PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

DENISE BECCHIO

Sur l'axiome d'Ivo Thomas

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1978, tome 15, fascicule 1
, p. 45-49

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1978__15_1_45_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1978 t. 15-1

SUR L'AXIOME D'IVO THOMAS

par Denise BECCHIO

I. INTRODUCTION. La notion d'algèbre de Lukasiewicz d'ordre n fut introduite par Moisil (5) en 1941 et celle d'algèbre de Post d'ordre n par Rosenbloom (7) en 1942. Dans (1) nous nous sommes posés le problème de trouver une définition de ces algèbres où l'axiome d'Ivo Thomas (8) soit explicitement formulé. Pour résoudre un tel problème nous avons en particulier été amenés à démontrer, en utilisant la théorie des filtres premiers, que l'égalité

(T): $T_n = ((x_{n-2} \Rightarrow x_{n-1}) \Rightarrow x_0) \Rightarrow T_{n-1} = 1$ où $T_1 = x_0$ et $n \geqslant 2$,

correspondant à l'axiome d'Ivo Thomas, est vérifiée dans toute algèbre de Lukasiewicz d'ordre n et dans toute algèbre de Post d'ordre n.

D'autre part, dans (4), L.Iturrioz a montré que les algèbres de Lukasiewicz d'ordre n sont des algèbres de Heyting.

Nous nous proposons ici d'utiliser cette propriété pour donner une démonstration élémentaire de (T) dans une algèbre de Lukasiewicz d'ordre n et dans une algèbre de Post d'ordre n.

Pour cela nous établirons, d'abord une égalité (T') équivalente à (T) dans une algèbre de Heyting, puis une démonstration élémentaire de (T') dans une algèbre de Lukasiewicz d'ordre n.

II. DEFINITIONS ET PROPRIETES. Nous supposons connues les définitions et les propriétés des algèbres de Hilbert-Bernays (ou "Brouwerian lattices" (2), ou "relatively pseudo-complemented lattices" (6)), des algèbres de Heyting (ou "pseudo-boolean algebras" (6)) et des algèbres de Lukasiewicz d'ordre n (3) (4). Nous ne rappellerons ici que celles que nous utiliserons explicitement par la suite.

Dans une algèbre de Hilbert-Bernays, donc à fortiori dans une algèbre de Heyting, nous avons les trois propriétés suivantes (6) :

P1. $x \Rightarrow (y \Rightarrow z) = (x \wedge y) \Rightarrow z$

P2. $(x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z) = (x \vee y) \Rightarrow z$

P3. $x \Rightarrow x = 1$

Dans une algèbre de Lukasiewicz d'ordre n, l'implication intuitionniste peut être définie par l'égalité suivante (4) :

D1. $x \Rightarrow y = y \vee \bigwedge_{i=1}^{n-1} (-S_i x \vee S_i y)$

- représentant une négation de De Morgan et $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ les n-1 opérations unaires d'une algèbre de Lukasiewicz d'ordre n.

De plus, dans une algèbre de Lukasiewicz d'ordre n, nous avons les propriétés suivantes (3) :

P4. Si $x \leqslant y$ alors $x \vee z \leqslant y \vee z$

P5. $-(x \vee y) = -x \wedge -y$

P6. $S_1 x \leqslant S_2 x \leqslant \ldots \leqslant S_{n-1} x \quad , \quad -S_{n-1} x \leqslant -S_{n-2} x \leqslant \ldots \leqslant -S_1 x$

P7. 1 est le plus grand élément, 0 est le plus petit élément.

P8. $S_i x \vee -S_i x = 1 \ , \ i = 1, \ldots, n-1$

P9. $S_i(x \vee y) = S_i x \vee S_i y \ , \ i = 1, \ldots, n-1$

$S_i(x \wedge y) = S_i x \wedge S_i y \ , \ i = 1, \ldots, n-1$

P10. $S_i S_j x = S_j x \ , \ i = 1, \ldots, n-1 \ , \ j = 1, \ldots, n-1$

P11. $-S_j -S_i x = S_i x \ , \ i = 1, \ldots, n-1 \ , \ j = 1, \ldots, n-1$

P12. $S_i x \wedge -S_i x = 0 \ , \ i = 1, \ldots, n-1$

Dans tout ce qui va suivre, pour simplifier les écritures, nous poserons par définition :

D2. $T_1 = x_0$ et $T_n = ((x_{n-2} \Rightarrow x_{n-1}) \Rightarrow x_0) \Rightarrow T_{n-1}$ avec $n \geqslant 2$.

III. THEOREME 1.

Dans une algèbre de Hilbert-Bernays on a

$$T_n = \left(\left(\bigvee_{k=1}^{n-1} (x_{k-1} \Rightarrow x_k)\right) \Rightarrow x_0\right) \Rightarrow x_0$$

Démonstration: Cette égalité est vérifiée pour n = 2 . Supposons la démontrée pour n-1 . Nous avons alors

$$T_n = ((x_{n-2} \Rightarrow x_{n-1}) \Rightarrow x_0) \Rightarrow \left(\left(\left(\bigvee_{k=1}^{n-2} (x_{k-1} \Rightarrow x_k)\right) \Rightarrow x_0\right) \Rightarrow x_0\right)$$

soit en tenant compte de P1

$$T_n = \left(((x_{n-2} \Rightarrow x_{n-1}) \Rightarrow x_0) \wedge \left(\left(\bigvee_{k=1}^{n-2} (x_{k-1} \Rightarrow x_k)\right) \Rightarrow x_0\right)\right) \Rightarrow x_0 \ .$$

En utilisant P2 on obtient

$$T_n = \left(\left((x_{n-2} \Rightarrow x_{n-1}) \vee \left(\bigvee_{k=1}^{n-2} (x_{k-1} \Rightarrow x_k)\right)\right) \Rightarrow x_0\right) \Rightarrow x_0 =$$

$((\bigvee_{k=1}^{n-1} (x_{k-1} \Rightarrow x_k)) \Rightarrow x_o) \Rightarrow x_o$ et le théorème 1 est bien démontré.

Cette égalité vérifiée dans une algèbre de Hilbert-Bernays nous donne alors le théorème suivant:

IV. THEOREME 2.

Dans une algèbre de Hilbert-Bernays $T_n = 1$ *est équivalent à*

$$(T') \qquad ((\bigvee_{k=1}^{n-1} (x_{k-1} \Rightarrow x_k)) \Rightarrow x_o) \Rightarrow x_o = 1$$

Les théorèmes 1 et 2 sont valables, à fortiori, dans une algèbre de Heyting.

V. THEOREME 3.

Dans toute algèbre de Lukasiewicz d'ordre n $(n \geqslant 2)$ *l'égalité*

$$((\bigvee_{k=1}^{n-1} (x_{k-1} \Rightarrow x_k)) \Rightarrow x_o) \Rightarrow x_o = 1 \quad \textit{est vérifiée.}$$

Démonstration: Posons $T'_n = ((\bigvee_{k=1}^{n-1} (x_{k-1} \Rightarrow x_k)) \Rightarrow x_o) \Rightarrow x_o$.

En appliquant D1 à $x_{k-1} \Rightarrow x_k$ et en utilisant les propriétés de distributivité on obtient

$$T'_n = ((\bigvee_{k=1}^{n-1} ((x_k \vee (\bigwedge_{i_k=1}^{n-1} (-S_{i_k} x_{k-1} \vee S_{i_k} x_k))) \Rightarrow x_o) \Rightarrow x_o =$$

$$((\bigvee_{k=1}^{n-1} (\bigwedge_{i_k=1}^{n-1} (-S_{i_k} x_{k-1} \vee S_{i_k} x_k \vee x_k))) \Rightarrow x_o) \Rightarrow x_o =$$

$$((\bigwedge_{i} (\bigvee_{k=1}^{n-1} (-S_{i(k)} x_{k-1} \vee S_{i(k)} x_k \vee x_k))) \Rightarrow x_o) \Rightarrow x_o ,$$ i décrivant l'ensemble des applications de $[1, \ldots, n-1]$ dans lui-même.

Ce qui s'écrit encore

$$T'_n = ((\bigwedge_{i} ((-S_{i(1)} x_o) \vee (\bigvee_{k=1}^{n-2} (S_{i(k)} x_k \vee -S_{i(k+1)} x_k)) \vee (S_{i(n-1)} x_{n-1}) \vee (\bigvee_{k=1}^{n-1} x_k))) \Rightarrow x_o) \Rightarrow x_o$$

Si i n'est pas l'application identique il existe un entier k tel que $i(k+1) \leqslant i(k)$. Or d'après P6, si $i(k+1) \leqslant i(k)$ on a $S_{i(k+1)}x_k \leqslant S_{i(k)}x_k$ et P4 nous donne alors $(S_{i(k+1)}x_k \vee -S_{i(k+1)}x_k) \leqslant (S_{i(k)}x_k \vee -S_{i(k+1)}x_k)$.

En utilisant P7 et P8 on obtient donc le résultat suivant:

si i n'est pas l'application identique on a $S_{i(k)}x_k \vee -S_{i(k+1)}x_k = 1$.

Si i est l'application identique on a $i(k) = k$.

1 étant le plus grand élément on a donc

$$T'_n = ((\bigvee_{i=1}^{n-1} (-S_i x_{i-1} \vee S_i x_i \vee x_i)) \Rightarrow x_o) \Rightarrow x_o .$$

En appliquant à nouveau D1, P2, P3 et P7 nous permettent d'écrire

$$T'_n = (x_o \vee (\bigwedge_{j=1}^{n-1} ((-S_j(\bigvee_{i=1}^{n-1} (-S_i x_{i-1} \vee S_i x_i \vee x_i))) \vee S_j x_o))) \Rightarrow x_o =$$

$$(\bigwedge_{j=1}^{n-1} ((-S_j(\bigvee_{i=1}^{n-1} (-S_i x_{i-1} \vee S_i x_i \vee x_i))) \vee S_j x_o)) \Rightarrow x_o ,$$

soit encore d'après P9, P10, P5 et P11

$$T'_n = (\bigwedge_{j=1}^{n-1} ((\bigwedge_{i=1}^{n-1} (S_i x_{i-1} \wedge -S_i x_i \wedge -S_j x_i)) \vee S_j x_o)) \Rightarrow x_o .$$

A l'aide de P12, P7 et P6, on vérifie facilement que

$$\bigwedge_{j=2}^{n-1} ((\bigwedge_{i=1}^{n-1} (S_i x_{i-1} \wedge -S_i x_i \wedge -S_j x_i)) \vee S_j x_o) = \bigwedge_{j=2}^{n-1} S_j x_o = S_2 x_o ,$$

d'où $$T'_n = (((\bigwedge_{i=1}^{n-1} (S_i x_{i-1} \wedge -S_i x_i \wedge -S_1 x_i)) \vee S_1 x_o) \wedge (S_2 x_o)) \Rightarrow x_o .$$

D'après P6 on a $-S_i x_i \leqslant -S_1 x_i$ pour $i = 1, \ldots, n-1$, la distributivité entraîne alors

$$T'_n = ((\bigwedge_{i=1}^{n-1} (S_i x_{i-1} \wedge -S_i x_i \wedge S_2 x_o)) \vee (S_1 x_o \wedge S_2 x_o)) \Rightarrow x_o =$$

$$(((\bigwedge_{i=2}^{n-1} (S_i x_{i-1} \wedge -S_i x_i)) \wedge (-S_1 x_1) \wedge (S_1 x_o \wedge S_2 x_o)) \vee (S_1 x_o \wedge S_2 x_o)) \Rightarrow x_o .$$

Or une algèbre de Lukasiewicz d'ordre n est en particulier un treillis et vérifie par conséquent les lois d'absorption, par suite

$T'_n = (S_1 x_o \wedge S_2 x_o) \Rightarrow x_o = S_1 x_o \Rightarrow x_o$ d'après P6.

De plus, $S_1 x \Rightarrow x = 1$ est un théorème dans une algèbre de Lukasiewicz d'ordre n donc $T'_n = 1$ et le théorème 3 est démontré.

D'après les théorèmes 1, 2 et 3 l'égalité (T) correspondant à l'axiome d'Ivo Thomas est vérifiée dans toute algèbre de Lukasiewicz d'ordre n .

En prenant comme définition des algèbres de Post d'ordre n celle que nous avons donnée dans (1) on constate que l'égalité (T) est aussi vérifiée dans toute algèbre de Post d'ordre n .

BIBLIOGRAPHIE.

(1) BECCHIO D. et ITURRIOZ L., Sur une définition des algèbres de Lukasiewicz et de Post d'ordre n, *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences*, (à paraître).

(2) BIRKHOFF G., Lattice Theory, *Amer. Math. Soc.* Coll. Publ. 25, 3e ed. 1967.

(3) CIGNOLI R., Moisil algebras, *Notas de Lógica matemática* n° 27, Univ. Nac. del Sur, Bahia Blanca, Argentina, 1970.

(4) ITURRIOZ L., Lukasiewicz and symmetrical Heyting algebras, *Zeitschrift für math. Logik und Grundlagen der Math.*, 23, 1977, p.131-136.

(5) MOISIL GR., Notes sur les logiques non-chrysippiennes, *Ann. Sci. Univ. Jassy*, 27 (1941) p.86-98.

(6) RASIOWA H. and SIKORSKI R., The mathematics of metamathematics, Warszawa 1963.

(7) ROSENBLOOM P.Post algebras.I.Postulates and general theory, *American Journal of Mathematics*, 64 (1942) p.167-188.

(8) THOMAS I., Finite limitations on Dummett's LC , *Notre Dame Jour. Formal Log.*, 3 (1962) p.170-174.

D.BECCHIO

Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE