PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

PIERRE DAZORD

Quelques remarques sur la classe de Maslov-Arnold

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1977, tome 14, fascicule 3 , p. 1-19

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1977__14_3_1_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1977 t. 14-3

QUELQUES REMARQUES SUR LA CLASSE DE MASLOV-ARNOLD

par Pierre DAZORD

Dans un article précédent ([1]), une construction géométrique de la classe de Maslov-Arnold a été donnée utilisant la notion introduite à ce propos, de cocycle sur un fibré (non nécessairement localement trivial). Cette question est ici reprise en tenant compte des travaux du Séminaire d'Orsay (1975-1976) sur le fibré cotangent et notamment des exposés de Demazure ([2]) et Douady ([3]).

Les résultats antérieurs sur la cohomologie non abélienne d'un fibré ([1]) sont brièvement rappelés et améliorés. La notion de G-diviseur relativement à un fibré est introduite. Si $G = \mathbb{Z}$ ces diviseurs sont des diviseurs topologiques de la base du fibré au sens de (2) et (3). L'ensemble des diviseurs relativement à un fibré est relié à sa cohomologie non abélienne.

Pour tout fibré symplectique (E,σ) de base X et tout couple L, L' de sous-fibrés lagrangiens de E on pose $\mathcal{L}_{k,k'}(E) = \bigcup_{x \in X} \mathcal{L}_{k,k'}(E)_x$, où $\mathcal{L}_{k,k'}(E)_x$ est l'ensemble des lagrangiens de la fibre en x de E, E_x, qui coupent L_x (resp. L'_x) suivant un sous-espace de dimension k (resp. k'). Pour certains couples (k, k'), $\mathcal{L}_{k,k'}(E)$ est un fibré que l'on peut munir, en utilisant les résultats de (2), d'un $\mathbb{Z}$-cocycle $\sigma_{k,k'}$. En particulier $\mathcal{L}_{0,0}(E)$, noté $\mathcal{L}(E)$, est un fibré et $\sigma_{0\,0}$, noté σ, est le cocycle de Hörmander. Les $\mathbb{Z}$-fibrés principaux $\mathcal{L}_{k,k'}(E)(\sigma_{k,k'})$ sont isomorphes. Leur classe est la classe de Maslov-Arnold. De la construction effectuée, se déduisent aisément les propriétés de la classe de Maslov-Arnold en utilisant les techniques introduites au début de l'article. On retrouve ainsi des résultats de (2).

Enfin, à l'aide de la notion de la notion de $\mathbb{Z}$-diviseurs relativementaux fibrés $\mathcal{L}_{k,k'}(E)$, on définit les diviseurs de Maslov et on prouve que cette définition coïncide avec celle de (2).

1. Cohomologie non abélienne d'un fibré [1]

DEFINITION 1.1. - *Un fibré est un triple* (p, F, X), *noté* F *par abus de notation, formé de deux espaces topologiques* F *et* X *d'une surjection continue* p *de* F *sur* X , *localement sectionnable, i.e. pour tout* x *de* X *il existe un voisinage ouvert* U *de* x *dans* X *et une section* s_U *de* p *au-dessus de* U.

Quand les espaces fibrés rencontrés seront localement triviaux, cela sera explicitement spécifié. La restriction, au-dessus d'une partie U de X, du fibré F sera notée F_U. En particulier la fibre en x sera notée F_x. Un morphisme de fibrés est une application continue compatible avec les projections.

G désignant un groupe topologique, le plus souvent muni de la topologie discrète dans les applications, $\mathcal{C}^q(F, G)$ est l'ensemble des applications *continues*, à valeurs dans G, du produit fibré $\overset{q+1}{\boxtimes} F$ de F(q+1) fois par lui-même. Pour q=0,1 , on définit une opération cobord ∂ et donc des 0 et 1-cocycles et des 1-cobords :

$$\partial : \mathcal{C}^0(F, G) \longrightarrow \mathcal{C}^1(F, G)$$

$$\gamma_0 \to \partial\gamma_0 : (z, z') \to \gamma_0(z)(\gamma_0(z'))^{-1} \quad ,$$

$$\partial : \mathcal{C}^1(F, G) \longrightarrow \mathcal{C}^2(F, G)$$

$$\gamma_1 \to \partial\gamma_1 : (z,z',z'') \to \gamma_1(z,z')\gamma_1(z',z'')(\gamma_1(z,z''))^{-1} .$$

$H^1(F, G)$, premier ensemble de cohomologie non abélienne de F à coefficients dans G, est par définition l'ensemble quotient des 1-cocycles par les 1-cobords, pointé par $\partial\mathcal{C}^0(F, G)$. On note systématiquement 0 dans la suite le point des ensembles pointés.

A tout 1-cocycle γ sur F à valeurs dans G, on associe l'espace fibré principal localement trivial de groupe G, $F(\gamma)$, quotient de $F \times G$ par la relation d'équivalence $(z,g) \sim (z',g')$ si $pz = pz'$ et $g' = \gamma(z',z)g$ et le morphisme $\tilde{\gamma}$ de F dans $F(\gamma)$ qui à z dans F associe la classe $\tilde{\gamma}(z)$ de (z,e) dans $F \times G$ où e est l'élément neutre de G. $\tilde{\gamma}$ joue un rôle universel au sens suivant : pour tout G-fibré principal E(G) et tout morphisme ψ de F dans E(G) tel que $\psi(z) = \psi(z')\gamma(z',z)$ si $pz' = pz$, ψ se factorise à travers $F(\gamma)$.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\tilde{\gamma}"'] & & E(G) \\ & F(\gamma) \arrow[ur, "\tilde{\psi}"'] & \end{tikzcd}$$

de façon que $\tilde{\psi}$ soit un isomorphisme de G-fibrés principaux.

Compte tenu de ce qui précède on prouve le théorème suivant qui améliore un résultat de (1) :

THEOREME 1.1. - *Il existe une application canonique* h *d'ensembles pointés de* $H^1(F, G)$ *dans* $H^1(X, G)$ *premier ensemble de cohomologie non abélienne de* X *à coefficients dans* G *pointé par la classe des fibrés triviaux, dont le noyau est réduit à* 0.

h se déduit par passage au quotient de l'application $\gamma \to F(\gamma)$.

Soit F_1 un sous-fibré de F. Tout 1-cocycle sur F, γ à valeurs dans G définit par restriction à $\overset{2}{\boxtimes} F_1$ un 1-cocycle sur F_1 à valeurs dans G, γ_1. Cette opération de restriction, par passage au quotient, définit un morphisme d'ensembles pointés $H_{F_1 F}$ de $H^1(F, G)$ dans $H^1(F_1, G)$, et les fibrés $F(\gamma)$ et $F_1(\gamma_1)$ sont isomorphes.

PROPOSITION 1.1. - *Dans la catégorie des ensembles pointés, le diagramme suivant est commutatif :*

$$
\begin{tikzcd}
H^1(F,\ G) \arrow[rr] \arrow[dr, "H_{F,F}"'] & & H^1(X,G) \\
& H^1(F_1,G) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

De plus le noyau de H_{F_1F} *est réduit à* 0.

Soit $H^1(X,G;\ F)$ l'image de $H^1(F,G)$ dans $H^1(X,G)$.

COROLLAIRE 1. - $H^1(X,G;F)$ *est un sous-ensemble pointé de* $H^1(X,G,F_1)$ *si* F_1 *est un sous-fibré de* F .

Si F possède une section globale continue s, $s(X)$ est un sous-fibré de F dont la fibre est réduite à un point. Donc $H^1(s(X,)G)$ est réduit à 0. Il en résulte :

COROLLAIRE 2. - *Si le fibré* F *possède une section globale continue,* $H^1(F,G)$ *est réduit à* 0.

REMARQUE. - $H^1(F,G) \neq 0$ est donc obstruction à l'existence d'une section globale continue du fibré F au dessus de X.

Si G est abélien $H^1(F,G)$ est le groupe quotient par le sous-groupe des 1-cobords du groupe des 1-cocycles. Le théorème 1.1. implique que h est un homomorphisme injectif de groupes abéliens. On peut donc identifier $H^1(F,G)$ à un sous-groupe de $H^1(X,G)$.

PROPOSITION 1.2. - *Si* G *est abélien,* $H^1(F,G)$ *s'identifie à un sous-groupe de* $H^1(X,G)$. *Si* F_1 *est un sous-fibré de* F *on a les inclusions de groupes abéliens :* $H^1(F,G) \subset H^1(F_1,G) \subset H^1(X,G)$.

Si de plus G est munie de la topologie discrète, $H^1(X,G)$ est le premier groupe de cohomologie de Čech de X à coefficients dans G.

2. Diviseurs relativement à un fibré

Soit γ un 1-cocycle à valeurs dans G. Les sections quelconques (resp. continues) de $F(\gamma)$ sont en correspondance biunivoque avec les applications quelconques (resp. continues) d de F dans G telles que $d(z) = \gamma(z, z')d(z')$. Réciproquement soit $d:F \to G$ une application, non nécessairement continue, telle que $\hat{d}: \overset{2}{\boxtimes} F \to G$ définie par $\hat{d}(z,z') = d(z).(d(z'))^{-1}$ soit continue. $\hat{d}$ est un 1-cocycle sur F à valeurs dans G. On peut donc associer à d le fibré principal $F(\hat{d})$ et une section, non nécessairement continue, de $F(\hat{d})$. Il est donc naturel d'appeler G-diviseur de X relativement à F toute application $d:F \to G$ telle que $\hat{d}: \overset{2}{\boxtimes} F \to G:(z,z') \to \hat{d}(z,z') = d(z)(d(z'))^{-1}$ soit continue. Soit $\mathcal{D}(F,G)$ l'ensemble des G-diviseurs de X relativement à F. Si d est un G-diviseur, comme $\hat{d}$ est continue et p localement sectionnable, l'ensemble des points de continuité de d est de la forme $p^{-1}A$ avec $A \subset X$. $X - A$ s'appelle le support de d. Si G est muni de la topologie discrète, $X - A$ est fermé. Dans ce cas le support de d est le plus petit fermé B de X tel que la restriction de d à $p^{-1}(X-B)$ soit continue et d définit un diviseur topologique au sens de (2) et (3).

REMARQUE. - Soit γ un 1-cocycle sur F à valeurs dans G et s une section - non nécessairement continue - de F. L'application définie sur F par $z \to S(z) = \gamma(z, s(pz))$ est un diviseur relativement à F et $\hat{s} = \gamma$. Réciproquement soit d un diviseur relativement à F tel que pour tout x de X, $d^{-1}(e) \cap F_x \neq \emptyset$. On peut construire une application s, en général non continue, de X dans F telle que s(x) appartienne à $d^{-1}(e) \cap F_x$. Soit $\hat{d}$ le 1-cocycle associé à d. Alors $d = \hat{d}(z,s(pz))$.

Soit $\mathcal{F}(X,G)$ l'ensemble des applications, non nécessairement continues, de X dans G. $\mathcal{F}(X,G)$ est un groupe qui opère à droite dans $\mathcal{D}(F,G)$: Si d est un diviseur et φ une application de X dans G, on désigne par $d.\varphi$ le diviseur $z \to d(z).\varphi(p(z))$. On a évidemment $\widehat{d.\varphi} = \hat{d}$.

$\mathcal{C}^0(F,G)$ opère à gauche dans $\mathcal{D}(F,G)$: si d est un diviseur et c une 0-cochaîne, on désigne par c.d le diviseur $z \to c(z).d(z)$. Les cocycles $\widehat{c.d}$ et $\hat{d}$ sont équivalents et définissent donc le même élément de $H^1(F,G)$.

$\mathcal{D}(F,G)$ est pointé par le diviseur : $z \to e$. On définit un morphisme d'ensembles pointés $\mathfrak{D} : \mathcal{D}(F,G) \to H^1(F,G)$. $\mathfrak{D}d$ est la classe du cocycle $\hat{d}$. En faisant opérer trivialement $\mathcal{F}(X,G)$ et $\mathcal{C}^0(F,G)$ dans $H^1(F,G)$, $\mathfrak{D}$ devient un morphisme d'ensembles pointés munis des groupes d'opérateurs $\mathcal{F}(X,G)$ et $\mathcal{C}^0(F,G)$.

Soit $\tilde{\mathcal{C}}^0(F,G)$ l'orbite de $\mathcal{C}^0(F,G)$ dans $\mathcal{D}(F,G)$ par l'action du groupe $\mathcal{F}(X,G)$, pointée par la 0-cochaîne $z \to e$. $\mathcal{F}(X,G)$ et $\mathcal{C}^0(F,G)$ opèrent naturellement l'un à droite et l'autre à gauche dans $\tilde{\mathcal{C}}^0(F,G)$ et l'inclusion $i : \tilde{\mathcal{C}}^0(F,G) \to \mathcal{D}(F,G)$ est un morphisme d'ensembles pointés munis des groupes d'opérateurs $\mathcal{F}(X,G)$ et $\mathcal{C}^0(F,G)$.

THEOREME 2.1. - *On a une suite exacte d'ensembles pointés munis des groupes d'opérateurs* $\mathcal{F}(X,G)$ *et* $\mathcal{C}^0(F,G)$ *:*

$$0 \to \tilde{\mathcal{C}}^0(F,G) \to \mathcal{D}(F,G) \to H^1(F,G) \to 0$$

DEMONSTRATION.

(i) $\mathfrak{D}$ est surjective. Soit $a \in H^1(F,G)$. Il existe un cocycle γ dont a est la classe de cohomologie. Soit $s : X \to F$ une section quelconque de F et $z \to d(z)$ l'application définie par $d(z) = \gamma(z,s(pz))$. d est un diviseur et $\hat{d} = \gamma$. Donc $\mathfrak{D}$ est surjective.

(ii) $\mathfrak{D}_0\, i = 0$. Soit $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{C}}^0(F,G)$. Il existe donc une 0-cochaîne f et $\varphi : X \to G$ telles que $\tilde{f} = f.\varphi$. Les cocycles associés à $\tilde{f}$ et f coïncident, or celui associé à f est un cobord et donc $\mathfrak{D}_0\, i = 0$.

(iii) $\mathrm{Im}\, i = \mathcal{N}(\mathfrak{D})$ (où $\mathcal{N}(\mathfrak{D})$ désigne le noyau de $\mathfrak{D}$). Soit d dans le noyau de $\mathfrak{D}$; $\hat{d}$ est un cobord. Il existe donc une 0-cochaîne c telle que $\hat{d} = \partial c$ ce qui implique que $c(z)^{-1}\, d(z)$ ne dépend que de pz. Soit $\varphi : X \to G$ définie par $\varphi(p(z)) = c(z)^{-1} d(z)$. $d = c.\varphi$ et donc $d \in \mathrm{Im}\, i$.

C..Q.F.D.

Soit $\mathfrak{D}' = h_0 \mathfrak{D}$. $\mathfrak{D}' : \mathcal{D}(F,G) \to H^1(X,G\,;F)$. Le corollaire suivant résulte immédiatement du théorème précédent et du théorème 1.1.

COROLLAIRE 1. - *On a une suite exacte d'ensembles pointés à groupes d'opérateurs* $\mathcal{F}(X,G)$ *et* $\mathcal{C}^0(F;G)$:

$$0 \to \tilde{\mathcal{C}}^0(F,G) \to \mathcal{D}(F,G) \to H^1(X,G\,;F) \to 0$$

Les groupes opèrent trivialement dans $H^1(X,G;F)$. Si G est abélien, $H^1(F,G)$ et $H^1(X,G;F)$ sont deux groupes abéliens isomorphes.

COROLLAIRE 2. - *Si* G *est abélien, on a une suite exacte de groupes abéliens à groupes d'opérateurs* $\mathcal{F}(X,G)$ *et* $\tilde{\mathcal{C}}^0(F,G)$:

$$0 \to \tilde{\mathcal{C}}^0(F,G) \to \mathcal{D}(F,G) \to H^1(F,G) \to 0.$$

3. Cartes symplectiques d'un fibré symplectique.

$\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$ muni de la forme symplectique canonique σ_0 est un espace vectoriel symplectique. $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$ s'identifie naturellement à $\mathbb{C}^n$. Pour tout espace topologique $(U \times \mathbb{C}^n \to U,\sigma_0)$ est un fibré symplectique trivial de rang (réel) 2n.

DEFINITION 3.1. - *Soit* $(E \to X,\sigma)$ *un fibré symplectique de rang* 2n. *Une carte symplectique de* E *est un couple* (U, χ_U) *formé d'un ouvert* U *de* X *et d'une application* χ_U *qui est un isomorphisme du fibré symplectique* $(E_U \to U,\sigma)$ *sur le fibré symplectique trivial* $(U \times \mathbb{C}^n \to U,\sigma_0)$.

PROPOSITION 3.1. - *Si* $(E \to X,\sigma)$ *est un fibré symplectique de rang* 2n *et* L *un sous-fibré lagrangien de* E, *il existe une famille* (U,χ_U) *de cartes symplectiques de* E, *dont les domaines recouvrent* X *et telles que* $\chi_U(L) = \mathbb{R}^{n*}$. *De telles cartes symplectiques sont dites adaptées à* L.

Par abus de notation, on note encore χ_U la composée de χ_U avec la projection de $U \times \mathbb{C}^n$ sur $\mathbb{C}^n$.

REMARQUE. - Grâce à cette proposition les démonstrations concernant des propriétés locales sont ramenées à des démonstrations dans l'espace vectoriel symplectique $(\mathbb{C}^n, \sigma_0)$.

DEMONSTRATION. - D'après (3) on peut construire un sous-fibré lagrangien $\hat{L}$ tel que en tout point x, $\hat{L}_x$ soit transverse à L_x (Par exemple, on munit E d'une structure complexe adaptée à σ (3) et on prend $\hat{L} = i\,L$.).

$\hat{L}$ étant un sous-fibré, il existe un recouvrement (U) de X formé d'ouverts trivialisant $\hat{L}$. Soit (e_i) $(i=1,2,\dots,n)$ n sections continues à $\hat{L}$ au dessus de U formant une base de $\hat{L}_x$ pour tout x dans U, et soit β_x la forme quadratique définie sur $\hat{L}_x$ $(x \in U)$ par $\beta_x(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker). Il existe sur E_U, une structure complexe unique dépendant continûment de x (3) telle que pour tout x de U $i\hat{L}_x = L_x$ et que la restriction à $\hat{L}_x$ de la forme hermitienne η_x de partie imaginaire σ_x soit β_x. η est donné par

$$\eta(X, Y) = \sigma(iX, Y) + i\sigma(X, Y)$$

Il en résulte que $\sigma(ie_k, e_j) = \delta_{kj}$. Soit $\chi_U : E_U \to \mathbb{C}^n$ l'application qui à X dans E_U associe ses coordonnées (ξ^j, ξ^{j*}) dans la base (e_j, ie_j). $\sigma(ie_k, e_j) = \delta_{kj}$ entraîne que $\sigma(X,Y) = \sigma_0(\chi_U X, \chi_U Y)$. χ_U est donc une carte symplectique et $\chi_U(L) = \mathbb{R}^{n*}$. C.Q.F.D.

4. Classe de Maslov-Arnold.

Soit $(p : E \to X, \sigma)$ un espace fibré vectoriel localement trivial de rang fini, symplectique, noté par la suite E. σ est la 2-forme symplectique.

$\tilde{\mathcal{L}}(E)_x$ est l'ensemble des sous-espaces lagrangiens de E_x fibré en x de E. On pose $\tilde{\mathcal{L}}(E) = \widetilde{\bigcup_{x \in X} \mathcal{L}(E)_x}$. $\tilde{\mathcal{L}}(E) \to X$, dont la projection est également notée p, est un fibré au sens du paragraphe 1.

Soit (L, L') deux sous fibrés lagrangiens de E. Pour tout couple (k,k') d'entiers naturels, $\mathcal{L}_{k,k'}(E)_x$ désigne le sous-ensemble de $\tilde{\mathcal{L}}(E)_x$ formé des lagrangiens M coupant L_x (resp. L'_x) suivant un sous-espace de dimension k (resp. k'). On pose $\mathcal{L}_{k,k'}(E) = \bigcup_{x\in X} \mathcal{L}_{k,k'}(E)_x$.
$\mathcal{L}_{k,k'}(E) \to X$ n'est un fibré (sous fibré de $\tilde{\mathcal{L}}(E)$) au sens du paragraphe 1 que pour certains couples (k, k') auxquels on se restreint dorénavant. $\mathcal{L}_{0,0}(E) \to X$, noté par la suite $\mathcal{L}(E) \to X$, est toujours un fibré.

Suivant (2) on associe à tout triple (μ,μ',μ'') de lagrangiens de E_x un entier relatif $s(\mu,\mu',\mu'')$ qui est la signature de la forme bilinéaire symétrique $B_{\mu\mu'\mu''}$ définie, sur le sous-espace vectoriel de $\mu \times \mu' \times \mu''$ formé des triples (ξ,ξ',ξ'') tels que dans E_x $\xi + \xi' + \xi'' = 0$, par

$$B_{\mu\mu'\mu''}[(\xi,\xi',\xi''), (\eta,\eta',\eta'')] = \sigma(\xi,\eta').$$

Si μ' est transverse à μ et μ'' $s(\mu,\mu',\mu'')$ sera noté $s^{\mu'}(\mu,\mu'')$. C'est alors (cf (1) ou (2)) la signature d'une forme quadratique sur μ de noyau $\mu \cap \mu''$.

Soit Σ l'application définie sur $\overset{2}{\boxtimes}\, \mathcal{L}(E)$ par la formule suivante : si μ_1 et μ_2 sont deux lagrangiens de E_x,

$$\begin{aligned}\Sigma(\mu_1,\mu_2) = \tfrac{1}{2}\{ & s(L_x,\mu_1,L'_x) - s(L_x,\mu_2,L'_x) \\ & + \dim(L_x\cap\mu_1) - \dim(L'_x\cap\mu_1) \\ & - \dim(L_x\cap\mu_2) + \dim(L'_x\cap\mu_2)\} \ ;\end{aligned}$$

Σ est à valeurs dans $\mathbb{Z}^{(2)}$.
Σ vérifie la relation suivante : si $\mu_1\mu_2\mu_3$ sont trois lagrangiens de E_x,

$$\Sigma(\mu_1,\mu_2) + \Sigma(\mu_2,\mu_3) - \Sigma(\mu_1,\mu_3) = 0.$$

Σ n'est pas continue en général. Cependant :

PROPOSITION 4.1. - *La restriction de* Σ *à* $\mathcal{L}_{k_1,k'_1}(E) \boxtimes \mathcal{L}_{k_2,k'_2}(E)$ *est continue.*

DEMONSTRATION. - Soit $\mu_1 \in \mathcal{L}_{k_1,k'_1}(E)_x$ et $\mu_2 \in \mathcal{L}_{k_2,k'_2}(E)_x$, soit N un lagrangien de E_x transverse simultanément à μ_1, μ_2, L_x et L'_x. Un calcul utilisant les formules de (2) permet d'écrire :

$$\Sigma(\mu_1,\mu_2) = -\frac{1}{2}\{s^N(L_x,\mu_1) + s^N(\mu_1,L'_x) - s^N(L_x,\mu_2) - s^N(\mu_2,L'_x) + k_1 - k'_1 - k_2 + k'_2\} .$$

Comme $s^N(A, B)$ est continue sur le sous-espace où $\dim A \cap B$ est constante, Σ est continue sur $\mathcal{L}_{k_1,k'_1}(E) \boxtimes \mathcal{L}_{k_2,k'_2}(E)$ compte tenu de la proposition 3.1. et de la remarque qui la suit.

COROLLAIRE. - *Pour tout couple* (k,k') *d'entiers naturels tels que* $\mathcal{L}_{k,k'}(E) \to X$ *soit un fibré,* Σ *définit un* 1*-cocycle entier sur* $\mathcal{L}_{k,k'}(E)$*, noté* $\sigma_{k,k'}$*. Si* μ_1 *et* μ_2 *appartiennent à* $\mathcal{L}_{k,k'}(E)_x$

$$\sigma_{k,k'}(\mu_1,\mu_2) = \frac{1}{2}(s(L,\mu_1,L') - s(L,\mu_2,L')).$$

si $k = 0 = k'$ σ_{00}*, noté* σ*, est le cocycle de Hörmander.*

Ce corollaire permet de construire sur X les $\mathbb{Z}$-fibrés principaux localement triviaux $\mathcal{L}_{k,k'}(E)(\sigma_{k,k'})$. On notera $\mathcal{M}_{LL'}$ le fibré $\mathcal{L}(E)$ (σ).

PROPOSITION 4.2. - $\mathcal{L}_{k,k'}(E)(\sigma_{k,k'})$ *est canoniquement isomorphe à* $\mathcal{M}_{LL'}$.

Grâce à cette proposition on identifiera par la suite, $\mathcal{L}_{k,k'}(E)(\sigma_{k,k'})$ à $\mathcal{M}_{LL'}$.

DEMONSTRATION. - Σ définit dans $\mathcal{L}(E) \times \mathbb{Z}$ une relation d'équivalence notée (Σ) :

$$(\mu,g) \overset{(\Sigma)}{\sim} (\mu',g') \quad \text{ssi } p(\mu) = p(\mu') \text{ et } g' = \Sigma(\mu',\mu) + g.$$

(Σ) induit sur $\mathcal{L}_{k,k'}(E) \times \mathbb{Z}$ la relation d'équivalence associée au cocycle $\sigma_{k,k'}$. $\mathcal{L}_{k,k'}(E)(\sigma_{k,k'})$ est donc isomorphe en tant qu'ensemble fibré à $\mathcal{L}(E) \times \mathbb{Z}/(\Sigma)$. Pour tout couple $\{(k_1, k'_1), (k_2, k'_2)\}$ il existe donc une bijection, compatible avec les projections, de $\mathcal{L}_{k_1,k'_1}(E)(\sigma_{k_1,k'_1})$ sur $\mathcal{L}_{k_2,k'_2}(\sigma_{k_2,k'_2})$. Pour prouver que cette bijection est continue, on considère une section continue de $\mathcal{L}_{k_2,k'_2}(E)$ au dessus d'un ouvert U de X, notée μ_2, et l'application de $(\mathcal{L}_{k_1,k'_1}(E) \cap p^{-1}U) \times \mathbb{Z}$ dans $\mathcal{L}_{k_2,k'_2}(E) \times \mathbb{Z}$ définie par

$$(\mu, g) \to (\mu_2(p(\mu)), \ \Sigma(\mu_2(p(\mu)), \mu) + g).$$

Il résulte de la proposition 4.1. que cette application est continue. Or elle est compatible avec les relations d'équivalence définies par σ_{k_1,k'_1} et σ_{k_2,k'_2} respectivement et définit par passage au quotient la restriction de la bijection de $\mathcal{L}_{k_1,k'_1}(E)(\sigma_{k_1,k'_1})$ sur $\mathcal{L}_{k_2,k'_2}(E)(\sigma_{k_2,k'_2})$ au dessus de U. La continuité est donc établie et la bicontinuité s'obtient en échangeant les rôles de (k_1,k'_1) et (k_2,k'_2). $\mathcal{L}_{k_1,k'_1}(E)(\sigma_{k_1,k'_1})$ est donc canoniquement isomorphe à $\mathcal{L}_{k_2,k'_2}(E)(\sigma_{k_2,k'_2})$. C.Q.F.D.

Soit $\tilde{\Sigma}$ l'application définie sur $\tilde{\mathcal{L}}(E)$ qui associe à $\mu \in \tilde{\mathcal{L}}(E)$ la classe d'équivalence de $(\mu, 0)$ relativement à (Σ).
$\tilde{\Sigma} : \tilde{\mathcal{L}}(E) \to \tilde{\mathcal{L}}(E) \times \mathbb{Z}/(\Sigma)$ est compatible avec les projections. Comme en tant qu'ensemble $\tilde{\mathcal{L}}(E) \times \mathbb{Z}/(\Sigma)$ s'identifie à $\mathcal{M}_{LL'}$, on a prouvé :

THEOREME 4.1. $^{(2)}$– *$\tilde{\Sigma} : \tilde{\mathcal{L}}(E) \to \mathcal{M}_{LL'}$ est une application (non continue en général), compatible avec les projections, telle que $\Sigma(\mu_1) = \Sigma(\mu_2) + \Sigma(\mu_2,\mu_1)$ si $p(\mu_1) = p(\mu_2)$. La restriction* *de* $\tilde{\Sigma}$ *à* $\mathcal{L}_{k,k'}(E)$ *est le morphisme (continu) d'espaces fibrés de* $\mathcal{L}_{k,k'}(E)$ *dans* $\mathfrak{M}_{LL'}$: $\tilde{\sigma}_{k,k'}$ *associé au sens du paragraphe 1 au cocycle* $\sigma_{k,k'}$.

DEFINITION 4.1. - *La classe d'isomorphisme de* $\mathfrak{M}_{L,L'}$ *comme* $\mathbb{Z}$*-fibré principal s'appelle la classe de Maslov-Arnold de* L *et* L' *et se note* K(L,L').

Compte tenu de la proposition 1.2, K(L,L') appartient pour tout couple convenable d'entiers (k,k') au sous-groupe de $H^1(X, \mathbb{Z})$: $H^1(\mathcal{L}_{k,k'}(E), \mathbb{Z})$. Ce sous-groupe est réduit à 0 si $\mathcal{L}_{k,k'}(E)$ possède une section globale (corollaire 2 de la proposition 1.1.). Donc

PROPOSITION 4.3. [2] - K(L,L') = 0 *si il existe un couple d'entiers* (k,k') *et un sous-fibré lagrangien* N *tel que pour tout* x *de* X, $\dim(L_x \cap N_x) = k$ *et* $\dim(L'_x \cap N_x) = k'$.

5. Exemples.

1. - Soit (V, σ) un espace vectoriel symplectique de dimension finie et Λ(V) sa grassmannienne lagrangienne. Le fibré trivial $\Lambda(V) \times V \to \Lambda(V)$ est muni d'une structure symplectique. Soient φ et ψ deux applications continues de Λ(V) dans Λ(V). φ et ψ définissent deux sous-fibrés lagrangiens auxquels on peut associer la classe de Maslov-Arnold K(φ,ψ).

La classe de Maslov-Arnold usuelle correspond au cas où l'on prend pour φ une application constante et pour ψ l'identité de Λ(V). C'est la classe du revêtement universel de Λ(V).

En particulier si (V, σ) est l'espace vectoriel symplectique canonique $(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}, \sigma_0)$, φ l'application constante de valeur $\mathbb{R}^{n*}$, ψ l'identité, la classe de Maslov-Arnold correspondante sera notée K_0. On note Λ_0 la grassmannienne lagrangienne de $(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}, \sigma_0)$.

Soit (E, σ) un fibré symplectique, L et L' deux sous fibrés **lagrangiens** et χ_U une carte symplectique adaptée à L. (Proposition 3.1.)
Soit $j_U : U \to \Lambda_0$ l'application qui à x dans U **associe** $\chi_U(L'_x)$ dans .

Soit $\hat{j}_U$ le morphisme de fibrés symplectiques :

$$\begin{tikzcd} E_U \arrow[r, "\hat{j}_U"] \arrow[d] & \Lambda_0 \times \mathbb{C}^n \arrow[d] \\ U \arrow[r, "j_U"] & \Lambda_0 \end{tikzcd}$$

défini par $\hat{j}_U(X) = (j_U(p(X), \chi_U(X))$

Soit $\mathcal{L}_0 \to \Lambda_0$ le fibré de fibre en λ l'ensemble des lagrangiens transverses à λ et à $\mathbb{R}^{n*}$ et σ_0 le cocycle de Hörmander correspondant. $\mathcal{L}_0[\sigma_0] \in K_0$.

Comme $\hat{j}_U(L) = \mathbb{R}^{n*}$ et $\hat{j}_U(L'_x) = j_U(x)$ on a un diagramme commutatif.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(E_U) \arrow[r, dashed, "\hat{j}_U"] \arrow[d] & \mathcal{L}_0 \arrow[d] \\ U \arrow[r, "j_U"] & \Lambda_0 \end{tikzcd}$$

tel que $\sigma_0 \circ \hat{j}_U = \sigma_U$, cocycle de Hörmander relatif à $\mathcal{L}(E_U)$. Il en résulte [1] que $\mathcal{L}(E_U)(\sigma_U)$ est isomorphe à $\mathcal{L}_0[\sigma_0]$ et donc que $K(L,L')_U$, image réciproque de $K(L,L')$ par l'inclusion $U \hookrightarrow X$, est l'image réciproque de K_0 par j_U.

PROPOSITION 5.1. - *Si* (E,σ) *est un fibré symplectique,* L, L' *deux sous-fibrés lagrangiens de* E, χ_U *une carte symplectique adaptée à* L, $K(L,L')_U = j_U^{-1} K_0$.

2. Soit (X, ω) une variété symplectique, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux feuilletages lagrangiens et $f : Y \to X$ une immersion. $f^{-1}TX \to Y$ est naturellement muni d'une structure symplectique et de deux sous-fibrés lagrangiens définis par $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$. On peut donc parler de la classe de Maslov-Arnold $K(f, \mathcal{F}, \mathcal{F}')$.

3. Soit (X, ω) une variété symplectique, $\mathcal{F}$ un feuilletage lagrangien et $f : Y \to X$ une immersion lagrangienne. Le fibré symplectique $f^{-1}TX \to Y$ est muni de deux sous-fibrés lagrangiens l'un associé à $\mathcal{F}$ et l'autre à f. On peut donc parler de la classe de Maslov-Arnold $K(f,\mathcal{F})$.

En particulier si on prend pour f une immersion lagrangienne dans le fibré cotangent d'une variété X', muni de sa structure symplectique canonique, et pour $\mathcal{F}$ le feuilletage défini par les fibres de $T^*X' \to X'$, on peut parler de la classe de Maslov-Arnold de f : $K(f)$.

Enfin si $f : \Lambda \to \mathbb{C}^n$ est une immersion lagrangienne $\mathcal{F}$ étant le feuilletage défini par $\mathbb{R}^{n*}$, la construction de la proposition 5.1 est globale et, $j : \Lambda \to \Lambda_0$ désignant l'application $\lambda \to j(\lambda) = f^T(T_\lambda \Lambda)$, $K(f) = j^{-1}K_0$.

6. Propriétés de la classe de Maslov-Arnold.

THEOREME 6.1. - *La classe de Maslov-Arnold est invariante par isomorphisme symplectique.*

DEMONSTRATION. - Soit $(E_1 \to X_1, \sigma_1)$ et $(E_2 \to X_2, \sigma_2)$ deux fibrés symplectiques et
$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\hat{u}} & E_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \xrightarrow{u} & X_2 \end{array}$$
un isomorphisme de fibrés symplectiques, (L_1, L'_1) deux sous-fibrés lagrangiens de E_1. $L_2 = \hat{u}(L_1)$ et $L'_2 = \hat{u}(L'_1)$ sont deux sous fibrés lagrangiens de E_2. $\hat{u}$ induit un isomorphisme du fibré $\mathcal{L}(E_1)$ sur le fibré $\mathcal{L}(E_2)$ tel que le diagramme

suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \overset{2}{\boxtimes}\mathcal{L}(E_1) \arrow[rr] \arrow[dr, "\sigma_1"'] & & \overset{2}{\boxtimes}\mathcal{L}(E_2) \arrow[dl, "\sigma_2"] \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

Il en résulte que $\mathcal{L}(E_1)(\sigma_1)$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E_2)(\sigma_2)$ et donc que $u^{-1}K(u\,L_1\,,u\,L_2) = K(L_1,L_2)$.

THEOREME 6.2. - *Soient* L_1, L_2, L_3 *trois sous-fibrés lagrangiens d'un fibré symplectique* $(E \to X,\ \sigma)$

$$K(L_1,L_2) + K(L_2,L_3) + K(L_3,L_1) = 0\ .$$

DEMONSTRATION. - Soit $\mathcal{L}$ le sous-fibré de $\widetilde{\mathcal{L}(E)}$ de fibre en x l'ensemble des lagrangiens transverses à L_1, L_2 et L_3. $\mathcal{L}$ est trivialement un fibré au sens du paragraphe 1. Soit $\tilde{\sigma}_{ij}$ la restriction à $\mathcal{L}$ du cocycle de Hörmander relatif à L_i et L_j si $\mathcal{L}^{ij}$ désigne le sous-fibré de $\mathcal{L}(E)$ de fibre en x l'ensemble des lagrangiens de E_x transverses à L_{ix} et L_{jx}, il résulte de la proposition 1.1 que $\tilde{\mathcal{L}}[\sigma_{ij}]$ est isomorphe à $\mathcal{L}^{ij}[\sigma_{ij}]$. $K(L_i,L_j)$ est donc la classe de $\mathcal{L}\,[\tilde{\sigma}_{ij}]$.

Or
$$\tilde{\sigma}_{ij}\ (\mu_1,\mu_2) = \sigma(L_i,L_j\ ;\ \mu_1,\mu_2)$$
$$= \frac{1}{2}(s(L_i,\mu_2,L_j) - s(L_i,\mu_1,L_j))\ .$$

Donc
$$\sigma_{12}(\mu_1,\mu_2) + \sigma_{23}(\mu_1,\mu_2) + \sigma_{31}(\mu_1,\mu_2) = 0\ .$$

Il en résulte, par passage au quotient, que

$$K(L_1,L_2) + K(L_2,L_3) + K(L_3,L_1) = 0$$

THEOREME 6.3. - *Si on peut déformer continûment parmi les sous-fibrés lagrangiens de* $(E \to X,\ \sigma)$ L *sur* L', $K(L,L') = 0$.

DEMONSTRATION. - Soit L_t $(t \in [0, 1]$, la déformation de L sur L'. On munit E d'une structure complexe adaptée à σ ; Comme iL_t est un sous-fibré lagrangien transverse à L_t, iL_t est transverse à $L_{t'}$ pour t' voisin de t. Par compacité on en déduit l'existence d'une subdivision finie de $[0, 1]$ $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ telle que iL_{t_p} soit transverse à $\underset{\sim}{L}_t$ pour $t \in [t_p, t_{p+1}]$, $0 \leqslant p \leqslant k-1$. Soit $\mathcal{L}_p$ le sous ensemble de $\mathcal{L}(E)$ réunion des $\mathcal{L}_p(x)$ où $\mathcal{L}_p(x)$ désigne l'ensemble des lagrangiens de E_x transverses à $L_t(x)$ pour $t \in [t_p, t_{p+1}]$. $\mathcal{L}_p$ est un fibré possédant iL_{t_p} comme section globale. Or $\mathcal{L}_p$ est un sous fibré du fibré $\mathcal{L}^{p,p+1}$ de fibre en x l'ensemble des lagrangiens transverses à L_{t_p} et $L_{t_{p+1}}$. Il en résulte (corollaire 2 proposition 1.1.) que $K(L_{t_p}, L_{t_{p+1}}) = 0$.

Du théorème 2 on déduit que $K(L, L') = \sum_{p=0}^{k-1} K(L_{t_p}, L_{t_{p+1}})$ et donc $K(L, L') = 0$ C.Q.F.D.

Le corollaire suivant est immédiat :

COROLLAIRE. - $K(L_1, L'_1) = K(L_2, L'_2)$ *si on peut déformer continûment* L_1 *sur* L_2 *et* L'_1 *sur* L'_2 *parmi les sous-fibrés lagrangiens de* E .

REMARQUE. - Soit $\mathcal{M}^{\mathbb{R}}_{L, L'}$ la $\mathbb{R}$-extension au fibré de Maslov $\mathcal{M}_{LL'}$. Comme $\mathbb{R}$ est contractible c'est un fibré trivialisiable. On peut en fait préciser ceci :

PROPOSITION 6.1. - *Soit* (E, σ) *un fibré symplectique*, L *et* L' *deux sous-fibrés lagrangiens. Toute structure complexe sur* E *adaptée à* σ *fournit de façon naturelle une trivialisation de* $\mathcal{M}^{\mathbb{R}}_{LL'}$

DEMONSTRATION. -

Soit (V, σ) un espace vectoriel symplectique de dimension réelle 2n et J une structure complexe sur V adaptée à σ . Soit $\mathcal{C}$ le fibré de base $\Lambda(V)$ et de fibre en M l'ensemble $\mathcal{C}_M$ des lagrangiens transverses à M. La donnée de J permet de construire une application à valeurs réelles $\circledast$ sur le carré fibré $\overset{2}{\boxtimes}\ \mathcal{C}^{(2)}$: pour tout lagrangien M c'est l'unique application $\circledast^M$ définie et continue sur $(\mathcal{C}_M)^2$ telle que $\circledast^M(\mu, \mu) = 0$ et que $\exp i\ \circledast^M(\mu, \mu') = \Phi(\mu,\mu')$ où $\Phi(\mu,\mu')$ est ainsi définie : si $(e_1, \ldots, e_n)$ (resp$(e'_1,\ldots,e'_n)$) est une base de μ (resp μ'), E étant muni d'une structure complexe, il existe un unique nombre complexe (non nul) z tel que

$$e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = z.(e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_n) \quad .$$

$\frac{z}{\bar{z}}$ ne dépend que de μ et μ' et on pose $\Phi(\mu,\mu') = \frac{z}{\bar{z}}$.

LEMME. - *$\circledast$ est un $\mathbb{R}$-cocycle sur $\mathcal{C}$.*

Comme il est prouvé dans (2) que $\circledast(\mu_1,\mu_2) + \circledast(\mu_2,\mu_3) - \circledast(\mu_1,\mu_3) = 0$ il suffit de prouver que $\circledast$ est continue. Soit (M_0,μ_0) et (M_0,μ'_0) deux points de $\mathcal{C}$. On peut trouver dans $\Lambda(V)$ trois voisinages $\mathcal{V}$, W, W' respectivement de M_0, μ_0, μ'_0 tels que pour tout triple (M, μ, μ') de $\mathcal{V} \times W \times W'$, M soit transverse à μ et μ', ce qui donne un sens à $\circledast^M(\mu,\mu')$. Or (cf 2),

$$\circledast^M(\mu,\mu') = \circledast^{M_0}(\mu,\mu') + \sigma(M_0,M\ ;\ \mu,\mu')$$

Il en résulte immdéiatement que $\circledast$ est continue sur $\overset{2}{\boxtimes}\ \mathcal{C}$.

Considérons alors le fibré symplectique canonique $\Lambda_0 \times \mathbb{C}^n \to \Lambda_0$ et les deux sous-fibrés lagrangiens définis par les applications de Λ_0 dans Λ_0 : : $M \to \mathbb{R}^{n*}$ et ψ l'identité de Λ_0 . Avec les notations du paragraphe 5.1. on peut construire sur le fibré $\mathcal{L}_0$ une application $\theta_0 : \mathcal{L}_0 \to \mathbb{R}$ définie sur la fibre en M, $\mathcal{L}_{0_M}$ par $\theta_0(\mu) = \circledast^\mu(\mathbb{R}^{n*}, M)$. θ_0 est continue d'après le lemme et d'après (2)

$\partial\theta_0 = \sigma_0$.

Soit alors (E, σ) un fibré symplectique, J une structure complexe sur E adaptée à σ et $\theta : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{R}$ l'application définie sur la fibre en x par $\mu \to \theta(\mu) = \circledast^{\mu}(L_x, L'_x)$. L'utilisation de cartes symplectiques (Proposition 3.1.) permet d'affirmer que θ est continue et que, avec les notations du paragraphe 5.1., sur une carte de domaine U adaptée à L, $\theta = \theta_0 \circ \hat{j}_U$. Comme $\partial\theta = \sigma$, σ est donc un $\mathbb{R}$-cobord. θ définit donc une trivialisation de $\mathcal{M}^{\mathbb{R}}_{LL'}$. C.Q.F.D.

7. Diviseurs de Maslov.

Pour tout couple d'entiers naturels (k,k') tels que $\mathcal{L}_{k,k'}(E)$ soit un fibré sur X, la classe de Maslov-Arnold K(L,L') appartient à $H^1(\mathcal{L}_{k,k'}(E), \mathbb{Z})$. Les diviseurs relativement à $\mathcal{L}_{k,k'}(E)$ se projetant sur K(L,L') sont les applications $d : \mathcal{L}_{k,k'}(E) \to \mathbb{Z}$ telles que $d(z).d(z')^{-1} = \sigma_{k,k'}(z,z')$ si $p(z) = p(z')$. En particulier toute section s, non nécessairement continue, de $\mathcal{L}_{k,k'}(E)$ fournit un diviseur relativement à $\mathcal{L}_{k,k'}(E)$ se projetant sur K(L,L') : S défini par $S(z) = \sigma_{k,k'}(z, s(p(z)))$.

On appellera *diviseur de Maslov* toute application $d : \tilde{\mathcal{L}}(E) \to \mathbb{Z}$ (où $\tilde{\mathcal{L}}(E)$ est le fibré de tous les lagrangiens de E) telle que $d(z) = \Sigma(z,z') + d(z')$ si $pz = pz'$. Pour tout couple d'entiers (k,k') tel que $\mathcal{L}_{k,k'}(E)$ soit un fibré, d induit un diviseur relativement à $\mathcal{L}_{k,k'}(E)$ de projection K(L,L') et, réciproquement, tout diviseur relativement à $\mathcal{L}_{k,k'}(E)$ s'étend en un diviseur de Maslov. Il en résulte que les diviseurs de Maslov définissent des diviseurs topologiques au sens de (2) et (3) d'image la classe de Maslov dans $H^1(X, \tilde{\mathbb{Z}})$ où $\tilde{\mathbb{Z}}$ est le faisceau des applications quelconques d'ouvert de X dans $\mathbb{Z}$.

Soit N un sous-fibré lagrangien de E. C'est une section continue de $\tilde{\mathcal{L}}(E)$. N définit un diviseur de Maslov $D^N : z \to \Sigma(z, N_{p(z)})$ qui induit un diviseur relativement à $\mathcal{L}(E)$. Comme Σ est continue sur $\mathcal{L}(E) \boxtimes \mathcal{L}_{k,k'}(E)$, partout où les applications $x \to \dim(L_x \cap N_x)$ et $x \to \dim(L'_x \cap N_x)$ sont continues, D^N est continu. Donc :

PROPOSITION 7.1. (2) - *Si* N *est un sous-fibré lagrangien, le support du diviseur de Maslov* D^N *associé à* N *est contenu dans l'ensemble des* x *de* X *tels que* $x \to \dim(L_x \cap N_x)$ *ou* $x \to \dim(L'_x \cap N_x)$ *est non continue en* x.

Bibliographie. -

(1) P. DAZORD, *Une interprétation géométrique de la classe de Maslov-Arnold,* . A paraître au Jour. de Math. Pures et Appl. et C. R. Acad. Sc. Paris, 1976, t. 282, n° 1, p. 53-55.

(2) M. DEMAZURE, *Classe de Maslov II,* Exposé n° 10, Séminaire sur le fibré cotangent, ORSAY, 1975-76.

(3) A. DOUADY, *Classe de Maslov I,* Exposé n° 6. Séminaire sur le fibré cotangent ; ORSAY, 1975-1976.

Pierre DAZORD
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE