g\|)\ \|m\|$.

Le premier axiome de régularité est vérifié de façon évidente. Pour le second, on a, pour tout m dans V''

$$a(|m|) = \||m|.\| + |m|\ (g) = \|m\| + m\ (g) = a(m),$$

La trace de la norme a(m) sur V est une norme équivalente à la norme initiale sur V ; elle s'écrit : $a(x) = \|x\| + |x|\ (g)$, où x est un point de V et $|x|$ est le module de x dans V''.

Lemme 21 : Soit $\|x\|$ une norme qui fait d'un espace de Banach ordonné V, un R-espace régulier. Si g est un élément de V'^{+}, les normes a(x) et a(m), respectivement équivalentes à $\|x\|$ et $\|m\|$, se déduisent l'une de l'autre par dualité et sont toutes deux régulières.

Démonstration : - Montrons d'abord que la norme a(m) provient, par dualité, d'une norme sur V'. Le théorème des bipolaires montre que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la boule unité de V'', relativement à la norme a(m), soit $\sigma(V'', V')$ compacte. Remarquons que :

$$Q(m) = \|m\| + |m|\ (g) = \sup_{\substack{\|h\| \leq 1 \\ h \in V'}} m(h) + \sup_{\substack{g_1+g_2 = g \\ g_1,\ g_2 \in V'^{+}}} m(g_1-g_2).$$

Cette écriture montre que a(m) est une fonction s.c.i. définie sur V'', muni de la topologie faible $\sigma(V'', V')$ (somme de deux fonctions s.c.i.). Soit donc une famille filtrée (m_i) de points de V'', convergeant pour la topologie $\sigma(V'', V')$ vers un point m dans V'' et telle que $a(m_i) \leq 1$. La norme a(m) étant s.c.i., on a : $a(m) \leq \liminf_i Q(m_i) \leq 1$, Ceci montre que la boule unité de V'' relativement à a(m), est $\sigma(V'', V')$ fermé. Comme les normes a(m) et $\|m\|$ sont équivalentes, cette boule est incluse dans un homothétique de la boule unité de V'', relativement à la norme $\|m\|$, qui est $\sigma(V'', V')$ compact. Il s'en suit qu'elle est elle-même $\sigma(V'', V')$ compacte.

Notons par b(f) la norme sur V', obtenue par dualité à partir de la norme a(x) sur V, et par $b_1(f)$, celle obtenue par dualité à partir de la norme a(m) sur V''. Montrons que $b(f) = b_1(f)$. Par définition, on a, pour tout élément f dans V'

$$b(f) = \sup_{\substack{(x) \leq 1 \\ x \in V}} f(x) \qquad \text{et} \qquad b_1(f) = \sup_{\substack{a(m) \leq 1 \\ m \in V''}} m(f).$$

Il est alors bien clair que $b(f) \leq b_1(f)$. Reste à démontrer l'inégalité inverse. Soit m_0 un élément dans V'', et a et b deux nombres non négatifs, tels que : $\|m_0\| \leq a$ et $|m_0|(g) \leq b$. Par définition, on a

$$|m_\circ|(g) = \sup_{\substack{g_1+g_2 = g \\ g_1,\, g_2 \in V'^+}} m_\circ(g_1 - g_2) = \sup_{\substack{-g \leqslant h \leqslant g \\ h \in V'}} m_\circ(h) = \sup_{h \in [-g,\, g]} m_\circ(h) .$$

Posons $A = B(V)$, la boule unité de V relativement à la norme $\|x\|$ et $B = [-g, g]^\circ$, la polaire dans V du segment d'ordre $[-g, g]$. Remarquons que B est un voisinage convexe fermé de 0, du fait que $[-g, g]$ est $\sigma(V', V)$ compact (voir [5]). Par ailleurs, on a : $B = [-g, g]^\circ = \{x \in V \ ; \ |x|(g) < 1\}$ et $B^\circ = [-g, g]$ (théorème des bipolaires pour la dualité entre V et V'). On applique le lemme 20 ; on a $\bar{A} = A^{\circ\circ} = B(V'')$ et $\bar{B} = B^{\circ\circ} = [-g, g]^\circ = \{m \in V'' : |m|(g) \leqslant 1\}$, les polaires étant pris ici relativement à la dualité entre V' et V''. On a donc

$$\overline{\{x \in V \ ; \|x\| \leqslant a\} \cap \{x \in V \ ; \ |x|(g) \leqslant b\}} = \{m \in V'' \ ; \|m\| \leqslant a\} \cap \{m \in V'' ; |m|(g) \leqslant b\}.$$

Il existe donc une famille filtrée (x_i) de points dans V, qui converge pour la topologie $\sigma(V'', V')$ vers le point $m_\circ$ dans V'' et telle que $\|x_i\| \leqslant a$ et $|x_i|(g) \leqslant b$.

Soit $\varepsilon > 0$; montrons que $b_1(f) \leqslant b(f) +$. Par définition de $b_1(f)$, il existe un point $m_\circ$ de V'' tel que $Q(m_\circ) \leqslant 1$ et $b_1(f) \leqslant m_\circ(f) + \frac{\varepsilon}{2}$.

1°) <u>Si $|m_\circ|(g) > 0$</u>, il existe une famille filtrée (x_i) de points dans V convergeant pour la topologie $\sigma(V'', V')$ vers le point $m_\circ$, et telle que : $\|x_i\| \leqslant \|m_\circ\|$ et $|x_i|(g) \leqslant |m_\circ|(g)$ (on prend : $a = \|m_\circ\|$, $b = |m_\circ|(g)$). En particulier, la famille $(f(x_i))$ converge vers $m_\circ(f)$, Par suite, il existe $i_\circ$, tel que pour $i \geqslant i_\circ$, on ait : $|f(x_i) - m_\circ(f)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On a ainsi $b_1(f) \leqslant m_\circ(f) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant f(x_{i_\circ}) + \varepsilon$. Or, on a $a(x_{i_\circ}) \leqslant a(m_\circ) \leqslant 1$. Par suite, on a $f(x_{i_\circ}) \leqslant b(f)$ et $b_1(f) \leqslant b(f) + \varepsilon$.

2°) <u>Si $|m_\circ|(g) = 0$</u>, il existe une famille filtrée (x_i) de points dans V convergeant pour la topologie $\sigma(V'', V')$ vers le point $m_\circ$ et telle que $\|x_i\| \leqslant \|m_\circ\|$ et $|x_i|(g) \leqslant \frac{\varepsilon}{4b(f)}$ (on choisit $a = \|m_\circ\|$ et $b = \frac{\varepsilon}{4b(f)}$). Il existe un indice $i_\circ$ tel que $|f(x_{i_\circ}) - m_\circ(f)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$. Par suite, $b_1(f) \leqslant f(x_{i_\circ}) + 3\frac{\varepsilon}{4}$. Or, on a $Q(x_{i_\circ}) = \|x_{i_\circ}\| + |x_{i_\circ}|(g) \leqslant a(m_\circ) + \frac{\varepsilon}{4b(f)} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon}{4b(f)}$.

Ceci implique $f(x_{i_\circ}) \leqslant Q(x_{i_\circ})\, b(f) \leqslant (1 + \frac{\varepsilon}{4b(f)})\, b(f) = b(f) + \frac{\varepsilon}{4}$.

Donc, on a $b_1(f) \leqslant b(f) + \varepsilon$.

On a donc montré que $b(f) = b_1(f)$ et que les normes $a(x)$ et $a(m)$ sé déduisent l'une de l'autre par dualité. La norme $a(m)$ étant régulière, le théorème de Davies montre que $a(x)$ est une norme régulière sur V.

Théorème 22 : Soit M un sous-espace fermé d'un R-espace régulier. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Le couple (M, V) possède la P.E.D. ;

(ii) Pour toute norme régulière sur V compatible avec sa topologie (ou plus simplement pour les normes de la forme $\|x\| + |x|\ (g)$), M est un R-espace régulier.

Démonstration : L'implication (i)$\Longrightarrow$(ii) est déjà démontrée. Montrons (ii)$\Longrightarrow$(i). Comme dans la proposition 19, le problème revient à montrer que, pour tout m dans M' on a $|\tilde{m}|_{M''} = |\tilde{m}|_{V''}$. Le théorème de Davies montre que V'' et M'' sont réticulés réguli pour les normes $\|m\|$ et $a(m)$ (lemme 21). Par suite, on a

$Q(\tilde{m}) = Q(|\tilde{m}|_{M''}) = a(|\tilde{m}|_{V''})$; d'où $\| |\tilde{m}|_{M''}\| + |\tilde{m}|_{M''}(g) = \| |\tilde{m}|_{V''}\| + |\tilde{m}|_{V''}(g)$

Or, on a $\|\tilde{m}\| = \| |\tilde{m}|_{M''}\| = \| |\tilde{m}|_{V''}\|$. On en conclut que $|\tilde{m}|_{M''}(g) = |\tilde{m}|_{V''}(g)$; cette égalité étant vraie pour tout g dans V'^{+}, elle est vraie pour tout g dans V', puisq V' est positivement engendré. Il s'en suit que $|\tilde{m}|_{M''} = |\tilde{m}|_{V''}$.

Remarque : (1) Si V est réticulé régulier, on a :

[M fortement réticulé dans V]$\Longleftrightarrow$[Pour toute norme régulière compatible avec la topologie de V, M est régulier et possède la R.D.P.]

(2) Le théorème 22 nous permet d'exhiber une norme non régulière équivalente sur un espace simplicial de dimension $\geqslant 2$ (voir remarque 41).

Lemme 23 : Soit M un sous-espace fermé d'un espace de Banach régulier V. Si le couple (M, V) possède la P.E.D.n il possède la P.E.D. avec le coefficie d'extension uniforme égal à 1.

