PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

GUY PATISSIER

Sur les fonctions d'un opérateur pseudo-différentiel elliptique

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1977, tome 14, fascicule 3
, p. 21-58
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1977__14_3_21_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1977 t. 14 -3

SUR LES FONCTIONS D'UN OPERATEUR PSEUDO-DIFFERENTIEL ELLIPTIQUE

par Guy PATISSIER

0. INTRODUCTION.

Le but de ce travail est de construire un calcul fonctionnel analytique pour les opérateurs pseudo-différentiels elliptiques sur une variété compacte, d'étudier la nature des opérateurs obtenus et de donner des applications.

Les méthodes utilisées sont adaptées de celles que R.T. SEELEY, T. KOTAKE - M. NARASIMHAN ont introduits dans l'étude des puissances complexes d'un opérateur elliptique [8], [7], et les résultats obtenus sont, sous des hypothèses plus générales, analogues à ceux qui furent établis par R.S. STRICHARTZ [10] et E. COMBET (C.R.A.S., 268, 1969, p. 798).

Soit M une variété de classe C^∞, compacte, de dimension n. On considère sur M un opérateur pseudo-différentiel elliptique A, d'ordre $m > 0$, non forcément symétrique. Si f est une fonction analytique sur un voisinage du spectre de A, telle que $|f^{(k)}(\lambda)| \leqslant Cte|\lambda|^{s-k}$ $(s \in \mathbb{R})$ pour $|\lambda|$ assez grand, on construit f(A) par la formule

$$f(A) = A^p \cdot \frac{i}{2\pi}\int_\Gamma \lambda^{-p} f(\lambda)(A-\lambda)^{-1} d\lambda,$$ où p est un entier tel que

$s-p < 0$, où Γ est une courbe de classe C^1 par morceaux entourant le spectre de A (sous certaines hypothèses sur le spectre de A, le contour Γ et le symbole principal σ de A).

On montre que f(A) est un opérateur pseudo-différentiel, d'ordre m.s et de symbole principal $f(\sigma)$.

On applique cette théorie à l'étude du problème de CAUCHY relatif à l'équation de la chaleur, ainsi l'opérateur e^{-tA} permet de résoudre l'équation $\frac{\partial}{\partial t} + A = 0$.

Dans la dernière partie, si $m > n$ et si $f(\lambda)$ est la transformée de LAPLACE d'une fonction F(t), on montre que, sous certaines hypothèses, le noyau de f(A) est donné par la formule $\int_0^{+\infty} F(t)G(t,x,y)dt$, où G(t,x,y) est le noyau de e^{-tA}.

Les résultats démontrés dans cet article ont été annoncés dans une Note parue aux C.R.A.S. ([17]).

1. NOTATIONS.

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un n-indice, on pose

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1!\, \alpha_2! \dots \alpha_n!$$

$$D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}.$$

Si X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{E}(X)$ (resp. $\mathscr{D}(X)$) désigne l'espace des fonctions de classe C^∞ (resp. de classe C^∞ à support compact) de X dans $\mathbb{C}$.

La transformée de FOURIER d'une fonction f de $\mathscr{D}(X)$ est définie par

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)\,dx$$

A partir de maintenant M désigne une variété C^∞ de dimension n, compacte, $\mathscr{A} = \{(U_i, \varphi_i),\ i \in I\}$ est un atlas de M qu'on prendra fini, $I = (1, \dots, \ell)$, $\mathscr{D}(M)$ est l'espace des fonctions de classe C^∞ de M dans $\mathbb{C}$.

Pour tout réel s on définit une norme sur $\mathscr{D}(X)$ en posant

$$\|f\|_s = \left[\int (1+|\xi|^2)^s \;|\hat{f}(\xi)|^2 \,d\xi\right]^{1/2},$$

et on note $H_s^\circ(X)$ le complété de $\mathscr{D}(X)$ pour cette norme.

On généralise cette définition à la variété M de la manière suivante : soit $(\Pi_i)_{i=1,\dots,\ell}$ une partition C^∞ de l'unité subordonnée au recouvrement de M par les ouverts U_i, chaque fonction f de $\mathscr{D}(M)$ s'écrit

$$f = \sum_{i=1}^{\ell} \Pi_i f$$

et $(\Pi_i f) \circ \varphi_i^{-1}$ est dans $\mathscr{D}(X_i)$ (où $X_i = \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$), on pose :

$$\|f\|_s = \sum_{i=1}^{\ell} \|(\Pi_i f) \circ \varphi_i^{-1}\|_s$$

On définit ainsi une norme sur $\mathscr{D}(M)$, le complété de $\mathscr{D}(M)$ pour cette norme est un espace hilbertisable noté $H_s(M)$, c'est l'espace de SOBOLEV d'ordre s de M. On peut montrer que cette définition est intrinsèque. On note

$$\|P\|_{s,t} = \operatorname{Sup}\,\{\|Pf\|_t,\ \|f\|_s = 1\}$$

la norme usuelle sur l'espace des opérateurs linéaires et continus de H_s dans H_t noté $L(H_s,H_t)$, si s=t cet espace sera noté $L(H_s)$.

Les opérateurs pseudo-différentiels (O.P.D. en abrégé) utilisésici sont ceux définis et étudiés dans différents articles de HÖRMANDER ([4], [5], [6]).

On rappelle que, pour tout réel m, l'espace des symboles d'ordre m sur X, noté $S^m(X)$, est l'ensemble des fonctions σ de $\mathcal{E}(X\times\mathbb{R}^n)$ telles que, pour tout compact K de X, pour tous les multi-indices α et β, il existe une constante $C_{\alpha,\beta,K}$ strictement positive pour laquelle :

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta \sigma(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta,K}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}, \text{ pour tout } (x,\xi) \text{ dans } K\times\mathbb{R}^n.$$

Pour σ dans $S^m(X)$ et f dans $\mathcal{D}(X)$, on pose

$$O_p(\sigma)f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i<x,\xi>}\sigma(x,\xi)\ \hat{f}(\xi)d\xi.$$

(1.1) DEFINITION ([4], page 153). - *Un opérateur pseudo-différentiel* A *sur* M, *d'ordre* m, *est un opérateur continu de* $\mathcal{D}(M)$ *dans* $\mathcal{D}(M)$, *tel que pour toute carte* (U,φ) *de* M, $(\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n)$, *l'opérateur* A_φ *induit par* A *sur l'ouvert* $\varphi(U)$ *(défini par* $A_\varphi(u) = A(u\circ\varphi)\circ\varphi^{-1}$, u *dans* $\mathcal{D}(U)$) *soit un opérateur pseudo-différentiel d'ordre* m.

On peut donc trouver un symbole σ_U de $S^m(X)$, (où on a posé $X = \varphi(U)$) tel que $A_\varphi - O_p(\sigma_U)$ soit un opérateur à noyau C^∞ ([4], [6]). Les opérateurs considérés ici sont donc les O.P.D. étudiés par HÖRMANDER dans [4] et [6] correspondant au cas $\rho=1$ et $\delta=0$.

On note T^*M le fibré cotangent réel à M et $\mathcal{E}(T^*M)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ de T^*M dans $\mathbb{C}$. Soit σ dans $\mathcal{E}(T^*M)$, dans toute carte $c = (U,\varphi)$ de M, σ admet un représentant σ_φ appartenant à $\mathcal{E}(X\times\mathbb{R}^n)$ (où on a posé $X = \varphi(U)$), nous dirons que σ est un symbole d'ordre m sur M si σ_φ appartient à $S^m(X)$ quelle que soit la carte c. On note $S^m(T^*M)$

l'espace de ces symboles.

Soit σ dans $S^m(T^*M)$, nous dirons que σ est le symbole principal de A si $\sigma_U - \sigma_\varphi$ est dans $S^{m-1}(X)$ quelle que soit la carte (U,φ) de M. Pour l'existence de tels symboles voir [6] page 113. En fait le symbole principal est défini à un symbole d'ordre m-1 près, c'est donc un élément de $S^m(T^*M)_{/S^{m-1}(T^*M)}$, (voir HÖRMANDER, [6]).

2. ENONCE DES RESULTATS.

A partir de maintenant A désigne un O.P.D. d'ordre $m > 0$ et σ le symbole principal de A.

2.0. Le calcul fonctionnel analytique. - Soient a_1, a_2, θ des nombres réels tels que $0 < a_2$, $0 \leqslant \theta < \pi$

On se place d'abord dans le cas où $a_1 < a_2$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, et on considère les demi-droites suivantes du plan complexe :

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C},\ z = a_1 + e^{i\theta},\ \rho \in \mathbb{R}^+,\ \mathrm{Re}(z) \geqslant a_2\}$$

$$D_2 = \{z \in \mathbb{C},\ \bar{z} \in D_1\}$$

et la droite $\Delta = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) = a_2\}$.

On pose : $b = D_1 \cap \Delta$, $c = D_2 \cap \Delta$ et

$$bc = \{z \in \Delta,\ \mathrm{Im}(c) \leqslant \mathrm{Im}(z) \leqslant \mathrm{Im}(b)\}.$$

Le chemin $\Gamma(a_1,a_2,\theta) = D_1 + bc + D_2$ est de classe C^∞ par morceaux.

Soit $S(a_1,a_2,\theta) = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) > a_2,\ |\mathrm{Arg}(z-a_1)| < \theta \pmod{2\pi}\}$, c'est un ouvert non vide dont la frontière est $\Gamma(a_1,a_2,\theta)$ (région hachurée dans la figure 1).

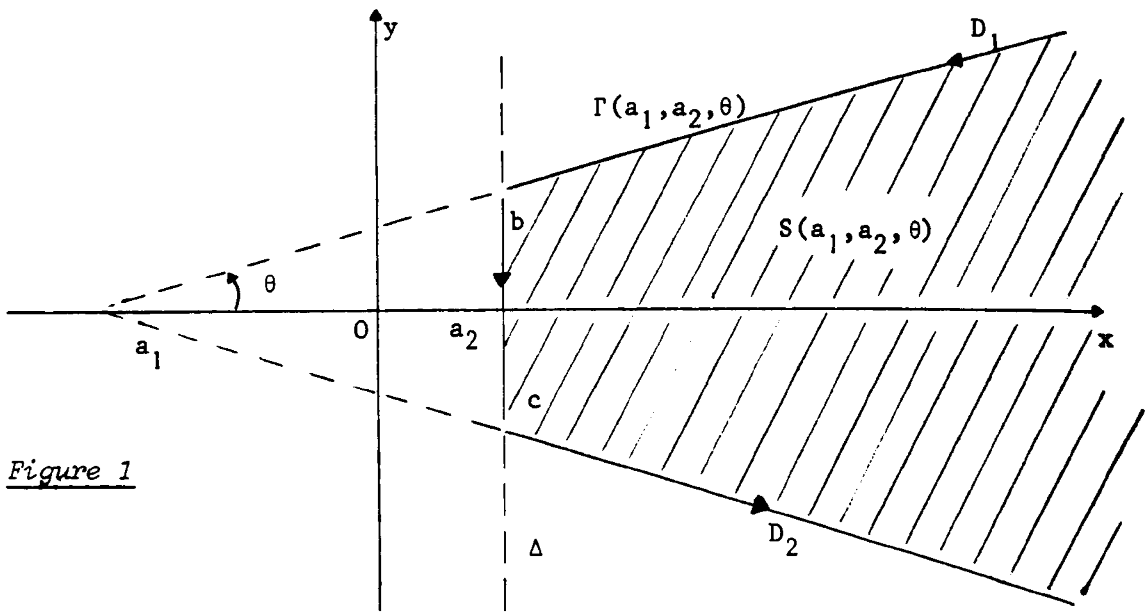
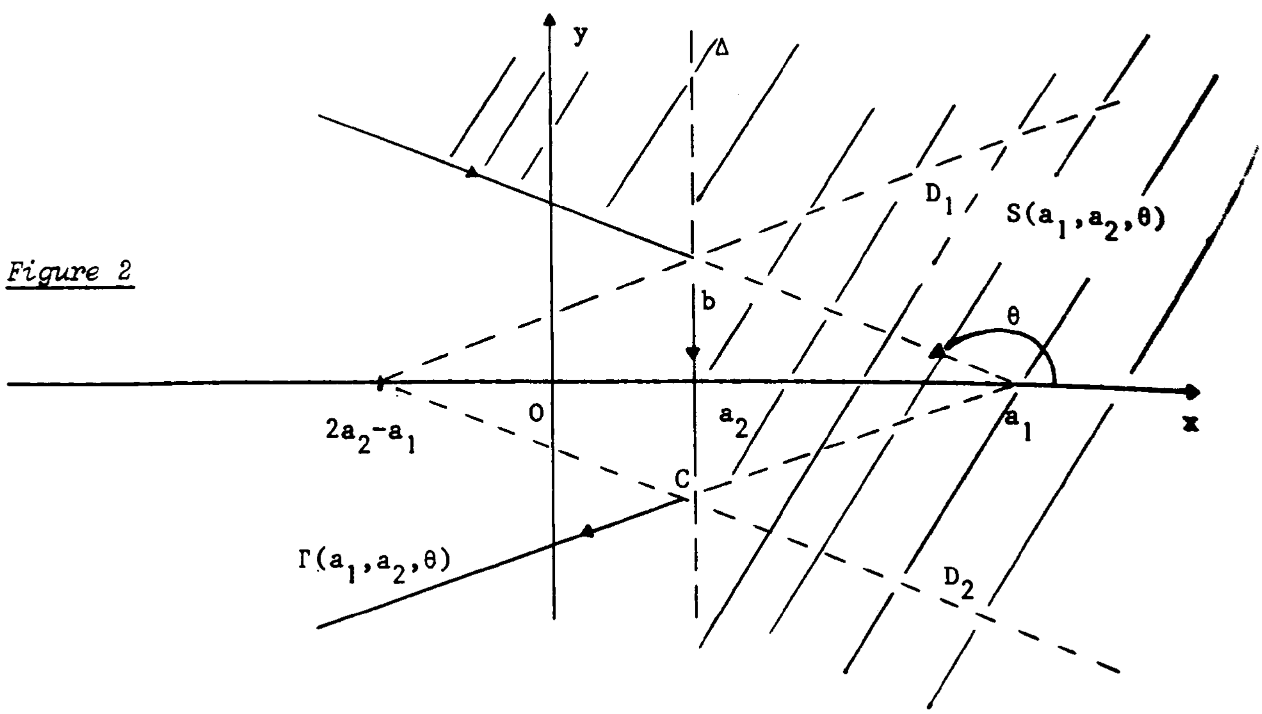


Figure 1

Pour $a_2 < a_1$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, on prend pour $S(a_1,a_2,\theta)$ le complémentaire du symétrique par rapport à Δ de l'adhérence de $S(2a_2-a_1,\ a_2,\ \pi-\theta)$; c'est un ouvert non vide dont le bord, noté $\Gamma(a_1,a_2,\theta)$ est un chemin de classe C^∞ par morceaux (région hachurée dans la figure 2).

Figure 2



Pour $a_1 = a_2$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $S(a_2,a_2,\frac{\pi}{2}) = \{z \in C,\ Re(z) > a_2\}$

$\Gamma(a_2,a_2,\frac{\pi}{2}) = \Delta$

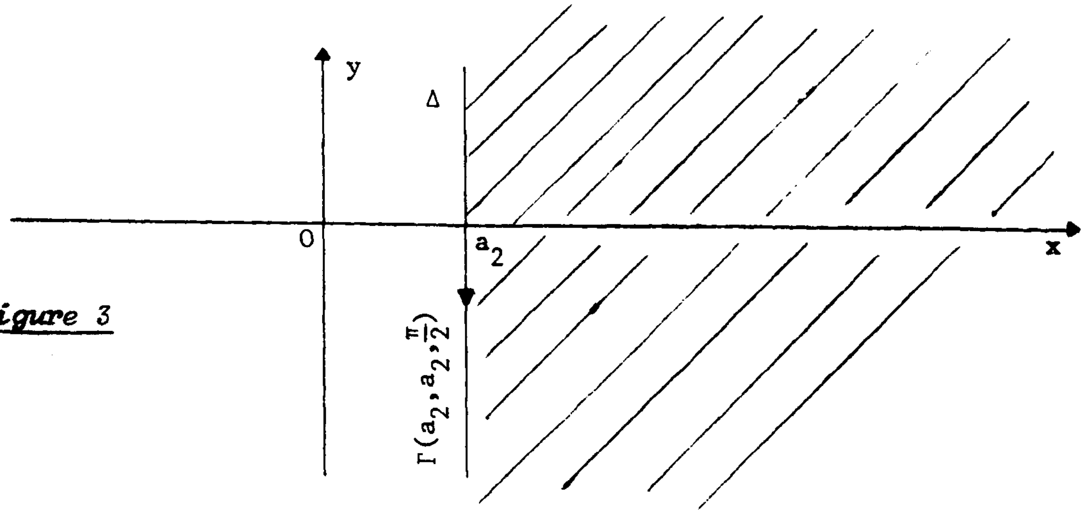


Figure 3

On remarque que, dans tous les cas de figure, on peut trouver un point a de $S(a_1,a_2,\theta)$ tel que $S(a_1,a_2,\theta)$ soit étoilé par rapport à a.

Dans la suite nous ne considèrerons que les chemins définis ci-dessus.

On impose au symbole principal σ de vérifier la condition suivante dans toute carte (U,φ) de M.

> Pour tout compact K contenu dans $\varphi(U)$, il existe deux constantes $C_\varphi(K) \geq 0$ et $C'_\varphi(K)$ telles que pour tout x de K, tout η de $\mathbb{R}^n$ tel que $|\eta| \geq C_\varphi(K)$, on ait :
>
> (2.0.0) $\quad \forall\lambda \notin S(a_1,a_2,\theta),\quad |\lambda| + |\eta|^m \leq C'_\varphi(K)|\sigma_\varphi(x,\eta) - \lambda|$

Alors pour $|\eta| \geq C_\varphi(K)$, et x dans K, $\sigma_\varphi(x,\eta)$ appartient à $S(a_1,a_2,\theta)$.

La condition (2.0.0) est intrinsèque, car soit τ un symbole de $S^m(T^*M)$ tel que $\sigma-\tau$ soit dans $S^{m-1}(T^*M)$ alors τ vérifie la condition (2.0.0) si σ la vérifie, en effet

$$\frac{|\tau_\varphi(x,\eta) - \lambda|}{|\eta|^m + |\lambda|} \geq \left| \frac{|\sigma_\varphi(x,\eta) - \lambda|}{|\eta|^m + |\lambda|} - \frac{|\sigma_\varphi(x,\eta) - \tau_\varphi(x,\eta)|}{|\eta|^m + |\lambda|} \right|$$

$(\lambda \notin S(a_1,a_2,\theta))$.

Or $\quad \dfrac{|\sigma_\varphi(x,\eta) - \tau_\varphi(x,\eta)|}{|\eta|^m + |\lambda|} \leqslant \dfrac{|\sigma_\varphi(x,\eta) - \tau_\varphi(x,\eta)|}{|\eta|^m} = O(|\eta|^{-1})$

uniformément sur tout compact K contenu dans $\varphi(U)$, d'où la conclusion.

Donc (2.0.0) est une hypothèse relative au symbole principal, élément de $S^m(T^*M)/S^{m-1}(T^*M)$.

Par ailleurs la condition (2.0.0) est invariante par changement de carte, si $\chi : \varphi(U) \to Y$ est un difféomorphisme C^∞ de $\varphi(U)$ dans un ouvert $Y \subset \mathbb{R}^n$. On a si $y = \chi(x)$,

$\sigma_{\chi\circ\varphi}(y,\xi) = \sigma_\varphi(\chi^{-1}(y);({}^tD_x\chi).\xi)$, et $\sigma_{\chi\circ\varphi}$ vérifie la condition

(2.0.0) si σ_φ la vérifie. En effet quand y parcourt un compact K' de Y, $\chi^{-1}(y)$ parcourt le compact $K = \chi^{-1}(K')$ de $\varphi(U)$ et on a

$|{}^tD_x\chi \,.\, \xi| \geqslant \dfrac{1}{\|{}^tD_y\,\chi^{-1}\|}|\xi|$, $y \to \|{}^tD_y\,\chi^{-1}\|$ étant continue et jamais nulle,

il existe une constante $C_1(K') > 0$ telle que $\dfrac{1}{\|{}^tD_y\chi^{-1}\|} \geqslant C_1(K')$ pour y dans K', donc $|{}^tD_x\chi \,.\, \xi| \geqslant C_\varphi(K)$ pour $|\xi| \geqslant C_2(K') = \dfrac{C_\varphi(K)}{C_1(K')}$ et

$C'_\varphi(K)|\sigma_{\chi\circ\varphi}(y,\xi) - \lambda| \geqslant |\lambda| + |{}^tD_y\,\chi.\,\xi| \geqslant |\lambda| + C_1(K')|\xi|$ il existe une constante C_3 telle que $|\lambda| + C_1(K')|\xi| \geqslant C_3(|\lambda| + |\xi|)$ d'où la conclusion.

La condition (2.0.0) est indépendante du système de coordonnées locales choisi sur M.

(2.0.1) <u>REMARQUE</u>. - On se place dans le cas où $a_1 = 0$ et on suppose que σ vérifie la condition suivante dans toute carte (U,φ) de M

(2.0.2) $\left[\begin{array}{l}\text{Pour tout compact K contenu dans } \varphi(U)\text{, il existe une constante} \\ C_\varphi(K) > 0\text{, telle que pour tout x de K, tout } \eta \text{ de } \mathbb{R}^n \text{ tel que} \\ |\eta| \geqslant C_\varphi(K) \text{ on ait :} \\ \text{i) } \sigma_\varphi(x,\eta) \in S(0,a_2,\theta). \\ \text{ii) } \sigma_\varphi(x,\eta) \text{ homogène de degré } m > 0.\end{array}\right.$

Soient $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ tels que $a_2-\varepsilon_1 > 0$ et $\theta+\varepsilon_2 < \frac{\pi}{2}$,

$S(0,a_2-\varepsilon_1,\ \theta+\varepsilon_2)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant l'adhérence de $S(0,a_2,\theta)$, alors σ vérifie (2.0.0) relativement à $S(0,a_2-\varepsilon_1,\ \theta+\varepsilon_2)$.

Preuve. - Pour démontrer (2.0.0) remarquons d'abord qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que pour chaque x de K, chaque η de $\mathbb{R}^n$ avec $|\eta| \geqslant C_\varphi(K)$, on ait $|\sigma_\varphi(x,\eta) - \lambda| \geqslant \delta$ pour tout $\lambda \notin S(0,a_2-\varepsilon_1,\ \theta+\varepsilon_2)$ (car $\sigma_\varphi(x,\eta) \in S(0,a_2,\theta)$), alors :

$$\frac{|\eta|^m + |\lambda|}{|\sigma_\varphi(x,\eta) - \lambda|} = \frac{C^m + \dfrac{C^m|\lambda|}{|\eta|^m}}{\left|\sigma_\varphi\left(x, \dfrac{C\,\eta}{|\eta|}\right) - \dfrac{C^m\,\lambda}{|\eta|^m}\right|} \qquad \text{où } C = C_\varphi(K)$$

Posons : $\mu = \operatorname{Sup}\{|\sigma_\varphi(x,\eta)|,\ x \in K,\ |\eta| = C\}$,

$$y = \frac{C^m|\lambda|}{|\eta|^m} \qquad \text{et} \qquad \Lambda = \frac{|\eta|^m + |\lambda|}{|\sigma_\varphi(x,\eta) - \lambda|}$$

Pour $0 \leqslant y \leqslant \mu+1$, $\quad \Lambda \leqslant \dfrac{C^m + \mu + 1}{\delta}$,

pour $\quad y \geqslant \mu+1$, $\quad \Lambda \leqslant \dfrac{C^m + y}{\left|\,\left|\sigma_\varphi\left(x, \dfrac{c\eta}{|\eta|}\right)\right| - y\right|} \leqslant \dfrac{C^m + y}{y - \mu} \leqslant$ Cte.

Supposons maintenant que seul (2.0.2 (ii) soit vérifié, avec $C_\varphi(K) \leqslant 1$ pour tout compact K de $\varphi(U)$, et qu'il existe $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tels que :

$$(2.0.3) \quad \begin{cases} \text{i)}\ |\sigma_\varphi(x,\eta)| > \alpha_1 & \text{dans } \varphi(U) \text{ pour } |\eta| = 1. \\ \text{ii)}\ |\operatorname{Arg}(\sigma_\varphi(x,\eta)) - \pi| > \alpha_2 & \text{dans } \varphi(U) \text{ pour } |\eta| = 1. \end{cases}$$

Alors on voit facilement que la condition (2.0.0) est vérifiée pour un domaine $S(a_1,a_2,\theta)$ du type de celui de la figure 2 (§ (2.0)) (voir [8] preuve du lemme 2 page 296).

Les conditions (2.0.3) sont les hypothèses de SEELEY ([8], inégalités 9 et 10, page 295), elles entraînent les nôtres, on peut donc dire que nos hypothèses sont plus générales que celles de SEELEY.

(2.0.4) EXEMPLE. - Soit g une métrique riemannienne sur M et Δ le laplacien sur les fonctions, si (U,φ) est une carte de M, on a

$\Delta_U = \sum_{i,j} \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{g}\; g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j})$ avec les notations habituelles. Le symbole principal de Δ est donné dans la carte (U,φ) par

$$\sigma_\varphi(x,\xi) = \sum_{i,j} g^{ij} \xi_i \xi_j ,$$

σ_φ est dans $S^2(X)$ (où $X = \varphi(U)$) et vérifie les hypothèses de la remarque (2.0.1).

On pose $S = S(a_1,a_2,\theta)$ et on note Γ le bord de S

$$\Gamma = \Gamma(a_1,a_2,\theta)$$

(2.0.5) REMARQUE. - Si σ est le symbole principal de A, $\sigma - \lambda$ est celui de $A - \lambda$. Soit (U,φ) une carte de M et considérons

$$\gamma(A_\varphi - \lambda) = \{(x,\eta) \in \varphi(U) \times (\mathbb{R}^n - \{0\}) \; ; \; \lim_{t \to +\infty} |\sigma_\varphi(x,t\eta) - \lambda| t^{-m} = 0\}$$

l'ensemble caractéristique de $A_\varphi - \lambda$, on a $\gamma(A_\varphi - \lambda) = \emptyset$ pour $\lambda \notin S$ (condition (2.0.0)), ce qui signifie que $A-\lambda$ est elliptique, en particulier $(\lambda = 0)$ A est elliptique.

On déduit facilement de la démonstration du lemme 1, page 294 dans [8] que, pour tout réel s, A est un opérateur continu de $H_{s+m}(M)$ dans $H_s(M)$; on peut donc considérer que A est un opérateur non borné sur $H_s(M)$ dont le domaine partout dense est $H_{s+m}(M)$.

On montre, en utilisant le théorème 2, page 239 dans [9], que A est un opérateur fermé, alors le spectre de A, noté $Sp(A)_s$ est une partie fermée de $\mathbb{C}$ et $\lambda \to (A-\lambda)^{-1}$ est une fonction analytique définie sur le résolvant $\rho(A)_s = \mathbb{C} - Sp(A)_s$ à valeurs dans $L(H_s)$.

Il existe une constante $R > 0$ telle que, pour $|\mu| \geq R$ et $\mu \notin S$, on ait μ dans $\rho(A)_s$ (voir (3.7)). $\rho(A)_s$ n'est donc pas vide. Posons $B = A-\mu$ alors B^{-1} est un opérateur continu de $H_s(M)$ dans $H_{s+m}(M)$, c'est donc un opérateur compact de $H_s(M)$ dans $H_s(M)$, puisque $m > 0$ (en utilisant le théorème de RELLICH). Le spectre $Sp(B^{-1})_s$ est donc dénombrable, le seul point d'accumulation étant 0, $Sp(B^{-1})_s$ est réduit au spectre ponctuel et les sous-espaces propres de B^{-1} sont de dimension finie.

B étant elliptique on peut lui associer une paramétrix bilatère E qui est un O.P.D. d'ordre $-m$ (cf [6]), alors on montre facilement que $B^{-1} - E$ est un opérateur à noyau C^∞ (en utilisant le lemme (4.3.5)), par suite B^{-1} est un O.P.D. d'ordre $-m$ et $B^{-1}(H_t(M)) \subset H_{t+m}(M)$ pour tout t.

On a $B^{-k}(H_s(M)) \subset H_{s+km}(M) \subset \mathscr{D}^p(M)$, $(p \in \mathbb{N})$, pour $k > \frac{p-s}{m} + \frac{n}{2m}$, où $\mathscr{D}^p(M)$ est l'espace des fonctions de classe C^p sur M. On déduit de ceci que les vecteurs-propres de B^{-1} sont des fonctions de classe C^∞.

Or $A = B+\mu$ et $(A-\lambda)^{-1} = \frac{1}{\lambda-\mu} B^{-1} \left(\frac{1}{\lambda-\mu} - B^{-1}\right)^{-1}$ par suite $Sp(A)_s = \{\frac{1}{\lambda} + \mu,\ \lambda \neq 0,\ \lambda \in Sp(B^{-1})_s\}$, c'est un ensemble dénombrable, discret, le seul point d'accumulation étant l'infini, réduit au spectre ponctuel, les sous-espaces propres de A sont de dimension finie.

On montre facilement que $Sp(A)_s$ est indépendant de s, on note cet ensemble $Sp(A)$, c'est le spectre de A, on pose $\rho(A) = \mathbb{C} - Sp(A)$, c'est le résolvant de A. On suppose à partir de maintenant que 0 appartient à $\rho(A)$.

Il n'y a donc qu'un nombre fini d'éléments de $Sp(A)$ dans le disque fermé $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq R\}$, par suite on peut trouver un secteur de $D(0,R)$ contenu dans $\rho(A)$, secteur pouvant être pris aussi près que l'on veut de l'axe des réels négatifs, en multipliant éventuellement A par une constante convenable, on peut supposer que $\{x \in \mathbb{R},\ -R \leq x \leq 0\}$ est à l'intérieur de ce secteur. $\rho(A)$ étant un ouvert contenant 0, on peut trouver un disque fermé de centre 0 et de rayon $\varepsilon > 0$ contenu dans $\rho(A)$, soit $C(0,\varepsilon)$ (resp. $C(0,R)$ le bord de ce disque (resp. le bord de $D(0,R)$). Γ, $C(0,\varepsilon)$, $C(0,R)$ et le bord du secteur précédent définissent un chemin Γ_1 de classe C^∞ par morceaux "entourant" le spectre de A.

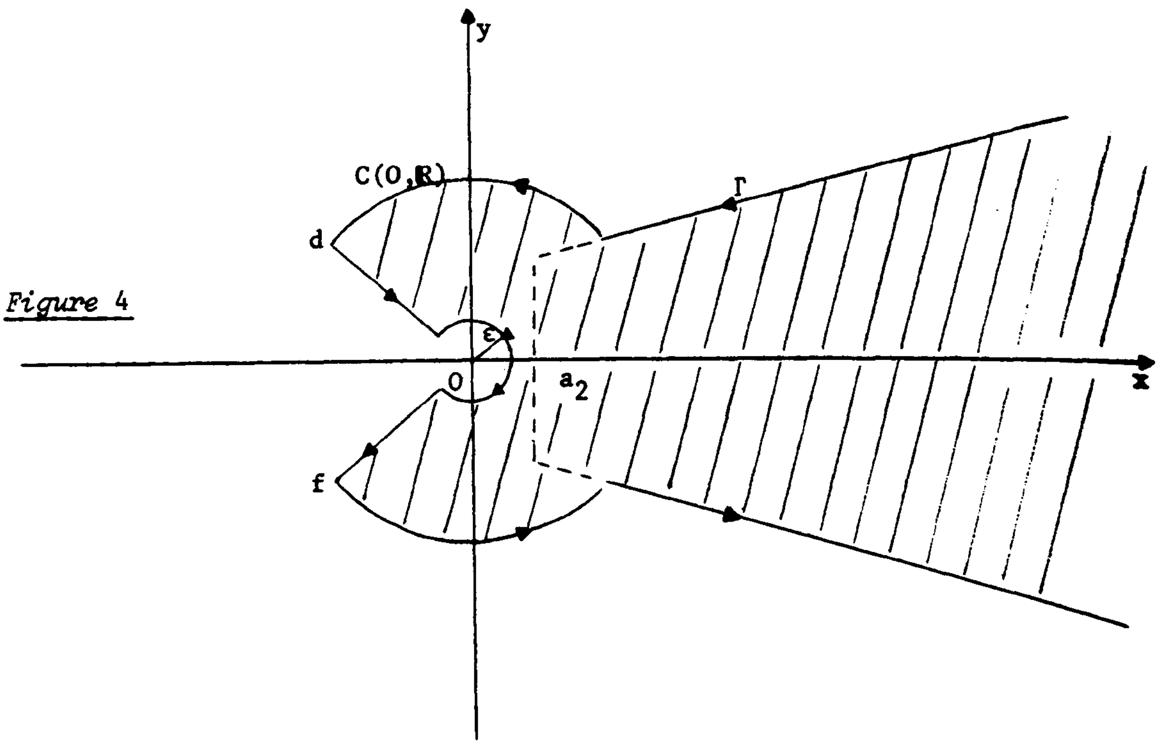


Figure 4

On désigne par S' la partie ouverte hachurée sur la figure 4 ; S' est un ouvert non vide dont le bord est Γ_1 et $Sp(A) \subset S'$.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $\overline{S'} \subset \Omega$ et $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R},\ x \leq 0\} = \emptyset$, on suppose de plus qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $S(a_1, a_2, \theta+\alpha)$ soit contenu dans Ω, (cette hypothèse permet d'affirmer l'existence de plusieurs chemins contenus dans Ω, entourant le spectre de A, du même type que Γ_1) et $\beta > \alpha$ tel que Ω soit contenu dans $S(a_1, a_2, \theta+\beta)$ pour $|\lambda|$ assez grand.

Si p est un réel, on note $O_p(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes $f : \Omega \to \mathbb{C}$ qui vérifient

$$|f(\lambda)| \leq \text{Cte } |\lambda|^p \quad \text{pour } |\lambda| \text{ assez grand.}$$

Alors sur $\overline{S}$ on a, pour tout entier $k \geq 0$,

$$|f^{(k)}(\lambda)| \leq \text{Cte } |\lambda|^{p-k} \quad \text{pour } |\lambda| \text{ assez grand.}$$

En effet plaçons-nous dans le cas de la figure 1. On peut trouver deux chemins de classe C^∞ par morceau (cf. figure 5) tels que : Γ' soit contenu dans $\overline{S}$, $\Gamma' = \Gamma$ pour $|\mathrm{Arg}(a_1+\lambda)| = \theta$, Γ'' soit dans Ω, $\Gamma'' = \gamma''_1 + \gamma''_2 + \gamma''_3$, $\theta' > \mathrm{Arg}\, z_1 > \theta$, $|y_1| < a'_2$, et que les droites portées par γ''_1 et γ''_3 se rencontrent en 0.

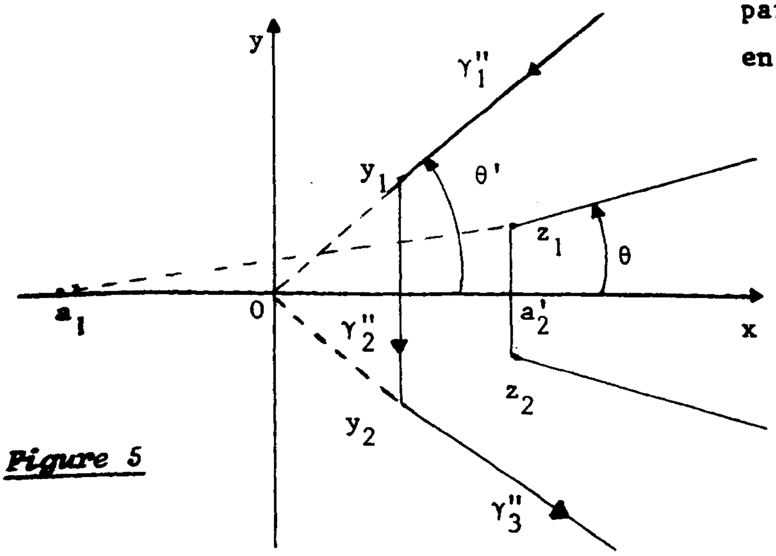


Figure 5

i) Dans ce qui suit, μ désigne un nombre complexe appartenant à Γ'' et λ un nombre complexe appartenant à Γ' ou situé à l'intérieur de Γ'. Dans ces conditions il existe une constante $K > 0$ telle que

$|\mu-\lambda|^{-1} \leq K(|\mu| + |\lambda|)^{-1}$.

En effet

- pour $|\mu| \leq \frac{1}{2}|\lambda|$, $\dfrac{|\mu| + |\lambda|}{|\mu - \lambda|} \leq \dfrac{\frac{3}{2}|\lambda|}{|\lambda|-|\mu|} \leq 3$

de même pour $|\mu| \geq 2|\lambda|$

- pour $\frac{1}{2} \leq |\frac{\mu}{\lambda}| \leq 2$ on a

$$\frac{|\mu| + |\lambda|}{|\mu-\lambda|} \leq \frac{1 + |\frac{\mu}{\lambda}|}{|1 - \frac{\mu}{\lambda}|} \leq \mathrm{Cte}$$

car $\frac{\mu}{\lambda}$ appartient à un compact qui ne contient pas 1. En effet, si μ appartient à γ''_1 ou γ''_3 on a $|\mathrm{Arg}\,\mu| = \theta'$, comme $|\mathrm{Arg}\,\lambda| \leq \mathrm{Arg}\, z_1$, il vient $|\mathrm{Arg}\,\frac{\mu}{\lambda}| \geq \theta' - \mathrm{Arg}\, z_1 > 0$, si μ est sur $[y_1, y_2]$, $|\frac{\mu}{\lambda}| \leq |\frac{y_1}{a'_2}| < 1$, d'où la conclusion.

ii) Soit f dans $O_p(\Omega)$ avec $-1 < p < 0$, on a pour $k \geq 0$,

$f^{(k)}(\lambda) = \frac{k!i}{2\pi} \int_{\Gamma''} \frac{f(\mu)}{(\mu-\lambda)^{k+1}} d\mu$ et cette intégrale est absolument convergente. Or

$$\frac{2\pi}{k!i} f^{(k)}(\lambda) = \int_{\gamma_1''} + \int_{\gamma_2''} + \int_{\gamma_3''} = I_1 + I_2 + I_3.$$

- En paramétrant γ_1'' on obtient en utilisant i

$$|I_1| \leq \text{Cte} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^p}{(\rho + |\lambda|)^{k+1}} d\rho \leq \text{Cte}\ |\lambda|^{p-k} \int_0^{+\infty} \frac{u^p}{(1+u)^{k+1}} du$$

$(\rho = |\lambda| u)$, et les intégrales précédentes sont convergentes puisque $-1 < p < 0$. De même $|I_3| \leq \text{Cte}\ |\lambda|^{p-k}$.

- On a aussi $|I_2| \leq |y_1 - y_2|\ \text{Sup}\ \{\frac{|f(\mu)|}{|\mu-\lambda|^{k+1}}, \mu \in [y_1, y_2]\}$ d'où

$|I_2| \leq \text{Cte}\ |\lambda|^{-k-1} \leq \text{Cte}\ |\lambda|^{p-k}$ car $-1 < p < 0$.

iii) Pour p quelconque, soit q un réel tel que $-1 < p-q < 0$, on a la conclusion en écrivant $f(\lambda) = \lambda^q\ [\lambda^{-q} f(\lambda)]$ et en remarquant que $\lambda^{-q} f(\lambda)$ est dans $O_{p-q}(\Omega)$.

On fait dans les autres cas de figure, une démonstration semblable.

Exemples :

- Les polynômes de degré p sont dans $O_p(\Omega)$.
- $e^{-\lambda t}$ $(t > 0)$ est, pour $\theta+\beta < \frac{\pi}{2}$, dans $O_{-\infty}(\Omega) = \bigcap_{p \in \mathbb{R}} O_p(\Omega)$.
- La détermination de $\mathrm{Log}\,\lambda$, nulle pour $\lambda=1$ est dans $O_\varepsilon(\Omega)$ pour tout $\varepsilon > 0$ mais n'est pas dans $O_0(\Omega)$.

- λ^s (s dans $\mathbb{C}$) est dans $O_{Re(s)}(\Omega)$.

(2.0.6) DEFINITION. - *Pour* f *dans* $O_p(\Omega)$, *on pose*

$$(2.0.7) \quad f(A) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_1} f(\lambda)(A-\lambda)^{-1} d\lambda, \text{ pour } p < 0.$$

Pour $p \geq 0$ *soit* q *un entier tel que* $p-q < 0$, *on pose*

$$(2.0.8) \qquad f(A) = \frac{i}{2\pi} A^q \int_{\Gamma_1} \frac{f(\lambda)}{\lambda^q} (A-\lambda)^{-1} d\lambda.$$

L'existence de ces intégrales sera vue dans le prochain chapitre. Nous pouvons alors énoncer les résultats suivants :

(2.0.9) PROPOSITION. - *L'intégrale (2.0.7) est indépendante du contour choisi pour la définir (cf. (4.0)).*

L'hypothèse (2.0.0) implique que les hypothèses de SEELEY ([8], [9] et [10] page 295) sont vérifiées par rapport à un secteur Σ de centre 0 et d'angle $2(\pi - \mathrm{Arg}(b))$ (cas des figures 1 et 2) ou par rapport à un secteur Σ de centre 0 et d'angle θ (cas des figures 2 et 3) contenu dans le complémentaire de S', on peut alors définir A^s comme dans [8] ((21) page 299).

(2.0.10) PROPOSITION. - *Si* $f(\lambda) = \lambda^s$ *(s dans* $\mathbb{C}$*),* f(A) *coïncide avec l'opérateur* A^s *défini par SEELEY dans* [8] *(cf. (4.1)).*

(1.0.11) PROPOSITION. - *Quelles que soient les fonctions* f *dans* $O_p(\Omega)$, g *dans* $O_r(\Omega)$ *et pour tous les nombres complexes* ν *on a :*

i) $(\nu.f)(A) = \nu.f(A)$

ii) $(f+g)(A) = f(A) + g(A)$, (f+g *est dans* $O_{Sup(p,r)}(\Omega)$)

iii) $(f.g)(A) = f(A) \circ g(A)$ (f.g *est dans* $O_{p+r}(\Omega)$).

(cf. (4.2)).

(2.0.12) <u>COROLLAIRE</u>. - *La relation (2.0.8) est indépendante de l'entier* $q > p$ *(cf. (4.2)).*

(2.0.13) <u>THEOREME</u>. - $f(A)$ *est un O.P.D. d'ordre* mp *; soit* a *son symbole principal, si* (U, φ) *est une carte de* M,

pour tout compact K *contenu dans* $\varphi(U)$ *il existe une constante* $C_\varphi(K)$ *telle que pour* $|\eta| \geq C_\varphi(K)$ *on ait, pour tout* x *de* K

$$a_\varphi(x,\eta) = f(\sigma_\varphi(x,\eta)) \qquad \textit{(cf. (4.3)).}$$

(2.0.14) <u>REMARQUE</u>. - Soit $(\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell,\ldots)$ la suite des valeurs propres de A, si A est symétrique, on peut trouver une base (topologique) de $H_o(M)$: $(\varphi_1,\ldots,\varphi_\ell,\ldots)$ constituée de vecteurs propres associés aux λ_i. Alors pour tout réel s, $(\varphi_1,\ldots,\varphi_\ell,\ldots)$ est une base de $H_s(M)$ et pour f dans $O_b(\Omega)$, on a :

$$\text{(2.0.15)} \qquad \left| \begin{array}{l} \text{i) } f(A)\varphi_j = f(\lambda_j)\cdot\varphi_j, \\ \text{ii) Pour tout réel } \varepsilon \text{ tel que } \varepsilon > 0, \\ \qquad f(A) = \sum_{j=1}^{\infty} f(\lambda_j)P_j \quad (\text{dans } L(H_o(M), H_{-\varepsilon-mb}(M)) \end{array} \right.$$

où $P_j : H_o \to H_o$ est la projection sur le sous-espace propre correspondant à la valeur propre λ_j.

En fait quels que soient les réels s et t, P_j est un opérateur continu de H_o dans $H_{-\varepsilon-mb}$ (ii) a donc un sens) (cf. (4.4)).

On relie ainsi notre travail à celui de STRICHARTZ ([10]).

2.1. <u>Exemples</u> - <u>Applications</u>.

(2.1.0) <u>EXEMPLE</u>. - $f(\lambda) = \text{Log}\,\lambda$, Log A est un O.P.D. d'ordre ε quel que soit $\varepsilon > 0$, mais n'est pas d'ordre 0, car pour $|\eta|$ assez grand on a (condition (2.0.0) pour $\lambda=0$)

$$|\sigma_\varphi(x,\eta)| \geq \frac{1}{C'_\varphi(K)}\cdot|\eta|^m \quad \text{et } \text{Log}(\sigma_\varphi(x,\eta))$$

n'est pas borné.

(2.1.1) <u>APPLICATION</u>. - On se place dans le cas $a_1 < a_2$, $\theta+\beta < \frac{\pi}{2}$, soit $f(\lambda) = e^{-t\lambda}$, t réel, $t \geq 0$, on considère l'opérateur e^{-tA}, si μ est une **mesure** régulière strictement positive sur M. On peut, grâce au théorème **des noyaux**, associer à e^{-tA} un noyau, noté $G(t,x,y)$, de $\mathcal{D}'(M\times M)$.

(2.1.2) <u>PROPOSITION</u>. -

i) Pour tout réel s *et quel que soit* $\varepsilon > 0$, $t \to e^{-tA}$ *est une application continue de* $[0,\infty)$ *dans* $L(H_s(M), H_{s-\varepsilon}(M))$, *en particulier*

$$\lim_{t \to 0^+} e^{-tA} = I, \text{ où } I \text{ est l'injection } H_s(M) \to H_{s-\varepsilon}(M),$$

ii) Quels que soient les réels s *et* s', $t \to e^{-tA}$ *est une application* C^∞ *de* $]0,\infty)$ *dans* $L(H_s(M), H_{s'}(M))$ *et*

$$\frac{d^k}{dt^k}(e^{-tA}) = (-1)^k A^k e^{-tA}.$$

iii) $G(t,x,y)$ *appartient à* $\mathcal{E}(]0,\infty) \times M^2)$.

iv) Soit $\frac{\partial}{\partial t} + A = 0$ *l'équation de la chaleur, si* φ *est dans* $H_s(M)$, $\psi(t,.) = e^{-tA}\varphi$ *appartient à* $\mathcal{E}(]0,\infty) \times M)$ *et c'est la solution du problème de CAUCHY :*

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} + A)\,\psi(t,.) = 0 \\ \lim_{t \to 0^+} \psi(t,.) = \varphi \end{cases} \qquad \text{(cf. (4.5))}$$

(2.1.3) <u>**EXEMPLE**</u>. - **Pour** $f(\lambda) = \lambda^s$ **(s dans** $\mathbb{C}$**), on obtient le groupe des opérateurs** A^s étudié par SEELEY ([8]).

2.2. <u>Une représentation du noyau de $f(A)$</u>. - **On se place dans le cas** $0 < \theta+\beta < \frac{\pi}{2}$, on suppose que l'O.P.D. A est d'ordre $m > n$ ($n = \dim M$)

et que toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement positive, le spectre de A étant un fermé discret, on peut trouver un réel $a > 0$, et un angle α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, tel que pour toute valeur propre de A, on ait $\mathrm{Re}(\lambda) > a$ et $0 \leq |\mathrm{Arg}(\lambda - a)| < \alpha$. Pour $t > 0$ on considère l'opérateur $e^{-tA} = \int_{\Gamma_1} e^{-t\lambda}(A-\lambda)^{-1}d\lambda$ et, une mesure régulière strictement positive μ étant donnée, le noyau $G(t,x,y)$ de e^{-tA}.

(2.2.0) PROPOSITION. - *Pour tout réel* q, $n < q \leq m$, *il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

(2.2.1) $|G(t,x,y)| \leq C(\cos\alpha)^{-q/m} e^{-at} t^{-q/m}$, *(cf. (4.7.2)).*

Soit $F(t)$ une fonction mesurable définie pour $t > 0$ telle qu'il existe une constante $C > 0$, un réel $k < -\frac{n}{m}$, un entier relatif h pour lesquels $|F(t)| \leq \mathrm{Cte}\ t^{-k-1}$ pour $t \leq C$ et $|F(t)| \leq \mathrm{Cte}\ t^{h}$ pour $t \geq C$. On pose $f(\lambda) = \int_0^{+\infty} F(t)e^{-\lambda t}dt$ $(\mathrm{Re}(\lambda) > 0)$.

$f(\lambda)$ est la transformée de LAPLACE de F, c'est donc une fonction holomorphe dans le demi-plan $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, et sur un secteur de centre 0 et d'angle $\theta < \frac{\pi}{2}$, on a

$$|f(\lambda)| \leq \mathrm{Cte}\ |\lambda|^k \qquad \text{pour } |\lambda| \text{ assez grand}$$

On note $K(x,y)$ le noyau de $f(A)$.

(2.2.2) PROPOSITION. -

$$K(x,y) = \int_0^{\infty} F(t)\ G(t,x,y)dt$$

et cette intégrale converge uniformément sur M^2 *(cf. (4.7.3)).*

(2.2.3) REMARQUE. - On obtient ainsi pour des O.P.D. d'ordre $m > n$, sur une variété compacte une relation obtenue par KOTAKE-NARASIMHAN pour $f(\lambda) = \lambda^s$ et des opérateurs différentiels sur des ouverts de $\mathbb{R}^n$ ([7] proposition 7.1, page 465).

3. PRELIMINAIRES.

(3.0) PROPOSITION. - *Il existe un symbole* τ *de* $S^m(T^*M)$ *tel que :*

i) τ *vérifie (2.0.0) avec* $C_\varphi(K) = 0$.

ii) Dans toute carte (U,φ) *de* M, *pour tout compact* K *contenu dans* $\varphi(U)$, *il existe une constante* $C''_\varphi(K) > 0$ *telle que :*

$$\forall x \in K,\ |\eta| \geq C''_\varphi(K) \longrightarrow \tau_\varphi(x,\eta) = \sigma_\varphi(x,\eta),$$

donc $\tau-\sigma$ *est dans* $S^{-\infty}(T^*M)$.

Preuve. - D'après (2.0.0) pour tout compact H contenu dans $\varphi(U)$, il existe une constante $C_\varphi(H)$ telle que pour $|\eta| \geq C_\varphi(H)$ on ait $\sigma_\varphi(x,\eta)$ dans S pour tout x de H. Soit ψ une fonction de $\mathcal{E}(T^*M)$ à valeurs réelles telle que :

- $0 \leq \psi_\varphi(x,\eta) \leq 1$ pour tous les (x,η) de $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$.
- Tout x_o de $\varphi(U)$ appartient à un compact $B(x_o)$ contenu dans $\varphi(U)$ tel que $\psi_\varphi(x,\eta) = 0$ pour $|\eta| \leq C_\varphi(B(x_o))$ et x dans $B(x_o)$.
- Pour tout compact K de $\varphi(U)$ il existe une constante $C''_\varphi(K) > 0$ telle que $\psi_\varphi(x,\eta) = 1$ pour $|\eta| \geq C''_\varphi(K)$ et x dans K.

On pose $\tau = (1-\psi)a + \psi\sigma$, $a \in S$, où a est choisi de telle sorte que S soit étoilé par rapport à a. On a $\tau_\varphi(x,\eta)$ dans S et pour $|\eta| \geq C''_\varphi(K)$, $\tau_\varphi(x,\eta) = \sigma_\varphi(x,\eta)$ (x dans K).

Posons $\phi(x,\eta,\lambda) = (|\lambda| + |\eta|^m)|\tau_\varphi(x,\eta) - \lambda|^{-1}$ ($\lambda \notin S$).

i) Pour x dans K et $|\eta| \geq C = \text{Max}\,(C''_\varphi(K), C_\varphi(K))$ on a $\phi(x,\eta,\lambda) \leq C'_\varphi(K)$ d'après (2.0.0).

ii) Pour $|\eta| \leq C$ posons

$$M = 4\ \ \text{Sup}\,\{|\tau_\varphi(x,\eta)|,\ |\eta| \leq C,\ \ x \in K\}$$

et $M' = \text{Max}\ \{M, 2C^m\}$.

Pour $|\lambda| \leq M'$ $\phi(x,\eta,\lambda) \leq$ Cte par compacité.

Pour $|\lambda| \geq M'$, $\phi(x,\eta,\lambda) \leq \dfrac{|\lambda| + |\eta|^m}{|\lambda| - |\tau_\varphi(x,\eta)|}$, donc

$$\phi(x,\eta,\lambda) \leq \frac{2(|\lambda| + |\eta|^m)}{|\lambda| + |\eta|^m + (|\lambda| - |\eta|^m - 2|\tau_\varphi(x,\eta)|)} \leq 2$$

d'où la conclusion.

Dans une carte (U,φ) de M, on a donc, en posant $X = \varphi(U)$

$$\sigma_U = \tau_\varphi + \tau_1 \quad \text{où } \tau_1 \text{ est dans } S^{m-1}(X).$$

On peut alors définir une paramétrix de A pour $\lambda \notin S$ avec la suite $(b_j(x,\eta,\lambda))_{j=0,1,..}$ des symboles sur X définie par récurrence de la manière suivante :

$$(3.1) \quad \begin{cases} b_0(x,\eta,\lambda) = [\tau_\varphi(x,\eta) - \lambda]^{-1} \\ b_h(x,\eta,\lambda) = - b_0(x,\eta,\lambda) \sum \frac{(-i)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha_\eta b_j(x,\eta,\lambda) D^\alpha_x \tau_k \end{cases}$$

où on a posé $\tau_0 = \tau_\varphi$, la somme est prise pour $j < h$, $k \leq 1$ et $j + |\alpha| + k = h$.

Nos hypothèses étant plus générales que celles de SEELEY on ne peut pas, a priori, affirmer que les résultats de SEELEY ([8], du lemme 2, page 295 au corollaire 2, page 299) sont vérifiés dans notre cas. Cependant un certain nombre de ces résultats se généralisent facilement, c'est le cas en particulier des propositions (3.2) à (3.9) suivantes, car ce qui importe dans leur démonstration c'est le comportement à l'infini des fonctions b_h, comportement qui ne dépend en fait que de l'hypothèse (2.0.0). En renvoyant à [8] pour les démonstrations nous rappelons en adaptant leur énoncé à nos hypothèses les résultats de SEELEY utilisés dans la suite.

Dans les propositions suivantes, C désigne une constante strictement positive, indépendante de λ, pouvant varier selon la proposition énoncée.

(3.2) PROPOSITION ([8], lemme 2, p. 295). - *Pour tout compact* K *de* X, *pour tous les* n*-indices* α *et* β, *on a*

$$|D^\beta_x D^\alpha_\eta b_h(x,\xi,\lambda)| \leq C(1 + |\xi| + |\lambda|^{1/m})^{-m}(1 + |\xi|)^{-h-|\alpha|},$$

pour tout x *de* K, ξ *de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\lambda \notin S$.

Soit ϕ une fonction de $\mathcal{D}(X)$, M_ϕ l'opérateur de multiplication par ϕ, on pose

$$B_H(\lambda) = M_\phi \sum_{h=o}^{H-1} O_p(b_h(\lambda)).$$

(3.3) <u>PROPOSITION</u> ([8] lemme 2, p. 295). - *Soit s un réel, on peut prolonger* $O_p(\phi b_h(\lambda))$ *en un opérateur continu de* $H_s^\circ(X)$, *et on a*

(3.4) $$\| O_p(\phi b_h(\lambda)\|_{s,s} \leq C|\lambda|^{-1}, \quad \lambda \notin S.$$

Par suite il en est de même de $B_H(\lambda)$ *et*

(3.5) $$\| B_H(\lambda)\|_{s,s} \leq C\,|\lambda|^{-1}, \quad \lambda \notin S.$$

Soit $(\pi_i)_{i=1,\dots,\ell}$ une partition C^∞ de l'unité associée à l'atlas $\mathcal{A}$, pour chaque indice i on considère des fonctions ψ_i et θ_i dans $\mathcal{D}(U_i)$ telles que $\psi_i\theta_i = \psi_i$, $\pi_i\psi_i = \pi_i$. On pose $\phi_i = \psi_i \circ \varphi_i^{-1}$ et

$$R_H(\lambda) = \sum_{i=1}^{\ell} M_{\pi_i} \left| \sum_{j=o}^{H-1} O_p(\phi_i b_j) \right|_{\varphi_i^{-1}} M_{\psi_i},$$

l'indice φ_i^{-1} indiquant qu'on prend l'image réciproque de l'opérateur entre crochets par φ_i, $R_H(\lambda)$ est donc un O.P.D. sur M d'ordre $-m$ et de symbole principal $(\tau-\lambda)^{-1}$.

(3.6) <u>COROLLAIRE</u>. - *On déduit de (3.5) que pour tout réel* s, $R_H(\lambda)$ *se prolonge en un opérateur continu de* $H_s(M)$ *et que*

$$\| R_H(\lambda)\|_{s,s} \leq C\,|\lambda|^{-1}.$$

(3.7) <u>PROPOSITION</u> ([8], corollaire 1, p. 298). - *Il existe une constante* $R > 0$ *telle que pour* $\lambda \notin S$, $|\lambda| \geq R$, *on ait* λ *dans* $\rho(A)$. *Soit s un réel, pour* $\lambda \notin S'$, $(A-\lambda)^{-1}$ *est un opérateur continu de* $H_s(M)$ *dans* $H_{s+p}(M)$ *pour tout réel* p, $0 \leq p \leq m$ *et*

(3.8) $$\| (A-\lambda)^{-1}\|_{s,s+p} \leq C\,|\lambda|^{-1+\frac{p}{m}}, \quad \lambda \notin S'.$$

La proposition précédente justifie la définition de S' et de Γ_1 et montre que l'intégrale (2.0.7) existe et définit un opérateur continu de $H_s(M)$.

(3.9) PROPOSITION ([8], corollaire 2, p. 299). - *Soit* s *un réel, on a*

$$\| R_H(\lambda) - (A-\lambda)^{-1} \|_{s,s+H} \leq C|\lambda|^{-1}, \qquad \forall \lambda \notin S'.$$

4. PREUVE DES RESULTATS.

4.0. Preuve de la proposition (2.0.9). - L'inégalité (3.8) montre que l'intégrale $\int_{\Gamma_1} f(\lambda)(A-\lambda)^{-1}d\lambda$ est normalement convergente et définit un opérateur continu sur $H_s(M)$.

Soit Γ_2 un autre chemin contenu dans Ω, on doit prouver que

(4.0.1) $$\int_{\Gamma_1} f(\lambda)(A-\lambda)^{-1}d\lambda = \int_{\Gamma_2} f(\lambda)(A-\lambda)^{-1}d\lambda.$$

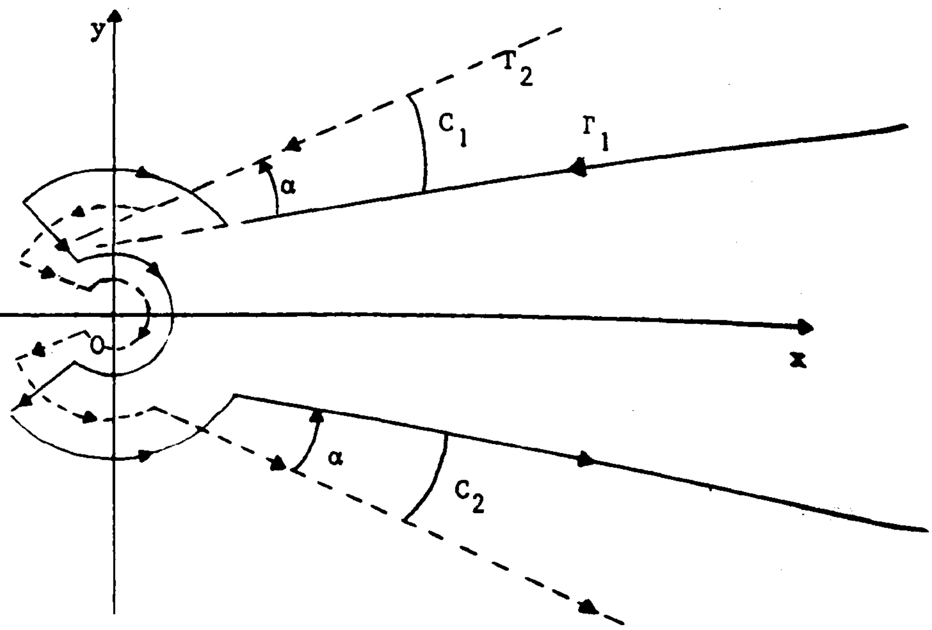


Figure 6

On se place dans le cas de la figure 1.

Pour $\text{Im}\,\lambda > 0$ et $|\lambda|$ assez grand Γ_1 et Γ_2 sont des morceaux de droites, on note α leur angle et O_1 leur intersection. Soit C_1 un arc de cercle de centre O_1 et de rayon ρ assez grand, situé entre Γ_1 et Γ_2.

Pour $\mathrm{Im}\,\lambda < 0$ on définit de même C_2. La fonction $f(\lambda)(A-\lambda)^{-1}$ étant holomorphe il suffit de prouver que $\int_{C_i} f(\lambda)(A-\lambda)^{-1}d\lambda$ tend vers 0 quand ρ tend vers l'infini. Or

$$\left\| \int_{C_i} f(\lambda)(A-\lambda)^{-1}d\lambda \right\|_{s,s} < \text{Cte } \rho\alpha\rho^{p}\,\rho^{-1} = \text{Cte } \rho^{p},$$

et ρ^p tend vers 0 quand ρ tend vers l'infini car $p < 0$, d'où (4.0.1). Dans les autres cas de figures, la démonstration est semblable à la précédente.

4.1. Preuve de la proposition (2.0.10).

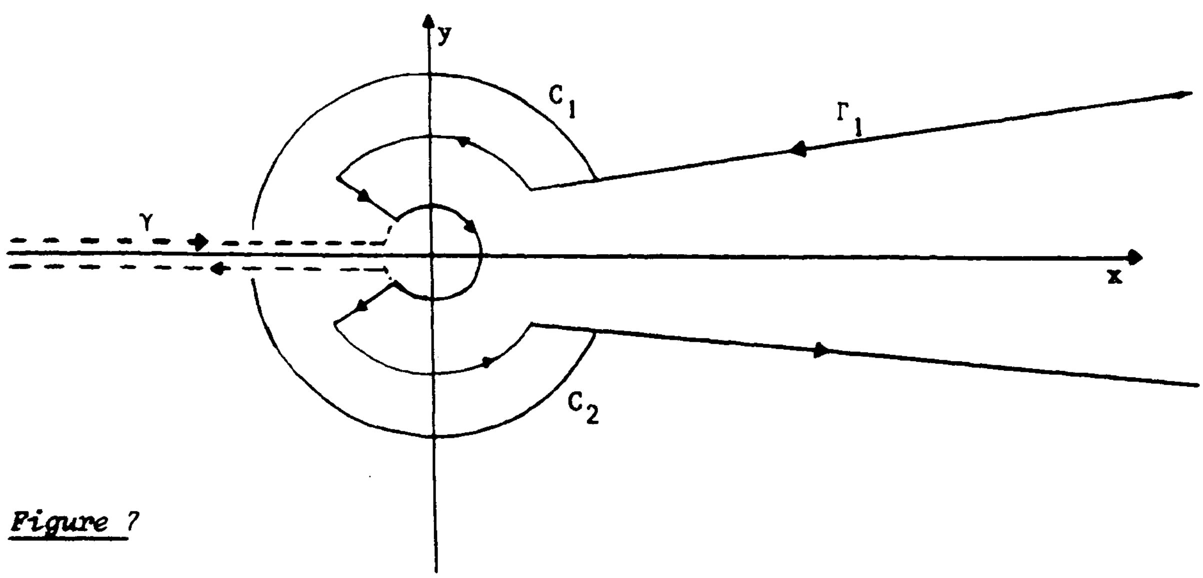


Figure 7

On considère la coupure du plan complexe définie par l'axe des réels négatifs et on définit le chemin γ suivant : on va de $-\infty$ à $-\varepsilon$ sur le bord supérieur de la coupure, on suit le cercle $C(0,\varepsilon)$ (un tour complet) puis on va de $-\varepsilon$ à $-\infty$ sur le bord inférieur de la coupure. Il faut montrer que, pour s dans $\mathbb{C}$ et $\mathrm{Re}(s) < 0$, on a

$$\int_{\Gamma_1} \lambda^{s}(A-\lambda)^{-1}d\lambda = \int_{\gamma} \lambda^{s}(A-\lambda)^{-1}d\lambda.$$

La preuve est identique à celle de la proposition (2.0.9).

4.2. Preuve de la proposition (2.0.11) et du corollaire (2.0.12). - Il est évident que $(f+g)(A) = f(A) + g(A)$ et que $(\nu f)(A) = \nu \, . \, f(A)$, il faut seulement démontrer que $(f.g)(A) = f(A) \circ g(A)$.

i) On considère d'abord le cas $p < 0$ et $r < 0$, la preuve est classique en calcul fonctionnel (cf. [1]), on a

$$f(A) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_1} f(\lambda)(A-\lambda)^{-1} d\lambda .$$

Soit Γ_2 un autre chemin contenu dans Ω, on a d'après (2.0.9)

$$g(A) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_2} g(\mu)(A-\mu)^{-1} d\mu , \text{ d'où}$$

$$f(A)g(A) = \frac{-1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} f(\lambda)g(\mu)(A-\lambda)^{-1}(A-\mu)^{-1} \, d\mu d\lambda ,$$

or (identité de HILBERT)

$$(A-\lambda)^{-1}(A-\mu)^{-1} = \frac{1}{\lambda-\mu} [(A-\lambda)^{-1} - (A-\mu)^{-1}] ,$$

d'où en appliquant le théorème de FUBINI

$$f(A)g(A) = \frac{-1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} f(\lambda)(A-\lambda)^{-1} \left[\int_{\Gamma_2} \frac{g(\mu)}{\lambda-\mu} d\mu \right] d\lambda$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_2} g(\mu)(A-\mu)^{-1} \left[\int_{\Gamma_1} \frac{f(\lambda)}{\lambda-\mu} \, d\lambda \right] d\mu .$$

On choisit Γ_1 intérieur à Γ_2

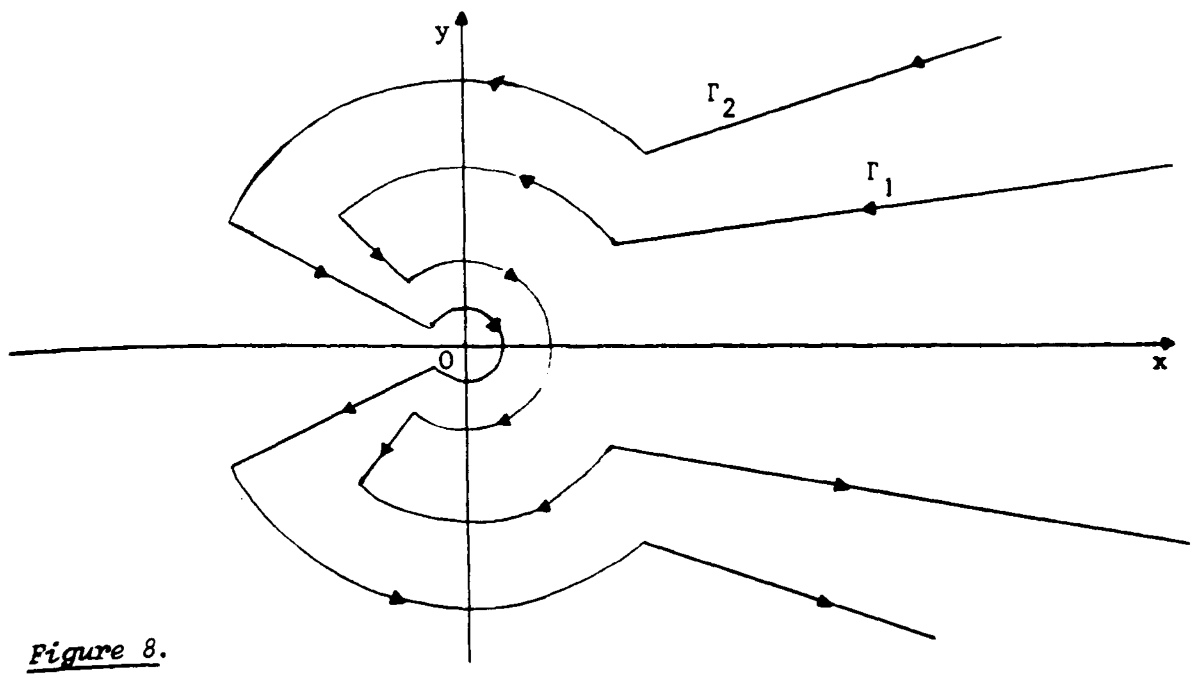


Figure 8.

On a d'après CAUCHY :

$$\int_{\Gamma_2} \frac{g(\mu)}{\lambda-\mu}\, d\mu = -\, 2i\pi\; g(\lambda) \qquad \text{et} \qquad \int_{\Gamma_1} \frac{f(\lambda)}{\lambda-\mu}\, d\lambda = 0,$$

d'où $f(A)g(A) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_1} f(\lambda)g(\lambda)(A-\lambda)^{-1}d\lambda = (f.g)(A).$

ii) Le cas p et r quelconques se déduit immédiatement du i) en remarquant que, pour un entier naturel k, on a dans $L(H_s(M),\, H_{s-mk}(M))$:

$$(4.2.0) \qquad A^k \int_{\Gamma_1} f(\lambda)(A-\lambda)^{-1}d\lambda = \left[\int_{\Gamma_1} f(\lambda)(A-\lambda)^{-1}d\lambda\right] A^k,$$

où f est dans $O_b(\Omega)$, $b < 0$.

Le corollaire (2.0.12) se déduit immédiatement de ce qui précède.

4.3. Preuve du théorème (2.0.13). - Soient (U,φ) une carte de M (on pose $X = \varphi(U)$) et $f \in O_b(\Omega)$, avec $b < 0$, on pose

$$(4.3.0) \qquad c_j(x,\eta) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_1} f(\lambda) b_j(x,\eta,\lambda) d\lambda.$$

(4.3.1) LEMME. - C_j *est un symbole d'ordre* mb - j.

Preuve. - L'étude des formules (3.1) montre que l'on peut écrire

$$b_j(x,\eta,\lambda) = \sum_{k=o}^{j} \gamma_{k,j}(x,\eta) \ . \ [\tau_\varphi(x,\eta) - \lambda]^{-k-1}$$

où $\gamma_{k,j}$ est un symbole d'ordre -j + km, or

$$\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_1} f(\lambda)\ [\tau_\varphi(x,\eta) - \lambda]^{-k-1} d\lambda = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\tau_\varphi(x,\eta))$$

et $|f^h(\lambda)| \leq$ Cte $|\lambda|^{b-h}$ pour $|\lambda|$ assez grand, λ dans $\overline{S}$, on en déduit que $f^{(k)}(\tau_\varphi(x,\eta))$ est un symbole d'ordre m(b-k), d'où la conclusion.

(4.3.2) LEMME. - *Soit* Φ *une fonction* $\mathcal{D}(X)$, *on a*

$$\sum_{j=o}^{H-1} Op(\phi C_j) = \frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_1} f(\lambda)\ (\sum_{j=o}^{H-1} Op\ \phi b_j(\lambda))d\lambda .$$

Preuve. - $Op(\phi\ C_j)$ se prolonge en un opérateur continu sur $H_s^\circ(X)$ (démonstration semblable à celle de la proposition (3.3), voir [8], lemme 2, p. 295).

La proposition (3.3) entraîne que $\int_{\Gamma_1} f(\lambda)Op(\phi b_j(\lambda))d\lambda$ définit un opérateur continu sur $H_s^\circ(X)$.

Soit g une fonction de $\mathcal{D}(X)$ on a :

$$Op(\phi C_j)g(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x/\xi>}\phi(x)C_j(x,\xi)\hat{g}(\xi)d\xi .$$

$$= i(2\pi)^{-n-1}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x/\xi>}\phi(x)\left[\int_{\Gamma_1} f(\lambda)b_j(x,\xi,\lambda)\hat{g}(\xi)d\lambda\right]d\xi$$

$$= \frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_1} f(\lambda)\left[(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>}\phi(x)b_j(x,\xi,\lambda)\hat{g}(\xi)d\xi\right]d\lambda,$$

en utilisant le théorème de FUBINI, d'où

$$Op(\phi C_j)g(x) = \frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_1} f(\lambda)Op(\phi b_j(\lambda))g(x)d\lambda.$$

(4.3.3) <u>COROLLAIRE</u>. - $\int_{\Gamma_1} f(\lambda)R_H(\lambda)d\lambda$ *est un O.P.D. sur* M *d'ordre* mb *et de symbole principal* $f(\tau)$.

Preuve. - Le corollaire (3.6) prouve que cette intégrale est absolument convergente et définit un opérateur continu sur $H_s(M)$, que cet opérateur soit un O.P.D. vient du lemme (4.3.2), qu'il soit d'ordre mb du lemme (4.3.1).

Et

$$C_o(x,\eta) = \frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\lambda)}{\tau_\varphi(x,\eta)-\lambda}d\lambda = f(\tau_\varphi(x,\eta))$$

d'après la formule intégrale de CAUCHY, d'où la conclusion.

(4.3.4) <u>LEMME</u>. - $\int_{\Gamma_1} f(\lambda)(A-\lambda)^{-1}d\lambda - \int_{\Gamma_1} f(\lambda)B_H(\lambda)d\lambda$ *est un opérateur continu de* $H_s(M)$ *dans* $H_{s+H}(M)$.

Preuve. - C'est un corollaire immédiat de (3.9).

(4.3.5) <u>LEMME</u>. - *Soit* F *un opérateur continu de* $\mathcal{D}(M)$ *dans* $\mathcal{D}(M)$, *qui pour tous les réels* s *et* t *se prolonge en un opérateur continu de* $H_s(M)$ *dans* $H_t(M)$, F *est un opérateur à noyau* C^∞.

Preuve. - C'est une conséquence immédiate du corollaire page 181, dans [9].

(4.3.6) <u>LEMME</u>. - *Soient* $G : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$ *un opérateur continu et* $(G_h)_{h\in\mathbb{N}}$ *une suite d'O.P.D., sur* M, *d'ordre* ν_k *où* $(\nu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est une suite de réels tendant vers* $-\infty$ *en décroissant strictement, on suppose que* $G - \sum_{h=o}^{H-1} G_h$ *se prolonge, quel que soit le réel* s *en un* *opérateur continu de* $H_s(M)$ *dans* $H_{s-\nu_H}(M)$.

Alors G *est un O.P.D. d'ordre* ν_o *et localement un symbole* g *de* G *est donné par :*

$$g \sim \sum_{h=o}^{\infty} g_h,$$

où g_h *est un symbole de* G_h.

Preuve. - Soit (U,φ) une carte de M, on pose $X = \varphi(U)$, il faut montrer que l'opérateur G_φ induit par G sur X est un O.P.D. d'ordre ν_o.

$G_{h,\varphi}$ étant un O.P.D. sur X, d'ordre ν_h, il existe un symbole g_h de $S^{\nu_h}(X)$ tel que $G_{h,\varphi} - Op(g_h)$ soit à noyau C^∞ (1.1).

On peut alors trouver un symbole g de $S^{\nu_o}(X)$ tel que $g \sim \sum_{h=o}^{\infty} g_h$ ([4] proposition (2.7), page 146), et il suffit de voir que $G_\varphi - Op(g)$ est un opérateur à noyau C^∞.

Pour cela soient K un compact de X, ϕ et ψ des fonctions de $\mathcal{D}(X)$ à support dans K, on a

$$M_\phi[G_\varphi - Op(g)]M_\psi = M_\phi[G_\varphi - \sum_{h=o}^{H-1} G_{h,\varphi}]M_\psi + M_\phi[\sum_{h=o}^{H-1}(G_{h,\varphi} - O_p(g_h))]M_\psi$$

$$- M_\phi\, Op(g - \sum_{h=o}^{H-1} g_h)M_\psi.$$

Soit $\mathcal{D}_K(X) = \{f \in \mathcal{D}(X),\ \mathrm{Supp}\, f \subset K\}$, on note $H_s(K)$ l'adhérence de $\mathcal{D}_K(X)$ dans $H_s^o(X)$, on définit de façon similaire $H_s(\varphi^{-1}(K))$.

$H_s(K)$ et $H_s(\varphi^{-1}(K))$ sont isomorphes ([3] exposé n° 10), en utilisant cet isomorphisme et l'hypothèse, le premier terme du second membre est un opérateur continu de $H_s^o(X)$ dans $H_{s-\nu_H}^o(X)$.

$Op(g - \sum_{h=1}^{H-1} g_h)$ est un O.P.D. d'ordre ν_H, on en déduit que

$M_\phi \, Op(g - \sum_{h=1}^{H-1} g_h) M_\psi$ envoie $H^\circ_s(X)$ dans $H^\circ_{s-\nu_H}(X)$ (se déduit du théorème (5.3), page 170 dans [4]).

Par suite $M_\phi [G_\varphi - Op(g)] M_\psi$ est un opérateur continu de $H^\circ_s(X)$ dans $H^\circ_t(X)$ quels que soient les réels s et t, et on montre que c'est un opérateur à noyau C^∞ par une méthode semblable à celle du lemme (4.3.5).

(4.3.8) REMARQUE. - Soit A (resp. B) un O.P.D. sur M d'ordre m (resp. m') et de symbole principal σ (resp. τ), on déduit immédiatement de la formule (2.1.9) page 106 de [6] que $A \circ B$ est un O.P.D. d'ordre m+m' et de symbole principal $\sigma . \tau$.

(4.3.9) Fin de la preuve du théorème du théorème (2.0.13). - Soit $f \in O_b(\Omega)$.

i) Pour b < 0, les lemmes (4.3.3), (4.3.4) et (4.3.6) montrent que $f(A) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_1} f(\lambda)(A-\lambda)^{-1} d\lambda$ est un O.P.D. d'ordre mb dont le symbole principal est $f(\tau)$.

ii) Soit $f(\lambda) = \lambda^b$ pour b < 0, l'opérateur $[A]^b = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_1} f(\lambda)(A-\lambda)^{-1} d\lambda$ est un O.P.D. d'ordre bm et de symbole principal τ^b, pour $b=-n$ ($n \in \mathbb{N}$) on a $[A]^{-n} = A^{-n}$.

Preuve de ii). - Seul le cas $b = -1$ est à considérer ; on montre que $A^{-1} = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\lambda} (A-\lambda)^{-1} d\lambda$ par une méthode similaire à celle utilisée par SEELEY dans la démonstration du lemme 3, page 300 de [8] ; on termine en remarquant que A^{-1} est un O.P.D. d'ordre $-m$ et de symbole principal τ^{-1} (d'après i).

Ce qui précède prouve que la méthode de construction du groupe des opérateurs A^s (s réel) est exactement celle développée par SEELEY pour les O.P.D. classiques. En renvoyant à SEELEY ([8]) pour les démonstrations on a :

pour tout réel q, A^q est un O.P.D. d'ordre mq et de symbole principal τ^q.

iii) Si b est un réel quelconque, on peut toujours trouver un réel q tel que $b-q < 0$, alors d'après la proposition (2.0.11) :

$$f(A) = \frac{i}{2\pi} A^q \int_{\Gamma_1} \lambda^{-q} f(\lambda)(A-\lambda)^{-1} d\lambda \tag{4.3.10}$$

et (4.3.10) est indépendant de q, d'où la conclusion en utilisant i), ii) et la remarque (4.3.8).

4.4. Preuve de (2.0.15) :

i) Si q est un entier relatif tel que $b-q < 0$, on a

$$f(A) = \frac{i}{2\pi} A^q \int_{\Gamma_1} f(\lambda)\lambda^{-q}(A-\lambda)^{-1} d\lambda \quad \text{(proposition (2.0.11))},$$

$$f(A) \cdot \varphi_j = \frac{i}{2\pi} A^q \int f(\lambda)\lambda^{-q}(A-\lambda)^{-1} \cdot \varphi_j d\lambda, \quad \text{or } (A-\lambda)^{-1} \varphi_j = \frac{1}{\lambda_j-\lambda} \cdot \varphi_j$$

d'où $f(A) \cdot \varphi_j = \left(\frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\lambda)\lambda^{-q}}{\lambda_j - \lambda} d\lambda\right) \cdot A^q \varphi_j = f(\lambda_j)\, \varphi_j$

ii) Soit s un nombre réel et $q = \frac{s}{m}$, l'O.P.D. A^q est d'ordre $mq = s$, c'est donc un opérateur continu de $H_s(M)$ dans $H_o(M)$, de même A^{-q} envoie $H_o(M)$ dans $H_s(M)$.

Si u appartient à $H_s(M)$, $A^q u$ appartient à $H_o(M)$ donc $A^q u = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j$ (la série converge dans $H_o(M)$), et comme d'après (i), $A^{-q} \varphi_j = \lambda_j^{-q} \varphi_j$

$$u = A^{-q} \circ A^q u = \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \lambda_j^{-q})\, \varphi_j \quad (\text{dans } H_s(M))$$

par suite $(\varphi_1, \ldots, \varphi_\ell, \ldots)$ engendre $H_s(M)$.

iii) Soit $s = \frac{\varepsilon}{m}$, A^{-s} est un opérateur compact sur $H_o(M)$, sa décomposition spectrale s'écrit :

$$A^{-s} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-s} P_j$$

donc $i_{ms} = A^s \cdot A^{-s} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-s} A^s P_j = \sum_{j=1}^{\infty} P_j$

où $i_{ms} : H_o(M) \longrightarrow H_{-sm}(M)$ est l'injection canonique, d'où

$$f(A) = \sum_{j=1}^{\infty} f(\lambda_j) P_j$$ et cette série converge dans $L(H_o(M), H_{-\varepsilon - mb}(M))$

4.5. Preuve de la proposition (2.1.2).

Preuve de i). - On a pour $\varepsilon' > 0$, $e^{-tA} = \frac{i}{2\pi} A^{\varepsilon'} \int_{\Gamma_1} \lambda^{-\varepsilon'} e^{-t\lambda} (A-\lambda)^{-1} d\lambda$

d'après la proposition (2.0.11). En utilisant l'inégalité (3.8), il vient

$$\| \lambda^{-\varepsilon'} e^{-t\lambda} (A-\lambda)^{-1} \|_{s,s} \leq \text{Cte } |\lambda|^{-1-\varepsilon'}, \quad \text{pour } \lambda \text{ sur } \Gamma$$

donc $\int_{\Gamma} \lambda^{-\varepsilon} e^{-t\lambda} (A-\lambda)^{-1} d\lambda$ est une intégrale normalement convergente et représente une fonction continue de $[0,\infty[$ dans $L(H_s(M), H_s(M))$. Il en est de même pour

$$\int_{\Gamma_1 - \Gamma} \lambda^{-\varepsilon} e^{-t\lambda} (A-\lambda)^{-1} d\lambda, \text{ car } \Gamma_1 - \Gamma \text{ est un chemin fermé,}$$

par suite $t \to e^{-tA}$ est une fonction continue de $[0,\infty[$ dans $L(H_s(M), H_{s-\varepsilon' m}(M))$, car $A^{\varepsilon'}$ est un opérateur continu de $H_s(M)$ dans $H_{s-\varepsilon' m}(M)$, (puisque $A^{\varepsilon'}$ est un O.P.D. d'ordre $m\varepsilon'$).

D'où la conclusion en prenant $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{m}$.

Preuve de ii). - Soit k un entier naturel, $k \geq 1$, on pose $f(\lambda) = (-1)^k \lambda^k e^{-t\lambda}$, pour λ dans Ω. Pour tout réel positif p, on a

$$|\lambda^p f(\lambda)| \leq |\lambda|^{k+p} e^{-t\mathrm{Re}(\lambda)}.$$

On peut trouver une constante $C > 0$ telle que

$$|\mathrm{Im}(\lambda)| \leq C\ |\mathrm{Re}(\lambda)|,$$

pour λ dans Ω et $\mathrm{Re}(\lambda) \geq a_2 > 0$. D'où

$$|\lambda^p f(\lambda)| \leq \text{Cte } \mathrm{Re}(\lambda)^{p+k}\ e^{-t\ \mathrm{Re}(\lambda)}$$

(4.5.0) $$|\lambda^p f(\lambda)| \leq \text{Cte } \frac{1}{t^{p+k}}, \quad (t \in]0,\infty))$$

pour λ dans Ω, $\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant a_2$. On en déduit que $f(\lambda)$ est dans $O_{-\infty}(\Omega) = \bigcap_{b \in \mathbb{R}} O_b(\Omega)$. D'où

$$f(A) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_1} f(\lambda)(A-\lambda)^{-1} d\lambda = \frac{i}{2\pi}(-1)^k A^{-q} \int_{\Gamma_1} \lambda^{q+k} e^{-t\lambda}(A-\lambda)^{-1} d\lambda$$

d'après la proposition (2.0.11), (q réel, $q > 0$). On va prouver que

$\int_{\Gamma_1} \lambda^{q+k} e^{-t\lambda}(A-\lambda)^{-1} d\lambda$ est uniformément convergente pour t dans $]0, \infty)$.

Pour cela soient a et b deux réels, $0 < a < b$ en utilisant l'inégalité (4.5.0) pour $p = q+1$ et l'inégalité (3.8) il vient

$$\| \lambda^{q+k} e^{-t\lambda}(A-\lambda)^{-1} \|_{s,s} \leqslant \mathrm{Cte}\ |\lambda|^{-2},$$

pour $\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant a_2$, $\lambda \in \Omega - S'$ et $a \leqslant t \leqslant b$. Par suite $\int_{\Gamma} \lambda^{q+k} e^{-t\lambda}(A-\lambda)^{-1} d\lambda$ converge uniformément sur $]0,\infty)$. Il en est de même de

$\int_{\Gamma_1 - \Gamma} \lambda^{q+k} e^{-t\lambda}(A-\lambda)^{-1} d\lambda$, car $\Gamma_1 - \Gamma$ est un chemin fermé. Par suite

$\int_{\Gamma_1} \lambda^{q+k} e^{-t\lambda}(A-\lambda)^{-1} d\lambda$ converge uniformément. Donc puisque :

$\frac{d^k}{dt^k}(\lambda^q e^{-t\lambda}(A-\lambda)^{-1}) = (-1)^k \lambda^{q+k} e^{-t\lambda}(A-\lambda)^{-1}$, $\int_{\Gamma_1} \lambda^q e^{-t\lambda}(A-\lambda)^{-1} d\lambda$ est une

fonction de classe C^∞ de $]0,\infty)$ dans $L(H_s(M), H_s(M))$, d'où la conclusion en remarquant que $e^{-tA} = \frac{i}{2\pi} A^{-q} \int_{\Gamma_1} \lambda^q e^{-t\lambda}(A-\lambda)^{-1} d\lambda$ et que A^{-q} est un

opérateur continu de $H_s(M)$ dans $H_{s+qm}(M)$.

<u>Preuve de (iii)</u>. - Pour $t > 0$ fixé $e^{-t\lambda}$ est dans $O_{-\infty}(\Omega)$, donc e^{-tA} est un O.P.D. d'ordre $-\infty$, par suite c'est un opérateur à noyau C^∞ ([4], théorème (2.8), page 146). Il faut montrer que $G(t,x,y)$ est une fonction de classe C^∞ de $]0,\infty) \times M \times M$ dans $\mathbb{C}$. La question étant purement locale, on peut supposer que pour $t > 0$ fixé $G(t,x,y)$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et que si $F(t)$ est l'opérateur associé à $G(t,x,y)$, $t \to F(t)$ est une fonction de classe C^∞ de $]0, \infty)$ dans $L(H_s(\mathbb{R}^n), H_{s'}(\mathbb{R}^n))$, quels que soient les réels s et s'.

Soient x_0 et y_0 fixés, il suffit de démontrer que l'application

$t \to (\frac{\partial}{\partial x})^{\alpha} (\frac{\partial}{\partial y})^{\beta} G(t,x_0,y_0) = G_{\alpha}^{\beta}(t,x_0,y_0)$ est de classe C^{∞}, où $G_{\alpha}^{\beta}(t,x,y)$ est le noyau associé à l'opérateur $F_{\alpha}^{\beta}(t) = (\frac{\partial}{\partial x})^{\alpha} \circ F(t) \circ (\frac{\partial}{\partial y})^{\beta}$. $(\frac{\partial}{\partial x})^{\alpha}$ étant un opérateur continu de $H_s(\mathbb{R}^n)$ dans $H_{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ (quel que soit s), la fonction $t \to F_{\alpha}^{\beta}(t)$ est de classe C^{∞} de $]0,\infty)$ dans $L(H_s(\mathbb{R}^n), H_{s'}(\mathbb{R}^n))$ quels que soient les réels s et s'.

Or pour $s < -\frac{n}{2}$, δ_{x_0} désignant la mesure de DIRAC en x_0, on a δ_{x_0} dans $H_s(\mathbb{R}^n)$ ([9], exemple 4 page 175) et puisque $H_s(\mathbb{R}^n)$ est le dual de $H_{-s}(\mathbb{R}^n)$, on déduit de ce qui précède que

$$t \to < F_{\alpha}^{\beta}(t) \,.\, \delta_{y_0}, \delta_{x_0} >$$

est une fonction de classe C^{∞} de $]0,\infty)$ dans $\mathbb{C}$, $<,>$ désignant le crochet de dualité entre $H_s(\mathbb{R}^n)$ et $H_{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Or $G_{\alpha}^{\beta}(t,x_0,y_0) = < F_{\alpha}^{\beta}(t) \,.\, \delta_{y_0}, \delta_{x_0} >$ ([9], théorème 3, page 180), d'où la conclusion.

Preuve de iv). - On a $e^{-tA}\varphi$ dans $\mathcal{D}(M)$ car e^{-tA} est un opérateur à noyau C^{∞} et

$$\psi(t,x) = < e^{-tA}\varphi, \delta_x >$$

où $<,>$ désigne le crochet de dualité entre $H_{-s}(M)$ et $H_s(M)$, $(s < -n/2)$, on en déduit comme dans iii) que $\psi(t,x)$ est de classe C^{∞} sur $]0,\infty) \times M$, d'où la conclusion.

4.6. Preuve de l'exemple (2.1.3). - Voir (4.3.9).

4.7. Preuves des propositions (2.2.0) et (2.2.2). - Une mesure régulière strictement positive μ est donnée sur M. On suppose $m > n$ et on note $K(x,y,\lambda)$ le noyau de $(A-\lambda)^{-1}$.

(4.7.0) LEMME. - $K(x,y,\lambda)$ *est un noyau, continu en* (x,y), *analytique en* λ *et pour* $n < q \leq m$ *on a*

$$|K(x,y,\lambda)| \leq Cte \, |\lambda|^{-1+\frac{q}{m}}.$$

Preuve. - A l'aide d'une partition de l'unité on se ramène au cas où $K(x,y,\lambda) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ est le noyau d'un O.P.D. d'ordre $-m$, $F(\lambda)$ sur $\mathbb{R}^n$, tel que pour tout réel s, $\lambda \to F(\lambda)$ soit une application analytique d'un voisinage de Ω-S' dans $L(H_s(\mathbb{R}^n), H_{s+p}(\mathbb{R}^n))$, pour $0 \leqslant p \leqslant m$, et que

$$\text{(inégalité (3.8))} \qquad \| F(\lambda) \|_{s,s+p} \leqslant \text{Cte } |\lambda|^{-1+\frac{p}{m}}.$$

Donc pour λ fixé $F(\lambda)$ est un opérateur continu de $H_{-q/2}$ dans $H_{-q/2+q}(\mathbb{R}^n) = H_{q/2}(\mathbb{R}^n)$ avec $\frac{q}{2} > \frac{n}{2}$, par suite ([9], théorème 3, page 180) $K(x,y,\lambda)$ est un noyau continu en (x,y) et

$$K(x,y,\lambda) = \langle F(\lambda)\delta_y, \delta_x \rangle,$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ est le crochet de dualité entre $H_{q/2}(\mathbb{R}^n)$ et $H_{-q/2}(\mathbb{R}^n)$. Donc $K(x,y,\lambda)$ est analytique en λ et

$$\begin{aligned} |K(x,y,\lambda)| &\leqslant \| F(\lambda) \|_{-q/2,-q/2+q} \, \| \delta_x \|_{-q/2} \, \| \delta_y \|_{-q/2} \\ &\leqslant \text{Cte } |\lambda|^{-1+q/m}, \end{aligned}$$

car $\| \delta_x \|_{-q/2}$ est indépendant de x.

On rappelle que $f(\lambda) \in O_k(\Omega)$ avec $k < -\frac{n}{m}$.

(4.7.1) <u>LEMME</u>.

i) $K(x,y) = \dfrac{i}{2\pi} \displaystyle\int_{\Gamma_1} f(\lambda) K(x,y,\lambda) d\lambda.$

ii) En particulier :

$$G(t,x,y) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_1} e^{-\lambda t} K(x,y,\lambda) d\lambda.$$

Preuve. - D'après le lemme (4.7.0) pour $n < q \leqslant m$,

$$|f(\lambda) \,.\, K(x,y,\lambda)| \leqslant \text{Cte } |\lambda|^{-1+k+\frac{q}{m}}.$$

On choisit q tel que $n < q < \text{Min}(-mk, m)$, alors $k + \frac{q}{m} < 0$, l'intégrale

$\int_{\Gamma_1} f(\lambda)\ K(x,y,\lambda)d\lambda$ est normalement convergente et définit un noyau continu.

Soient θ et ψ deux fonctions de $\mathscr{D}(M)$ on a

$$< \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_1} f(\lambda)\ K(x,y,\lambda)d\lambda\ / \theta \otimes \psi >$$

$$= \frac{i}{2\pi} \iint_{M^2} \left\{ \int_{\Gamma_1} f(\lambda)\ K(x,y,\lambda)d\lambda \right\} \theta(x)\psi(y)d\mu(x)\ d\mu(y)$$

$$= \frac{i}{2\pi} < \int_{\Gamma_1} f(\lambda)(A-\lambda)^{-1}\psi\ d\lambda,\ \theta >,$$

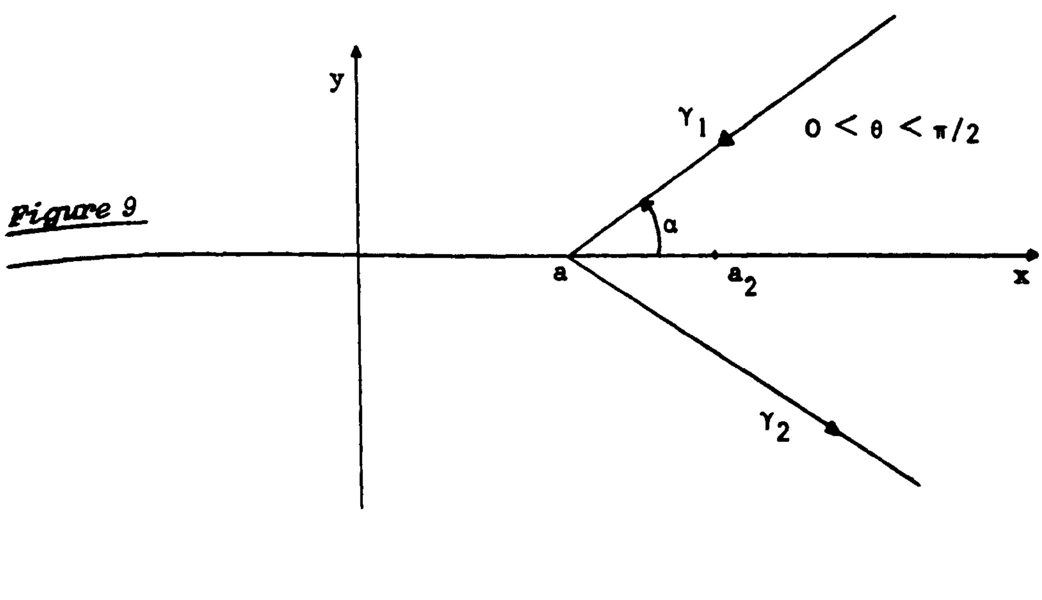
en utilisant le théorème de FUBINI.

D'où $< \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_1} f(\lambda)K(x,y,\lambda)d\lambda\ /\ \theta \otimes \psi > = < K(x,y),\ \theta \otimes \psi >$, et

$$K(x,y) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_1} f(\lambda)K(x,y,\lambda)d\lambda.$$

(4.7.2) <u>Preuve de (2.2.0)</u>. - On prend $a < a_2$, les hypothèses nous permettent d'intégrer sur le contour γ suivant :

Figure 9



$$e^{-tA} = \frac{i}{2\pi}\int_\gamma e^{-t\lambda}(A-\lambda)^{-1}d\lambda \qquad \text{avec } \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \text{ et}$$

$$G(t,x,y) = \frac{i}{2\pi}\int_\gamma e^{-t\lambda}\,K(x,y,\lambda)d\lambda = \frac{i}{2\pi}\left[\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}\right].$$

Soit $\mathfrak{I}_j = \int_{\gamma_j} e^{-t\lambda}\,K(x,y,\lambda)d\lambda$, sur γ_j on a $\lambda = \rho e^{\pm i\alpha} + a$, $\rho \geq 0$,

d'où

$$|\mathfrak{I}_j| \leq \text{Cte}\int_0^{+\infty} e^{-at-\rho t\cos\alpha}\,\rho^{-1+q/m}d\rho \qquad n < q \leq m.$$

Soit $u = \rho t\cos\alpha$, $(t > 0)$, il vient

$$|\mathfrak{I}_j| \leq \text{Cte}\; e^{-at}\,t^{-q/m}(\cos\alpha)^{-q/m}\int_0^\infty e^{-u}\,u^{-1+q/m}du$$

d'où la conclusion.

(4.7.3) Preuve de (2.2.2). -

On a

$$e^{-tA} = \frac{i}{2\pi}\int_\Gamma e^{-t\lambda}(A-\lambda)^{-1}d\lambda \quad \text{et} \quad f(A) = \frac{i}{2\pi}\int_\Gamma f(\lambda)(A-\lambda)^{-1}d\lambda.$$

Soit $\int_0^\infty F(t)\;G(t,x,y)dt$ cette intégrale converge uniformément sur M^2 (il suffit d'appliquer la proposition (2.2.0) avec q tel que $n < q < \text{Min}\,(-mk,\, m)$).

Soient θ et ψ des fonctions de $\mathcal{D}(M)$, on considère

$$P = \left< \int_0^\infty F(t)G(t,x,y)dt \;/\; \theta(x) \otimes \psi(y) \right>, \text{ on a}$$

$$P = \iint_{M^2} \left[\int_0^\infty F(t)G(t,x,y)dt \right] \theta(x) \; \psi(y) d\mu(x) \; d\mu(y)$$

d'où en utilisant le théorème de FUBINI :

$$P = \int_0^\infty F(t) \left[\iint_{M^2} G(t,x,y)\theta(x) \; \psi(y) d\mu(x) d\mu(y) \right] dt$$

$$= \int_0^\infty F(t) \left< \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma e^{-\lambda t}(A-\lambda)^{-1}\theta \; d\lambda \;/\; \psi \right> dt$$

$$= \left< \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \left\{ \int_0^\infty F(t) \; e^{-\lambda t} dt \right\} (A-\lambda)^{-1}\theta \; d\lambda \;/\; \psi \right>,$$

$$P = \left< f(A)\theta, \psi \right> = \left< K(x,y) \;/\; \theta(x) \otimes \psi(y) \right>$$

d'où la conclusion.

ssssss

BIBLIOGRAPHIE. -

[1] W.G. BADE, *An operational calculus for operators with spectrum in a strip,* Pacific journal of Math., 3, 257-290 (1953).

[2] T. BURAK, *Fractional powers of elliptic differential operators,* Annali Pisa, 3, 22, 113-132 (1968).

[3] H. CARTAN, L. SCHWARTZ, Séminaire 1963-1964.

[4] L. HÖRMANDER, *Pseudo differential operators and hypoelliptic equations,* Amer. Math. Soc., symp. in pure math., 10, (1966). *Singular integral operators,* 138-183.

[5] L. HÖRMANDER, *The spectral function of an elliptic operator,* Acta math., 121, 193-218 (1968).

[6] L. HÖRMANDER, *Fourier-intégral operators I,* Acta math., 127, 79-183, (1971).

[7] T. KOTAKE - M.S. NARASIMHAN, *Regularity theorems for fractional powers of a linear elliptic operator,* Bull. soc. Math. France, 90, 449-471, (1962).

[8] R.T. SEELEY, *Complex powers of an elliptic operator,* Amer. Math. Soc., Symp. in pure math., 10, (1966). *Singular integral operators,* 288-307.

[9] R.T. SELLEY, *Topics in pseudo-differential operators,* CIME, (1969), 167-305.

[10] R.S. STRICHARTZ, *A functional calculus for elliptic pseudo-differential operators,* Amer. journal of math., XCIV, 711-722, (1972).

[11] G. PATISSIER, *Sur les fonctions analytiques d'un opérateur elliptique,* C.R.A.S., 283, 1976, p. 619.

G. PATISSIER
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE