PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

SERGE RIBEYRE

Structures floues et algèbres de Post

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1978, tome 15, fascicule 1
, p. 1-37
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1978__15_1_1_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1978 t.15-1

STRUCTURES FLOUES ET ALGEBRES DE POST

par Serge RIBEYRE

Gr. C. Moisil a mis en lumière en (5) et (6) les rapports existant entre les structures floues au sens de Zadeh (17) et les algèbres de Lukasiewicz (n-valentes ou θ-valentes) ; ces rapports ont été encore précisés par D. Ponasse en (9). Parallèlement à ces deux études, on a été amené à mettre en évidence les liens existant entre les structures floues ((3), (4), (7), (17)) et les algèbres de Post d'ordre m, m entier naturel $\geqslant 2$, ((2), (11), (12), (13), (15)), ou généralisées au sens de T. Traczyk (16) et de H. Rasiowa (10).

Après un premier paragraphe consacré à des préliminaires, on définit, dans le deuxième, trois décompositions d'une partie floue, deux d'entre elles ayant un rapport étroit avec la représentation disjointe d'un élément dans une algèbre de Post d'ordre m, m entier $\geqslant 2$, ((2), (15)), ou dans une algèbre de Post généralisée ((10), (16)). Dans les trois paragraphes suivants, on étudie les propriétés de trois opérateurs définis dans l'ensemble des parties floues d'un ensemble et leurs rapports avec les différentes représentations d'une partie floue introduites au paragraphe précédent. Dans les derniers paragraphes on caractérise les treillis des parties floues d'un ensemble qui, munis d'opérations convenables, sont des algèbres de Post généralisées de type J (16) ou des algèbres de Post d'ordre $\omega + 1$ (10), et on prouve deux théorèmes de représentation qui généralisent le théorème de représentation de Stone pour les algèbres de Boole.

1. NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES.

1.1 On appelle, suivant D. Ponasse ((8), (9)), *structure floue* tout couple (E,J), où E est un ensemble non vide (les éléments de E sont désignés par x, y, z ...) et J un treillis avec plus petit élément, noté 0, et plus grand élément, noté 1, tels que $0 \neq 1$ (les éléments de J sont désignés par α, β, γ ...) ; on pose $J_* = J - \{0\}$, $J^* = J - \{1\}$, $J_*^* = J - \{0,1\}$ et $U = \{0,1\}$. On dit qu'une structure floue (E,J) est *discrète* si E est un ensemble fini.

1.2. Si (E,J) est une structure floue, on appelle *partie floue* de E toute application de E dans J ; on désigne par $\tilde{\mathscr{P}}(E) = J^E$ l'ensemble des parties floues de E, ces dernières étant notées, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ ... ; après identification d'une partie de E, au sens habituel, à sa fonction caractéristique qui est une application de E dans U, l'ensemble des parties de E, $\mathscr{P}(E) = U^E$, apparaît comme un sous-ensemble de $\tilde{\mathscr{P}}(E)$: une partie de E, au sens habituel, est encore appelée une *partie nette* de E; on note les parties nettes : A, B, C ... .

1.2.1 Dans le cas d'une structure floue discrète (E,J), on adopte la convention d'écriture suivante, utilisée en (8), pour les parties floues : on ordonne totalement E de façon arbitraire $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ et si $\tilde{A}$ est une partie floue telle que $\tilde{A}(x_i) = \alpha_i$, on pose $\tilde{A} = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$.

1.3 Dans $\tilde{\mathscr{P}}(E)$ sont définies les opérations suivantes ((3), (4), (7) (17)) :

inclusion, $\tilde{A} \subset \tilde{B}$, si, pour tout $x \in E$, $\tilde{A}(x) \leqslant \tilde{B}(x)$;

réunion, $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{C}$, où, pour tout $x \in E$, $\tilde{C}(x) = \tilde{A}(x) \vee \tilde{B}(x)$ (resp., si J est une chaîne, $\max(\tilde{A}(x),\tilde{B}(x))$) ;

intersection, $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{D}$, où, pour tout $x \in E$, $\tilde{D}(x) = \tilde{A}(x) \wedge \tilde{B}(x)$ (resp., si J est une chaîne, $\min(\tilde{A}(x),\tilde{B}(x))$) ;

en outre, si $(\tilde{A}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille de parties floues et si, pour tout $x \in E$, $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} \tilde{A}_\lambda(x)$ (resp. $\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} \tilde{A}_\lambda(x)$) existe dans J, on pose $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \tilde{A}_\lambda = \tilde{B}$

(réunion généralisée) où $\tilde{B}(x) = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} \tilde{A}(x)$, pour tout $x \in E$ (resp. $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \tilde{A}_\lambda = \tilde{C}$ *(intersection généralisée)* où $\tilde{C}(x) = \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} \tilde{A}_\lambda(x)$, pour tout $x \in E$).

Toutes les opérations précédentes prolongent les opérations analogues de $\mathscr{P}(E)$; muni de la réunion et de l'intersection, $\tilde{\mathscr{P}}(E)$ est un treillis avec plus petit élément, la partie nette $\emptyset$, et plus grand élément, la partie nette E, et $\mathscr{P}(E)$ est un sous-treillis de $\tilde{\mathscr{P}}(E)$.

$\tilde{\mathscr{P}}(E)$ est un treillis distributif (resp. achevé) si, et seulement si, le treillis J est distributif (resp. achevé).

1.4. Si l'on désigne par C(J) l'ensemble des éléments complémentés du treillis J, l'ensemble des éléments complémentés du treillis $\tilde{\mathscr{P}}(E)$ est $C(J)^E$; dans le cas où J est une chaîne, $\mathscr{P}(E)$ est exactement l'ensemble des éléments complémentés de $\tilde{\mathscr{P}}(E)$.

1.5. On appelle *structure floue involutive* ((8), (9)) tout triplet (E,J,n) tel que (E,J) soit une structure floue et n une involution décroissante de J ; on définit alors sur $\tilde{\mathscr{P}}(E)$ une opération unaire, la *complémentation floue* ; si $\tilde{A}$ est une partie floue, le *complément flou* de $\tilde{A}$, noté $n\tilde{A}$, est tel que : $(n\tilde{A})(x) = n(\tilde{A}(x))$, pour tout $x \in E$. n est une involution décroissante du treillis $\tilde{\mathscr{P}}(E)$ et on a les lois de De Morgan ; en outre, la complémentation floue prolonge la complémentation habituelle dans $\mathscr{P}(E)$: pour toute partie nette A, on a $nA = \complement A$.

1.6. Si (E,J) est une structure floue, soit α un élément fixé de J ; on désigne par E_α la partie floue telle que, pour tout $x \in E$, $E_\alpha(x) = \alpha$. On a les propriétés suivantes :

1.6.1. $E_0 = \emptyset$, $E_1 = E$ et $\mathscr{C} = \{E_\alpha, \alpha \in J\}$ est un sous-treillis de $\tilde{\mathscr{P}}(E)$ isomorphe au treillis J.

1.6.2. Si (E,J,n) est une structure floue involutive, $nE_\alpha = E_{n\alpha}$, pour tout $\alpha \in J$.

1.6.3. (E,J) étant une structure floue quelconque et A une partie nette, si $(\alpha,\beta) \in J^2$ est tel que $0 \leqslant \alpha < \beta$ et $A \cap E_\beta \subset E_\alpha$, alors $A = \emptyset$.

1.6.4. (E,J) étant une structure floue telle que J soit une chaîne, si $\tilde{A}$ est une partie floue et si, pour $\alpha \in J_*$ (resp. $(\alpha,\beta) \in J^2$ tel que $\alpha < \beta$) $\tilde{A} \cap E_\alpha = \emptyset$ (resp. $\tilde{A} \cup E_\alpha = E_\beta$) alors $\tilde{A} = \emptyset$ (resp. $\tilde{A} = E_\beta$).

1.7. LEMME. - *(E,J) étant une structure floue telle que J soit une chaîne, on pose, si $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont des parties floues :*

a) $\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B} = \tilde{C}$, *où, pour tout* $x \in E$, $\tilde{C}(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } \tilde{A}(x) \leqslant \tilde{B}(x) \\ \tilde{B}(x), \text{ si } \tilde{A}(x) > \tilde{B}(x) \end{cases}$;

b) $\neg \tilde{A} = \tilde{A} \Rightarrow \emptyset$ *c'est-à-dire, pour tout* $x \in E$, $\tilde{A}(x) = \begin{cases} 1; \text{ si } \tilde{A}(x) = 0 \\ 0, \text{ si } \tilde{A}(x) \neq 0 \end{cases}$;

Alors $< \tilde{\mathscr{P}}(E), E, \cup, \cap, \Rightarrow, \neg >$ *est une algèbre pseudo-booléienne (cf. (11)) pour la définition, par exemple).*

La vérification est laissée aux soins du lecteur.

1.7.1. On note que, pour toute partie floue $\tilde{A}$ et toute partie nette B, $\tilde{A} \Rightarrow B$ est une partie nette : en effet, pour tout $x \in E$,

$$(\tilde{A} \Rightarrow B)(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } \tilde{A}(x) \leqslant B(x) \\ B(x), \text{ si } \tilde{A}(x) > B(x), \text{ soit } B(x) = 0. \end{cases}$$

En particulier $\neg \tilde{A} = \tilde{A} \Rightarrow \emptyset$ est la partie nette telle que $\neg \tilde{A}(x) = 1$, si et seulement si, $\tilde{A}(x) = 0$ et, si A est une partie nette, $\neg A = \complement A$.

1.7.2. Si A est une partie nette et $\tilde{B}$ une partie floue, alors

$A \Rightarrow \tilde{B} = \complement A \cup \tilde{B}$; en effet, si $x \in E$, $(A \Rightarrow \tilde{B})(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } A(x) \leqslant \tilde{B}(x) \\ \tilde{B}(x), \text{ si } A(x) > \tilde{B}(x) \end{cases}$;

si $A(x) \leqslant \tilde{B}(x)$, soit $A(x) = 1 = \tilde{B}(x)$, soit $A(x) = 0$ et $(\complement A)(x) = 1$; si $A(x) > \tilde{B}(x)$, alors $A(x) = 1$ et $(\complement A)(x) = 0$; d'où finalement, dans tous les cas, $(A \Rightarrow \tilde{B})(x) = \max(\complement A(x), \tilde{B}(x)) = (\complement A \cup \tilde{B})(x)$.

2. REPRÉSENTATIONS D'UNE PARTIE FLOUE.

La terminologie employée dans ce paragraphe est largement empruntée à celle de la théorie des algèbres de Post ((2), (11), (15)).

2.1. (E,J) étant une structure floue quelconque, si K est une partie non vide de J, $\tilde{A}$ une partie floue de E et $(A_\alpha)_{\alpha \in K}$ une famille de parties nettes de E, on dit que :

2.1.1. $(A_\alpha)_{\alpha \in K}$ est une *K-représentation de* $\tilde{A}$ si $\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in K} (A_\alpha \cap E_\alpha)$.

2.1.2. $(A_\alpha)_{\alpha \in K}$ est une *K-représentation disjointe* de $\tilde{A}$ si $(A_\alpha)_{\alpha \in K}$ est une K-représentation de $\tilde{A}$ telle que :

i) $\bigcup_{\alpha \in K} A_\alpha = E$;

ii) pour tout $(\alpha,\beta) \in K^2$, si $\alpha \neq \beta$, alors $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$.

La famille de parties nettes $(A_\alpha)_{\alpha \in K}$ satisfaisant i) et ii) est appelée une *K-pseudo-partition* de E.

2.1.3. $(A_\alpha)_{\alpha \in K}$ est une *K-représentation monotone* de $\tilde{A}$ si $(A_\alpha)_{\alpha \in K}$ est une K-représentation de $\tilde{A}$ telle que :

i) si $0 \in K$, $A_0 = E$;

ii) pour tout $(\alpha,\beta) \in K^2$, si $\alpha \leqslant \beta$, alors $A_\alpha \supset A_\beta$.

2.1.4. $(A_\alpha)_{\alpha \in K}$ est une *K-représentation duale* de $\tilde{A}$ si $\tilde{A} = \bigcap_{\alpha \in K} (A_\alpha \cup E_\alpha)$.

2.1.5. $(A_\alpha)_{\alpha\in K}$ est une K-*représentation duale monotone* de $\tilde{A}$ si $(A_\alpha)_{\alpha\in K}$ est une K-représentation duale de $\tilde{A}$ telle que :

i) si $1\in K$, $A_1 = \emptyset$;
ii) pour tout $(\alpha,\beta)\in K^2$, si $\alpha\leqslant\beta$, alors $A_\alpha\supset A_\beta$.

2.1.6. EXEMPLE. - Soit (E,J) la structure floue discrète telle que E = {a,b} et telle que J soit la chaîne $\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}$; on a $\mathscr{C} = \{00,\frac{1}{3}\frac{1}{3},\frac{2}{3}\frac{2}{3};11\}$. Soit la partie floue $\tilde{A} = \frac{1}{3}\frac{2}{3}$ (en tenant compte de la convention d'écriture 1.2.1) ; on constate que :

(10,10,01,00) est une J-représentation de $\tilde{A}$;
(00,10,01,00) est une J-représentation disjointe de $\tilde{A}$;
(11,11,01,00) est une J-représentation monotone de $\tilde{A}$;
(11,01,10,01) est une J-représentation duale de $\tilde{A}$;
(11,01,00,00) est une J-représentation duale monotone de $\tilde{A}$.

2.1.7. (E,J) étant une structure floue quelconque, K une partie non vide de J et $\tilde{A}$ une partie floue fixée, dans l'ensemble des K-représentations (resp. K-représentations duales) de $\tilde{A}$ la relation :
"si $(A_\alpha)_{\alpha\in K}$ et $(B_\alpha)_{\alpha\in K}$ sont deux K-représentations (resp. K-représentations duales) de $\tilde{A}$, $(A_\alpha)_{\alpha\in K} \leqslant (B_\alpha)_{\alpha\in K}$ si, et seulement si, pour tout $\alpha\in K$, $A_\alpha\subset B_\alpha$"
est une relation d'ordre.
La vérification de cette propriété est immédiate.

2.2. Dans ce qui suit, on établit quelques propriétés des représentations de parties floues.
Soient (E,J) une structure floue et K une partie non vide de J.

2.2.1. PROPOSITION. - *Si* $(A_\alpha)_{\alpha\in K}$ *est une* K-*représentation (resp.* K-*représentation duale) de* $\tilde{A}$*, alors, pour tout* $x\in E$:

$\tilde{A}(x) = \bigvee\{\beta/\beta\in K : x\in A_\beta\} = \bigvee\{\beta/\beta\in K : A_\beta(x) = 1\}$
(resp. $\tilde{A}(x) = \bigwedge\{\beta/\beta\in K : x\notin A_\beta\} = \bigwedge\{\beta/\beta\in K : A_\beta(x) = 0\}$).

Soit x un élément fixé de E ; on note d'abord que, pour tout $\beta \in K$ tel que $x \in A_\beta$, $(A_\beta \cap E_\beta)(x) = \beta \leq \bigvee_{\alpha \in K}(A_\alpha \cap E_\alpha)(x) = \tilde{A}(x)$. Soit γ un majorant de l'ensemble des β tels que $x \in A_\beta$; soit $\alpha \in K$: si $x \in A_\alpha$, alors $\alpha \leq \gamma$ par hypothèse, et, si $x \notin A_\alpha$, on a $(A_\alpha \cap E_\alpha)(x) = 0 \leq \gamma$. Ainsi, pour tout $\alpha \in K$, $(A_\alpha \cap E_\alpha)(x) \leq \gamma$ et, comme $\tilde{A}(x) = \bigvee_{\alpha \in K}(A_\alpha \cap E_\alpha)(x)$, il vient $\tilde{A}(x) \leq \gamma$, d'où le résultat.

La deuxième partie de la proposition se démontre de manière duale.

2.2.2. COROLLAIRE. - *Si $(A_\alpha)_{\alpha \in K}$ est une K-représentation disjointe de $\tilde{A}$, alors, pour tout $x \in E$, $\tilde{A}(x) = \beta$, où β est l'unique élément de K tel que $x \in A_\beta$.*

Cela résulte de 2.1.2. et de 2.2.1.

2.2.3. PROPOSITION. - *Si $(A_\alpha)_{\alpha \in K}$ est une K-représentation (resp. K-représentation duale) de $\tilde{A}$, on pose : $B_0 = E$, si $0 \in K$, et $B_\alpha = \bigcup_{\substack{\beta \in K \\ \alpha \leq \beta}} A_\beta$, si $\alpha \in K_* = K-\{0\}$ (resp. $C_1 = \emptyset$, si $1 \in K$, et $C_\alpha = \bigcap_{\substack{\beta \in K \\ \alpha \geq \beta}} A_\beta$, si $\alpha \in K^* = K-\{1\}$); $(B_\alpha)_{\alpha \in K}$ (resp. $(C_\alpha)_{\alpha \in K}$ est une K-représentation monotone (resp. K-représentation duale monotone) de $\tilde{A}$.*

Par construction des B_α, il suffit de prouver que $\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in K} (B_\alpha \cap E_\alpha)$.

Soient $x \in E$ et $\alpha \in K$: si $\alpha = 0 \in K$, on a $(B_0 \cap E_0)(x) = 0 \leq \tilde{A}(x)$; si $\alpha \in K_*$, ou $x \notin B_\alpha$ et $(B_\alpha \cap E_\alpha)(x) = 0 \leq \tilde{A}(x)$, ou $x \in B_\alpha = \bigcup_{\substack{\beta \in K \\ \alpha \leq \beta}} A_\beta$ et il existe $\beta \in K$, $\alpha \leq \beta$, tel que $x \in A_\beta$; d'après 2.2.1., on a $(B_\alpha \cap E_\alpha)(x) = \alpha \leq \beta \leq \tilde{A}(x)$. Ainsi, pour tout $\alpha \in K$, $(B_\alpha \cap E_\alpha)(x) \leq \tilde{A}(x)$.

Soit δ un majorant des $(B_\alpha \cap E_\alpha)(x)$, pour $\alpha \in K$: on a, d'après 2.2.1., $\tilde{A}(x) = \bigvee\{\gamma/\gamma \in K : x \in A_\gamma\}$; or, pour tout $\gamma \in K$ tel que $x \in A_\gamma$, on a, par définition de B_γ, $x \in B_\gamma$ et donc : $\gamma = (B_\gamma \cap E_\gamma)(x) \leq \delta$. Par suite $\tilde{A}(x) \leq \delta$ et $\tilde{A}(x) = \bigvee_{\alpha \in K}(B_\alpha \cap E_\alpha)(x)$.

La deuxième partie de la proposition se démontre de façon duale.

On déduit de la proposition précédente que, si une partie floue $\tilde{A}$ possède une K-représentation (resp. K-représentation duale), elle admet une K-représentation (resp. K-représentation duale) monotone.

2.2.4. PROPOSITION. - *Si* $(A_{\lambda\alpha})_{\alpha \in K}$ *est une K-représentation (resp. K-représentation duale) de* $\tilde{A}_\lambda$, *si* $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \tilde{A}_\lambda$ *(resp.* $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \tilde{A}_\lambda$*) existe, alors* $(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda\alpha})_{\alpha \in K}$ *(resp.* $(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda\alpha})_{\alpha \in K}$*) est une K-représentation (resp. K-représentation duale) de* $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \tilde{A}_\lambda$ *(resp.* $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \tilde{A}_\lambda$*).*

Soient $\hat{A} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \tilde{A}_\lambda$, $x \in E$ et $\alpha \in K$; si $x \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda\alpha}$, alors $((\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda\alpha}) \cap E_\alpha)(x) = 0 \leqslant \tilde{A}(x)$; si $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda\alpha}$, il existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $x \in A_{\lambda_0\alpha}$ et on a :

$(A_{\lambda_0\alpha} \cap E_\alpha)(x) = \alpha \leqslant \tilde{A}_{\lambda_0}(x) \leqslant \bigvee_{\lambda \in \Lambda} \tilde{A}_\lambda(x) = \tilde{A}(x)$; or $((\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda\alpha}) \cap E_\alpha)(x) = \alpha$ et par suite, pour tout $\alpha \in K$, $((\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda\alpha}) \cap E_\alpha)(x) \leqslant \tilde{A}(x)$.

Soit δ un majorant de l'ensemble des $((\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda\alpha}) \cap E_\alpha)(x)$, pour $\alpha \in K$, et montrons que δ majore $\tilde{A}_\mu(x)$, pour tout $\mu \in \Lambda$, ce qui entraînera $\tilde{A}(x) \leqslant \delta$ et achèvera la démonstration. On a, d'après 2.2.1., $\tilde{A}_\mu(x) = \bigvee\{\alpha/\alpha \in K : x \in A_{\mu\alpha}\}$; pour tout $\alpha \in K$ tel que $x \in A_{\mu\alpha}$, on a $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda\alpha}$ et $\alpha = (A_{\mu\alpha} \cap E_\alpha)(x) =$ $= ((\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda\alpha}) \cap E_\alpha)(x)$, d'où $\alpha \leqslant \delta$. Il vient donc $\tilde{A}_\mu(x) \leqslant \delta$, pour tout $\mu \in \Lambda$.

La deuxième partie de la démonstration se fait de manière duale.

2.2.5. REMARQUE. - Si $(A_\alpha)_{\alpha \in K}$ et $(B_\alpha)_{\alpha \in K}$ sont des K-représentations (resp. K-représentations duales) de $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ respectivement, en général $(A_\alpha \cap B_\alpha)_{\alpha \in K}$ (resp. $(A_\alpha \cup B_\alpha)_{\alpha \in K}$) n'est pas une K-représentation (resp. K-représentation duale) de $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ (resp. $\tilde{A} \cup \tilde{B}$).

Soient, par exemple, (E,J) une structure floue où J est l'intervalle réel $[0,1]$ et $\tilde{A} = \tilde{B} = E$; $(A_\alpha)_{\alpha \in J}$ où $A_\alpha = E$, si α est rationnel, et $A_\alpha = \emptyset$, si α est irrationnel, est une J-représentation de E ; de même $(B_\alpha)_{\alpha \in J}$ où $B_\alpha = \emptyset$, si α est rationnel, et $B_\alpha = E$, si α est irrationnel, est une J-représentation de E. On a, pour tout $\alpha \in J$, $C_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha = \emptyset$ et $(C_\alpha)_{\alpha \in J}$ n'est pas une J-représentation de E, mais de $\emptyset$.

2.2.6. PROPOSITION. - *Si (E,J) est une structure floue telle que J soit une chaîne achevée, si K est une sous-chaîne dense de J et si $(A_\alpha)_{\alpha \in J}$ est une J-représentation monotone (resp. duale monotone) de $\tilde{A}$, alors $(A_\alpha)_{\alpha \in K}$ est une K-représentation monotone (resp. duale monotone) de $\tilde{A}$.*

Si $(A_\alpha)_{\alpha \in J}$ est une J-représentation monotone de $\tilde{A}$, J étant une chaîne achevée, $\tilde{B} = \bigcup\limits_{\alpha \in K} (A_\alpha \cap E_\alpha)$ existe dans $\tilde{\mathcal{P}}(E)$ et on a $\tilde{B} \subset \tilde{A}$; supposons $\tilde{B} \subsetneq \tilde{A}$: il existe $x \in E$ tel que $\tilde{B}(x) < \tilde{A}(x)$; K étant une sous-chaîne dense de J, il existe $\gamma \in K$ tel que : $\tilde{B}(x) < \gamma < \tilde{A}(x) = \bigvee\{\alpha/\alpha \in J : x \in A_\alpha\}$; par suite, il existe $\beta \in J$ tel que $x \in A_\beta$ et $\beta \nleq \gamma$, soit $\gamma < \beta$, puisque J est une chaîne : on a alors : $\tilde{B}(x) = \bigvee\{\delta/\delta \in K : x \in A_\delta\} < \gamma < \beta$; la J-représentation $(A_\alpha)_{\alpha \in J}$ étant monotone, on a, par ailleurs, $A_\gamma \supset A_\beta$, donc $x \in A_\gamma$, d'où $\gamma \leq \tilde{B}(x)$, ce qui est contradictoire.

La deuxième partie de la démonstration se conduit de manière duale.

2.2.7. REMARQUE. - L'hypothèse "monotone" en 2.2.6., est essentielle comme le montre l'exemple donné en 2.2.5. : $(B_\alpha)_{\alpha \in K}$, où $K = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ n'est pas une K-représentation de E, mais de $\emptyset$.

2.3. Les deux résultats, qui suivent, montrent comment, sous certaines hypothèses, on peut, à partir de familles de parties nettes de E, construire des parties floues.

2.3.1. PROPOSITION. - *(E,J) étant une structure floue quelconque et K une partie non vide de J, à toute K-pseudo-partition* $(A_\alpha)_{\alpha \in K}$ *de E est associée une unique partie floue* $\tilde{A}$ *telle que* $(A_\alpha)_{\alpha \in K}$ *en soit une K-représentation disjointe.*

Soit $x \in E$: d'après 2.1.2., il existe un unique $\beta \in K$ tel que $x \in A_\beta$; on a $(A_\beta \cap E_\beta)(x) = \beta$ et, pour tout $\alpha \in K-\{\beta\}$, $(A_\alpha \cap E_\alpha)(x) = 0$; il vient donc $\beta = \bigvee_{\alpha \in K} (A_\alpha \cap E_\alpha)(x)$; si on pose $\tilde{A}(x) = \beta$, on a, par définition de la réunion généralisée, $\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in K} (A_\alpha \cap E_\alpha)$.

2.3.2. PROPOSITION. - *Soit (E,J) une structure floue telle que J soit un treillis achevé et soit K une partie non vide de J.*

a) Si $(A_\alpha)_{\alpha \in K}$ *est une famille de partie nettes de E, il existe une unique partie floue* $\tilde{A}$ *(resp.* $\tilde{B}$*) telle que* $(A_\alpha)_{\alpha \in K}$ *en soit une K-représentation (resp. K-représentation duale).*

b) si $(A_\alpha)_{\alpha \in K}$ *est une famille de parties nettes de E telles que, si* $0 \in K$, $A_0 = E$ *et, si* $\alpha \leqslant \beta$, $A_\alpha \supset A_\beta$ *(resp. si* $1 \in K$, $A_1 = \emptyset$ *et, si* $\alpha \nleqslant \beta$, $A_\alpha \supset A_\beta$*), il existe une unique partie floue* $\tilde{A}$ *(resp.* $\tilde{B}$*) telle que* $(A_\alpha)_{\alpha \in K}$ *en soit une K-représentation monotone (resp. duale monotone).*

a) J étant un treillis achevé, $\tilde{\mathscr{P}}(E)$ est un treillis achevé et donc $\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in K} (A_\alpha \cap E_\alpha)$ (resp. $\tilde{B} = \bigcap_{\alpha \in K} (A_\alpha \cup E_\alpha)$) existe.

b) se déduit de a).

3. LIGNES DE FLOU ET REPRÉSENTATION DISJOINTE D'UNE PARTIE FLOUE.

3.1. (E,J) étant une structure floue quelconque, $\tilde{A}$ une partie floue et α un élément de J, on appelle, suivant (8), *ligne de flou de degré* α de $\tilde{A}$ la partie nette, notée $L_\alpha(\tilde{A})$, telle que :

$L_\alpha(\tilde{A}) = \{x / x \in E : \tilde{A}(x) = \alpha\}$.

3.1.1. REMARQUE. - Si $\alpha \in J$, on a $L_\alpha(E_\alpha) = E$ et, pour tout $\beta \in J-\{\alpha\}$, $L_\beta(E_\alpha) = \emptyset$.

3.1.2. REMARQUE. - On note que, si $\tilde{A}$ est une partie floue, d'après 1.7.1., $\neg \tilde{A} = L_0(\tilde{A})$, (E,J) étant une structure floue telle que J soit une chaîne

Dans ce qui suit, (E,J) désignant une structure floue quelconque, on met en évidence des propriétés des opérateurs "lignes de flou" analogues à celles qu'ont, dans les algèbres de Post d'ordre m, m entier $\geqslant 2$, les opérateurs C_i que définit G. Epstein en (2).

3.2. PROPOSITION. - *Toute partie floue $\tilde{A}$ possède une, et une seule, J-représentation disjointe, à savoir* $(L_\alpha(\tilde{A}))_{\alpha \in J}$.

Il est immédiat de constater que $(L_\alpha(\tilde{A}))_{\alpha \in J}$ est une J-pseudo-partition de E ; il reste à prouver que $(L_\alpha(\tilde{A}))_{\alpha \in J}$ est une J-représentation de $\tilde{A}$. Soient x un élément fixé de E et $\beta = \tilde{A}(x)$; $x \in L_\beta(\tilde{A})$, donc $(L_\beta(\tilde{A}) \cap E_\beta)(x) = \beta$ et, pour tout $\alpha \in J-\{\beta\}$, $x \notin L_\alpha(\tilde{A})$, d'où $(L_\alpha(\tilde{A}) \cap E_\alpha)(x) = 0 \leqslant \tilde{A}(x)$; ainsi $\tilde{A}(x) = \bigvee_{\alpha \in J} (L_\alpha(\tilde{A}) \cap E_\alpha)(x)$.

Soient $(A_\alpha)_{\alpha \in J}$ une J-représentation disjointe de $\tilde{A}$ et β un élément fixé de J ; si $x \in A_\beta$, d'après 2.2.2., $\tilde{A}(x) = \beta$, donc $x \in L_\beta(\tilde{A})$ et $A_\beta \subset L_\beta(\tilde{A})$. Inversement, si $x \in L_\beta(\tilde{A})$, $\tilde{A}(x) = \beta$ et, d'après 2.2.2., β est l'unique élément de J tel que $x \in A_\beta$, d'où $L_\beta(\tilde{A}) \subset A_\beta$. Ceci achève de prouver l'unicité de la J-représentation disjointe de $\tilde{A}$.

3.2.1. COROLLAIRE. - *Si* (E,J) *est une structure floue telle que* J *soit une chaîne finie à* m *éléments (*m *entier* $\geqslant 2$*), alors le treillis* $\tilde{\mathcal{P}}(E)$ *est une algèbre de Post d'ordre* m.

En tenant compte de la définition que donne G. Epstein des algèbres de Post d'ordre m en (2), cela résulte de 1.3., 1.6.1., 1.6.4. et 3.2.

3.3. PRINCIPE DE DETERMINATION. - Deux parties floues $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont égales si, et seulement si, pour tout $\alpha \in J$, $L_\alpha(\tilde{A}) = L_\alpha(\tilde{B})$.

Ceci est un corollaire de 3.2.

3.4. L'application qui, à toute partie floue $\tilde{A}$, associe la J-pseudo-partition $(L_\alpha(\tilde{A}))_{\alpha \in J}$ est une bijection de $\tilde{\mathscr{P}}(E)$ sur l'ensemble des J-pseudo-partitions de E.

Si $(A_\alpha)_{\alpha \in J}$ est une J-pseudo-partition de E, il existe, d'après 2.3.1. , une unique partie floue $\tilde{A}$ telle que $(A_\alpha)_{\alpha \in J}$ en soit une J-représentation disjointe ; d'après 3.2., on a, pour tout $\alpha \in J$, $A_\alpha = L_\alpha(\tilde{A})$, d'où le résultat.

3.5. $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ équivaut à : pour tout $\alpha \in J$, $L_\alpha(\tilde{A}) \subset \bigcup_{\substack{\beta \in J \\ \beta > \alpha}} L_\beta(\tilde{B})$.

La vérification est laissée aux soins du lecteur ; il en est de même pour les propriétés qui suivent.

3.6.1. $\tilde{A}$ étant une partie floue, les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $\tilde{A}$ est une partie nette.
b) il existe $\alpha \in J$ et une partie floue $\tilde{B}$ tels que $\tilde{A} = L_\alpha(\tilde{B})$.
c) $\tilde{A} = L_1(\tilde{A})$.

3.6.2. Si A est une partie nette, alors :

a) $L_1(A) = A$.
b) pour tout $\alpha \in J^*_*$, $L_\alpha(A) = \emptyset$.
c) $L_0(A) = \complement A$.

3.6.3. Si $\tilde{A}$ est une partie floue, il y a équivalence entre :

a) $\tilde{A}$ est une partie floue complémentée.
b) pour tout $\alpha \in J - C(J)$, $L_\alpha(\tilde{A}) = \emptyset$.

3.7. PROPOSITION. - *Si* $\tilde{A}$ *est une partie floue, alors :*

a) $L_1(L_\alpha(\tilde{A})) = L_\alpha(\tilde{A})$, *pour tout* $\alpha \in J$.

b) $L_\beta(L_\alpha(\tilde{A})) = \emptyset$, *pour tout* $(\alpha,\beta) \in J \times J_*^*$.

c) $L_0(L_\alpha(\tilde{A})) = \complement L_\alpha(\tilde{A}) = \bigcup_{\beta \in J-\{\alpha\}} L_\beta(\tilde{A})$, *pour tout* $\alpha \in J$.

$L_\alpha(\tilde{A})$ étant une partie nette, a) et b) résultent de 3.6.2 ; pour c), on a, d'après 3.6.2., $L_0(L_\alpha(\tilde{A})) = \complement L_\alpha(\tilde{A})$, la dernière égalité se déduisant du fait que $(L_\alpha(\tilde{A}))_{\alpha \in J}$ est une J-pseudo-partition de E.

3.8. Si (E,J,n) est une structure floue involutive, on a, pour toute partie floue $\tilde{A}$ et pour tout $\alpha \in J$, $L_\alpha(n\tilde{A}) = L_{n\alpha}(\tilde{A})$.

La vérification est immédiate.

3.9. PROPOSITION. - *Si* (E,J) *est une structure floue telle que* J *soit une chaîne, pour toutes parties floues* $\tilde{A}$ *et* $\tilde{B}$ *et pour tout* $\alpha \in J$, *on a :*

a) $L_\alpha(\tilde{A} \cup \tilde{B}) = (L_\alpha(\tilde{A}) \cap (\bigcup_{\substack{\beta \in J \\ \beta \leqslant \alpha}} L_\beta(\tilde{B}))) \cup (L_\alpha(\tilde{B}) \cap (\bigcup_{\substack{\beta \in J \\ \beta \leqslant \alpha}} L_\beta(\tilde{A})))$.

b) $L_\alpha(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = (L_\alpha(\tilde{A}) \cap (\bigcup_{\substack{\beta \in J \\ \alpha \leqslant \beta}} L_\beta(\tilde{B}))) \cup (L_\alpha(\tilde{B}) \cap (\bigcup_{\substack{\beta \in J \\ \alpha \leqslant \beta}} L_\beta(\tilde{A})))$.

Démontrons a). Soit $x \in L_\alpha(\tilde{A} \cup \tilde{B})$; J étant une chaîne, on a $\alpha = (\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) = \max(\tilde{A}(x),\tilde{B}(x))$; si $\alpha = \tilde{A}(x) \geqslant \tilde{B}(x) = \beta$, alors $x \in L_\alpha(\tilde{A})$ et $x \in L_\beta(\tilde{B})$ avec $\beta \leqslant \alpha$, donc $x \in L_\alpha(\tilde{A}) \cap (\bigcup_{\substack{\beta \in J \\ \beta \leqslant \alpha}} L_\beta(\tilde{B}))$; dans le cas où $\alpha = \tilde{B}(x) \geqslant \tilde{A}(x) = \beta$, $x \in L_\alpha(\tilde{B}) \cap (\bigcup_{\substack{\beta \in J \\ \beta \leqslant \alpha}} L_\beta(\tilde{A}))$.

Supposons inversement que x appartienne au membre de droite de l'égalité a) ; par exemple si $x \in L_\alpha(\tilde{A}) \cap (\bigcup_{\substack{\beta \in J \\ \beta \leqslant \alpha}} L_\beta(\tilde{B}))$, on a $\tilde{A}(x) = \alpha$ et $\tilde{B}(x) = \beta \leqslant \alpha$ donc $(\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) = \alpha$ et $x \in L_\alpha(\tilde{A} \cup \tilde{B})$ (on note que, pour démontrer cette inclusion, on n'utilise pas le fait que J soit une chaîne).

La démonstration de b) est analogue à celle de a).

3.10. PROPOSITION. - *Si* (E,J) *est une structure floue quelconque et* $\tilde{A}$ *une partie floue, alors :*

a) $L_0(\tilde{A})$ *est la plus grande partie nette disjointe de* $\tilde{A}$*; si, en outre,* J *est une chaîne,* $L_0(\tilde{A})$ *est la plus grande partie floue disjointe de* $\tilde{A}$ *(autrement dit,* $L_0(\tilde{A})$ *est le pseudo-complément de* $\tilde{A}$*).*

b) $L_1(\tilde{A})$ *est la plus grande partie nette contenue dans* $\tilde{A}$ *et* $\complement L_0(\tilde{A}) = \bigcup_{\alpha \in J_*} L_\alpha(\tilde{A})$ *est la plus petite partie nette contenant* $\tilde{A}$ *.*

a) $\tilde{A} \cap L_0(\tilde{A}) = \emptyset$: en effet, si $x \in L_0(\tilde{A})$, $\tilde{A}(x) = 0$ et, si $x \notin L_0(\tilde{A})$, $L_0(\tilde{A})(x) = 0$; soit B une partie nette telle que $\tilde{A} \cap B = \emptyset$: si $x \in B$, alors $0 = \tilde{A}(x) \wedge B(x) = \tilde{A}(x)$ et donc $x \in L_0(\tilde{A})$, d'où $B \subset L_0(\tilde{A})$.

Si J est une chaîne, soit $\tilde{B}$ une partie floue telle que $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \emptyset$; soit $x \in E$: ou $\tilde{B}(x) = 0 \leqslant L_0(\tilde{A})(x)$, ou $\tilde{B}(x) \neq 0$ et, comme $0 = (\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) = \min(\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)) < \tilde{B}(x)$, on a $\tilde{A}(x) = 0$, donc $x \in L_0(\tilde{A})$ et ainsi $\tilde{B} \subset L_0(\tilde{A})$.

b) Soit $x \in E$: si $x \notin L_1(\tilde{A})$, $L_1(\tilde{A})(x) = 0 \leqslant \tilde{A}(x)$ et, si $x \in L_1(\tilde{A})$, $L_1(\tilde{A})(x) = 1 = \tilde{A}(x)$, d'où $L_1(\tilde{A}) \subset \tilde{A}$. Soit B une partie nette telle que $B \subset \tilde{A}$: si $x \in B$, alors $B(x) = 1 \leqslant \tilde{A}(x)$, donc $\tilde{A}(x) = 1$, $x \in L_1(\tilde{A})$ et $B \subset L_1(\tilde{A})$.

Soit $x \in E$: si $\tilde{A}(x) = 0$, alors $\tilde{A}(x) \leqslant (\complement L_0(\tilde{A}))(x)$ et, si $\tilde{A}(x) \neq 0$, alors $x \in \complement L_0(\tilde{A})$; ainsi $\tilde{A} \subset \complement L_0(\tilde{A})$. Soit B une partie nette telle que $\tilde{A} \subset B$: si $x \in \complement L_0(\tilde{A})$, alors $0 < \tilde{A}(x) \leqslant B(x)$, donc $B(x) = 1$, $x \in B$ et $\complement L_0(\tilde{A}) \subset B$.

3.11. PROPOSITION. - *Soient* (E,J) *une structure floue quelconque,* $\tilde{A}$ *une partie floue et* $(A_\alpha)_{\alpha \in J}$ *une* J*-représentation de* $\tilde{A}$*; on a :*

a) $L_0(\tilde{A}) = \bigcap_{\alpha \in J_*} \complement A_\alpha$.

b) si, dans J*,* 1 *admet un unique prédécesseur* 1^-, $L_1(\tilde{A}) = A_1$.

c) si J *est une chaîne telle que tout* $\alpha \in J_*^*$ *possède un prédécesseur* α^-*, alors :* $L_\alpha(\tilde{A}) = A_\alpha \cap \left(\bigcap_{\substack{\beta \in J \\ \beta > \alpha}} \complement A_\beta \right)$.

a) résulte de 2.2.1.

b) Si $x \in A_1$, d'après 2.2.1 , $\tilde{A}(x) = 1$ et $x \in L_1(\tilde{A})$.

Soit $x \in L_1(\tilde{A})$; d'après 2.2.1., $\tilde{A}(x) = \bigvee\{\alpha/\alpha \in J : x \in A_\alpha\}$; si $x \notin A_1$, alors $\bigvee\{\alpha/\alpha \in J : x \in A_\alpha\} \leqslant 1^- < 1$, ce qui est contradictoire ; par suite $x \in A_1$ et $L_1(\tilde{A}) \subset A_1$.

c) Soient $\alpha \in J_*^*$ et $x \in A_\alpha \cap (\bigcap_{\substack{\beta \in J \\ \beta > \alpha}} \complement A_\beta)$; on a, d'après 2.2.1., $\alpha \leqslant \tilde{A}(x)$;
Si $\alpha < \tilde{A}(x) = \beta$, comme J est une chaîne et $\tilde{A}(x) = \bigvee\{\gamma/\gamma \in J : x \in A_\gamma\}$, il existe $\gamma \in J$ tel que $x \in A_\gamma$ et $\alpha < \gamma \leqslant \beta = \tilde{A}(x)$, ce qui est contradictoire car $x \in \complement A_\gamma$; par suite, $\tilde{A}(x) = \alpha$ et $x \in L_\alpha(\tilde{A})$, soit $A_\alpha \cap (\bigcap_{\substack{\beta \in J \\ \beta > \alpha}} \complement A_\beta) \subset L_\alpha(\tilde{A})$.

Soient $\alpha \in J_*^*$ et $x \in L_\alpha(\tilde{A})$; on a : $\tilde{A}(x) = \alpha = \bigvee\{\beta/\beta \in J : x \in A_\beta\}$; nécessairement pour tout $\beta \in J$ tel que $\beta > \alpha$, on a $x \notin A_\beta$; supposons $x \notin A_\alpha$: J étant une chaîne, $x \in A_\beta$ pour des $\beta \in J$ tels que $\beta > \alpha$, donc, comme α a un prédecesseur α^-, tels que $\beta \leqslant \alpha^- < \alpha$; ainsi
$\tilde{A}(x) = \bigvee\{\beta/\beta \in J : x \in A_\beta\} \leqslant \alpha^- < \alpha = \tilde{A}(x)$, ce qui est contradictoire.

4. NIVEAUX DE FLOU ET REPRÉSENTATIONS MONOTONES D'UNE PARTIE FLOUE.

4.1. (E,J) étant une structure floue quelconque, $\tilde{A}$ une partie floue et α un élément de J, on appelle, suivant (8), *niveau de flou de degré* α de $\tilde{A}$ la partie nette, notée $N_\alpha(\tilde{A})$, telle que :
$N_\alpha(\tilde{A}) = \{x/x \in E : \tilde{A}(x) \geqslant \alpha\}$.

4.1.1. On remarque que, pour toute partie floue $\tilde{A}$, $N_0(\tilde{A}) = E$ et que, pour tout $(\alpha,\beta) \in J^2$, $N_\alpha(E_\beta) = E$, si $\alpha \leqslant \beta$, et $N_\alpha(E_\beta) = \emptyset$ sinon.

Dans la suite, (E,J) étant une structure floue quelconque, on établit des propriétés des opérateurs "niveaux de flou" proches de celles que possèdent, dans les algèbres de Post d'ordre m, m entier $\geqslant 2$, les opérateurs D_i que définit G. Epstein en (2).

4.2. PROPOSITION. - *Si $\tilde{A}$ est une partie floue, alors :*

a) $(N_\alpha(\tilde{A}))_{\alpha\in J}$ (resp. $(N_\alpha(\tilde{A}))_{\alpha\in J_*}$ *est une J-(resp* · J_**-)représentation monotone de* $\tilde{A}$ *et c'est la plus grande des J-(resp.* J_**-) représentations de* $\tilde{A}$ *pour la relation d'ordre définie en 2.1.7.*

b) si, dans J, 1 n'a pas de prédécesseur, $(N_\alpha(\tilde{A}))_{\alpha\in J_*^*}$ *est une* J_*^**-représentation monotone de* $\tilde{A}$ *et c'est la plus grande des* J_*^**-représentations de* $\tilde{A}$ *pour la relation d'ordre définie en 2.1.7.*

a) Il est clair que, si $(\alpha,\beta)\in J^2$ est tel que $\alpha \leqslant \beta$, $N_\alpha(\tilde{A}) \supset N_\beta(\tilde{A})$. Prouvons que $\tilde{A} = \bigcup_{\alpha\in J} (N_\alpha(\tilde{A})\cap E_\alpha)$; soit $x\in E$, pour $\alpha\in J$, si $x\in N_\alpha(\tilde{A})$, on a $(N_\alpha(\tilde{A})\cap E_\alpha)(x) = \alpha \leqslant \tilde{A}(x)$ et, si $x\notin N_\alpha(\tilde{A})$, $(N_\alpha(\tilde{A})\cap E_\alpha)(x) = 0 \leqslant \tilde{A}(x)$; soit γ un majorant des $(N_\alpha(\tilde{A})\cap E_\alpha)(x)$, pour $\alpha\in J$: on a $\tilde{A}(x) = \beta = (N_\beta(\tilde{A})\cap E_\beta)(x) \leqslant \gamma$; par suite $\tilde{A}(x) = \bigvee_{\alpha\in J} (N_\alpha(\tilde{A})\cap E_\alpha)(x)$. Ainsi $(N_\alpha(\tilde{A}))_{\alpha\in J}$ est une J-représentation monotone de $\tilde{A}$. Enfin, si $(A_\alpha)_{\alpha\in J}$ est une J-représentation de $\tilde{A}$ et si $x\in A_\alpha$, alors, d'après 2.2.1., $\alpha \leqslant \tilde{A}(x)$, donc $x\in N_\alpha(\tilde{A})$ et $A_\alpha\subset N_\alpha(\tilde{A})$, d'où le résultat.

Pour la partie "resp" on constate que $N_0(\tilde{A}) \cap E_0 = \emptyset$.

On note qu'une partie de a) se trouve, sous une autre forme, démontrée dans (4) et (7).

b) Si $x\in E$, il est clair que, pour tout $\alpha\in J_*^*$, $(N_\alpha(\tilde{A})\cap E_\alpha)(x) \leqslant \tilde{A}(x)$. Soit δ un majorant des $(N_\alpha(\tilde{A})\cap E_\alpha)(x)$, pour $\alpha\in J_*^*$, et posons $\tilde{A}(x) = \beta$; si $\beta = 0$ on a l'égalité voulue ; si $\beta\in J_*^*$, $x\in N_\beta(\tilde{A})$, d'où $\tilde{A}(x) = \beta = (N_\beta(\tilde{A})\cap E_\beta)(x) \leqslant \delta$; enfin, si $\beta = 1$, alors $x\in N_\alpha(\tilde{A})$ pour tout $\alpha\in J^*$: supposons $\delta < 1$; comme δ n'est pas un prédécesseur de 1, il existe $\alpha\in J^*$ tel que $\delta < \alpha$, d'où $\alpha\in J_*^*$, $x\in N_\alpha(\tilde{A})$ et $\alpha = (N_\alpha(\tilde{A})\cap E_\alpha)(x) \leqslant \delta$, ce qui est contradictoire. La fin de la démonstration est analogue à celle de a).

4.2.1. REMARQUE. - Une partie floue, contrairement à ce que l'on a vu pour les J-représentations disjointes, peut avoir plusieurs J-représentations, monotones ou non, comme le montre l'exemple donné en 2.4.1..

4.3. $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ équivaut à : pour tout $\alpha \in J$, $N_\alpha(\tilde{A}) \subset N_\alpha(\tilde{B})$.

Si $\tilde{A} \subset \tilde{B}$, $\alpha \in J$ et $x \in N_\alpha(\tilde{A})$, on a : $\alpha \leqslant \tilde{A}(x) \leqslant \tilde{B}(x)$, donc $x \in N_\alpha(\tilde{B})$.
Réciproquement, si, pour tout $\alpha \in J$, $N_\alpha(\tilde{A}) \subset N_\alpha(\tilde{B})$ et si $\tilde{A}(x) = \beta$, $x \in N_\beta(\tilde{A}) \subset N_\beta(\tilde{B})$, d'où $\tilde{A}(x) = \beta \leqslant \tilde{B}(x)$.

4.4. PRINCIPE DE DETERMINATION. Deux parties floues $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont égales si, et seulement si, pour tout $\alpha \in J$ (resp. $\alpha \in J_*$; resp. $\alpha \in J_*^\#$ si 1 n'a pas de prédécesseur dans J) $N_\alpha(\tilde{A}) = N_\alpha(\tilde{B})$.

Ceci est une conséquence de 4.2.

4.5. PROPOSITION. - *(E,J) étant une structure floue quelconque, on désigne par $(\mathcal{P}(E))^J$ l'ensemble des applications de J dans $\mathcal{P}(E)$ qui sont décroissantes et prennent la valeur E en 0.*
a) $(\mathcal{P}(E))^J$ est un treillis avec un plus petit élément et un plus grand élément.
b) Pour toute partie floue $\tilde{A}$ et pour tout $\alpha \in J$, on pose : $\phi(\tilde{A})(\alpha) = N_\alpha(\tilde{A})$. ϕ est une applications injective et croissante de $\tilde{\mathcal{P}}(E)$ dans $(\mathcal{P}(E))^J$ respectant les plus petits éléments et les plus grands éléments des treillis $\tilde{\mathcal{P}}(E)$ et $(\mathcal{P}(E))^J$. Si, en outre, J est une chaîne, ϕ est un homomorphisme de treillis.

a) Si f et g sont des éléments de $(\mathcal{P}(E))^J$ (notation introduite par T. Traczyk en (16)), on pose, pour $\alpha \in J$: $(f \vee g)(\alpha) = f(\alpha) \cup g(\alpha)$ et $(f \wedge g)(\alpha) = f(\alpha) \cap g(\alpha)$; on vérifie facilement que $(\mathcal{P}(E))^J$ est, pour $\vee$ et $\wedge$, un treillis ; le plus petit élément de ce treillis est l'application 0 telle que $0(0) = E$ et $0(\alpha) = \emptyset$, pour tout $\alpha \in J_*$; le plus grand élément est l'application 1 telle que $1(\alpha) = E$, pour tout $\alpha \in J$.

b) D'après 4.2. $\phi(\tilde{A})$ est un élément de $(\mathcal{P}(E))^J$; l'injectivité de ϕ résulte de 4.4. et la croissance de 4.3.. Il est immédiat d voir que $\phi(\emptyset) = 0$ et $\phi(E) = 1$.

On sait (cf (8)) que, si J est un treillis, pour tout $\alpha \in J$ et pour toutes parties floues $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$, $N_\alpha(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = N_\alpha(\tilde{A}) \cap N_\alpha(\tilde{B})$ et que, si J est une chaîne, on a aussi $N_\alpha(\tilde{A} \cup \tilde{B}) = N_\alpha(\tilde{A}) \cup N_\alpha(\tilde{B})$: des deux rappels précédents on déduit que, si J est une chaîne, ϕ est un homomorphisme de treillis.

4.5.1. REMARQUE. - En général ϕ n'est pas surjective, même si l'on suppose que J est une chaîne achevée ; il suffit de considérer la structure floue (E,J) où J est l'intervalle réel $[0,1]$, et $f \in (\mathscr{P}(E))^J$ telle que : $f(\alpha) = E$, pour tout $\alpha \in J^*$ et $f(1) = \emptyset$; f ne peut être que l'image de E par ϕ, ce qui n'est pas, puisque $\phi(E)(1) = N_1(E) = E$, alors que $f(1) = \emptyset$.

4.6. PROPOSITION. - *Soit* (E,J) *une structure floue telle que* J *soit une chaîne vérifiant la condition : tout* $\alpha \in J_*$ *possède un prédécesseur* $\alpha-$. *Toute partie floue* $\tilde{A}$ *possède alors une, et une seule,* J- (resp. J_*-) *représentation, à savoir* $(N_\alpha(\tilde{A}))_{\alpha \in J}$ (resp. $(N_\alpha(\tilde{A}))_{\alpha \in J_*}$).

D'après 4.2. a) $\tilde{A}$ possède une J-représentation monotone qui est $(N_\alpha(\tilde{A}))_{\alpha \in J}$: il suffit de prouver l'unicité de celle-ci. Soit $(A_\alpha)_{\alpha \in J}$ une J-représentation monotone de $\tilde{A}$; d'après 4.2. a) on a, pour tout $\alpha \in J$, $A_\alpha \subset N_\alpha(\tilde{A})$. Montrons que, pour tout $\alpha \in J$, $N_\alpha(\tilde{A}) \subset A_\alpha$; par définition on a $A_0 = E = N_0(\tilde{A})$; soient donc $\alpha \in J_*$ et $x \in N_\alpha(\tilde{A})$: d'après 2.2.1. $\tilde{A}(x) = \bigvee\{\beta/\beta \in J : x \in A_\beta\} \geqslant \alpha$; comme $\alpha \in J_*$, α admet un prédécesseur α^- et on a $\alpha^- < \tilde{A}(x)$; J étant une chaîne, il existe alors $\beta \in J$ tel que $x \in A_\beta$ et $\alpha- < \beta$, d'où $\alpha \leqslant \beta$; la J-représentation $(A_\alpha)_{\alpha \in J}$ étant monotone, il vient $A_\beta \subset A_\alpha$ et $x \in A_\alpha$, d'où finalement $N_\alpha(\tilde{A}) \subset A_\alpha$.

Pour la démonstration du "resp." on note que, dans ce qui précède, seuls les $\alpha \in J_*$ sont à considérer.

4.6.1. Avec les hypothèses de 4.6. on a $\tilde{A}(x) = \max\{\beta/\beta \in J : x \in N_\beta(\tilde{A})\}$.

4.6.2. Toute chaîne finie vérifie la condition de la proposition 4.6. : on note que, si J est une chaîne à m éléments, m entier $\geqslant 2$, $\tilde{\mathscr{P}}(E)$ est une algèbre de Post d'ordre m (cf théorème 3.5. de (15)) ; mais il existe aussi des chaînes infinies satisfaisant la condition de la proposition 4.6. : pas exemple les chaînes de type $1 + \omega^*$ ou les chaînes de type $\omega + \omega^*$.

4.6.3. En supposant que la chaîne J vérifie la condition de la proposition 4.6. et qu'en outre elle soit achevée (par exemple si J est une chaîne finie ; on note que la condition "chaîne achevée" n'est pas entraînée par l'autre condition: une chaîne de type $\omega + \omega^*$ n'est pas achevée), l'application ϕ définie en 4.5. b) est un isomorphisme de treillis ; il suffit de prouver la surjectivité de ϕ.

Soit $f \in (\mathscr{P}(E))^J$ et posons, pour tout $\alpha \in J$, $f(\alpha) = A_\alpha$; d'après 2.3.2. b) il existe une partie floue $\tilde{A}$ dont $(A_\alpha)_{\alpha \in J}$ est une J-représentation monotone : d'après 4.6. on a, pour tout $\alpha \in J$, $A_\alpha = N_\alpha(\tilde{A})$ et donc $f = \phi(\tilde{A})$.

On pourra noter l'analogie de la situation précédente avec celle des structures floues au sens de Gentilhomme ((5), (7), (8)).

Dans les deux propriétés suivantes, dont la démonstration est laissée aux soins du lecteur, (E,J) est une structure floue quelconque.

4.7.1. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $\tilde{A}$ est une partie nette.

b) Il existe $\alpha \in J$ et une partie floue $\tilde{B}$ tels que $\tilde{A} = N_\alpha(\tilde{B})$.

c) Pour tout $\alpha \in J_*$, $\tilde{A} = N_\alpha(\tilde{A})$.

d) $\tilde{A} = N_1(\tilde{A})$.

4.7.2. $\tilde{A}$ étant une partie floue, on a, pour tout $\beta \in J$:

a) $N_0(N_\beta(\tilde{A})) = E$.

b) $N_\alpha(N_\beta(\tilde{A})) = N_\beta(\tilde{A})$, pour tout $\alpha \in J_*$.

4.8. PROPOSITION. - (E,J) *étant une structure floue quelconque et* $\tilde{A}$ *une partie floue, on a :*

a) $N_\alpha(\tilde{A}) = \bigcup_{\substack{\beta \in J \\ \beta \geqslant \alpha}} L_\beta(\tilde{A})$; *en particulier,* $N_1(\tilde{A}) = L_1(\tilde{A})$.

b) $L_\alpha(\tilde{A}) = N_\alpha(\tilde{A}) \cap (\bigcap_{\substack{\beta \in J \\ \beta > \alpha}} \complement N_\beta(\tilde{A}))$; *en particulier,* $L_0(\tilde{A}) = \bigcap_{\beta \in J_*} \complement N_\beta(\tilde{A})$.

a) résulte de 3.1. et 4.1. .

b) On constate que $x \in L_\alpha(\tilde{A})$ équivaut à : $\tilde{A}(x) \geqslant \alpha$ et $\tilde{A}(x) \not> \alpha$.

4.9. PROPOSITION. - *Pour toute partie floue* $\tilde{A}$:

a) $\bigcap_{\beta \in J_*} \complement N_\beta(\tilde{A})$ *est la plus grande partie nette disjointe de* $\tilde{A}$ *; si, en outre,* J *est une chaîne,* $\bigcap_{\beta \in J_*} \complement N_\beta(\tilde{A})$ *est la plus grande partie floue disjointe de* $\tilde{A}$.

b) $N_1(\tilde{A})$ *est la plus grande partie nette contenue dans* $\tilde{A}$ *et* $\bigcup_{\beta \in J_*} N_\beta(\tilde{A})$ *est la plus petite partie nette contenant* $\tilde{A}$.

Cela résulte de 3.10 et 4.8.

5. NIVEAUX STRICTS DE FLOU ET REPRÉSENTATIONS DUALES MONOTONES D'UNE PARTIE FLOUE.

5.1. (E,J) étant une structure floue quelconque, $\tilde{A}$ une partie floue et α un élément de J, on appelle, suivant (8), *niveau strict de flou de degré* α de $\tilde{A}$ la partie nette, notée $N'_\alpha(\tilde{A})$, telle que : $N'_\alpha(\tilde{A}) = \{x / x \in E : \tilde{A}(x) > \alpha\}$.

5.1.1. On constate que, pour toute partie floue $\tilde{A}$, $N'_1(\tilde{A}) = \emptyset$ et que, pour tout $(\alpha,\beta) \in J^2$, $N'_\alpha(E_\beta) = E$, si $\alpha < \beta$, et $N'_\alpha(E_\beta) = \emptyset$ sinon.

Contrairement à ce qui se passe pour les opérateurs "niveaux de flou", les résultats pour les opérateurs "niveaux stricts de flou" sont, dans le cas où J est un treillis quelconque, souvent négatifs ; on supposera donc, tout d'abord, que (E,J) est une structure floue telle que J soit une chaîne et on mettra ensuite en évidence les résultats qui subsistent dans le cas où J n'est pas une chaîne.

5.2. PROPOSITION. - *Si* $\tilde{A}$ *est une partie floue, alors :*

a) $(N'_\alpha(\tilde{A}))_{\alpha \in J}$ (resp. $(N'_\alpha(\tilde{A}))_{\alpha \in J^*}$) *est une* J-(resp. J^*-) *représentation duale monotone de* $\tilde{A}$ *et c'est la plus petite des* J- (resp. J^*-) *représentations duales de* $\tilde{A}$ *pour la relation d'ordre définie en 2.1.7.*

b) si, dans J, 0 *n'a pas de successeur,* $(N'_\alpha(\tilde{A}))_{\alpha \in J_*^*}$ *est une* J_*^**-représentation duale monotone de* $\tilde{A}$ *et c'est la plus petite des* J_*^**-représentations de* $\tilde{A}$ *pour la relation d'ordre définie en 2.1.7.*

a) Il est clair que, si $(\alpha,\beta)\in J^2$ est tel que $\alpha \leqslant \beta$, $N'_\alpha(\tilde{A})\supset N'_\beta(\tilde{A})$. Montrons que $\tilde{A} = \bigcap_{\alpha\in J} (N'_\alpha(\tilde{A})\cup E_\alpha)$; soient $x\in E$ et $\alpha\in J$: si $x\in N'_\alpha(\tilde{A})$, $(N'_\alpha(\tilde{A})\cup E_\alpha)(x) = 1 \geqslant \tilde{A}(x)$ et, si $x \notin N'_\alpha(\tilde{A})$, alors $\alpha \not\leqslant \tilde{A}(x)$, donc $\alpha \geqslant \tilde{A}(x)$, car J est une chaîne, et on a $(N'_\alpha(\tilde{A})\cup E_\alpha)(x) = \alpha \geqslant \tilde{A}(x)$; soit γ un minorant des $(N'_\alpha(\tilde{A})\cup E_\alpha)(x)$, pour $\alpha \in J$; on a $\tilde{A}(x) = \beta$, donc $x\notin N'_\beta(\tilde{A})$ et $\tilde{A}(x) = \beta = (N'_\beta(\tilde{A})\cup E_\beta)(x) \geqslant \gamma$. Ainsi $\tilde{A}(x) = \bigwedge_{\alpha\in J} (N'_\alpha(\tilde{A})\cup E_\alpha)(x)$, ce qui établit que $(N'_\alpha(\tilde{A}))_{\alpha\in J}$ est une J-représentation duale de $\tilde{A}$. Soit enfin $(A_\alpha)_{\alpha\in J}$ une J-représentation duale de $\tilde{A}$: si $x \notin A_\alpha$ alors, d'après 2.2.1., $\tilde{A}(x) \leqslant \alpha$, donc $x\notin N'_\alpha(\tilde{A})$ et $N'(\tilde{A})\subset A_\alpha$, d'où le résultat.

Pour la partie "resp" on constate que $N'_1(\tilde{A}) \cup E_1 = E$.

b) La démonstration est analogue à celle de 4.2.b).

5.2.1. REMARQUE. - Une partie floue peut avoir plusieurs J-représentations duales, monotones ou non.

5.3. $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ équivaut à : pour tout $\alpha\in J$, $N'_\alpha(\tilde{A})\subset N'_\alpha(\tilde{B})$.

Il est clair que, si $\tilde{A}\subset\tilde{B}$, alors, pour tout $\alpha\in J$, $N'_\alpha(\tilde{A})\subset N'_\alpha(\tilde{B})$. Supposons, réciproquement, pour tout $\alpha\in J$, $N'_\alpha(\tilde{A})\subset N'_\alpha(\tilde{B})$: soit $x\in E$; $\tilde{B}(x) = \beta$, donc $x\notin N'_\beta(\tilde{B})$ et par suite $x\notin N'_\beta(\tilde{A})$, soit $\beta \not\leqslant \tilde{A}(x)$; J étant une chaîne, il vient $\tilde{A}(x) \leqslant \beta = \tilde{B}(x)$.

5.4. PRINCIPE DE DETERMINATION. - Deux parties floues $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont égales si, et seulement si, pour tout $\alpha\in J$ (resp. $\alpha \in J^*$; resp. $\alpha \in J^*_*$, si 0 n'a pas de successeur dans J) $N'_\alpha(\tilde{A}) = N'_\alpha(\tilde{B})$.

Ceci est une conséquence de 5.2.

5.5. PROPOSITION. - *(E,J) étant une structure floue telle que J soit une chaîne, on désigne par $((\mathcal{P}(E)))^J$ l'ensemble des applications de J dans $\mathcal{P}(E)$ qui sont décroissantes et prennent la valeur $\emptyset$ en 1.*

a) $((\mathcal{P}(E)))^J$ *est un treillis distributif avec un plus petit et un plus grand élément.*

b) Pour toute partie floue $\tilde{A}$ *et pour tout* $\alpha \in J$, *on pose* $\psi(\tilde{A})(\alpha) = N'_\alpha(\tilde{A})$.
ψ *est un homomorphisme injectif de treillis respectant les plus petits et les plus grands éléments des treillis* $\tilde{\mathcal{P}}(E)$ *et* $((\mathcal{P}(E)))^J$.

La démonstration est analogue à celle faite en 4.5. Pour b) il suffit de rappeler (cf. (8)) que, dans le cas où J est une chaîne, pour tout $\alpha \in J$ et pour toutes parties floues $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$, on a
$N'_\alpha(\tilde{A} \cup \tilde{B}) = N'_\alpha(\tilde{A}) \cup N'_\alpha(\tilde{B})$ et $N'_\alpha(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = N'_\alpha(\tilde{A}) \cap N'_\alpha(\tilde{B})$.

5.6. PROPOSITION. - *Soit* (E,J) *une structure floue telle que la chaîne* J *vérifie la condition : tout* $\alpha \in J^*$ *possède un successeur* α^+. *Toute partie floue* $\tilde{A}$ *possède alors une, et une seule,* J-(resp. J^*-) *représentation duale monotone, à savoir* $(N'_\alpha(\tilde{A}))_{\alpha \in J}$ (resp. $(N'_\alpha(\tilde{A}))_{\alpha \in J^*}$).

La démonstration est du même genre que celle faite en 4.6.

5.6.1. Avec les hypothèses de 5.6., on a : $\tilde{A}(x) = \min\{\beta / \beta \in J : x \notin N'_\beta(\tilde{A})\}$.

5.6.2. Toute chaîne finie vérifie la condition de la proposition 5.6. ; il en est de même des chaînes de type $\omega + 1$ ou $1 + \omega^* + \omega + 1$.

5.6.3. Sous les hypothèses de 5.6. et J étant, en outre, achevée, l'application ψ de $\tilde{\mathcal{P}}(E)$ dans $((\mathcal{P}(E)))^J$ définie en 5.5. est un isomorphisme de treillis.

La démonstration des deux propriétés suivantes est laissée aux soins du lecteur.

5.7.1. Les assertions suivantes sont équivalentes :
a) $\tilde{A}$ est une partie nette.
b) il existe $\alpha \in J$ et une partie floue $\tilde{B}$ tels que $\tilde{A} = N'_\alpha(\tilde{B})$.
c) pour tout $\alpha \in J^*$, $\tilde{A} = N'_\alpha(\tilde{A})$.

5.7.2. $\tilde{A}$ étant une partie floue, on a, pour tout $\beta \in J$:

a) $N'_1(N'_\beta(\tilde{A})) = \emptyset$.

b) $N'_\alpha(N'_\beta(\tilde{A})) = N'_\beta(\tilde{A})$, pour tout $\alpha \in J^*$.

5.8. PROPOSITION. - *Pour toute partie floue* $\tilde{A}$ *, on a :*

a) pour tout $\alpha \in J$, $N'_\alpha(\tilde{A}) = \bigcup_{\substack{\beta \in J \\ \beta > \alpha}} L_\beta(\tilde{A})$.

b) pour tout $\alpha \in J$, $N'_\alpha(\tilde{A}) \subset N_\alpha(\tilde{A})$.

c) pour tout $(\alpha,\beta) \in J^2$, *si* $\alpha < \beta$, $N_\beta(\tilde{A}) \subset N'_\alpha(\tilde{A})$.

d) pour tout $\alpha \in J$, $N'_\alpha(\tilde{A}) = \bigcup_{\substack{\beta \in J \\ \beta > \alpha}} N_\beta(\tilde{A})$.

e) pour tout $\alpha \in J$, $N_\alpha(\tilde{A}) = \bigcap_{\substack{\beta \in J \\ \beta < \alpha}} N'_\beta(\tilde{A})$.

f) pour tout $\alpha \in J$, $L_\alpha(\tilde{A}) = N_\alpha(\tilde{A}) \cap \complement N'_\alpha(\tilde{A})$.

g) si $\alpha \in J^*$ *a un successeur* α^+*, alors* $N'_\alpha(\tilde{A}) = N_{\alpha+}(\tilde{A})$ *et* $L_\alpha(\tilde{A}) = N_\alpha(\tilde{A}) \cap \complement N_{\alpha+}(\tilde{A})$.

La vérification de a), b) et c) est immédiate.

d) D'après c), on a $\bigcup_{\substack{\beta \in J \\ \beta > \alpha}} N_\beta(\tilde{A}) \subset N'_\alpha(\tilde{A})$; soit $x \in N'_\alpha(\tilde{A})$: $\tilde{A}(x) = \beta > \alpha$, donc $x \in N_\beta(\tilde{A})$ avec $\beta > \alpha$ et $N'_\alpha(\tilde{A}) \subset \bigcup_{\substack{\beta \in J \\ \beta > \alpha}} N_\beta(\tilde{A})$.

e) D'après c), on a $N_\alpha(\tilde{A}) \subset \bigcap_{\substack{\beta \in J \\ \beta < \alpha}} N'_\beta(\tilde{A})$; soit $x \in \bigcap_{\substack{\beta \in J \\ \beta < \alpha}} N'_\beta(\tilde{A})$; alors, pour tout $\beta < \alpha$, $\beta < \tilde{A}(x) = \gamma$; $x \notin N'_\gamma(\tilde{A})$, donc nécessairement $\gamma \nless \alpha$ et, comme J est une chaîne, $\alpha \leqslant \gamma$, d'où $x \in N_\alpha(\tilde{A})$.

f) On constate que $\tilde{A}(x) = \alpha$ équivaut à $\alpha \leqslant \tilde{A}(x)$ et $\alpha \nless \tilde{A}(x)$.

g) résulte de f).

5.9. PROPOSITION. - *Pour toute partie floue* $\tilde{A}$:

a) $\complement N'_0(\tilde{A})$ *est la plus grande partie floue disjointe de* $\tilde{A}$.

b) $N'_0(\tilde{A})$ *est la plus petite partie nette contenant* $\tilde{A}$.

Cela résulte de 3.10. et de 5.8.

5.10 PROPOSITION. - *Pour toute partie floue* $\tilde{A}$:

a) si $(A_\alpha)_{\alpha \in J}$ *est une J-représentation monotone de* $\tilde{A}$, *on a, pour tout* $\alpha \in J$: $N'_\alpha(\tilde{A}) \subset A_\alpha \subset N_\alpha(\tilde{A})$.

b) si $(B_\alpha)_{\alpha \in J}$ *est une J-représentation duale monotone de* $\tilde{A}$, *on a, pour tout* $\alpha \in J$: $N'_\alpha(\tilde{A}) \subset B_\alpha \subset N_\alpha(\tilde{A})$.

a) D'après 4.2. on a, pour tout $\alpha \in J$, $A_\alpha \subset N_\alpha(\tilde{A})$; soit $x \in N'_\alpha(\tilde{A})$: alors, d'après 2.2.1., $\alpha < \tilde{A}(x) = \bigvee\{\beta/\beta \in J : x \in A_\beta\}$; J étant une chaîne, il existe $\beta \in J$ tel que $x \in A_\beta$ et $\alpha < \beta$; la J-représentation $(A_\alpha)_{\alpha \in J}$ étant monotone, on a $A_\alpha \supset A_\beta$, donc $x \in A_\alpha$ et $N'_\alpha(\tilde{A}) \subset A_\alpha$.

b) La démonstration est la duale de la précédente.

5.10.1. Avec les hypothèses précédentes on ne peut affirmer que, pour tout $\alpha \in J$, $B_\alpha \subset A_\alpha$. Soient, par exemple, J l'intervalle réel $[0,1]$ et la partie floue $E\frac{1}{2}$: $(N_\alpha(E\frac{1}{2}))_{\alpha \in J}$ est une J-représentation monotone de $E\frac{1}{2}$, mais c'est aussi une J-représentation duale monotone de $E\frac{1}{2}$; on a $N_{\frac{1}{2}}(E\frac{1}{2}) = E$ et $N'_{\frac{1}{2}}(E\frac{1}{2}) = \emptyset$, d'où la remarque.

5.11. Parmi les propriétés précédemment établies, nous allons voir celles qui subsistent quand J est un treillis quelconque.

5.11.1. Dans les démonstrations de 5.2., 5.3., 5.4., 5.5. et 5.6. on se sert du fait que J est une chaîne ; soit, par exemple, (E,J) la structure floue discrète telle que E = {a,b} et telle que J soit le treillis de Boole à quatre éléments $J = \{0,\alpha,\beta,1\}$: on considère les parties floues $\tilde{A} = \alpha\beta$ et $\tilde{B} = \beta\alpha$; $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont incomparables pour l'inclusion et, pourtant, les niveaux stricts de flou de mêmes degrés sont égaux :

$$N'_0(\tilde{A}) = N'_0(\tilde{B}) = 11,\ N'_\alpha(\tilde{A}) = N'_\alpha(\tilde{B}) = 00,\ N'_\beta(\tilde{A}) = N'_\beta(\tilde{B}) = 00\ ,\ N'_1(\tilde{A}) = N'_1(\tilde{B}) = 00.$$

$(N'_\gamma(\tilde{A}))_{\gamma \in J}$ n'est donc pas une J-représentation duale monotone de $\tilde{A}$, mais de $\emptyset$ et il en est de même de $(N'_\gamma(\tilde{B}))_{\gamma\in J}$ pour $\tilde{B}$; on constate toutefois que $(A_\gamma)_{\gamma\in J}$ où $A_0 = 11$, $A_\alpha = 01$, $A_\beta = 10$, $A_1 = 00$ est une J-représentation duale monotone de $\tilde{A}$ et que c'est la seule.

5.11.2. Si J n'est pas une chaîne, le treillis $((\mathscr{P}(E)))^J$ considéré en 5.5. n'est pas nécessairement distributif, l'application ψ n'est pas injective (voir exemple donné en 5.11.1.) et ψ n'est pas un homomorphisme de treillis en général. En 5.6. on utilise le fait que J est une chaîne ; 5.7.1. et 5.7.2. sont vraies si l'on suppose que J est un treillis quelconque, ainsi que 5.8. a), b), c), d), f), mais pour 5.8. e) on a seulement $N_\alpha(\tilde{A}) \subset \bigcap_{\substack{\beta\in J\\ \beta<\alpha}} N'_\beta(\tilde{A})$; en 5.8. g) on se sert de l'hypothèse que J est une chaîne.

Si J est un treillis quelconque, on a, pour 5.9. a) : $N'_0(\tilde{A})$ est la plus grande partie nette disjointe de $\tilde{A}$; 5.9. b) demeure vraie dans le cas général ; la propriété 5.10. n'est valable que dans le cas où J est une chaîne.

6. STRUCTURES FLOUES ET ALGÈBRES DE POST GÉNÉRALISÉES DE TYPE J.

Dans tout ce paragraphe, on désigne par P un treillis distributif avec un plus petit élément, 0, et un plus grand élément, 1, par C(P) l'algèbre de Boole des éléments complémentés de P et par J une chaîne avec un plus petit élément, 0, et un plus grand élément, 1, avec $0 < 1$.

6.1. T. Traczyk, en tenant compte du fait que toute algèbre de Post d'ordre **m**, m entier $\geqslant 2$, est un P_0-treillis dans lequel tout élément admet une unique représentation monotone (cf (15), a généralisé en (16) la notion d'algèbre de Post; la définition suivante est celle que H. Sawicka (14) a déduite de la définition des algèbres de Post directement généralisées introduite en (16) par T. Traczyk.

6.1.1. On dit que P est *une algèbre de Post généralisée de type* J s'il **existe** une famille $(e_\alpha)_{\alpha \in J}$ d'éléments de P et une famille $(D_\alpha)_{\alpha \in J}$ d'opérations **unaires** définies sur P telles que les conditions suivantes soient satisfaites :

P1 $e_0 = 0$, $e_1 = 1$ et, si $\alpha \leqslant \beta$ dans J , $e_\alpha \leqslant e_\beta$;

P2 pour tout $x \in P$, $D_0(x) = 1$, $D_\alpha(x) \in C(P)$ pour tout $\alpha \in J$ et, si $\alpha \leqslant \beta$ dans J, $D_\alpha(x) \geqslant D_\beta(x)$;

P3 pour tout $x \in P$, $x = \bigvee_{\alpha \in J} (D_\alpha(x) \wedge e_\alpha)$;

P4 si $(a_\alpha)_{\alpha \in J}$ est une famille d'éléments de C(P) tels que $a_0 = 1$ et, si $\alpha \leqslant \beta$ dans J, $a_\alpha \geqslant a_\beta$, alors $x = \bigvee_{\alpha \in J} (a_\alpha \wedge e_\alpha)$ existe dans P et, pour tout $\alpha \in J$, $a_\alpha = D_\alpha(x)$.

On note alors $P = < (e_\alpha)_{\alpha \in J}, C(P) >$.

6.1.2. On remarque que toute algèbre de Post d'ordre m, m entier $\geqslant 2$, est une algèbre de Post généralisée de type J, où J est la chaîne des entiers naturels $[0, m-1]$, si on pose, pour tout $x \in P$, $D_0(x) = 1$.

6.2. La notion de P_0-treillis introduite par T. Traczyk en (15) a été généralisée par H. Sawicka en (14).

6.2.1. P est un *P_0-treillis de type* J s'il existe une famille $(e_\alpha)_{\alpha \in J}$ d'éléments de P telle que :

Q1 $e_0 = 0$, $e_1 = 1$, et, si $\alpha \leqslant \beta$ dans J, $e_\alpha \leqslant e_\beta$.

Q_2 pour tout $x \in P$, $x = \bigvee_{\alpha \in J} (x_\alpha \wedge e_\alpha)$, où la famille $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ est telle que :

(A) pour tout $\alpha \in J$, $x_\alpha \in C(P)$, $x_0 = 1$ et, si $\alpha \leqslant \beta$ dans J, $x_\alpha \geqslant x_\beta$.

Q3 si $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ est une famille d'éléments de P vérifiant la condition (A), alors $x = \bigvee_{\alpha \in J} (x_\alpha \wedge e_\alpha)$ existe dans P.

Toute algèbre de Post généralisée de type J étant un P_0-treillis de type J, H. Sawicka, en (14), caractérise les P_0-treillis de type J qui sont des algèbres de Post généralisées de type J.

6.2.2. THEOREME. - *Un P_0-treillis de type J est une algèbre de Post généralisée de type J si, et seulement si, la condition suivante est satisfaite :*

Q4 *si* $a \in C(P)$ et, *si, pour* $\beta \in J_*$, $a \wedge e_\beta \leqslant \bigvee_{\substack{\alpha \in J \\ \alpha < \beta}} e_\alpha$, *alors* $a = 0$.

6.3. (E,J) étant une structure floue telle que J soit une chaîne, on se propose de déterminer les treillis $\tilde{\mathscr{P}}(E)$ qui sont des algèbres de Post généralisées de type J.

6.3.1. PROPOSITION. - *Le treillis $\tilde{\mathscr{P}}(E)$ est un P_0-treillis de type J si, et seulement si, la chaîne J est achevée.*

On sait, d'après 1.3., que $\tilde{\mathscr{P}}(E)$ est un treillis distributif avec un plus petit élément, $\emptyset$, et un plus grand élément, E, et, en posant, pour tout $\alpha \in J$, $e_\alpha = E_\alpha$ et, en tenant compte de 1.6. et de 4.2., que $\tilde{\mathscr{P}}(E)$ satisfait les conditions Q1 et Q2 ; en outre, si la chaîne J est achevée, la condition Q3 est aussi vérifiée d'après 2.3.2..

Supposons, réciproquement, que $\tilde{\mathscr{P}}(E)$ soit un P_0-treillis de type J ; soit I une partie quelconque de J ; on considère l'idéal (au sens des treillis) de J engendré par I, qu'on note $\langle I \rangle$:

$$\langle I \rangle = \{\alpha / \alpha \in J : \text{il existe } \beta \in I,\ \alpha \leqslant \beta\}.$$

Montrons que, si $\gamma = \bigvee \langle I \rangle$ existe dans J, alors $\bigvee \langle I \rangle = \bigvee I$; il est clair que γ est un majorant de I ; soit δ un autre majorant de I ; si $\alpha \in \langle I \rangle$, il existe $\beta \in I$ tel que $\alpha \leqslant \beta$ et donc $\alpha \leqslant \delta$; ainsi δ majore $\langle I \rangle$ et $\gamma \leqslant \delta$, d'où $\gamma = \bigvee I$.

Soit $(A_\alpha)_{\alpha \in J}$ la famille de parties nettes de E telle que : $A_\alpha = E$, si $\alpha \in \langle I \rangle$, et $A_\alpha = \emptyset$ sinon. La famille $(A_\alpha)_{\alpha \in J}$ satisfait la condition (A) de 6.2.1. : en effet $0 \in \langle I \rangle$, donc $A_0 = E$; d'autre part, si $\alpha \leqslant \beta$ dans J, ou $\alpha, \beta \in \langle I \rangle$ et $A_\alpha = A_\beta = E$, ou $\alpha, \beta \notin \langle I \rangle$ et $A_\alpha = A_\beta = \emptyset$, ou $\alpha \in \langle I \rangle$, $\beta \notin \langle I \rangle$ et $A_\alpha = E$, $A_\beta = \emptyset$ (ce sont les seuls cas possibles, car, comme $\alpha \leqslant \beta$, si $\beta \in \langle I \rangle$, alors $\alpha \in \langle I \rangle$). $\tilde{\mathscr{P}}(E)$ étant un P_0-treillis, d'après Q3, $\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in J} (A_\alpha \cap E_\alpha)$ existe dans $\tilde{\mathscr{P}}(E)$. Soit $x_0 \in E$ et montrons que $\tilde{A}(x_0) = \vee \langle I \rangle$; on a, pour tout $\alpha \in \langle I \rangle$, $(A_\alpha \cap E_\alpha)(x_0) = E_\alpha(x_0) = \alpha \leqslant \tilde{A}(x_0)$; soit β un majorant de $\langle I \rangle$ et considérons la partie floue E_β ; on a, pour tout $\alpha \in \langle I \rangle$, $A_\alpha \cap E_\alpha = E_\alpha \subset E_\beta$ et, pour tout $\alpha \notin \langle I \rangle$, $A_\alpha \cap E_\alpha = \emptyset \subset E_\beta$; par suite, $\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in J} (A_\alpha \cap E_\alpha) \subset E_\beta$, d'où, en particulier, $\tilde{A}(x_0) \leqslant \beta$, ce qui prouve que $\tilde{A}(x_0) = \vee \langle I \rangle = \vee I$

6.3.2. THEOREME. - *Soit (E,J) une structure floue telle que J soit une chaîne ; le treillis $\tilde{\mathscr{P}}(E)$ est une algèbre de Post généralisée de type J, en posant, pour tout $\alpha \in J$, $e_\alpha = E_\alpha$ et $D_\alpha = N_\alpha$, si, et seulement si, J satisfait les deux conditions suivantes :*

a) J est achevée ;

b) tout $\alpha \in J_*$ possède un prédécesseur α^-.

Si J satisfait a) et b), $\tilde{\mathscr{P}}(E)$ est une algèbre de Post généralisée de type J en tenant compte de 1.3. , 1.6 et 4.6.

Réciproquement, supposons que $\tilde{\mathscr{P}}(E)$ soit une algèbre de Post généralisée de type J ; $\tilde{\mathscr{P}}(E)$ étant un P_0-treillis de type J, il vient, d'après 6.3. 1., que J vérifie la condition a).

Pour prouver b), supposons qu'il existe $\beta \in J_*$ sans prédédesseur ; alors $\bigcup_{\substack{\alpha \in J \\ \alpha < \beta}} E_\alpha = E_\beta$: E_β contient tous les E_α, pour $\alpha < \beta$, donc aussi leur réunion ; soit, par ailleurs, $\tilde{A}$ une partie floue contenant tous les E_α, pour $\alpha < \beta$, alors $E_\beta \subset \tilde{A}$: en effet, sinon, pour un $x \in E$, J étant une chaîne, on aurait $\tilde{A}(x) < \beta$; $\tilde{A}(x)$ n'étant pas le prédécesseur de β, il existerait α tel que $\tilde{A}(x) < \alpha < \beta$, d'où $\tilde{A}(x) < E_\alpha(x)$, ce qui est contradictoire Ainsi $E_\beta \subset \tilde{A}$ et $E_\beta = \bigcup_{\substack{\alpha \in J \\ \alpha < \beta}} E_\alpha$. On a, alors, pour E : $E \cap E_\beta = E_\beta = \bigcup_{\substack{\alpha \in J \\ \alpha < \beta}} E_\alpha$ avec $E \neq \emptyset$, ce qui contredit la condition Q4 de 6.2.2.

6.4. Pour terminer ce paragraphe, nous allons montrer que, si P est une algèbre de Post généralisée de type J, où J est une chaîne satisfaisant les conditions a) et b) de 6.3.2., alors P est isomorphe à une sous-algèbre de Post d'une algèbre de Post généralisée $\tilde{\mathscr{P}}(X)$ de type J, où X est un ensemble convenable.

6.4.1. Si $P = \langle (e_\alpha)_{\alpha \in J}, C(P) \rangle$ et $P' = \langle (e'_\alpha)_{\alpha \in J}, C(P') \rangle$ sont des algèbres de Post généralisées de type J, on dit que l'application f de P dans P' est un *homomorphisme d'algèbres de Post généralisées de type* J si f est un homomorphisme de treillis tel que :

pour tout $a \in J$, $f(e_\alpha) = e'_\alpha$; pour tout $x \in P$, pour tout $a \in J$, $f(D_\alpha(x)) = D'_\alpha(f(x))$.

6.4.2. On dit qu'une partie non vide P' de l'algèbre de Post généralisée de type J $P = \langle (e_\alpha)_{\alpha \in J}, C(P) \rangle$ en est une *sous-algèbre de Post généralisée de type* J, si l'injection canonique de P' dans P est un homomorphisme au sens de 6.4.1..

6.4.3. LEMME. - *Soit* J *une chaîne satisfaisant les conditions a) et b) de 6.3.2. ; l'ensemble des idéaux* $\mathfrak{J}(J)$ *non vides de* J *est une chaîne, pour l'inclusion , isomorphe à* J.

On vérifie facilement que, pour l'inclusion, $\mathfrak{J}(J)$ est une chaîne avec un plus petit élément {0} et un plus grand J.

Soit l'application τ de J dans $\mathfrak{J}(J)$ telle que, pour $\alpha \in J$, $\tau(\alpha) = [0,\alpha]$. Il est clair que τ est une injection croissante ; pour démontrer que τ est un isomorphisme d'ensembles ordonnés il suffit de prouver que τ est surjective. Soit $I \in \mathfrak{J}(J)$; J étant achevée, soit $\alpha = \bigvee I$ et montrons que $I = [0,\alpha] = \tau(\alpha)$. Si $\alpha = 0$, alors $\alpha \in I$ et, si $\alpha \in J_*$, α possède un prédécesseur $\alpha-$; on a $\alpha- < \alpha = \bigvee I$: J étant une chaîne, il existe $\beta \in I$ tel que $\alpha- < \beta \leq \alpha$, d'où, par définition du prédécesseur, $\beta = \alpha \in I$; comme $\alpha \in I$, on a $[0,\alpha] \subset I$; inversement, si $\beta \in I$, alors $\beta \leq \alpha = \bigvee I$ d'où $\beta \in [0,\alpha]$.

Les chaînes J et $\mathfrak{I}(J)$ ayant le même type d'ordre sont identifiées.

6.4.4. THEOREME DE REPRESENTATION. - *Soit* $P = \langle (e_\alpha)_{\alpha \in J}, C(P) \rangle$ *une algèbre de Post généralisée de type J, où J est une chaîne achevée telle que tout* $\alpha \in J_*$ *a un prédécesseur* α^-*; on désigne par X l'ensemble des ultrafiltres de l'algèbre de Boole* $C(P)$ *. P est alors isomorphe à une sous-algèbre de Post généralisée de type J de l'algèbre de Post généralisée de type J* $\tilde{\mathcal{P}}(X) = \langle (X_\alpha)_{\alpha \in J}, \mathcal{P}(X) \rangle$.

La démonstration suivante s'inspire de (9).

a) Soit σ l'isomorphisme de Stone :

$$\sigma : C(P) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

$$x \longmapsto \sigma(x) = \{U/U \in X : x \in U\} .$$

Soit f l'application de P dans $\tilde{\mathcal{P}}(X) = \mathfrak{I}(J)^X$ définie par :

$$f : P \longrightarrow \tilde{\mathcal{P}}(X)$$

$$x \longmapsto f(x) = \tilde{I}_x$$

où $\tilde{I}_x : X \longrightarrow \mathfrak{I}(J)$

$$U \longmapsto \tilde{I}_x(U) = \{\alpha/\alpha \in J : D_\alpha(x) \in U\}.$$

On note que, pour tout $U \in X$, $\tilde{I}_x(U)$ est bien un idéal non vide de J : en effet, d'après P2 (6.1.1.), comme $D_0(x) = 1 \in U$, $0 \in \tilde{I}_x(U)$ et, si $\beta \in \tilde{I}_x(U)$, c'est-à-dire $D_\beta(x) \in U$, et $\alpha \leq \beta$, on a $D_\alpha(x) \geq D_\beta(x)$, ce qui entraîne, puisque U est un filtre, $D_\alpha(x) \in U$, soit $\alpha \in \tilde{I}_x(U)$.

b) On sait, d'après le lemme 1.1 de (14), que pour tout $x \in C(P)$, $D_0(x) = 1$ et $D_\alpha(x) = x$ pour tout $\alpha \in J_*$. Soit donc $x \in C(P)$; on a : $f(x) = \tilde{I}_x$ où, pour tout $U \in X$, $\tilde{I}_x(U) = \{0\} \cup \{\alpha/\alpha \in J_* : x \in U\}$ et, par suite, $\tilde{I}_x(U) = \{0\}$, si $x \notin U$, et $\tilde{I}_x(U) = J$, si $x \in U$; ainsi $\tilde{I}_x$ est une partie nette de X ; on constate, par ailleurs, que : $U \in \tilde{I}_x$ équivaut à $U \in \sigma(x)$ et, par suite, que $f(x) = \tilde{I}_x = \sigma(x)$, ce qui signifie que f prolonge l'isomorphisme de Stone σ.

c) Montrons que, pour tout $\alpha \in J$ et tout $x \in P$, $f(D_\alpha(x)) = N_{\tau\alpha}(fx)) = N_\alpha(f(x))$ (quand on identifie $\tau(\alpha)$ à α (6.4.3.)).
On sait que $D_\alpha(x) \in C(P)$ et donc, d'après ce qui précède,
$f(D_\alpha(x)) = \sigma(D_\alpha(x)) = \{U/U \in X : D_\alpha(x) \in U\}$; d'autre part, si $U \in X$, on a :

$$
\begin{aligned}
U \in N_\alpha(f(x)) &\longmapsto \tilde{I}_x(U) \supset \alpha = \tau(\alpha) \\
&\longmapsto \tilde{I}_x(U) \supset [0,\alpha] \\
&\longmapsto \alpha \in \tilde{I}_x(U) \\
&\longmapsto D_\alpha(x) \in U
\end{aligned}
$$

et, donc, $f(D_\alpha(x)) = N_\alpha(f(x))$.

d) On déduit de b) et c) que f est une injection ; en effet, si $(x,y) \in P^2$ est tel que $f(x) = f(y)$, alors, pour tout $\alpha \in J$, $N_\alpha(f(x)) = N_\alpha(f(y))$ donc $f(D_\alpha(x)) = f(D_\alpha(y))$; comme f prolonge l'isomorphisme de Stone σ, on a, pour tout $\alpha \in J$, $\sigma(D_\alpha(x)) = \sigma(D_\alpha(y))$, d'où $D_\alpha(x) = D_\alpha(y)$, ce qui entraîne, d'après la condition P3 de 6.1.1., $x = y$.

e) Soit $X_{\tau(\alpha)} = X_\alpha : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathfrak{I}(J) \\ U \longmapsto [0,\alpha] \end{array}$ et montrons que $f(e_\alpha) = X_\alpha$.

On sait, d'après le lemme 1.1. de (14), que $D_\beta(e_\alpha) = 1$, si $\beta \leqslant \alpha$, et $D_\beta(e_\alpha) = 0$, si $\beta > \alpha$; par suite, si $U \in X$, on a :
$f(e_\alpha)(U) = \{\beta/\beta \in J : D_\beta(e_\alpha) \in U\} = \{\beta/\beta \in J : D_\beta(e_\alpha) = 1\}$, car un ultrafiltre de C(P) ne contient pas 0, et, donc, $f(e_\alpha)(U) = [0,\alpha]$.

f) On établit enfin que f est un homomorphisme de treillis. Prouvons, par exemple, que, pour tout $(x,y) \in P^2$, $f(x \vee y) = f(x) \cup f(y)$; d'après 4.4., il suffit de montrer que, pour tout $\alpha \in J$, $N_\alpha(f(x \vee y)) = N_\alpha(f(x) \cup f(y))$; sachant que N_α et D_α sont des homomorphismes de treillis (4.5., 5.5. et lemme 1.1. de (14)), que f prolonge σ et, en tenant compte de c), on a :
$N_\alpha(f(x \vee y)) = \sigma(D_\alpha(x \vee y)) = \sigma(D_\alpha(x)) \cup \sigma(D_\alpha(y)) = N_\alpha(f(x) \cup f(y))$.

6.4.5. D'après 6.1.2. et 6.4.4. toute algèbre de Post d'ordre m, m entier $\geqslant 2$, est isomorphe à une sous-algèbre de Post d'ordre m d'une algèbre de Post d'ordre m de la forme $\tilde{\mathscr{P}}(X)$; pour m = 2 on a le théorème de représentation de Stone pour les algèbres de Boole.

6.4.6. COROLLAIRE. - *Si* P *est une algèbre de Post finie d'ordre* m, m *entier* $\geqslant 2$ *alors* P *est isomorphe à l'algèbre de Post* $\tilde{\mathscr{P}}(X) = J^X$, *où* J *est la chaîne des entiers naturels* $[0,m-1]$ *et où* X *est l'ensemble des ultrafiltres de l'algèbre de Boole des éléments complémentés de* P; *si* Card(X) = n, *alors* $\mathrm{Card}(P) = m^n$.

Si P est une algèbre de Post finie, C(P) est une algèbre de Boole finie et l'isomorphisme de Stone σ est alors une surjection de C(P) sur $\mathscr{P}(X)$; l'application f, définie en 6.4.4. est alors, elle-même, surjective. En effet soit $\hat{A} \in \tilde{\mathscr{P}}(X)$; on considère $(N_\alpha(\hat{A}))_{\alpha \in J}$; σ étant surjective, il existe, pour tout $\alpha \in J$, $a_\alpha \in C(P)$ tel que $\sigma(a_\alpha) = N_\alpha(\tilde{A})$; σ étant un isomorphisme, on a $a_0 = 1$ et pour tout $(\alpha,\beta) \in J^2$, si $\alpha < \beta$, alors $a_\alpha \geqslant a_\beta$; soit $x = \bigvee_{\alpha \in J}(a_\alpha \wedge e_\alpha)$, on a :

$$f(x) = \bigcup_{\alpha \in J} (f(a_\alpha) \cap f(e_\alpha)) = \bigcup_{\alpha \in J} (\sigma(a_\alpha) \cap X_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in J} (N_\alpha(\tilde{A}) \cap X_\alpha)$$

et donc, d'après 4.2., $f(x) = \tilde{A}$.

Comme $\tilde{\mathscr{P}}(X) = J^X$, où J est une chaîne à m éléments, il vient que $\mathrm{Card}(P) = \mathrm{Card}(\tilde{\mathscr{P}}(X)) = m^n$. On retrouve ainsi le résultat démontré par P.C. Rosenbloom en (12) (cf. également (1)).

7. STRUCTURES FLOUES ET ALGÈBRES DE POST D'ORDRE $\omega+1$

Dans tout ce paragraphe, on désigne par J une chaîne de type $\omega+1$, par 0 le plus petit élément de J, par 1 le plus grand élément de J et par α^+ le successeur de $\alpha \in J^*$.

7.1. H. Rasiowa, en (10), a généralisé la notion d'algèbre de Post d'ordre m, m entier $\geqslant 2$, de la manière suivante.

On appelle *algèbre de Post d'ordre* $\omega + 1$ une algèbre abstraite $P = \langle P, 1, \vee, \wedge, \Rightarrow, \neg, (D_\alpha)_{\alpha \in J_*^*}, (e_\alpha)_{\alpha \in J} \rangle$ telle que les axiomes suivants soient satisfaits :

p_0 $\langle P, 1, \vee, \wedge, \Rightarrow, \neg \rangle$ est une algèbre pseudo-booléienne.

p_1 pour tout $\alpha \in J_*^*$, D_α est un homomorphisme de treillis.

p_2 pour tout $\alpha \in J_*^*$, pour tout $(a,b) \in P^2$, $D_\alpha(a \Rightarrow b) = \bigwedge_{0<\beta\leqslant\alpha} (D_\beta(a) \Rightarrow D_\beta(b))$.

p_3 pour tout $\alpha \in J_*^*$, pour tout $a \in P$, $D_\alpha(\neg a) = \neg D_{0+}(a)$.

p_4 pour tout $(\alpha,\beta) \in J_*^* \times J_*^*$, pour tout $a \in P$, $D_\alpha(D_\beta(a)) = D_\beta(a)$.

p_5 pour tout $(\alpha,\beta) \in J_*^* \times J$, $D_\alpha(e_\beta) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha \leqslant \beta \\ \neg 1, & \text{si } \alpha > \beta \end{cases}$.

p_6 pour tout $(\alpha,\beta) \in J_*^* \times J_*^*$, si $\alpha \leqslant \beta$, alors, pour tout $a \in P, D_\alpha(a) \geqslant D_\beta(a)$.

p_7 $e_1 = 1$.

p_8 pour tout $a \in P$, $D_{0+}(a) \vee \neg D_{0+}(a) = 1$.

p_9 pour tout $a \in P$, $a = \bigvee_{\alpha \in J_*^*} (D_\alpha(a) \wedge e_\alpha)$.

7.2. THEOREME. - *Si* (E,J) *est une structure floue telle que* J *soit une chaîne de type* $\omega + 1$, *alors* $\tilde{\mathcal{P}}(E) = \langle \tilde{\mathcal{P}}(E), E, \cup, \cap, \Rightarrow, \neg, (N_\alpha)_{\alpha \in J_*^*}, (E_\alpha)_{\alpha \in J} \rangle$ *est une algèbre de Post d'ordre* $\omega + 1$.

p_0 résulte de 1.7., p_1 de 4.5, p_4 de 4.7.2., p_5 de 4.1.1., p_6 et p_9 de 4.2., p_7 de 1.6.1. et p_8 de 1.7.1. et de 4.1..

Montrons p_3 ; si $\alpha \in J_*^*$, on a : $x \in N_\alpha(\neg \tilde{A})$ si, et seulement si, $(\neg \tilde{A})(x) \geqslant \alpha$ ce qui, en tenant compte du fait que $\alpha > 0$ et $\neg \tilde{A}$ est une partie nette, équivaut à $(\neg \tilde{A})(x) = 1$; d'après 3.1.2. on a donc $N_\alpha(\neg \tilde{A}) = L_0(\tilde{A})$; or $x \in L_0(\tilde{A})$ si, et seulement si, $x \nsucc 0^+$, soit $x \in \complement N_{0+}(\tilde{A}) = \neg N_{0+}(\tilde{A})$, d'après 1.7.1. et 4.1. .

Vérifions l'axiome p_2 ; soient $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ des parties floues et $\alpha \in J_*^*$.

Soit $x \in N_\alpha(\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B})$, donc $\alpha \leq (\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B})(x)$, et soit β tel que $0<\beta\leq\alpha$; si $\tilde{A}(x) \leq \tilde{B}(x)$: ou $\beta \leq \tilde{A}(x)$ et $x \in N_\beta(\tilde{B})$, ou $\beta \not\leq \tilde{A}(x)$ et $x \notin N_\beta(\tilde{A})$, soit $x \in \complement N_\beta(\tilde{A})$; si $\tilde{B}(x) < \tilde{A}(x)$; alors $\beta \leq \alpha \leq \tilde{B}(x) = (\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B})(x)$ et $x \in N_\beta(\tilde{B})$. Ainsi $x \in \bigcap_{0<\beta\leq\alpha} (\complement N_\beta(\tilde{A}) \cup N_\beta(\tilde{B})) = \bigcap_{0<\beta\leq\alpha} (N_\beta(\tilde{A}) \Rightarrow N_\beta(\tilde{B}))$ en utilisant 1.7.2. et 4.1.

Pour l'inclusion inverse, on passe au complémentaire : soit $x \notin N_\alpha(\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B})$; alors $\alpha \not\leq (\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B})(x)$ et donc $(\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B})(x) < \alpha < 1$; ainsi on a $\tilde{A}(x) > \tilde{B}(x)$ et $(\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B})(x) = \tilde{B}(x)$; soit $\gamma = \tilde{A}(x)$: si $\gamma \leq \alpha$, alors $\tilde{B}(x) < \gamma$ et

$x \notin \complement N_\gamma(\tilde{A}) \cup N_\gamma(\tilde{B})$, et, si $\alpha < \gamma$, on a $x \notin \complement N_\alpha(\tilde{A}) \cup N_\alpha(\tilde{B})$. Finalement

$x \notin \bigcap_{0<\beta\leq\alpha} (\complement N_\beta(\tilde{A}) \cup N_\beta(\tilde{B}))$.

7.3. Montrons que, réciproquement, toute algèbre de Post d'ordre $\omega + 1$ est isomorphe à une sous-algèbre de Post d'ordre $\omega + 1$ d'une algèbre de Post d'ordre $\omega + 1$ de la forme $\tilde{\mathscr{P}}(X)$, où X est un ensemble convenable.

7.3.1. Si $P = \langle P, 1, \vee, \wedge, \Rightarrow, \neg, (D_\alpha)_{\alpha \in J_*^*}, (e'_\alpha)_{\alpha \in J} \rangle$ et $P' = \langle P', 1, \vee, \wedge, \Rightarrow, \neg, (D'_\alpha)_{\alpha \in J_*^*}, (e_\alpha)_{\alpha \in J} \rangle$ sont des algèbres de Post d'ordre $\omega + 1$, on dit que l'application f de P dans P' est un *homomorphisme d'algèbres de Post d'ordre* $\omega + 1$ si f est un homomorphisme de treillis tel que :

pour tout $(a,b) \in P^2$, $f(a \Rightarrow b) = f(a) \Rightarrow f(b)$;

pour tout $a \in P, f(\neg a) = \neg f(a)$;

pour tout $a \in P$, pour tout $\alpha \in J_*^*$, $f(D_\alpha(a)) = D'_\alpha(f(a))$;

pour tout $\alpha \in J$, $f(e_\alpha) = e'_\alpha$.

7.3.2. La notion de sous-algèbre de Post d'ordre $\omega + 1$ est définie comme en 6.4.2.

7.3.3. LEMME. - *Soit J une chaîne de type* $\omega + 1$*; l'ensemble* $\mathfrak{J}(J_*^*)$ *des idéaux, y compris* $\emptyset$*, de* J_*^* *est une chaîne, pour l'inclusion, de type* $\omega + 1$.

Il est facile de voir que $\mathfrak{J}(J_*^*)$ est une chaîne pour l'inclusion, avec $\emptyset$ pour plus petit élément et J_*^* pour plus grand élément.

Soit τ l'application de J dans $\mathfrak{I}(J_*^*)$ telle que, si $\alpha \in J^*$, $\tau(\alpha) =]0,\alpha]$ et $\tau(1) = J_*^*$. Il est immédiat de constater que τ est une application injective et croissante ; il reste, comme en 6.4.3. à vérifier que τ est surjective. Soit I un idéal non vide de J_*^*, si I est majoré, comme la chaîne J_*^* est isomorphe à la chaîne des entiers naturels, I a un plus grand élément α et $I =]0,\alpha] = \tau(\alpha)$; si I n'est pas majoré, alors $I = J_*^* = \tau(1)$.

On peut alors identifier les chaînes J et $\mathfrak{I}(J_*^*)$.

7.3.4. THEOREME DE REPRESENTATION. - *Soit* $P = \langle P, 1, \vee, \wedge, \Rightarrow, \neg, (D_\alpha)_{\alpha \in J_*^*}, (e_\alpha)_{\alpha \in J} \rangle$ *une algèbre de Post d'ordre* $\omega + 1$*; X désignant l'ensemble des ultrafiltres de l'algèbre de Boole* C(P), P *est isomorphe à une sous-algèbre de Post d'ordre* $\omega + 1$ *de l'algèbre de Post d'ordre* $\omega + 1$

$$\tilde{\mathcal{P}}(X) = J^X = \langle \tilde{\mathcal{P}}(X), X, \cup, \cap, \Rightarrow, \neg, (N_\alpha)_{\alpha \in J_*^*}, (X_\alpha)_{\alpha \in J} \rangle .$$

Soit σ, comme en 6.4.4, l'isomorphisme de Stone. Sachant, d'après (10), que, pour tout $x \in P$ et tout $\alpha \in J_*^*$, $D_\alpha(x)$ est un élément complémenté de P, soit f l'application de P dans $\tilde{\mathcal{P}}(X) = \mathfrak{I}(J_*^*)^X$ telle que :

$$f : P \longrightarrow \tilde{\mathcal{P}}(X)$$
$$x \longmapsto f(x) = \tilde{I}_x$$

où $\tilde{I}_x : X \longrightarrow \mathfrak{I}(J_*^*)$

$$U \longmapsto \tilde{I}_x(U) = \{\alpha / \alpha \in J_*^* : D_\alpha(x) \in U\} .$$

Après avoir prouvé que f prolonge σ, on montre, comme en 6.4.4., que f est un homomorphisme injectif de treillis tel que, pour tout $x \in P$ et tout $\alpha \in J_*^*$, $f(D_\alpha(x)) = N_\alpha(f(x))$, et tel que, pour tout $\alpha \in J$, $f(e_\alpha) = X_\alpha$.

Soient $x, y \in P$ et montrons que $f(x \Rightarrow y) = f(x) \Rightarrow f(y)$: pour cela il suffit de voir, d'après 4.2. que, pour tout $\alpha \in J_*^*$, $N_\alpha(f(x \Rightarrow y)) = N_\alpha(f(x) \Rightarrow f(y))$; on a $N_\alpha(f(x \Rightarrow y) = f(D_\alpha(x \Rightarrow y)) = \sigma(D_\alpha(x \Rightarrow y))$; or d'après p_2 on a $D_\alpha(x \Rightarrow y) = \bigwedge_{0<\beta\leq\alpha} (D_\beta(x) \Rightarrow D_\beta(y))$;

$\{\beta/\beta \in J : 0<\beta\leqslant\alpha\}$ étant fini et σ étant un homomorphisme d'algèbres de Boole donc, aussi, d'algèbres pseudo-booléiennes, il vient :

$$N_\alpha(f(x \Rightarrow y)) = \bigcap_{0<\beta\leqslant\alpha}(\sigma(D_\beta(x) \Rightarrow D_\beta(y))) = \bigcap_{0<\beta\leqslant\alpha}(\sigma(D_\beta(x)) \Rightarrow \sigma(D_\beta(y))),$$

d'où $N_\alpha(f(x \Rightarrow y)) = \bigcap_{0<\beta\leqslant\alpha}(f(D_\beta(x)) \Rightarrow f(D_\beta(y))) = \bigcap_{0<\beta\leqslant\alpha}(N_\beta(f(x)) \Rightarrow N_\beta(f(y)))$

et, par suite, le résultat, d'après l'axiome p_2.

Enfin, si $x \in P$, on a $f(\neg x) = \neg f(x)$ en notant que $\neg x = x \Rightarrow 0$.

BIBLIOGRAPHIE.

(1) R. BALBES, Ph. DWINGER, Coproducts of boolean algebras and chains with applications to Post algebras, *Coll. Math.* , 24 (1971), p. 15-25.

(2) G. EPSTEIN, The lattice theory of Post algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 95 (1960), p. 300-317.

(3) J. GOGUEN, L.fuzzy sets, *Journ. Math. Anal. and Applic.,* 18 (1967), p. 145-174

(4) A. KAUFMANN, Introduction à la théorie des sous-ensembles flous, Tome 1, 2e édition, Masson (1977).

(5) Gr. C. MOISIL, Essais sur les logiques non chrysippiennes, *Editions de l'Acad. de la Rep. Soc. de Roumanie,* Bucarest (1972).

(6) Gr. C. MOISIL, Ensembles flous et logiques à plusieurs valeurs, Université de Montréal (mai 1973).

(7) C.V. NEGOITA, D.A. RALESCU, Applications of fuzzy sets to systems analysis, Birkhäuser Verlag, (1975).

(8) D. PONASSE, Mathématique floue, *Séminaire du Dép. de Math., Université de Lyon I,* (1977-1978).

(9) D. PONASSE, Algèbres floues et algèbres de Lukasiewicz, *Rev. Roum. de Math. Pures et Appli.* 32 (1978).

(10) H. RASIOWA, On generalized Post algebras or order ω^+ and ω^+-valued predicate calculi, *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.* 23 (1973), p. 209-219.

(11) H. RASIOWA, An algebraic approach to non-classical logics, North Holland (1974

(12) P.C. ROSEMBLOOM, Post algebras I. Postulates and general theory, *Amer. Journ. of Math.* , 64 (1942), p. 167-188.

(13) G. ROUSSEAU, Post and pseudo-Post algebras, Fund. Math., 67 (1970), p. 133-145.

(14) H. SAWICKA, On properties of Post algebras with countable chain of constants, Coll. Math. 25 (1972), p. 201-209.

(15) T. TRACZYK, Axioms and some properties of Post algebras, Coll. Math., 10 (1963), p. 193-209.

(16) T. TRACZYK, On Post algebras with uncountable chain of constants. Algebras of homomorphisms, *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 15 (1967), p. 673-680.

(17) L.A. ZADEH, Fuzzy sets, Information and Control, 8 (1965), p. 338-353.

Manuscrit remis le 6 juillet 1978.

S. RIBEYRE
Faculté des Lettres et Civilisations
Université de Lyon III
74, rue Pasteur
69007 LYON