Démonstration : Soient f dans M'^{+} et $\tilde{f}$ une extension quelconque de f de même norme. V étant régulier, V' l'est aussi (voir [8]). Il existe donc une forme linéaire $\tilde{f}_1$ dans V'^{+} telle que $\tilde{f}, -\tilde{f} \leqslant \tilde{f}_1$ et $\|\tilde{f}_1\| = \|\tilde{f}\|$ (second axiome de régularité dans le cas des espaces duaux). Il s'en suit que $0 < f < R(f_1)$. L'hypothèse assure l'existence d'un $\tilde{f}_2$ dans V'^{+} tel que $R(\tilde{f}_2) = f$ et $0 < \tilde{f}_2 < \tilde{f}_1$. Le premier axiome de régularité montre que $\|\tilde{f}_2\| = \|\tilde{f}_1\| = \|\tilde{f}\| = \|f\|$.

<u>Théorème 24</u> : Soit M un sous-espace fermé d'un R-espace régulier V. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Le couple (M, V) possède la P.E.D. ;

(ii) Pour toute norme régulière sur V compatible avec sa topologie (ou plus simplement, pour toute norme régulière de la forme $\|x\| + |x|(g)$), le couple (M, V) possède la P.E U. avec le coefficient d'extension uniforme égal à 1.

<u>Démonstration</u> : - Le lemme 23 montre que (i) $\Longrightarrow$ (ii) Montrons que (ii)$\Longrightarrow$(i). Puisque $R(V'^{+}) = M'^{+}$, la proposition 15 montre qu'il suffit de prouver que le couple (M", V") possède la P.E.D., donc de prouver que $M^{\circ\circ}$ est fortement réticulé dans V" (corollaire 7).

Soit m dans $M^{\circ\circ}$ et m^+ sa partie positive dans V". Il suffit de montrer que m^+ appartient à $M^{\circ\circ}$, c'est-à-dire que $m^+(g) = 0$, pour tout g dans M°. Soit donc g un élément de M° ; posons $a(m) = \|m\| + |m|(g)$. Lorsqu'on munit V et V" respectivement des normes a(x) et a(m), le couple (M", V") possède la P.E.U. avec le même coefficient d'extension uniforme que celui du couple (M, V) qui est égal à 1 (voir [10]). Ceci s'exprime par :

$$\inf \{a(n) \ ; \ m \leqslant n, \ n \in V''\} = \inf \{a(n) \ ; \ m \leqslant n, \ n \in M^{\circ\circ}\}.$$

Puisque a(m) est une norme régulière et que $a(n) = a(|n|)$, on a :

$$a(m^+) = \inf \{a(n) \ ; \ m \leqslant n, \ n \in V''^{+}\} = \inf \{a(n) \ ; \ m \leqslant n, \ n \in V''\}.$$

Par suite, on obtient $a(m^+) = \inf \{a(n) \ ; \ m \leqslant n, \ n \in M^{\circ\circ}\}$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe n dans $M^{\circ\circ}$, tel que $m \leqslant n$ et $a(n) \leqslant a(m^+) + \varepsilon$. Ceci implique que $m^+ \leqslant n^+ \leqslant |n|$, et, par suite $\|m^+\| \leqslant \||n|\| = \|n\|$.

Compte tenu de l'inégalité $\|n\| + |n|(g) \leqslant \|m^+\| + m^+(g) + \varepsilon$, on a $0 \leqslant (|n| - m^+)(g) \leqslant \varepsilon$. Puisque $n(g) = 0$, on a

$$|m^+(g)| = |m^+(g) - n(g)| \leqslant |m^+ - n|(g) = |m^+ - n^+ + n^-|(g) \leqslant |m^+ - n^+|(g) + n^-(g).$$

Or, on a $|m^+ - n^+| = n^+ - m^+ \leqslant |n| - m^+$ et $n^- = |n| - n^+ \leqslant |n| - m^+$.

Il s'en suit que $|m^+(g)| \leqslant 2(|n| - m^+)(g) \leqslant 2\varepsilon$; d'où $m^+(g) = 0$.

Corollaire 25 : Soit M un sous-espace fermé d'un R-espace régulier V, tel que le couple (M, V) vérifie la condition :

[Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout point x de M et y de V^+, tels que $x \leqslant y$, il existe un point y' de V et z de M^+, tels que $x \leqslant z \leqslant y+y'$ et $\|y'\| \leqslant \varepsilon$].

Alors, le couple (M, V) possède la P.E.D.

Démonstration : - Il suffit de montrer que pour toute norme régulière $\|x\|$ sur V compatible avec sa topologie, le couple (M, V) possède la P.E.U. avec le coefficient d'extension uniforme égal à 1. Pour cela, il suffit de montrer que, pour tout point x de M, on a

$$\inf\{\|z\|,\ z \geqslant x,\ z \in M\} = \inf\{\|y\|\ ;\ y \geqslant x,\ y \in V\}.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et y un point de V tel que $y \geqslant x$. L'espace V étant régulier, il existe un point y_1 de V^+, tel que $y, -y \leqslant y_1$ et $\|y_1\| \leqslant \|y\| + \frac{\varepsilon}{2}$.
On a donc : $x \leqslant y_1$. L'hypothèse assure l'existence de deux points z dans M^+ et y' dans V, tels que $x \leqslant z \leqslant y_1 + y'$ et $\|y'\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. La norme étant croissante sur V^+, on a $\|z\| \leqslant \|y\| + \varepsilon$. Ceci achève la démonstration.

2 - La propriété d'extension minimum (P.E.M.)

Définition 26 : On dira que le couple (M, V) possède la propriété d'extension minimum (P.E.M.) si $R(V'^+) = M'^+$, et si, pour tout f dans M'^+, il existe une plus petite extension $\tilde{f}$ de f dans V'^+.

Définition 27 : Soit M un sous-espace fermé d'un espace de Banach ordonné V.

(1) On dira que M est un idéal d'ordre de V, si M^+ est une face du cône V^+.

(2) On dira que M est un idéal de V, si, de plus, M est positivement engendré.

Soit M un sous-espace fermé d'un espace vectoriel ordonné V. Le plus petit idéal d'ordre contenant M est appelé l'idéal d'ordre engendré par M, et est défini par $\tilde{M} = (M + V^+) \cap (M - V^+)$; i.e. $\tilde{M}$ est l'ensemble des points x dans V, tel qu' il existe y et z dans M, vérifiant $y \leqslant x \leqslant z$. Remarquons que, si M est positivement engendré, alors M est un idéal de V.

<u>Proposition 28</u> : | Soit M un sous-espace fermé d'un espace de Banach ordonné normal V. Si le couple (M, V) possède la P.E.M., M est un idéal d'ordre de V. Si, de plus, M est positivement engendré, M est un idéal de V.

<u>Démonstration</u> : - Soit $\overline{\tilde{M}}$ l'adhérence de l'idéal d'ordre engendré par M. Montrons que, si f appartient à M'^+, toutes ses extensions dans V'^+ coïncident sur $\overline{\tilde{M}}$. Soient donc $\tilde{f}_\circ$ la plus petite extension de $\tilde{f}$ dans V'^+ et $\tilde{f}$ une extension quelconque dans V'^+. Montrons d'abord que $\tilde{f}_\circ$ et $\tilde{f}$ coïncident sur $\tilde{M}^+$. Soit x dans $\tilde{M}^+$, il existe alors y dans M^+, tel que $0 \leqslant x \leqslant y$. On peut alors écrire :

$$f(y) = \tilde{f}_\circ(y) = \tilde{f}_\circ(y-x) + \tilde{f}_\circ(x) \text{ et } f(y) = \tilde{f}(y) = \tilde{f}(y-x) + \tilde{f}(x).$$

La définition de $\tilde{f}_\circ$ implique $0 \leqslant \tilde{f}_\circ(y-x) \leqslant \tilde{f}(y-x)$ et $0 \leqslant \tilde{f}_\circ(x) \leqslant \tilde{f}(x)$.
Ceci, joint aux égalités précédentes, implique $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_\circ(x)$.

Considérons, maintenant, un point x de $\tilde{M}$; il existe deux points y et z dans M, tels que $y \leqslant x \leqslant z$. On a donc $0 \leqslant x-y \leqslant z-y$. Or, z-y appartient à $\tilde{M}^+$, donc x-y appartient à $\tilde{M}^+$. Par suite $\tilde{f}_\circ(x-y) = \tilde{f}(x-y)$. Comme $f(y) = \tilde{f}_\circ(y) = \tilde{f}(y)$, on a $\tilde{f}_\circ(x) = \tilde{f}(x)$.

Les formes linéaires $\tilde{f}_\circ$ et $\tilde{f}$ étant continues et coïncidant sur $\tilde{M}$, coïncident en fait sur $\overline{\tilde{M}}$. Ainsi, si deux formes linéaires positives et continues sur V, coïncident sur M, elles coïncident sur $\overline{\tilde{M}}$.

Montrons que $M = \overline{\tilde{M}}$. Pour cela, supposons que M est strictement inclus dans $\overline{\tilde{M}}$. Il existerait, d'après le théorème de Hahn-Banach, une forme linéaire continue sur V, f, s'annulant sur M et ne s'annulant pas sur $\overline{\tilde{M}}$. L'espace V' étant positivement engendré (V étant normal), il existe f_1 et f_2 dans V'^+ telles que $f = f_1 - f_2$. L'hypothèse sur f indique que f_1 et f_2 coïncident sur M, donc sur $\overline{\tilde{M}}$. Par conséquent, f s'annule sur $\overline{\tilde{M}}$; ce qui contredit l'hypothèse faite sur f.

Les inclusions $M \subset \tilde{M} \subset \overline{\tilde{M}}$ montrent que $M = \tilde{M}$.

<u>Proposition 29</u> : | Soit M un idéal d'un R-espace V. Alors, le couple (M, V) possède la P.E.D. et la P.E.M.

Démonstration : - Soient f une forme linéaire de M'^{+} et g une forme linéaire de V'^{+}, vérifiant $0 \leqslant f \leqslant R(g)$. Pour tout point x de V^{+}, définissons $\tilde{f}(x)$ par :

$$\tilde{f}(x) = \sup_{\substack{0 \leqslant y \leqslant x \\ y \in M}} f(y).$$

L'espace V étant normal, il existe $\alpha \geqslant 1$, tel que $\|y\| \leqslant \alpha \|x\|$. La forme linéaire f étant continue, elle est bornée sur la boule fermée de M de rayon $\alpha\|x\|$. Par suite $\tilde{f}(x) < +\infty$.

Il est bien clair que $\tilde{f}(x)$ est positif.

Montrons que $\tilde{f}$ est additive sur V^{+}. Soient x_1 et x_2 dans V^{+}. Si y est un point de M^{+} tel que $0 \leqslant y \leqslant x_1 + x_2$, la R.D.P. sur V, assure l'existence de y_1 et y_2 dans V^{+} tels que $y_1 \leqslant x_1$, $y_2 \leqslant x_2$, $y = y_1 + y_2$. Comme M est un idéal de V et que l'on a $0 \leqslant y_1, y_2 \leqslant y$, les points y_1 et y_2 sont en fait dans M^{+}. De plus, f étant linéaire, on a

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= \sup_{\substack{0 \leqslant y_1 \leqslant x_1 \\ 0 \leqslant y_2 \leqslant x_2 \\ y_1, y_2 \in M}} (f(x_1) + f(x_2)) = \sup_{\substack{0 \leqslant y_1 \leqslant x_1 \\ y_1 \in M}} f(y_1) + \sup_{\substack{0 \leqslant y_2 \leqslant x_2 \\ y_2 \in M}} f(y_2) \\ &= \tilde{f}(x_1) + \tilde{f}(x_2). \end{aligned}$$

L'espace V étant positivement engendré, $\tilde{f}$ s'étend en une forme linéaire positive sur V, en posant, pour tout point x dans V : $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x_1) - \tilde{f}(x_2)$, pour $x = x_1 - x_2$, x_1 et $x_2 \in V^{+}$. Cette forme linéaire est nécessairement continue (voir [6]) Le sous-espace M étant positivement engendré, elle est alors une extension de f à V. Par ailleurs, il est évident que $\tilde{f}$ est la plus petite extension de $\tilde{f}$ dans V'^{+} et que $\tilde{f} \leqslant g$.

Corollaire 30 : Soit M un sous-espace fermé, positivement engendré d'un R-espace V. Si le convexe $M+V^{+}$ est fermé, le couple (M, V) possède la P.E.U.

Démonstration : - L'idéal engendré par M (soit $\tilde{M}$) étant égal à $(M + V^{+}) \cap (M - V^{+})$, l'hypothèse implique qu'il est fermé. Le sous-espace M étant cofinal dans $\tilde{M}$, le couple (M, $\tilde{M}$) possède la P.E.U. (voir [10]). D'autre part, $\tilde{M}$ étant un idéal de V, la proposition 28 montre que le couple ($\tilde{M}$, V) possède la P.E.D., et par suite la P.E.U

<u>Théorème 31</u> : Soit M un sous-espace fermé, positivement engendré d'un R-espace V. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Le couple (M, V) possède la P.E.M. ;

(ii) M est un idéal de V.

Ce théorème résulte des propositions 28 et 29.

Sous les hypothèses du théorème 31, si le couple (M, V) possède la P.E.M., il possède la P.E.D. . En effet, le théorème 31 montre que M est un idéal de V et la proposition 29 montre que le couple (M, V) possède la P.E.D..

Ce résultat demeure-t-il vrai, dans le cas où V n'est pas un R-espace ?

Remarquons enfin qu'il existe des couples (M, V) qui possèdent la P.E.D., mais non la P.E.M.. Le contre-exemple 36 illustre ce cas : V est réticulé, M est fortement réticulé dans V, mais il n'est pas un idéal de V.

<u>Corollaire 32</u> : Soit M un sous-espace fermé positivement engendré d'un R-espace régulier V tel que $\overline{R(V'^{+})} = M'^{+}$ (adhérence forte). Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Le couple (M, V) possède la P.E.M. ;

(ii) Le couple (M", V") possède la P.E.M..

<u>Démonstration</u> : - E.B. Davies dans [8], a démontré que, si V est un R-espace régulier, alors M est un idéal de V, si et seulement si, M° est un idéal de V'. Mais l'espace V' étant lui-même réticulé régulier, on lui applique ce résultat. Il en résulte que M° est un idéal de V', si et seulement si, $M^{\circ\circ} = M''$ est un idéal de V". Ainsi donc, M est un idéal de V, si et seulement si, M" est un idéal de V". La conclusion résulte du théorème 31.

Dans le cas plus général où V est simplement un espace de Banach et M un sous-espace fermé de V, on peut démontrer une seule implication, à savoir :

Si le couple (M", V") possède la P.E.M., le couple (M, V) possède la P.E.M.

En effet, soit f dans M'^{+} ; prenons son extension canonique $\bar{f}$ à $M''(\bar{f} \in M'''^{+})$. L'hypothèse montre qu'il existe une plus petite extension $f_{\circ}$ de $\bar{f}$ à $V''(f_{\circ} \in V'''^{+})$. Alors f = /V, la restriction de $f_{\circ}$ à V l'extension cherchée de f. En effet, soit g une extension de f dans V'^{+}. Pour tout m dans M", on a $\bar{f}(m) = m(f) = m(R_V(g)) = \tilde{m}(g) = \bar{g}(\tilde{m})$. Ainsi, $\bar{g}$ est une extension de $\bar{f}$ à $V''(\bar{g} \in V'''^{+})$; on en déduit que $f_\circ \leqslant \bar{g}$. En prenant les restrictions à V de $f_\circ$ et $\bar{g}$, il vient que $f_\circ/V \leqslant g$.

Corollaire 33 : Soit M un idéal fermé d'un R-espace V. Il existe un relèvement linéaire positif et continu T de M' dans V'. Si, de plus, V est régulier, alors $\|T(f)\| = \|f\|$, pour tout f dans M' (i.e. $\|T\| = 1$).

Démonstration : - Définissons d'abord T sur le cône M'^{+} par $f \longrightarrow T(f)$ la plus petite extension positive et continue de f à V. Par définition, si f et g sont dans M'^{+}, on a $0 \leqslant T(f + g) \leqslant T(f) + T(g)$.

L'espace V' étant réticulé, il vérifie la R.D.P.. Il existe donc f_1 et f_2 dans V'^{+}, telles que $T(f+g) = f_1 + f_2$, $f_1 \leqslant T(f)$, $f_2 \leqslant T(g)$.

Si x est dans M^{+}, on a $f(x) + g(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f(x)$, et $0 \leqslant f_2(x) \leqslant g(x)$. Ceci implique : f_1 et f_2 sont respectivement des extensions de f et de g. Par définition de T(f) et T(g), on a $T(f) \leqslant f_1$, $T(g) \leqslant f_2$. Par suite $T(f) + T(g) \leqslant f_1 + f_2 = T(f+g)$. Donc, on a $T(f+g) = T(f) + T(g)$.

Par ailleurs, T est positivement homogène sur M'^{+}. M étant normal, V' est positivement engendré. Par conséquent, on peut étendre T à M' en posant pour f dans M' : $T(f) = T(f_1) - T(f_2)$, où $f = f_1 - f_2$ et $f_1, f_2 \in M'^{+}$. Il est évident alors que T est une application linéaire positive de M' dans V'. Montrons qu'elle est continue.

Soient α, $\beta \geqslant 1$ deux nombres tels que M' soit α-engendré et V' β-engendré. Pour montrer la continuité de T, vérifions-la en 0. Soit donc (f_n) une suite de points de M' qui converge vers 0. Pour tout entier n, il existe deux points g_n et h_n de M'^{+}, tels que : $f_n = g_n - h_n$ et $\|g_n\| + \|h_n\| \leqslant \alpha \|f_n\|$. Les suites (g_n) et (h_n) convergent vers 0. Ainsi, le problème se réduit à prendre la suite (f_n) dans M'^{+}. Le couple (M, V) possédant la P.E.D., il possède aussi la P.E.U. (proposition ...) ; soit $a \geqslant 1$ son coefficient d'extension uniforme. Soient l_n des extensions positives des f_n, telles que $\|l_n\| \leqslant a\|f_n\|$. Par définition des $T(f_n)$, on a $0 \leqslant T(f_n) \leqslant l_n$. Par suite $\|T(f_n)\| \leqslant \beta \|l_n\| \leqslant \beta a \|f_n\|$. Ceci montre que la suite $(T(f_n))$ converge vers 0.

Si V est, de plus, régulier, la proposition 18 montre que M l'est aussi. Pour tout f dans M'^{+}, on a donc

$$\|f\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} f(y) .$$

Calculons $\|T(f)\|$: $\|T(f)\| = \sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ x \in V^+}} T(f)(x) = \sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ x \in V^+}} \left(\sup_{\substack{0 \leqslant y \leqslant x \\ y \in M^+}} f(y)\right).$

Comme la norme est croissante sur V^+, on a

$$\|T(f)\| = \sup_{\substack{\|y\| \leqslant 1 \\ y \in M^+}} f(y) = \|f\| .$$

Soit f dans M', on a $|T(f)| \leqslant T(|f|)$; comme V' et M' sont réticulés réguliers, on a $\|T(f)\| = \| |T(f)| \| \leqslant \|T(|f|)\| = \| |f| \| = \|f\|$.

Comme T(f) est une extension de f, on a $\|T(f)\| = \|f\|$.

3 - Exemples, Remarques et problèmes

Remarque 34 : - Soient V = A(K) l'espace des fonctions affines continues sur le convexe compact K, et M un sous-espace fermé qui soit un M-espace. Désignons par $\mathcal{E}(V'^{+})$ (resp. $\mathcal{E}(M'^{+})$) la réunion des génératrices extrémales du cône V'^{+} (resp. M'^{+}). H. Fakhoury dans [11], a montré que si $R(\mathcal{E}(V'^{+})) \subset \mathcal{E}(M'^{+})$, alors M est fortement réticulé dans V. Le corollaire 7 montre que le couple (M, V) possède la P.E.D.. Il est facile de voir que ce résultat subsiste pour les espaces 1-normaux, c'est-à-dire de la forme $A_o(K)$. Ce résultat constitue une réciproque partielle au résultat qui affirme que, si le couple (M, V) possède la P.E.D., alors, on a $R(\mathcal{E}(V'^{+})) \subset \mathcal{E}(M'^{+})$.

Cependant, cette réciproque cesse d'être vraie si M n'est pas un M-espace. En effet, soient θ la mesure de Lebesgue sur l'intervalle [0, 1] et $V = L^p(\theta)$ $(1 < p < +\infty)$. Vu que la mesure θ ne possède pas d'atome, alors, on a $\mathcal{E}(V'^{+}) = \emptyset$ (voir [7]). Ainsi, l'inclusion $R(\mathcal{E}(V_1'^{+})) \subset \mathcal{E}(M_1'^{+})$ est vraie pour tout sous-espace M_1 de l'espace de Banach ordonné $V_1 = A_o(B(V'^{+}))$ qui est isomorphe à V. Si la réciproque était vraie, sans condition sur M, le théorème 14 montrerait que tout sous-espace fermé de l'espace réticulé V est fortement réticulé dans V.

Exemple 35 : - Soit M un espace simplicial non réticulé. Posons V = M''. L'espace

V étant normal, et M approximativement filtrant, le couple (M, V) possède la P.E.U. (voir [10]). Or, M n'étant pas fortement réticulé dans l'espace réticulé V = M'', le théorème 14 montre que le couple (M, V) ne possède pas la P E.D..

Contre-exemple 36 : - Soit $V = \mathscr{C}([0, 1])$ l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$. Posons $M = \{h \in V \; ; \; h(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} h(1), \; \forall n \in \mathbb{N}^*\}$. Il est bien connu que M est fortement réticulé dans l'espace réticulé V, Le théorème 14 montre que le couple (M, V) possède la P.E.D.. Soient $\varepsilon(x)$ la mesure de Dirac au point x de $[0, 1]$ et $\delta(x)$ sa restriction à M . On a $\|\varepsilon(x)\| = 1$ et $\|\delta(1/n)\| = \frac{1}{n}$, pour tout entier $n \geq 1$.

Posons $g_n = \varepsilon(1/n)$ et $f_n = \delta(1/n)$. On a $0 \leq f_n \leq R(g_n)$. Montrons que toute extension $\tilde{f}_n$ de f_n dans V'^+, vérifiant $0 \leq \tilde{f}_n \leq g_n$ est égale à g_n. Soit donc une telle extension $\tilde{f}_n$. Comme $g_n = \varepsilon(1/n)$ appartient à une génératrice extrémale du cône $\mathcal{M}^+([0, 1]) = V'^+$, il existe $0 \leq \lambda \leq 1$ tel que $\tilde{f}_n = \lambda\, \varepsilon(1/n)$. Or, il existe h dans M telle que $h(\frac{1}{n}) \neq 0$. Par suite, on a $\tilde{f}_n(h) = f_n(h) = h(\frac{1}{n})$ et $\lambda\, \varepsilon(1/n)(h) = \lambda h(\frac{1}{n})$. On en conclut que $\lambda = 1$ et $\tilde{f}_n = \varepsilon(1/n) = g_n$. Or, on a $\|\tilde{f}_n\| = n\, \|f_n\|$. Ceci montre que le couple (M, V) ne vérifie pas la réalisation simultanée de la P.E.U. et de la P,E.D..

Par ailleurs, il est clair que R est une surjection linéaire du cône réticulé V'^+ dans le cône réticulé M'^+, telle que l'image de tout segment d'ordre de V'^+ soit un segment d'ordre de M'^+. Montrons que la relation :
$R(\inf(g_1, g_2)) = \inf(R(g_1), R(g_2))$ est fausse en général. Supposons le contraire. Soit f dans M'^+ et g dans V'^+, vérifiant $0 \leq f \leq R(g)$; il existe alors une extension $\tilde{f}_1$ de f dans V'^+, telle que $0 \leq \tilde{f}_1 \leq g$. L'espace V étant 1-normal et M approximativement filtrant, le couple (M, V) a un coefficient d'extension uniforme égal à 1 (voir [10]). On en conclut qu'il existe une extension $\tilde{f}_2$ de f dans V'^+, telle que $\|\tilde{f}_2\| = \|f\|$. Posons $\tilde{f} = \inf(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$. On a $R(\tilde{f}) = R(\inf(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)) = \inf(R(\tilde{f}_1), R(\tilde{f}_2)) = f$.

Comme la norme est croissante sur V'^+ et que l'on a $0 \leq \tilde{f} \leq \tilde{f}_2$, il s'en suit que $\|\tilde{f}\| \leq \|\tilde{f}_2\| = \|f\|$. On a donc $\|\tilde{f}\| = \|f\|$ et $0 \leq \tilde{f} \leq g$. Ceci contredit le fait que le couple (M, V) ne vérifie pas la réalisation simultanée de la P.E U. et de la P.E.D..

Exemple 37 : - Posons $V = \mathscr{C}([0, 1])$, et $M = \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}$, le sous-espace de V de dimension où i désigne la fonction identité de $[0, 1]$, et $\mathbb{R}$ le sous-espace des fonctions constantes. Il est évident que M est cofinal dans V. D'autre part, la fonction sup $(\frac{1}{2}, i)$ n'appartient pas à M. Par conséquent, M n'est pas fortement réticulé dans l'espace réticulé V. Le théorème 14 montre alors que le couple (M, V) ne possède pas la P.E.D.

Remarque 38 : - Le théorème 14 est mis en défaut dans le cas où V n'est pas réticulé. En effet, soit $A_o(K)$ un espace simplicial non réticulé. Comme $A_o(K)$ est un idéal de l'espace simplicial A(K), la proposition 29 montre que le couple ($A_o(K)$, A(K)) possède la P.E.D..

Remarque 39 : - La condition de la proposition 19 est vérifiée dans les cas suivants :

1°) Si la norme sur V^+ est additive. En effet, la norme, dans ce cas, est additive sur V''^+(voir [3]). Si x et y sont deux points de V''^+, tels que $0 \leqslant x \leqslant y$ et $\|x\| = \|y\|$. On a $\|y\| = \|x\| + \|y-x\|$. On en conclut que $\|y-x\| = 0$ et que $x = y$. Ainsi, la proposition 19 est vraie pour les espaces $V = L^1(\mu)$.

2°) Si V est un $L^p(\mu)$ $(1 < p < +\infty)$. En effet, V étant réflexif, montrons que la condition est vérifiée sur les $L^p(\mu)$. Soient f et g dans V, vérifiant : $0 \leqslant f \leqslant g$ et $\|f\| = \|g\|$. On a : $\mu(g^p - f^p) = 0$. Comme $g^p - f^p \geqslant 0$, ceci signifie que f et g coïncident presque partout, et par suite, sont égales en tant que classes d'équivalence.

Exemple 40 : - Soit K un simplexe de Bauer (voir [12]), non réduit à un point. Alors, A(K) est un sous-espace fermé réticulé pour son ordre propre (donc possédant la R.D.P.) et régulier de l'espace $\mathscr{C}(K)$ des fonctions continues définies sur K. Comme A(K) n'est pas fortement réticulé dans l'espace réticulé $\mathscr{C}(K)$, le théorème 14 montre que le couple (A(K), $\mathscr{C}(K)$) ne possède pas la P.E.D..

Remarque 41 : - Soit $A_o(K)$ un espace simplicial non réticulé de dimension supérieure ou égale à 2. Montrons que $A_o(K)$ n'est pas fortement réticulé dans $\mathscr{C}(K)$. Si la dimension de $A_o(K)$ est exactement 2, alors K est un triangle dont l'un des sommets est O, et les fonctions de $A_o(K)$ sont alors représentées par des portions de plans passant par O. Le résultat est facile à voir dans ce cas. Si la dimension de $A_o(K)$ est >2, on choisit deux points extrémaux x et y distincts et différents de O, de K.

Alors conv(x, y, 0) est une face de K, de dimension 2. On se ramène au cas précédent en remarquant que toute fonction affine positive et continue sur une face de K, se prolonge en une fonction de $A_o(K)^+$ (voir split-faces dans [1]).

Le théorème 14 montre que le couple ($A_o(K)$, $\mathscr{C}(K)$) ne possède pas la P.E.D..
Le théorème 22 montre l'existence d'une mesure μ_o de $\mathscr{K}(K)^+$, telle que la norme sur $\mathscr{C}(K)$ définie par $\|f\| = \|f\|_\infty + \mu_o(|f|)$, ne soit pas régulière ($\|f\|_\infty$ étant la norme de la convergence uniforme sur K).

<u>Problèmes 42</u> : - (1) La réciproque du corollaire 25 est-elle vraie ?

(2) Les théorèmes 22 et 24 demeurent-ils vrais si l'espace V est seulement régulier ?

(3) Si M est un sous-espace fortement réticulé d'un espace de Banach ordonné V, existe-t-il un relèvement T (linéaire ou pas) positif et continu de M'^+ dans V'^+ ?

REFERENCES

[1] E. Affsen : Compact convex sets and boundary. Springer, Verlag - 1971.

[2] T. Andô : On fundamental properties of a Banach space with a cone. Pacific J. Math. 12, 1962, p. 1163-1169.

[3] L. Asimow : Partially ordered Banach spaces and their duals. Notes multigraphiees.

[4] L. Asimow : Directed Banach spaces of affine functions. Trans. Amer. Math. Soc. 143, 1969, p. 117-132.

[5] N. Bourbaki : Espaces vectoriels topologiques. Livre V, chapitres 1, 2, 3, 4.

[6] N. Bourbaki : Intégration. Livre VI, chapitres 1, 2, 3, 4.

[7] G. Choquet : Le caractère faiblement complet des cônes à chapeau universel. Bull. Soc. Math, 2ème série, 94, 1970, p. 281-288.

[8] E.B. Davies : The structure and ideal theory of the predual of a Banach lattice. Amer. Math. Soc. Trans., 131, 1968, p. 544-555.

[9] E. Effros : Structure in simplexes. Acta Math. 117, 1967, p. 103-121.

[10] H. Fakhoury : Extensions uniformes de formes linéaires positives. Ann. Inst. Fourier. vol 23 1973, p. 75-94

[11] H. Fakhoury : Espaces fortement réticulés de fonctions affines. Thèse de 3ème cycle, Université de Paris VI.

[12] M. Rogalski : Espaces de Banach ordonnés, simplexes, frontières de Silov et problème de Dirichlet, Sémianire d'Initiation à l'Analyse, t.5 (1965/1966), n° 12.

Toufic Hindi
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE