PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

M. BOFFA

Modèles cumulatifs de la théorie des types

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1977, tome 14, fascicule 2
, p. 9-12
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1977__14_2_9_0>

PUBLICATIONS DU
DÉPARTEMENT DE
MATHEMATIQUES
LYON 1977 t. 14-2

MODELES CUMULATIFS DE LA THEORIE DES TYPES

par M. BOFFA

Dans cet article, TT désignera la théorie des types basée sur les axiomes d'extensionalité et de compréhension et Z_o sera le fragment de la théorie des ensembles de Zermelo comprenant les axiomes d'extensionalité, de l'ensemble vide, de la paire, de la réunion, de l'ensemble des parties et de Δ_o-compréhension. Ces deux théories (ainsi que leurs extensions par l'addition de l'axiome de l'infini et éventuellement celle de l'axiome du choix) sont équiconsistantes, car il est possible de construire un modèle de Z_o à partir de n'importe quel modèle de TT (voir Jensen [2] , Lake [3]). Notre but est d'établir un résultat plus fort, à savoir que tout modèle de TT est isomorphe à un modèle "cumulatif" dont la "réunion" est un modèle de Z_o (voir la Proposition 3).

DEFINITIONS. -

(1) Soit $M = \langle M_o, M_1, M_2, \ldots ; \varepsilon_o, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \rangle$ ($\varepsilon_i \subseteq M_i \times M_{i+1}$) un modèle de TT. Nous dirons que M est *cumulatif* si $M_o \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \ldots$ et si $\{x_i | x_i \varepsilon_i x\} = \{x_{i+1} | x_{i+1} \varepsilon_{i+1} x\}$ quels que soient $i \in \omega$ et $x \in M_{i+1}$.

(2) Pour tout modèle cumulatif M de TT, nous appellerons *réunion* de M la structure $\bigcup M = \langle \bigcup_{i \in \omega} M_i , \bigcup_{i \in \omega} \varepsilon_i \rangle$.

EXEMPLES. -

(1) Pour tout ensemble transitif X non vide, $<X, \mathcal{P}X, \mathcal{P}\mathcal{P}X, \ldots>$ est un modèle cumulatif de TT dont la réunion est un modèle de la théorie des ensembles de Zermelo sans axiome de l'infini.

(2) Si M est un modèle de NF (la théorie des ensembles de Quine), alors $<M,M,M,\ldots>$ est un modèle cumulatif de TT dont la réunion est M.

On démontre aisément la

PROPOSITION 1. - *Si* M *est un modèle cumulatif de* TT, *alors*

(i) $\cup M$ *satisfait les axiomes d'extensionnalité, de l'ensemble vide, de la paire et de la réunion ;*

(ii) $\cup M$ *satisfait l'axiome de l'ensemble des parties ssi pour tout* $i \in \omega$ *il existe* $j \in \omega$ *tel que pour tout* $x \in \cup M$:
$\{y \mid \cup M \models (y \in x)\} \subseteq M_i \rightarrow x \in M_j$.

Nous conjecturons qu'il existe des modèles cumulatifs de TT dont la réunion ne satisfait pas l'axiome de l'ensemble des parties. D'autre part, l'exemple (2) cité plus haut montre que modulo la consistance de NF, il existe des modèles cumulatifs de TT dont la réunion satisfait l'axiome de l'ensemble des parties mais pas la Δ_o-compréhension.

Le résultat suivant donne une condition suffisante pour que la réunion d'un modèle cumulatif de TT soit un modèle de Z_o.

PROPOSITION 2. - *Soit* M *un modèle cumulatif de* TT *dans lequel l'inclusion de* M_o *dans* M_1 *est définissable (avec paramètre), ceci voulant dire qu'il existe une formule stratifiée* [1] $\theta(x_o, y_1, z_k)$ *et un élément* r *de* M_k *tels que pour tout* $x_o \in M_o$, $y_1 \in M_1$:
$$x_o = y_1 \longleftrightarrow M \models \theta(x_o, y_1, r).$$
Dans ce cas : *(i) pour tout* $x \in \cup M$: $\{y \mid \cup M \models (y \in x)\} \subseteq M_i \leftrightarrow x \in M_{i+1}$;
(ii) $\cup M$ *est un modèle de* Z_o .

[1] *les formules stratifiées sont les formules du langage de* TT.

DEMONSTRATION. -

(i) Remarquons d'abord qu'à partir de θ, on peut construire des formules stratifiées $\theta_{ij}(x_i,y_j,z_k)$ telles que pour tout $x_i \in M_i$, $y_j \in M_j$:

$$x_i = y_j \longleftrightarrow M \models \theta_{ij}(x_i,y_j,r).$$

Cela étant, soit $x \in \bigcup M$ tel que $\{y \mid \bigcup M \models (y \in x)\} \subseteq M_i$. Il faut prouver que $x \in M_{i+1}$. Soit j tel que $x \in M_{j+1}$. On a

$$x = \{x_i \mid (\exists\, y_j)(\theta_{ij}(x_i,y_j,r) \wedge y_j \in x)\}^M \in M_{i+1}.$$

(ii) Grâce à (i) et à la Proposition 1, il suffit de prouver que $\bigcup M$ satisfait la Δ_0-compréhension, ce qui résulte facilement du lemme suivant (qu'on démontre par induction sur ϕ, en utilisant les formules θ_{ij} introduites plus haut) : pour toute Δ_0-formule $\phi(x_1,\dots,x_n)$ et tout $i \in \omega$, il existe une formule stratifiée $\psi_i(x_i^1,\dots,x_i^n,z_k)$ telle que pour tout $x_i^1,\dots,x_i^n \in M_i$:

$$\bigcup M \models \phi(x_i^1,\dots,x_i^n) \longleftrightarrow M \models \psi_i(x_i^1,\dots,x_i^n,r).$$

DEFINITION. - *Deux modèles* M,N *de* TT *seront dits* isomorphes *s'il existe une suite de fonctions bijectives* $h_i : M_i \to N_i$ $(i \in \omega)$ *telles que pour tout* $x \in M_i$, $y \in M_{i+1}$: $M \models (x \in y) \longleftrightarrow N \models (h_i x \in h_{i+1} y)$.

PROPOSITION 3. - *Soit* M *un modèle quelconque de* TT *et* f_0 *une injection de* M_0 *dans* M_1 *définie dans* M *par une formule stratifiée* $\theta(x_0,y_1,r)$ *avec paramètre* r *dans* M *(ce qui veut dire que* $f_0(x_0)=y_1 \longleftrightarrow M \models \theta(x_0,y_1,r)$*). Alors il existe un isomorphisme de* M *sur un modèle cumulatif* N *de* TT *tel que :*

(i) $\bigcup N \models Z_0$;

(ii) pour tout $x \in \bigcup N$: $\{y \mid \bigcup N \models (y \in x)\} \subseteq N_i \longleftrightarrow x \in N_{i+1}$;

(iii) pour tout $x_0 \in N_0$, $y_1 \in N_1$: $x_0 = y_1 \longleftrightarrow N \models \theta(x_0,y_1,r')$,

où r' *est l'image de* r *par l'isomorphisme en question.*

DEMONSTRATION. - Grâce à la Proposition 2, il suffit de prouver (iii). A partir de f_o , on peut définir dans M une suite d'injections $f_i : M_i \to M_{i+1}$ telles que dans M : $f_{i+1}(x_{i+1}) = \{f_i(x_i) | x_i \in x_{i+1}\}$. On plonge M_o dans M_1 par f_o, puis M_1 dans M_2 par f_1 , puis M_2 dans M_3 par f_2, etc..., et on obtient N par limite inductive.

EXEMPLES. -

(1) En posant $f_o(x_o) = \{x_o\}$ dans la Proposition 3, on voit que tout modèle de TT est isomorphe à un modèle cumulatif dont la réunion est un modèle de $Z_o^+ = Z_o$ + l'axiome affirmant que l'ensemble $\{x | x = \{x\}\}$ existe et est non vide (voir [1] , où ce résultat est utilisé pour construire une extension de Z_o^+ équiconsistante avec NF).

(2) En posant $f_o(x_o) = \{y_o | y_o < x_o\}$, où $<$ est un paramètre désignant un bon ordre sur l'ensemble des objets de type 0, on voit que tout modèle de TT + (il existe un bon ordre infini sur l'ensemble des objets de type 0) est isomorphe à un modèle cumulatif dont la réunion est un modèle de Z_o+ (ω existe). Ceci implique facilement l'équiconsistance (déjà prouvée dans [2]) de TT + AI (où AI affirme l'existence d'un ordre total non vide sans élément minimal) avec Z_o (ω existe), car Con(TT+AI) implique Con(TT+ l'existence d'un bon ordre infini sur l'ensemble des objets de type 0).

BIBLIOGRAPHIE. -

[1] M. BOFFA, *The consistency probleme for* NF (J.S.L. 42 (1977), p. 215-220.

[2] R. JENSEN, *On the consistency of a slight (?) modification of Quine's New Foundations*, Synthèse 19 (1968/69), p. 250-263.

[3] J. LAKE, *Comparing type theory and set theory*, Zeitschr. f. math. Logik u. Grundl. d. Math. 21 (1975), p. 355-356.