PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

M. A. DICKMANN

Deux applications de la méthode de va-et-vient

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1977, tome 14, fascicule 2
, p. 63-92

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1977__14_2_63_0>

© Université de Lyon, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

PUBLICATIONS DU
DEPARTEMENT DE
MATHEMATIQUES
LYON 1977 t. 14-2

DEUX APPLICATIONS DE LA METHODE DE VA-ET-VIENT*

par M.A. DICKMANN

1. INTRODUCTION.

Cet article est un exposé de quelques idées centrales de la méthode d'extension d'isomorphismes partiels - connue sous le nom de *va-et-vient* - et de la théorie des modèles des langages infinis, avec deux applications : l'une aux structures engendrées par des indiscernables, l'autre aux corps réels-clos.

La présentation du va-et-vient et des langages infinis $L_{K\lambda}$ et $L_{\infty\lambda}$ est contenue dans les paragraphes 2 et 5 ; cette partie de l'article - ainsi que le paragraphe 4 (théorie élémentaire des structures engendrées par des indiscernables) - a pour but de familiariser le lecteur avec les notions élémentaires de chacun des sujets développés. Les résultats sont donnés sans démonstrations ; celles-ci se trouvent dans Dickmann [3] qui contient aussi un traitement approfondi de sujets seulement touchés ici. Par contre, les applications sont données en détails.

L'application aux corps réels-clos faite au paragraphe 3 est une version généralisée d'un des résultats centraux de cette théorie : le théorème d'Erdös-Gillman-Henriksen . Elle illustre l'utilisation de la méthode de va-et-vient dans la pratique mathématique, et montre que le "langage" des isomorphismes partiels constitue un cadre naturel pour exprimer certaines situations dont la formulation habituelle en termes d'isomorphisme est indûment restreinte ou manifestement inadequate.

**Cet article est une version détaillée et quelque peu augmentée d'un exposé fait dans un colloque sur "langage et structures" tenu à Lyon début mars 1976. Le sujet du paragraphe 3 fait partie d'un exposé présenté à Louvain (Belgique) en juin 1976.*

Les applications aux structures engendrées par des indiscernables, données au paragraphe 6, résultent d'un théorème général de transfert (Théorème 6.2) découvert par l'auteur en 1971 ; ces résultats ont été publiés dans Dickmann [3] , p. 393 ff. , à l'exception du théorème 6.7 qui fut obtenu plus tard.

Dans le reste de ce paragraphe nous fixons certaines notations et rappelons quelques résultats. Nous ferons usage des notations courantes de la théorie des modèles de premier ordre telles qu'elles sont utilisées dans Chang-Keisler [2] ; la seule exception est notre utilisation du symbole $\approx$ pour dénoter l'égalité dans les langages formels (dans le métalangage nous utilisons le symbole = , tout comme [2]). En ce qui concerne les langages infinis et la méthode de va-et-vient nous suivons l'usage notationnel de Dickmann [3] , mais nous introduisons explicitement tout ce dont nous aurons besoin.

Si $\mathfrak{A}$ est une structure et Σ un ensemble de formules $L(\mathfrak{A})$ et $L(\Sigma)$ dénotent les signatures (ensembles de symboles non-logiques) respectives. μ dénote toujours une signature arbitraire. $\mathrm{Form}(\mu)$ et $\mathrm{Form}_n(\mu)$ dénotent, respectivement, les ensembles de toutes les formules et de toutes les formules avec variables libres parmi $v_o,\ldots,v_{n-1}$ du langage de premier ordre déterminé par μ. $V\ell(\varphi)$ et $V\ell(\tau)$ dénotent les ensembles de variables libres de la formule φ et du terme τ , respectivement.

La cardinalité d'un ensemble X sera notée $\overline{\overline{X}}$; κ , λ , ... dénoteront des cardinaux (en général infinis), et n,m,k,j,i, .. des cardinaux finis. La classe des cardinaux infinis est notée Cn.

Dom(f) et Im(f) dénotent respectivement le domaine et l'image de l'application f ; $f \restriction X$ est la restriction de f à l'ensemble X ; id_X dénote l'application identité sur l'ensemble X. La relation d'extension entre applications sera notée par le symbole d'inclusion : $f \subseteq g$ ssi $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$ et $g \restriction \mathrm{Dom}(f) = f$.

Un *1-type* (de μ) est un sous-ensemble Σ de $Form_1(\mu)$ tel que pour tout $\Gamma \subsetneq \Sigma$ fini, l'énoncé $\exists x \bigwedge \Gamma$ a un modèle.

Un langage (de signature μ) est *muni de fonctions de Skolem* si et seulement s'il existe une application injective τ qui à chaque formule φ avec ≥ 1 variables libres assigne un terme τ_φ de μ avec $\overline{\overline{V\ell(\varphi)}}-1$ variables libres. Un ensemble Σ d'énoncés de μ est un *ensemble de Skolem* ssi μ est muni de fonctions de Skolem et pour tout $n \geq 1$ et $\varphi \in Form_n(\mu)$, l'énoncé

$$\forall v_1 \ldots v_{n-1}\left[\exists v_0 \varphi(v_0, \ldots, v_{n-1}) \leftrightarrow \varphi(\tau_\varphi(v_1, \ldots, v_{n-1}), v_1, \ldots, v_{n-1})\right]$$

appartient à Σ (cet énoncé est appelé *l'axiome de définition* du terme τ_φ) $\mathfrak{A}$ est une *structure de Skolem* ssi Th($\mathfrak{A}$) (= l'ensemble des énoncés vrais dans $\mathfrak{A}$) est un ensemble de Skolem.

Soient $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ des structures de Skolem ; alors :

(1) $\mathfrak{A} \subsetneq \mathfrak{B}$ équivaut à $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$;

(2) tout monomorphisme $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ est élémentaire ;

(3) Si $X \subsetneq |\mathfrak{A}|$, alors l'ensemble

$$\mathfrak{k}(X ; \mathfrak{A}) = \left\{\tau^{\mathfrak{A}}[x_1, \ldots, x_n] \,\middle|\, \tau \text{ est un terme de } L(\mathfrak{A}),\ n \in \omega,\ \overline{\overline{V\ell(\tau)}} = n \text{ et } x_1, \ldots, x_n \in X\right\},$$

muni des relations et fonctions obtenues de $\mathfrak{A}$ par restriction, est une sous-structure élémentaire de $\mathfrak{A}$; en effet, elle est la plus petite sous-structure de $\mathfrak{A}$ contenant X.

Rappelons que toute signature μ s'étend dans une signature $\mu^{\#}$ munie de fonctions de Skolem telle que $\overline{\overline{\mu^{\#}}} = \max\{\overline{\overline{\mu}}, \aleph_0\}$; et toute structure $\mathfrak{A}$ de signature μ s'élargit (de façon non-unique) dans une structure de Skolem $\mathfrak{A}^{\#}$ (i.e., $\mathfrak{A}^{\#} \upharpoonright \mu = \mathfrak{A}$).

Nous supposons connue la notion de structure λ-saturée (où λ est un cardinal infini). Une structure $\mathfrak{A}$ est λ*-universelle* ssi pour tout $\mathfrak{B}$,

$$\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A} \ \wedge \ \bar{\bar{\mathfrak{B}}} \leqslant \lambda \ \Rightarrow \ \mathfrak{B} \precsim \mathfrak{A}$$

$\mathfrak{A}$ est *faiblement* λ*-homogène* ssi pour tout X et y, $X \subseteq |\mathfrak{A}|$, $\bar{\bar{X}} < \lambda$ et $y \in |\mathfrak{A}|$ impliquent que toute application élémentaire $f : X \longrightarrow \mathfrak{A}$ s'étend dans une application élémentaire $g : X \cup \{y\} \rightarrow \mathfrak{A}$.

Les résultats fondamentaux concernant les structures λ-saturées sont les suivants :

(4) (Existence) Soient μ une signature et λ un cardinal infini, $\lambda \geqslant \bar{\bar{\mu}}$; alors toute structure infinie de signature μ et cardinalité $\leqslant 2^{\lambda}$ a une extension élémentaire λ^{+}-saturée de cardinalité $\leqslant 2^{\lambda}$;
(5) (Unicité) deux structures élémentairement équivalentes et saturées de la même cardinalité sont isomorphes ;
(6) λ-saturée $\Leftrightarrow$ λ-universel et faiblement λ-homogène.

Les modèles λ-saturés de la théorie des ordres totaux denses sans extrêmes sont caractérisés par la propriété suivante : $\langle A, < \rangle$ est λ-saturé ssi pour toute paire d'ensembles $X, Y \subseteq A$ de cardinalité $< \lambda$, si

pour tout x,y, $x \in X \wedge y \in Y \Rightarrow x < y$ (abrégé $X < Y$),

alors il existe $a \in A$ tel que $X < a < Y$. Un tel ensemble ordonné s'appelle *de type* η_λ.

Ainsi les ordres de type η_ω coïncident avec les ordres denses sans extrêmes (appelés d'habitude η_0, car $\omega = \aleph_0$). Par (4) il y en a des ensembles de type η_{λ^+} pour tout λ infini ; tout tel ensemble a cardinalité $\geqslant 2^{\lambda}$. Si λ est singulier, tout ordre de type η_λ est aussi de type η_{λ^+}.

Rappelons, finalement, quelques notions d'algèbre. Le *langage des corps* est la signature qui consiste des symboles habituels 0,1,+, - et ; le *langage des corps ordonnés* est obtenu en ajoutant à ceux-ci la relation $<$ d'ordre.

Un corps K est *réel-clos* si et seulement si pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x_1,\dots,x_n \in K$,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \implies x_1 = \dots = x_n = 0 ,$$

et aucune extension algébrique propre de K n'a cette propriété .

Tout corps réel-clos est ordonnable de façon unique (cf. JACOBSON [6] , vol. III, p. 273-274). La théorie des corps réels-clos admet l'axiomatisation suivante dans le langage des corps ordonnés :

(7) tout élément positif a une racine carrée ;

(8) tout polynôme de degré impair a une racine.

(cf. Jacobson [6] , vol. III, p. 274-278). Elle admet aussi l'élimination de quantificateurs dans le langage des corps ordonnés avec les constantes propositionnelles V et F (cf. Kreisel-Krivine [9] , p. 56-62).

2. LES LANGAGES INFINIS $L_{\kappa\lambda}$ ET $L_{\infty\lambda}$, ET LA MÉTHODE DE VA-ET-VIENT : THÉORIE ÉLÉMENTAIRE.

Soient κ , λ deux cardinaux infinis tels que $\kappa \geqslant \lambda$ et μ une signature arbitraire. $L_{\kappa\lambda}(\mu)$ est le langage avant λ variables et dont les formules sont définies de la manière suivante :

(1) les formules atomiques de $L_{\kappa\lambda}(\mu)$ sont les mêmes que celles du langage de premier ordre de signature μ ;

(2) Si Φ est un ensemble de formules de $L_{\kappa\lambda}(\mu)$, $\overline{\overline{\Phi}} < \kappa$ et $\bigcup_{\varphi\in\Phi} V\ell(\varphi) < \lambda$, alors $\bigwedge \Phi$ est une formule de $L_{\kappa\lambda}(\mu)$;

(3) Si φ est une formule de $L_{\kappa\lambda}(\mu)$ et X est un ensemble de variables de cardinalité $< \lambda$, alors $(\exists X)\varphi$ est une formule de $L_{\kappa\lambda}(\mu)$.

Form $(L_{\kappa\lambda}(\mu))$ dénotera l'ensemble de toutes les formules de $L_{\kappa\lambda}(\mu)$, c'est-à-dire, le plus petit ensemble satisfaisant (1)-(3). Cet ensemble est définissable dans ZFC avec paramètres κ, λ et μ. Notons que pour toute formule φ de $L_{\kappa\lambda}(\mu)$ on a $\overline{\overline{V\ell(\varphi)}} < \lambda$.

On appelle $L_{\infty\lambda}(\mu)$ le langage de signature μ, avec λ variables, dont les formules forment la classe (dans le sens de ZFC) :

$$\mathrm{Form}(L_{\infty\lambda}(\mu)) = \bigcup_{\substack{\kappa \in Cn \\ \kappa \geqslant \lambda}} \mathrm{Form}(L_{\kappa\lambda}(\mu)).$$

Les notions sémantiques pour ces langages sont semblables à celles des langages de premier ordre ; par exemple, une conjonction $\bigwedge \Phi$ est vraie si et seulement si chaque membre de Φ l'est ; et si f est une assignation de valeurs aux variables du langage dans la structure $\mathfrak{A}$, alors $\mathfrak{A} \models (\exists X)\varphi[f]$ si et seulement s'il existe une assignation g : $X \to \mathfrak{A}$ telle que $\mathfrak{A} \models \varphi[f * g]$ (où $f * g$ est l'application égale à g sur X, et égale à f sur le reste).

Notons que $L_{\omega\omega}(\mu)$ est, simplement, le langage de premier ordre de signature μ.

Les relations de $L_{\kappa\lambda}$-*équivalence* et $L_{\infty\lambda}$-*équivalence* sont notées $\equiv_{\kappa\lambda}$ et $\equiv_{\infty\lambda}$ respectivement ; elles sont définies comme dans la logique de premier ordre.

Dans les divers langages $L_{\kappa\lambda}$ et $L_{\infty\lambda}$ on peut axiomatiser nombreuses notions mathématiques qui ne sont pas exprimables dans les langages de premier ordre. Une liste d'exemples de ce type se trouve dans Dickmann [3] Ch. 1, § 2.

Certaines propriétés des langages de premier ordre se généralisent aux langages $L_{\kappa\lambda}$, $\kappa > \omega$; par exemple, certaines formulations du théorème de Löwenheim-Skolem descendant. Plusieurs autres cessent d'être valables ; c'est le cas du théorème de Löwenheim-Skolem ascendant et du théorème de compacité (à l'exception possible de certains cardinaux κ dont l'existence est douteuse). Le langage $L_{\omega_1\omega}$ a une théorie particulièrement riche : la propriété d'interpolation de Craig, pour ne mentionner qu'un exemple, en est valable. Voir Keisler [8] .

Mais l'aspect sans doute le plus important des langages infinis du type décrit- particulièrement de $L_{\infty\lambda}$- c'est qu'ils constituent le cadre logique naturel où on peut développer la technique d'extension d'isomorphismes partiels, connue sous le nom de *va-et-vient* . Dans le reste de ce paragraphe nous allons présenter quelques faits essentiels concernant cette technique.

Nous commençons par introduire quelques notations.

DEFINITION 2.1. *Soient* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *deux structures de signature* μ *et* f *une application telle que* $\mathrm{Dom}(f) \subseteq |\mathfrak{A}|$ et $\mathrm{Im}(f) \subseteq |\mathfrak{B}|$

(a) f *est* <u>*un isomorphisme partiel de* $\mathfrak{A}$ *dans* $\mathfrak{B}$</u> *ssi*

i) $\mathrm{Dom}(f) \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{Dom}(f)$ *est une sous-structure de* $\mathfrak{A}$.

ii) pour toute formule atomique ou négation d'atomique φ *de* μ *, et toute assignation* $a : V\ell(\varphi) \to \mathrm{Dom}(f)$, on a :

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a] \Longrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[f \circ a] \quad ;$$

(b) Soit Φ *une classe (dans le sens de* ZFC*) de formules de* $L_{\infty\lambda}(\mu)$.

f *est* <u>*un* Φ*-morphisme partiel de* $\mathfrak{A}$ *dans* $\mathfrak{B}$</u> *ssi :*

i) $\mathrm{Dom}(f) \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{Dom}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ *sont des sous-structures de* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$*, respectivement ;*

ii) pour toute formule $\varphi \in \Phi$ *et toute assignation* $a : V\ell(\varphi) \to \mathrm{Dom}(f)$, *on a :*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a] \Longrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[f \circ a]$$

REMARQUES. (1) Tout isomorphisme partiel est injectif [appliquer (a;ii) à la formule $\varphi = \neg(x \approx y)$] , et préserve la satisfaction des formules atomiques : si $\mathrm{Dom}(f) \neq \emptyset$, il est, donc, un monomorphisme de $\mathfrak{A} \upharpoonright \mathrm{Dom}(f)$ dans $\mathfrak{B}$.

(2) La condition 2.1 (a) entraine que l'application vide est un isomorphisme partiel ssi les mêmes énoncés sans quantificateurs sont vrais dans $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$.
Par 2.1(b), elle est un Φ-morphisme partiel ssi $\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$ pour tout énoncé $\varphi \in \Phi$ (cette relation est abrégée $\mathfrak{A}\ (\Phi)\ \mathfrak{B}$).

DEFINITION 2.2. - *Avec les notations de la définition précédente, soient* κ *un cardinal (fini ou infini)* ≥ 2 *et* $\mathbb{I}$ *une famille d'isomorphismes partiels de* $\mathfrak{A}$ *dans* $\mathfrak{B}$. *On écrit* $\mathbb{I} : \mathfrak{A} \simeq^{p}_{\kappa} \mathfrak{B}$ *si et seulement si la famille* $\mathbb{I}$ *est non-vide et a les propriétés de va-et-vient* $< \kappa$ *éléments à la fois :*

i) (Va) *pour tout* $f \in \mathbb{I}$ *et tout* $A \subseteq |\mathfrak{A}|$, $\bar{\bar{A}} < \kappa$, *il existe* $g \in \mathbb{I}$ *tel que* $f \subseteq g$ (g étend f) *et* $A \subseteq \mathrm{Dom}(g)$;

ii) (Vient) *pour tout* $f \in \mathbb{I}$ *et tout* $B \subseteq |\mathfrak{B}|$, $\bar{\bar{B}} < \kappa$, *il existe* $g \in \mathbb{I}$ *tel que* $f \subseteq g$ *et* $B \subseteq \mathrm{Im}(g)$.

La notation $\mathfrak{A} \simeq^{p}_{\kappa} \mathfrak{B}$ *signifie qu'il existe un ensemble* $\mathbb{I}$ *d'isomorphismes partiels tel que* $\mathbb{I} : \mathfrak{A} \simeq^{p}_{\kappa} \mathfrak{B}$.

Le résultat principal dans la méthode de va-et-vient est le suivant :

THEOREME 2.3. (Karp). - *Pour toute paire de structures* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, *et tout cardinal infini* λ, *sont équivalents :*

(1) $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\lambda} \mathfrak{B}$

(2) $\mathfrak{A} \simeq^{p}_{\lambda} \mathfrak{B}$.

L'implication (2) $\Longrightarrow$ (1) suit de l'observation que si $\mathbb{I} : \mathfrak{A} \simeq^{p}_{\lambda} \mathfrak{B}$ et $f \in \mathbb{I}$, alors f est un $L_{\infty\lambda}$-morphisme [i.e, un Φ-morphisme, où $\Phi = \mathrm{Form}(L_{\infty\lambda}(\mu))$]. Pour démontrer l'autre implication on considère la famille $\mathbb{I}$ de tous les $L_{\infty\lambda}$-morphismes partiels de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$, où Dom(f) est engendré par $< \lambda$ éléments.

3. PREMIÈRE APPLICATION : LES CORPS RÉELS-CLOS DE TYPE η_λ .

Nous allons considérer d'abord quelques propriétés de va-et-vient des structures partiellement saturées.

3.1. EXEMPLE. Soit λ un cardinal infini régulier, et soient $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ deux structures élémentairement équivalentes et λ-saturées dans un langage (signature) de cardinalité $< \lambda$. Soit $\mathbb{I}$ la famille des applications partielles élémentaires f de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$, où Dom(f) est une sous-structure de $\mathfrak{A}$ de cardinalité $< \lambda$.

L'application vide est dans $\mathbb{I}$, puisque $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$; alors $\mathbb{I} \neq \emptyset$. Aussi $\mathbb{I} : \mathfrak{A} \simeq^p_2 \mathfrak{B}$. En effet, si $f \in \mathbb{I}$ et $a \in |\mathfrak{A}|$, soit Σ_a le type de l'élément a au-dessus de Dom(f) :

$$\Sigma_a = \{ \varphi \in \mathrm{Form}_1(L(\mathfrak{A}) \cup \{\bar{x} \mid x \in \mathrm{Dom}(f)\}) \mid \langle \mathfrak{A}, x\rangle_{x \in \mathrm{Dom}(f)} \models \varphi[a] \} ,$$

(où $\bar{x}$ désigne un nom pour l'élément x). On a

$$\langle \mathfrak{A}, x \rangle_{x \in \mathrm{Dom}(f)} \equiv \langle \mathfrak{B}, f(x) \rangle_{x \in \mathrm{Dom}(f)}$$

car f est élémentaire, d'où Σ_a est aussi un type au-dessus de Im(f). Puisque $\mathfrak{B}$ est λ-saturée et $\overline{\overline{\mathrm{Im}(f)}} < \lambda$, il existe $b \in |\mathfrak{B}|$ réalisant Σ_a ; donc

$$\langle \mathfrak{A}, x, a \rangle_{x \in \mathrm{Dom}(f)} \equiv \langle \mathfrak{B}, f(x), b \rangle_{x \in \mathrm{Dom}(f)} .$$

Ceci montre que l'application $x \mapsto f(x)$ $(x \in \mathrm{Dom}(f))$, $a \mapsto b$ est élémentaire, d'où son unique extension g à la sous-structure de engendrée par $\mathrm{Dom}(f) \cup \{a\}$ est aussi élémentaire ; aussi $\overline{\overline{\mathrm{Dom}(g)}} < \lambda$ puisque $\overline{\overline{L(\mathfrak{A})}} < \lambda$. Alors on a $g \in \mathbb{I}$, $f \subseteq g$ et $a \in \mathrm{Dom}(g)$, ce qui prouve la propriété de va. La propriété de vient est vérifiée de façon semblable.

Il est évident que la réunion d'une chaine (par extension) d'applications partielles élémentaires est aussi élémentaire ; alors toute $\subseteq$ -chaine de membres de $\mathbb{I}$ de cardinalité $< \lambda$ a une extension commune (borne supérieure) dans $\mathbb{I}$. On note cette propriété additionnelle de $\mathbb{I}$ par $\mathbb{I} : \mathfrak{A} \simeq_{\lambda}^{p,e} \mathfrak{B}$ ("e" pour "extension").

On a démontré, donc, que pour des structures vérifiant les conditions énoncées au début de 3.1, on a $\mathfrak{A} \simeq_{\lambda}^{p,e} \mathfrak{B}$.

Il est facile de voir que :

(A) pour tout $\mathbb{I}$, $\mathbb{I} : \mathfrak{A} \simeq_{\lambda}^{p,e} \mathfrak{B} \implies \mathbb{I} : \mathfrak{A} \simeq_{\lambda}^{p} \mathfrak{B}$;
mais la relation $\simeq_{\lambda}^{p,e}$ est beaucoup plus forte que $\simeq_{\lambda}^{p}$; en effet :

(B) si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sont engendrées par $\leqslant \lambda$ éléments, alors $\mathfrak{A} \simeq_{\lambda}^{p,e} \mathfrak{B}$ équivaut à $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$ (pour la démonstration voir Dickmann [3] , théorème 5.3.2, p. 313); tandis que ,

(C) pour tout $\lambda > \omega$ régulier il y a des structures $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ de cardinalité λ telles que $\mathfrak{A} \simeq_{\lambda}^{p} \mathfrak{B}$, mais $\mathfrak{A} \not\simeq \mathfrak{B}$ (d'où, par (B), $\mathfrak{A} \simeq_{\lambda}^{p,e} \mathfrak{B}$ n'est pas valable non plus) (cf. Dickmann [3], contrexemple 5.3.41, p. 350) .

Pourtant, si $cf(\lambda) = \omega$, on a :

(D) si $cf(\lambda) = \omega$ et $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, sont engendrées par $\leqslant \lambda$ éléments, alors les relations $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \simeq_{\lambda}^{p,e} \mathfrak{B}$ et $\mathfrak{A} \simeq_{\lambda}^{p} \mathfrak{B}$ sont équivalentes (cf. Dickmann [3] , théorème 5.3.5, p. 315).

Notons que le résultat démontré dans l'exemple 3.1 avec l'énoncé (B) ci-dessus donnent, ensemble, une démonstration du théorème (5), p. 66 d'unicité des structures saturées.

La relation $\simeq_{\lambda}^{p,e}$ n'a pas une signification logique aussi claire que la relation $\simeq_{\lambda}^{p}$. Mais récemment Karttunen [7] a donné une interprétation logique d'une version affaiblie de la relation $\simeq_{\lambda}^{p,e}$ dans certains langages infinis $N_{\infty\lambda}$.

Nous allons appliquer maintenant ces idées et résultats aux corps réels clos. Nous démontrerons :

THEOREME 3.2. - *Soient* K,K' *des corps réels-clos de type* η_λ *, où* λ *est un cardinal régulier. Alors* $K \simeq^{p,e}_{\lambda} K'$.

En particulier, de (B) ci-dessus, on infére le résultat classique suivant :

COROLLAIRE 3.3 (Théorème d'Erdös-Gillman-Henriksen) *Tous les corps réels-clos de type* η_1 $(= \eta_{\aleph_1})$ *et cardinalité* $\aleph_1$ *sont isomorphes.*

Du fait que tout ensemble de type $\eta_{\aleph_1}$ a cardinalité $\geq 2^{\aleph_0}$ (voir p.66) cet énoncé est vide à moins qu'on accepte l'hypothèse du continu ; par contre, le théorème 3.2 - étant valable pour des corps de cardinalité quelconque, même différentes - ne dépend pas de cette hypothèse. Il doit être considéré, donc, comme une réformulation plus correcte du théorème d'Erdös-Gillman-Henriksen ; les démonstrations sont évidemment, apparentées (cf. Erdös-Gillman-Henriksen [4] ou Gillman-Jerison [5],p. 179-185).

On aura besoin du :

THEOREME 3.4 (Artin-Schreier). - *Tout corps ordonné* K *s'étend dans un corps-réel-clos* $\mathfrak{R}(K)$ *dont l'ordre (unique) étend celui de* K . $\mathfrak{R}(K)$ *est algébrique sur* K. *Tout isomorphisme* $K_1 \simeq^{f} K_2$ *admet une extension unique à un isomorphisme* $\mathfrak{R}(K_1) \simeq \mathfrak{R}(K_2)$; *donc,* $\mathfrak{R}(K)$ *est unique à* K-*isomorphisme près. En particulier, si* $K \subseteq F$ *et* F *est réel-clos, alors* F *contient une copie unique de* $\mathfrak{R}(K)$.

(cf. Jacobson [6], vol. III, p. 285-286).

Si F est un corps réel-clos, et X est un sous-ensemble de F, on notera $\mathfrak{R}(X)$ la clôture-réelle dans F du sous-corps $\hat{X}$ (ordonné par l'ordre induit) engendré par X.

En vertu de 3.1, pour prouver le théorème 3.2 il suffit de voir que tout corps réel-clos de type η_λ est λ-saturé (la réciproque est trivialement vraie). On utilisera le lemme suivant :

LEMME 3.5. - *Soient* K, K' *des corps réels-clos et* f *un isomorphisme partiel de* K *dans* K' *dont* $\mathrm{Dom}(f)$ *est un sous-corps réel-clos de* K. *Soient* $x \in K$, $y \in K'$ *des éléments transcendants sur* $\mathrm{Dom}(f), \mathrm{Im}(f)$, *respectivement, tels que*

(*) *pour tout* $z \in \mathrm{Dom}(f)$, $x > z \Leftrightarrow y > f(z)$.

Alors f *s'étend de façon unique en un isomorphisme partiel* g *de* $\mathfrak{R}(\mathrm{Dom}(f) \cup \{x\})$ *sur* $\mathfrak{R}(\mathrm{Im}(f) \cup \{y\})$ *tel que* $g(x) = y$.

DEMONSTRATION. - On commence par étendre f de façon formelle à l'anneau $\mathrm{Dom}(f)[x]$:

$$\hat{f}(P(x)) = (fP)(y) \ ,$$

où P est un polynôme à coefficients dans $\mathrm{Dom}(f)$, et fP est le polynôme obtenu en remplaçant chaque coefficient de P par son image sous f. $\hat{f}$ est évidemment un isomorphisme d'anneau (vu que x,y sont transcendants) et $\hat{f}(x) = y$. Si on arrive à démontrer que $\hat{f}$ préserve l'ordre de ces anneaux, alors l'extension de $\hat{f}$ à l'anneau quotient $\mathrm{Dom}(f)(x) = (\mathrm{Dom}(f) \cup \{x\})\hat{}$ est un isomorphisme de corps ordonné sur $(\mathrm{Im}(f) \cup \{y\})\hat{}$ (car $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x)Q(x) > 0$) ; le théorème 3.4 fournit alors l'extension g de $\hat{f}$ cherchée.

Pour démontrer que $\hat{f}$ est un isomorphisme d'ordre de $\mathrm{Dom}(f)[x]$ sur $\mathrm{Im}(f)[y]$ il suffit de voir que

$$(**) \qquad P(x) > 0 \iff (fP)(y) > 0$$

pour tout polynôme unitaire P (diviser par le coefficient principal) de degré 1 ou 2 (car $\mathrm{Dom}(f)$ étant réel-clos, tout polynôme se décompose en facteurs linéaires et quadratiques). Si $\deg(P) = 1$, (**) suit immédiatement de (*). Si $\deg(P) = 2$, alors $P(x) = (x-a)^2+b$, avec $a,b \in \mathrm{Dom}(f)$. Si $b \geqslant 0$, on a $(fP)(y) = (y-f(a))^2+f(b) > 0$. Si $b < 0$, alors $-b > 0$ et $-b = c^2$ avec $c \in \mathrm{Dom}(f)$, puisque ceci est réel-clos ; d'où $(x-a)^2 > -b = c^2$, ce qui entraîne $x > a+c$ ou $x > a-c$; alors (*) implique $y > f(a)+f(c)$ ou $y > f(a)-f(c)$, d'où $(fP)(y) > 0$.

DEMONSTRATION DU THEOREME 3.2. - Rappelons que K est λ-saturé ssi (i) K est faiblement λ-homogène, et (ii) K est λ-universel (cf. (6) p. 66).

PREUVE DE (i). - Soient donnés $X \subsetneq K$, $\bar{\bar{X}} < \lambda$, $x \in K$ et $f : X \to K$ élémentaire. Etendez f à un isomorphisme f' de $\mathfrak{R}(X)$ sur $\mathfrak{R}(f[X])$; ceci existe par le théorème d'Artin-Schreier (3.4). Si $x \in \mathfrak{R}(X)$ prenez g = f'. Sinon, x est transcendant sur $\mathfrak{R}(\hat{X})$ puisque ceci est réel-clos. Soit (A,B), où $A < B$, la coupure définie par x dans $\mathfrak{R}(X)$, i.e, $A = \{y \in \mathfrak{R}(X) \mid y < x\}$, $B = \{z \in \mathfrak{R}(X) \mid x < z\}$. Comme $\mathfrak{R}(X)$ est algébrique au-dessus de $\hat{X}$, on a $\overline{\overline{\mathfrak{R}(X)}} = \max\{\bar{\bar{X}}, \aleph_0\} < \lambda$, d'où $\bar{\bar{A}}, \bar{\bar{B}} < \lambda$. Alors $f'[A] < f'[B]$ et ces ensembles ont cardinalité $<\lambda$. Comme K est de type η_λ il existe y tel que $f'[A] < y < f'[B]$. En plus, il existe un tel y transcendant sur $\mathfrak{R}(f[X])$; en effet, si tout tel y était algébrique au-dessus de $\mathfrak{R}(f[X]^\wedge)$, alors ceci étant réel-clos contiendrait un interval de K, d'où $K = \mathfrak{R}(f[X])$; mais c'est impossible car $\bar{\bar{K}} \geqslant \lambda$, tandis que $\mathfrak{R}(f[X])$ a cardinalité $< \lambda$. Ainsi, la condition (*) du lemme 3.5 est vérifiée, ce qui entraîne l'existence d'un isomorphisme g de $\mathfrak{R}(X \cup \{x\})$ sur $\mathfrak{R}(f[X] \cup \{y\})$ qui étend f et tel que g(x) = y. Comme la théorie des corps réels-clos admet l'élimination de quantificateurs, g est une application élémentaire.

PREUVE DE (ii). - Soit F un corps réel-clos de cardinalité $\leqslant \lambda$, et soit $\mathfrak{I}$ la famille de tous les isomorphismes partiels définis dans des sous-corps réels-clos de F de cardinalité $<\lambda$, à valeurs dans K.

Rappelons que l'application $\tau^F \to \tau^K$, τ terme constant du langage des corps, est un isomorphisme entre les sous-corps premiers de F et K. Par 3.4 cet isomorphisme a une extension unique à $\mathfrak{R}(\emptyset)$ (= la clôture-réelle du sous-corps premier de F) qu'on dénotera 0.

Comme $F \equiv K$, alors $0 \in \mathfrak{I}$, d'où :

(a) $\mathfrak{I} \neq \emptyset$.

Au moyen d'un argument semblable à celui de (i) on démontre facilement que $\mathfrak{I}$ a les propriétés suivantes :

(b) (va, un élément à la fois)

$f \in \mathfrak{I} \wedge a \in F \Rightarrow$ il existe $g \in \mathfrak{I}$ tel que $a \in \mathrm{Dom}(g)$ et $f \subseteq g$;

(c) (λ-extension) la réunion d'une chaine (par extension) de $<\lambda$ membres de $\mathfrak{I}$ appartient aussi à $\mathfrak{I}$.

C'est un exercice simple de vérifier que les propriétés (a)-(c) et le fait que $\bar{\bar{F}} < \lambda$ entrainent l'existence d'un monomorphisme de F dans K (et même que tout membre de $\mathfrak{I}$ s'étend dans un monomorphisme de ce type). Ceci complète la démonstration du théorème 3.2.

REMARQUE. - Dans les arguments qui précèdent on n'a pas spécifié si les applications partielles en considération sont des isomorphismes de corps ou de corps ordonné. Cela n'a pas été nécessaire car *tout isomorphisme partiel de corps dont le domaine est réel-clos est aussi un isomorphisme de corps ordonné ;* et ceci parce que dans un corps réel-clos un élément est positif ssi il est un carré.

4. LES STRUCTURES ENGENDRÉES PAR DES INDISCERNABLES : THÉORIE ÉLÉMENTAIRE.

Dans le but de motiver la définition d'ensemble d'indiscernables considérons d'abord la construction suivante : pour toute théorie T de premier ordre ayant un modèle infini, il existe un modèle $\mathfrak{A}$ de T avec un ensemble infini $X \subseteq |\mathfrak{A}|$ dont tous les éléments sont semblables, i.e, satisfont les mêmes formules de L(T) avec une variable libre. On peut même choisir $\mathfrak{A}$ de manière qu'il soit une extension élémentaire de n'importe quel modèle infini $\mathfrak{B}$ de T donné à l'avance et que l'ensemble X ait cardinalité fixée κ.

En effet, la restriction à L(T) d'un modèle quelconque de la théorie T' ci-dessous satisfait la condition voulue ; T' a pour langage $L(T) \cup \{\bar{b} \mid b \in |\mathfrak{B}|\} \cup \{c_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$, et consiste des énoncés :

(i) $Th(<\mathfrak{B}, b>_{b \in |\mathfrak{B}|})$;

(ii) $c_\alpha \not\approx c_\beta$, pour $\alpha, \beta < \kappa$, $\alpha \neq \beta$;

(iii) $\varphi(c_\alpha) \leftrightarrow \varphi(c_\beta)$, pour tout $\alpha, \beta < \kappa$ et $\varphi \in Form_1(L(T))$.

Pour démontrer que T' a un modèle, par compacité il suffit de voir que tout sous-ensemble fini Σ de T' en a aussi.

Soient alors $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ toutes les formules qui apparaissent dans un énoncé de type (iii) appartenant à Σ, et $\overline{b}_1,\ldots,\overline{b}_r$, $c_{\alpha_1},\ldots,c_{\alpha_k}$ toutes les constantes nouvelles (i.e., n'appartenant pas à L(T)) qui apparaissent dans des énoncés de Σ. Il est facile de définir par induction sur n une suite $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ de zéros et un telle que $\bigcap_{i=1}^{n} (\varphi_i^{\varepsilon_i})^{\mathcal{B}}$ est infini (où $\psi^0 = \neg\psi$, $\psi^1 = \psi$) ; il suffit de mettre ε_j égal à 0 ou 1 selon que $\bigcap_{i=1}^{j-1} (\varphi_i^{\varepsilon_i})^{\mathcal{B}} \cap \varphi_j^{\mathcal{B}}$ soit fini ou infini, respectivement ; la partie ainsi choisie est infinie ("principe des pigeonniers"). On peut donc choisir $b'_1,\ldots,b'_k \in \bigcap_{i=1}^{n} (\varphi_i^{\varepsilon_i})^{\mathcal{B}}$ tous distincts, et ceci prouve que $\langle \mathcal{B}, b_1,\ldots,b_r, b'_1,\ldots,b'_k\rangle \models \Sigma$ (dont b'_ℓ est la dénotation de c_{α_ℓ}, $1 \leq \ell \leq k$).

Il est naturel de se demander s'il existe toujours un modèle de T contenant un ensemble infini dont non seulement tous les éléments soient semblables mais aussi tous les n-uples, pour chaque $n \geq 1$ (c'est-à-dire, elles satisfont les mêmes formules à n variables libres. La réponse est trivialement négative: dans un ensemble totalement ordonné seulement la moitié des paires ordonnés satisfont la formule $v_0 < v_1$. Il s'avère que ce ceci est le seul obstacle, d'où la définition suivante :

DEFINITION 4.1. - *Soient $\mathfrak{A}$ une structure et $X \subseteq |\mathfrak{A}|$ un ensemble muni d'un ordre $<$ (pas nécessairement définissable par une formule de $L(\mathfrak{A})$!) ; $\langle X, <\rangle$ est un ensemble d'indiscernables pour $\mathfrak{A}$ (ou, au besoin, un ensemble de $<$-indiscernables) ssi pour tout $n \geq 1$ et toute paire de suites croissantes de X de longueur n, $x_0 < \cdots < x_{n-1}$ et $y_0 < \cdots < y_{n-1}$, on a*

$$\langle \mathfrak{A}, x_0,\ldots,x_{n-1}\rangle \equiv \langle \mathfrak{A}, y_0,\ldots,y_{n-1}\rangle .$$

En utilisant au lieu du "principe des pigeonniers" un théorème combinatoire de Ramsey qui le généralise, la construction précédente donne le résultat d'existence suivant :

4.2. THEOREME D'EHRENFEUCHT-MOSTOWSKI. - *Soient $\mathfrak{A}$ une structure* ***infinie*** *et ϵ un type d'ordre (total) arbitraire. Alors il existe $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ contenant un ensemble d'indiscernables de type ϵ.*

La preuve est donnée en détails dans Chang-Keisler [2] , p. 148-149 et Dickmann [3] , p. 119-121.

Il convient d'introduire les notations suivantes :

4.3. NOTATIONS. -

(a) Si $\langle X,<\rangle$ est un ensemble d'indiscernables pour $\mathfrak{A}$, on pose :

$\mathrm{Form}_{\mathfrak{A}}(X,<) = \{\varphi \in \mathrm{Form}(L(\mathfrak{A})) \mid$ il existe une suite finie croissante $\bar{x}$ de X telle que $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{x}]\}$.

(b) Soient $\mathfrak{A}$ une structure, Σ un ensemble de formules de $L(\mathfrak{A})$, et $\langle X,<\rangle$ un ensemble ordonné. On abrège $\mathcal{K}(\Sigma ; \langle X,<\rangle ; \mathfrak{A})$ les propriétés suivantes :

(i) $\mathfrak{A}$ est une structure de Skolem ;

(ii) $\langle X,<\rangle$ est un ensemble d'indiscernables pour $\mathfrak{A}$;

(iii) $\Sigma = \mathrm{Form}_{\mathfrak{A}}(X ; <)$;

(iv) $\mathfrak{A} = \mathfrak{H}(X, \mathfrak{A})$.

4.4. REMARQUES. - (a) Notons qu'à cause da la $<$-indiscernabilité de X, "il existe" peut être remplacé par "pour toute" dans 4.3 (a). L'ensemble $\mathrm{Form}_{\mathfrak{A}}(X, <)$ est consistent et complet dans le sens que pour toute formule φ de $L(\mathfrak{A})$, φ ou $\neg\varphi$ y appartient, mais non toutes les deux.

(b) Si (i) et (ii) de 4.3 (b) sont vérifiées, alors on a

$$\mathcal{K}(\mathrm{Form}_{\mathfrak{A}}(X,<) ; \langle X,<\rangle ; \mathfrak{H}(X,\mathfrak{A})).$$

(c) Si $a = \tau^{\mathfrak{A}}[\bar{x}]$, où $a \in |\mathfrak{A}|$, $\bar{x} \in X$ et τ est un terme de $L(\mathfrak{A})$, on peut réordonner les variables de τ et les membres de la suite $\bar{x}$ pour obtenir un terme τ' et une suite *croissante* $\bar{x}' \in X$ tels que $a = \tau'^{\mathfrak{A}}[\bar{x}']$. Alors :

$$\mathfrak{H}(X,\mathfrak{A}) = \{\tau^{\mathfrak{A}}[\bar{x}] \mid \tau \text{ terme de } L(\mathfrak{A}) \text{ et } \bar{x} \text{ suite croissante de } X\}$$

THEOREME 4.5. - (Propriétés des ensembles d'indiscernables). *Soient* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ *des ordres totaux,* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *des structures de Skolem de signature* μ *telles que* $|\mathfrak{X}| \subsetneq |\mathfrak{A}|$, $|\mathfrak{Y}| \subsetneq |\mathfrak{B}|$, *et* Σ *un ensemble de formules de* μ.

Alors on a :

(a) (Propriété des sous-ensembles). *Si* $\mathfrak{X}$ *est un ensemble d'indiscernables pour* $\mathfrak{A}$ *et* $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$, *alors* $\mathfrak{Y}$ *est un ensemble d'indiscernables pour* $\mathfrak{K}(|\mathfrak{Y}|, \mathfrak{A})$.

(b) (Propriété d'étirement). *Si* $\mathfrak{X}$ *est infini et* $\mathfrak{K}(\Sigma; \mathfrak{X}; \mathfrak{A})$, *alors il existe* $\mathfrak{C}$ *telle que* $\mathfrak{K}(\Sigma; \mathfrak{Y}; \mathfrak{C})$.

(c) (Propriété des monomorphismes). *Si* $\mathfrak{K}(\Sigma; \mathfrak{X}; \mathfrak{A})$ *et* $\mathfrak{K}(\Sigma; \mathfrak{Y}; \mathfrak{B})$, *alors tout monomorphisme d'ordre* f : $\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *admet une extension unique à un monomorphisme élémentaire* g : $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$; g *est surjectif si et seulement si* f *est surjectif.*

(d) (Propriété des automorphismes) *Si* $\mathfrak{K}(\Sigma; \mathfrak{X}; \mathfrak{A})$, *alors tout automorphisme (d'ordre) de* $\mathfrak{X}$ *s'étend de façon unique à un automorphisme de* $\mathfrak{A}$.

(e) (Réalisation et omission de types). *Si* $\mathfrak{K}(\Sigma; \mathfrak{X}; \mathfrak{A})$ *et* $\mathfrak{K}(\Sigma; \mathfrak{Y}; \mathfrak{B})$, *alors un type est réalisé dans* $\mathfrak{A}$ *si et seulement il est réalisé dans* $\mathfrak{B}$.

Pour la démonstration voir Dickmann [3], p. 121-125 ou Chang-Keisler [2], p. 149-151.

Ces propriétés peuvent être utilisée avec le théorème 4.2 pour construire des modèles de théories axiomatiques avec des propriétés spéciales ; par exemple, des modèles avec beaucoup d'automorphismes ; ou des modèles de cardinalité arbitrairement grande réalisant un petit nombre de types. Cf. Dickmann [3], p. 123-127, ou Chang-Keisler [2], p. 151-153.

Voici, finalement, quelques exemples d'indiscernables qu'on rencontre dans la pratique mathématique.

4.6 EXEMPLES. -

(a) Soit T la théorie des ordres totaux, denses, sans extrêmes. Alors l'ensemble des nombres rationnels avec son ordre naturel est un ensemble d'indiscernables lui-même.

(b) Si T est la théorie des ordres discrets avec premier mais sans dernier élément, disons, dans le langage avec la relation d'ordre $<$ et l'opération successeur immédiat s, alors tout modèle $\mathfrak{X}$ de T est de la forme $\omega+(\omega^*+\omega)\epsilon$, où ϵ est un type d'ordre arbitraire. Si $\epsilon \neq 0$, alors tout sous-ensemble non-vide Y de $\mathfrak{X}$ qui coupe à chaque segment de $\mathfrak{X}$ de type $\omega^*+\omega$ dans au plus un point, avec l'ordre induit, est un ensemble d'indiscernables pour $\mathfrak{X}$.

(c) Soit K un corps algébriquement clos et X un sous-ensemble algébriquement indépendant au-dessus du sous-corps premier de K; alors, X avec un ordre quelconque est un ensemble d'indiscernables pour K.

D'autres exemples sont donnés dans Chang-Keisler [2], exercice 3.3.13 p. 154.

5. UNE GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE DE VA-ET-VIENT.

Nous allons présenter dans ce paragraphe une généralisation des notions et résultats introduits dans le paragraphe 2. On omettra les démonstrations et on se bornera à l'essentiel ; le sujet est traité en détail dans Dickmann [3], chapitre 5, paragraphe 3, C.

Pour motiver les idées présentées ci-dessous rappelons que le théorème de Karp(2.3) donne une caractérisation de la relation logique $\equiv_{\infty\lambda}$ en termes de va-et-vient ; il est naturel, donc, de se demander s'il existe une caractérisation semblable pour quelques autres relations du type $\mathfrak{A}\,(\Phi)\,\mathfrak{B}$, où Φ est une classe de formules de $L_{\infty\lambda}$. En effet, la réponse s'avère affirmative pour de nombreuses classes Φ.

Dans ce paragraphe λ et Φ dénoteront, respectivement, un cardinal infini et une sous-classe (dans le sens de ZFC) de Form $(L_{\infty\lambda}(\mu))$.

DEFINITION 5.1. - *Soit* $\varphi \in \mathrm{Form}(L_{\infty\lambda}(\mu))$. *Le* <u>*rang*</u> *(ou* <u>*rang de quantificateurs*</u>*) de* φ, $r(\varphi)$, *est un ordinal défini par induction dans la complexité de* φ, *comme suit :*

si φ *est atomique, alors* $r(\varphi) = 0$,

si φ *est* $\neg\,\Psi$, *alors* $r(\varphi) = r(\psi)$,

si φ *est* $\wedge\Psi$, *alors* $r(\varphi) = \sup\{r(\psi) \mid \psi \in \Psi\}$,

si φ *est* $(\exists\, X)\psi$, *alors* $r(\varphi) = r(\psi)+1$.

Dans le cas de $L_{\omega\omega}$(et parfois aussi de $L_{\kappa\omega}$, $K > \omega$) il est habituel - mais pas nécessaire - d'ajouter à la dernière ligne la condition $\bar{\bar{X}} = 1$; quand la notion de rang comporte cette condition, on dira qu'elle est utilisée au sens *restreint*. Notons que $r(\varphi) = 0$ si φ est sans quantificateurs.

5.2. NOTATIONS. -

(a) Soit $\alpha \in \mathrm{On}$. Posons :

$\Phi^{\alpha} = \{\varphi \in \Phi \mid r(\varphi) \leqslant \alpha\}$,

$\Phi_{\alpha} = \{\varphi \in \Phi \mid r(\varphi) = \alpha\}$,

$\Phi[\exists] = \{\varphi \in \Phi \mid \varphi$ commence par un quantificateur existentiel$\}$,

$\Phi[\forall] = \{\varphi \in \Phi \mid \varphi$ commence par un quantificateur universel$\}$.

(b) Soit $\lambda^* = 2$ si $\lambda = \omega$ et la notion de rang est utilisée au sens restreint, et $\lambda^* = \lambda$ autrement.

(c) Une formule φ est *réduite* ssi pour chaque sous-formule de φ de la forme $\neg\,\psi$, ψ est atomique.

La définition suivante donne les conditions syntaxiques les plus simples qu'une classe de formules de $L_{\infty\lambda}$ doit remplir pour que, les résultats de ce paragraphe soient valables.

DEFINITION 5.3. - *Une classe* Φ *de formules de* $L_{\infty\lambda}$ *est* <u>*normale*</u> *si elle vérifie les conditions suivantes :*

(N1) $(v_0 \approx v_0) \in \Phi$.

(N2) *Si* $\varphi \in \Phi$*, alors il existe* $\varphi^* \in \Phi$ *, formule réduite avec les mêmes variables libres que* φ*, telle que* $\models \varphi \longleftrightarrow \varphi^*$.

(N3) *Si* $\varphi \in \Phi$ *, alors toute sous-formule de* φ *y appartient aussi.*

(N4) *Si* Ψ *est un sous-ensemble de* Φ*, alors* $\bigwedge \Psi$ *et* $\bigvee \Psi$ *appartiennent à* Ψ.

(N5) *Si* $\varphi \in \Phi$ *et* φ' *est obtenue par substitution dans* φ *de quelques unes des ocurrences d'une variable libre par un terme, alors* $\varphi' \in \Phi$.

(N6) *Si* $\alpha \in$ On *et* $\Phi_{\alpha+1}[\exists] \neq \emptyset$ *(respectivement,* $\Phi_{\alpha+1}[\forall] \neq \emptyset$*), alors toute quantification existentielle (respectivement, universelle) d'une formule* $\varphi \in \Phi^{\alpha}$ *sur* $< \lambda^*$ *variables appartient aussi à* Φ .

Par exemple, les classes suivantes sont normales : la classe **Form**$(L_{\infty\lambda})$ de toutes les formules de $L_{\infty\lambda}$; les classes de toutes les formules **réduites**, de toutes les formules sans quantificateurs, de toutes les formules **existentielles**, de toutes les formules universelles, de toutes les formules positives ; si Φ est normale, alors Φ^{α} l'est aussi. Par contre, Form$(L_{\kappa\lambda})$, $\kappa \in$ Cn , $\kappa \geq \lambda$, et la classe de toutes les formules de $L_{\infty\lambda}$ en forme prenexe, ne sont pas normales.

Remarquons que (N1) et (N5) impliquent que chaque formule atomique de la forme $\tau_1(v_1^1,\ldots,v_n^1) \approx \tau_2(v_1^2,\ldots,v_m^2)$ appartient à Φ .

Nous introduisons maintenant les propriétés d'extension d'isomorphismes partiels qui seront utilisées par la suite.

DEFINITION 5.4. -

(a) *La relation* $\mathfrak{A} \simeq_{\Phi}^{\top} \mathfrak{B}$ *est valable si et seulement si il existe une famille non-vide* $\mathbf{I}$ *de* Φ_0*-morphismes partiels définis dans des sous-structures de* $\mathfrak{A}$ *, à valeurs dans* $\mathfrak{B}$*, avec les propriétés de va-et-vient relatives à* Φ *:*

i) (va) *Si* $\Phi_{\xi+1}[\exists] \neq \emptyset$ *pour quelque* $\xi \in$ On , *alors pour tout* $f \in \mathbb{I}$ *et* $A \subseteq |\mathfrak{A}|$, $\bar{\bar{A}} < \lambda^*$, *il existe* $g \in \mathbb{I}$ *tel que* $f \subseteq g$ *et* $A \subseteq \mathrm{Dom}(g)$;

ii) (vient) *Si* $\Phi_{\xi+1}[\forall] \neq \emptyset$ *pour quelque* $\xi \in$ On, *alors pour tout* $f \in \mathbb{I}$ *et* $B \subseteq |\mathfrak{B}|$, $\bar{\bar{B}} < \lambda^*$, *il existe* $g \in \mathbb{I}$ *tel que* $f \subseteq g$ *et*. $B \subseteq \mathrm{Im}(g)$.

Si I satisfait ces conditions, alors nous écrirons aussi I : $\mathfrak{A} \simeq^{p}_{\Phi} \mathfrak{B}$.

b) *Soit* $\beta \in$ On. *La relation* $\mathfrak{A} \simeq^{p}_{\Phi\,\beta} \mathfrak{B}$ *est valable si et seulement si il existe une suite* $\mathfrak{I} = \langle \mathbb{I}_\xi | \xi \leqslant \beta \rangle$, *de longueur* $\beta + 1$, *avec les propriétés suivantes :*

i) *chaque* $f \in \bigcup_{\xi \leqslant \beta} \mathbb{I}_\xi$ *est un* Φ_0*-morphisme partiel défini dans une sous-structure de* $\mathfrak{A}$, *à valeurs dans* $\mathfrak{B}$;

ii) *chaque* $\mathbb{I}_\xi$, $\xi \leqslant \beta$ *est non-vide ;*

iii) $\eta \leqslant \xi \leqslant \beta \implies \mathbb{I}_\xi \subseteq \mathbb{I}_\eta$;

iv) *Si* $\xi + 1 \leqslant \beta$ *et* $\Phi_{\xi+1}[\exists] \neq \emptyset$, *alors pour tout* $f \in K_{+1}$ *et* $A \subseteq |\mathfrak{A}|$ $\bar{\bar{A}} < \lambda^*$, *il existe* $g \in \mathbb{I}_\xi$ *tel que* $f \subseteq g$ *et* $A \subseteq \mathrm{Dom}(g)$;;

v) *Si* $\xi + 1 \leqslant \beta$ *et* $\Phi_{\xi+1}[\forall] \neq \emptyset$, *alors pour tout* $f \in \mathbb{I}_{\xi+1}$ *et* $B \subseteq |\mathfrak{B}|$ $\bar{\bar{B}} < \lambda^*$, *il existe* $g \in \mathbb{I}_\xi$ *tel que* $f \subseteq g$ *et* $B \subseteq \mathrm{Im}(g)$. .

Si la suite $\mathfrak{I}$ satisfait ces conditions, nous écrirons : $\mathfrak{I} : \mathfrak{A} \simeq^{p}_{\Phi\,\beta} \mathfrak{B}$.

Nous pouvons maintenant formuler les généralisations voulues du théorème de Karp.

THEOREME 5.5. - *Soient* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *des structures de signature* μ, Φ *une classe normale de formules de* $L_{\infty\lambda}(\mu)$, *et* $\beta \in$ On . *Sont équivalentes :*

(1) $\mathfrak{A}\,(\Phi^\beta)\,\mathfrak{B}$;

(2) $\mathfrak{A} \simeq^{p}_{\Phi,\beta} \mathfrak{B}$.

Aussi sont équivalentes :

(1') $\mathfrak{A}(\Phi)\mathfrak{B}$;

(2') $\mathfrak{A} \simeq^{p}_{\Phi} \mathfrak{B}$.

La démonstration est similaire à celle du théorème de Karp (2.3) ; pour les détails voir Dickmann [3] , p. 330-333.

La relation $\mathfrak{A} \prec_{\Phi} \mathfrak{B}$ ($\Leftrightarrow |\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$ et l'inclusion i : $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ est un Φ-morphisme) admet-elle aussi une caractérisation au moyen du va-et-vient :

THEOREME 5.6. - *Soient $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, Φ et β comme dans le théorème précédent et $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$. Sont équivalents :*

(1) $\mathfrak{A} \prec_{\Phi\beta} \mathfrak{B}$ (aussi notée $\mathfrak{A} \prec^{\beta}_{\Phi} \mathfrak{B}$) ;

(2) il existe une suite $\mathcal{J} = \langle \mathbb{I}_{\xi} | \xi \leq \beta \rangle$ telle que $\mathcal{J} : \mathfrak{A} \simeq^{p}_{\Phi,\beta} \mathfrak{B}$ et pour tout $A \subseteq |\mathfrak{A}|$, $\bar{\bar{A}} < \lambda$, et tout $\xi \leq \beta$ il existe $f \in \mathbb{I}_{\xi}$ tel que $A \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ et $f \restriction A = \mathrm{id}_A$.

Aussi sont équivalents :

(1') $\mathfrak{A} \prec_{\Phi} \mathfrak{B}$;

(2') il y a une famille $\mathbf{I}$ telle que $\mathbf{I} : \mathfrak{A} \simeq^{p}_{\Phi} \mathfrak{B}$ et pour tout $A \subseteq |\mathfrak{A}|$, $\bar{\bar{A}} < \lambda$, il existe $f \in \mathbf{I}$ tel que $A \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ et $f \restriction A = \mathrm{id}_A$.

Ces théorèmes constituent le début d'une série beaucoup plus longue de résultats du même genre dont la caractéristique commune est de fournir des informations plus précises dans des situations plus particulières ; cf. Dickmann [3], p. 333-344.

Signalons, finalement, la façon dans laquelle les classes normales les plus importantes se lient, dans certains cas, à les notions algébriques d'homomorphisme, de plongement et d'isomorphisme. Dénotons les classes des formules existentielles, universelles et positives de $L_{\infty\lambda}$ par $Ex_{\infty\lambda}$, $Un_{\infty\lambda}$ et $Pos_{\infty\lambda}$ respectivement.

THEOREME 5.7. - *Supposons que $cf(\lambda) = \omega$ et $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ ont cardinalité $\leq \lambda$. Alors :*

(1) $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\lambda} \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{A}$ est isomorphe à $\mathfrak{B}$.

(2) $\mathfrak{A}$ $(Ex_{\infty\lambda})$ $\mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{A}$ se plonge dans $\mathfrak{B}$.

(3) $\mathfrak{A}\ (\mathrm{Un}_{\infty\lambda})\ \mathfrak{B} \iff \mathfrak{B}$ *se plonge dans* $\mathfrak{A}$.

(4) $\mathfrak{A}\ (\mathrm{Pos}_{\infty\lambda})\ \mathfrak{B} \iff \mathfrak{B}$ *est image homomorphique de* $\mathfrak{A}$.

Aucune des hypothèses dans ce théorème ne peut être omise : on connait des nombreux exemples où $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} = \lambda < \overline{\overline{\mathfrak{B}}}$, mais l'implication de gauche à droite n'est pas valable. Aussi, pour chaque λ régulier non-dénombrable il y a des structures $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ de cardinalité λ telles que $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\lambda} \mathfrak{B}$ mais $\mathfrak{A}$ n'est pas isomorphe à $\mathfrak{B}$ (cet exemple-ci n'est pas simple ; voir Dickmann [3] contrexemple 5.3.41, p. 350 ff.).

6. DEUXIÈME APPLICATION : UN THÉORÈME DE TRANSFERT POUR LES STRUCTURES ENGENDRÉES PAR DES INDISCERNABLES ; QUELQUES COROLLAIRES.

Nous allons considérer maintenant des questions du type suivant : supposons que les ensembles ordonnés $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ soient des ensembles d'indiscernables pour les structures $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ respectivement ; supposons aussi qu'une certaine relation de la forme $\mathfrak{X}\ (\Phi)\mathfrak{Y}$ existe entre $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$, où Φ est une classe de formules infinies ; est-ce que les structures $\mathfrak{H}(|\mathfrak{X}|,\mathfrak{A})$, $\mathfrak{H}(|\mathfrak{Y}|,\mathfrak{B})$ héritent une relation semblable ? Nous verrons que la réponse est affirmative dans des conditions très générales.

Dans ce paragraphe μ dénotera une signature *munie de fonctions de Skolem*, mais autrement arbitraire ; Φ dénotera une classe *normale de* formules de $L_{\infty\lambda}(<)$ contenant la formule $v_0 < v_1$; et Φ^* dénotera une classe normale de formules de $L_{\infty\lambda}(\mu)$. La notion de rang *ne sera jamais* utilisée ici au sens restreint.

La condition imposée à Φ implique que les Φ_0-morphismes préservent l'ordre. Nous utilisons la notation irreflexive pour l'ordre.

La définition suivante exprime la correspondance entre Φ et Φ^* nécessaire pour obtenir un théorème de transfert du type cherché.

DEFINITION 6.1. - *Les classes* Φ *et* Φ^* *sont <u>reliées</u> ssi pour tout* $\alpha \in \mathbf{On}$:

(i) $\Phi^*_\alpha[\exists] \neq \emptyset \Longrightarrow \Phi_\alpha[\exists] \neq \emptyset$;

(ii) $\Phi^*_\alpha[\forall] \neq \emptyset \Longrightarrow \Phi_\alpha[\forall] \neq \emptyset$.

Notre résultat principal est :

THEOREME 6.2. - *Soient* $\beta \in \mathrm{On}$ *et* Φ, Φ^* *des classes reliées* ***vérifiant les*** *conditions énoncées ci-dessus. Soient* $\mathfrak{X}$, $\mathcal{Y}$ *des ensembles* ***ordonnés,*** $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *des structures de type* μ *et* Σ, Σ' *des ensembles de* ***formules*** *de* $L_{\omega\omega}(\mu)$ *tels que* $\mathcal{K}(\Sigma ; \mathfrak{X} ; \mathfrak{A})$ *et* $\mathcal{K}(\Sigma' ; \mathcal{Y}; \mathfrak{B})$. *Si* $\Sigma \cap \Phi^*_o \subseteq \Sigma$ *alors on a :*

$$\mathfrak{X} \simeq^{p}_{\Phi,\beta} \mathcal{Y} \Longrightarrow \mathfrak{A} \simeq^{p}_{\Phi^*,\beta} \mathfrak{B}.$$

DEMONSTRATION. - Soit $\mathcal{I} = \langle \mathbb{I}_\alpha | \alpha \leq \beta \rangle$ une suite d'ensembles de Φ_o**-morphismes** partiels de $\mathfrak{X}$ dans $\mathcal{Y}$ telle que $\mathcal{I} : \mathfrak{X} \simeq^{p}_{\Phi,\beta} \mathcal{Y}$. On veut définir **une suite** $\mathcal{I}^* = \langle \mathbb{I}^*_\alpha \mid \alpha \leq \beta \rangle$ telle que $\mathcal{I}^* : \mathfrak{A} \simeq^{p}_{\Phi^*,\beta} \mathfrak{B}$. Dans ce but nous **allons** associer à chaque Φ^*_o-morphisme partiel f de $\mathfrak{X}$ dans $\mathcal{Y}$, un Φ^*_o**-morphisme** partiel f^* de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$.

Soient $\mathfrak{X} = \langle X,<\rangle$ et $\mathcal{Y} = \langle Y,\prec\rangle$. Car $\mathfrak{A} = \mathcal{R}(X, \mathfrak{A})$, chaque élément $a \in |\mathfrak{A}|$ est représentable dans la forme $a = \tau^{\mathfrak{A}}[x_1,\ldots,x_n]$ **où** τ est un terme de μ et $x_1 < \ldots < x_n$ une suite croissante de X (cf. **remarque 4.4 (c** p. 78). Chaque élément de $\mathfrak{B}$ est représentable de façon analogue. **Evidemment** ces représentations ne sont pas uniques.

L'application f^* est définie par :

$\mathrm{Dom}(f^*) = \mathcal{R}(\mathrm{Dom}(f),\mathfrak{A})$,

$f^*(\tau^{\mathfrak{A}}[x_1,\ldots,x_n]) = \tau^{\mathfrak{B}}[f(x_1),\ldots,f(x_n)]$,

pour chaque terme τ de μ, et $x_1,\ldots,x_n \in \mathrm{Dom}(f)$.

Il faut voir que f^* est bien définie et qu'elle est un Φ^*_o**-morphisme.** Or, c'est une conséquence du fait suivant : soient ψ une formule de $L_{\omega\omega}(\mu)$ appartenant à Φ_o, avec $\leq$ n variables libres, $\tau_1,\ldots,\tau_n$ des termes **de** μ, et $\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n$ des suites croissantes d'éléments de Dom(f) de longueurs **au** moins égales au nombre de variables de $\tau_1,\ldots,\tau_n$ respectivement ; **alors :**

$(*)\ \mathfrak{A} \models \psi[\tau_1^{\mathfrak{A}}[\bar{x}_1], \ldots, \tau_n^{\mathfrak{A}}[\bar{x}_n]] \Rightarrow \mathfrak{B} \models \psi[\tau_1^{\mathfrak{B}}[f(\bar{x}_1)], \ldots, \tau_n^{\mathfrak{B}}[f(\bar{x}_n)]]$

(où $f(\bar{x})$ désigne la suite des images par f des membres de $\bar{x}$).

En incorporant les termes à la formule ψ, ceci devient un cas particulier de

$(**)\ \mathfrak{A} \models \varphi[\bar{x}] \Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[f(\bar{x})]$,

où $\varphi \in \Phi_0^*$ en vertu de (N5), Définition 5.3 ; en permutant les noms des variables de φ on peut supposer (encore par (N5)) que $\bar{x}$ est une suite croissante de $\mathfrak{X}$. Or, (**) est vraie pour toute formule φ de $L_{\omega\omega}(\mu)$ appartenant à Φ_0^* et toute suite croissante $\bar{x}$ de $\mathfrak{X}$. En effet, $\mathfrak{K}(\Sigma ; \mathfrak{X} ; \mathfrak{A})$ $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{x}]$ et $\bar{x}$ croissante impliquent $\varphi \in \Sigma$ (voir 4.3), d'où $\varphi \in \Sigma'$ par l'hypothèse $\Sigma \cap \Phi_0^* \subseteq \Sigma'$; comme chaque $\varphi \in \Sigma'$ est satisfaite par toute suite croissante de $\mathfrak{Y}$ (puisque $\mathfrak{K}(\Sigma' ; \mathfrak{Y} ; \mathfrak{B})$), et f préserve l'ordre, on conclut $\mathfrak{B} \models \varphi[f(\bar{x})]$.

Quand ψ est une équation de la forme $\tau_1(\bar{v}_1) \approx \tau_2(\bar{v}_2)$ - laquelle appartient à Φ_0^* par (N1) et (N5), définition 5.3 - , (*) prouve que f^* est bien définie, et quand ψ est atomique appartenant à Φ_0^* (*) prouve que f est un Φ_0^*-morphisme. Le lecteur pourra vérifier sans peine que $\mathrm{Im}(f^*) = \mathfrak{H}(\mathrm{Im}(f) ; \mathfrak{B})$.

Maintenant nous posons :

$\mathbb{I}_\alpha^* = \{ f^* \mid f \in \mathbb{I}_\alpha \}$ pour $\alpha \leq \beta$, et

$\mathfrak{I}^* = \langle \mathbb{I}_\alpha^* \mid \alpha \leq \beta \rangle$.

Manifestement, $\mathbb{I}_\alpha^* \neq \emptyset$ pour $\alpha \leq \beta$, $\mathfrak{I}^*$ est décroissante (puisque $\mathfrak{I}$ l'est), et chaque $f^* \in \bigcup_{\alpha \leq \beta} \mathbb{I}_\alpha^*$ est un Φ_0^*-morphisme. Il reste à vérifier que $\mathfrak{I}^*$ a les propriétés de va et vient (Définition 5.4 (b), iv et v).

Nous supposons choisies des applications $a \mapsto \bar{x}_a$ et $a \mapsto \tau_a$, pour $a \in |\mathfrak{A}|$, telles que $a = \tau_a^{\mathfrak{A}}[\bar{x}_a]$, dont τ_a est un terme de μ et $\bar{x}_a$ une suite croissante de $\mathfrak{X}$; et aussi une représentation semblable pour les éléments de $\mathfrak{B}$.

Pour illustrer l'argument nous vérifions la propriété de vient. Supposons $\xi+1 \leqslant \beta$ et $\Phi^*_{\xi+1}[\forall] \neq \emptyset$; soient $f^* \in \mathbb{I}^*_{\xi+1}$, $B \subseteq |\mathfrak{B}|$, $\bar{\bar{B}} < \lambda$ donnés. On veut construire $g^* \in \mathbb{I}^*_{\xi}$ telle que $f^* \subseteq g^*$ et $B \subseteq \mathrm{Im}(g^*)$. En utilisant les représentations $b \mapsto \tau_b$, $b \mapsto \bar{y}_b$ choisies, on définit $Y_B = \bigcup_{b \in B} \bar{y}_b$; alors $\bar{\bar{Y}}_B < \lambda$ puisque chaque $\bar{y}_b$ est fini, et $B \subseteq \mathfrak{R}(Y_B, \mathfrak{B})$.
Soit $f \in \mathbb{I}_{\xi+1}$ l'application définissant f^* . Comme Φ et Φ^* sont des classes reliées, alors $\Phi_{\xi+1}[\forall] \neq \emptyset$, et en utilisant la propriété de vient de $\mathfrak{I}$ on obtient une $g \in \mathbb{I}_{\xi}$ telle que $f \subseteq g$ et $Y_B \subseteq \mathrm{Im}(g)$. Il est évident donc, que $f^* \subseteq g^*$ et

$$\mathrm{Im}(g^*) = \mathfrak{R}(\mathrm{Im}(g), \mathfrak{B}) \supseteq \mathfrak{R}(Y_B, \mathfrak{B}) \supseteq B.$$

Ceci complète la démonstration du théorème 6.2.

COROLLAIRE 6.3. - *Sous les hypothèses du théorème 6.2., on a :*

$$\mathfrak{X}(\Phi^{\beta})\mathfrak{Y} \Rightarrow \mathfrak{A}(\Phi^{*\beta})\mathfrak{B} ,$$
$$\mathfrak{X}(\Phi)\mathfrak{Y} \Rightarrow \mathfrak{A}(\Phi)\mathfrak{B}.$$

DEMONSTRATION. - Utiliser 6.2 et 5.5 (1), (2) pour la première implication, et l'argument de 6.2 mutatis mutandis et 5.5 (1') (2') pour la seconde.

THEOREME 6.4. - *Sous les hypothèses du théorème 6.2 on a :*

$$\mathfrak{X} <^{\beta}_{\Phi} \mathfrak{Y} \Rightarrow \mathfrak{A} <^{\beta}_{\Phi^*} \mathfrak{B} ,$$

$$\mathfrak{X} <_{\Phi} \mathfrak{Y} \Rightarrow \mathfrak{A} <_{\Phi^*} \mathfrak{B}.$$

DEMONSTRATION. - Par le théorème 5.6 il suffit de voir que pour tout $\alpha \leqslant \beta$ et tout $A \subseteq |\mathfrak{A}|$, $\bar{\bar{A}} < \lambda$, il existe $f^* \in \mathbb{I}_{\alpha}$ telle que $A \subseteq \mathrm{Dom}(f^*)$ et $f^* \upharpoonright A = id_A$. Or, en utilisant la représentation $a \mapsto x_a$, $a \mapsto \tau_a$ de la preuve de 6.2, posons $X_A = \bigcup_{a \in A} \bar{x}_a$; alors $\bar{\bar{X}}_A < \lambda$ et $X_A \subseteq |\mathfrak{X}|$. D'où il existe $f \in \mathbb{I}_{\alpha}$ telle que $X_A \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ et $f \upharpoonright X_A = id_{X_A}$. Or, si $f(x_i) = x_i$ $(i=1,\ldots,n)$, on a $f^*(\tau^{\mathfrak{A}}[x_1,\ldots,x_n]) = \tau^{\mathfrak{B}}[x_1,\ldots,x_n]$, d'où f^* hérite la propriété voulue.

En appliquant ces résultats aux classes normales les plus importantes on obtient :

COROLLAIRE 6.5 . - *Soient* $\beta \in \mathrm{On}$ *et* $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{B}$ *deux structures de la même signature* μ *engendrées respectivement par des ensembles d'indiscernables* $\mathfrak{X}$, $\mathcal{Y}$. *Supposons que pour toute formule atomique* φ *de* μ *et toute paire de suites croissantes* $\bar{x} \in \mathfrak{X}$, $\bar{y} \in \mathcal{Y}$ *de la longueur appropriée on ait :*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{x}] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[\bar{y}].$$

Alors :

(1) $\mathfrak{X} \equiv^{\beta}_{\infty\lambda} \mathcal{Y} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv^{\beta}_{\infty\lambda} \mathfrak{B}$.

(2) $\mathfrak{X}\ (\mathrm{Ex}^{\beta}_{\infty\lambda})\,\mathcal{Y} \Rightarrow \mathfrak{A}\ (\mathrm{Ex}^{\beta}_{\infty\lambda})\,\mathfrak{B}$.

(3) $\mathfrak{X}\ (\mathrm{Un}^{\beta}_{\infty\lambda})\,\mathcal{Y} \Rightarrow \mathfrak{A}(\mathrm{Un}^{\beta}_{\infty\lambda})\,\mathfrak{B}$.

(4) (Chang [1]) $\mathfrak{X} \prec^{\beta}_{\infty\lambda} \mathcal{Y} \Rightarrow \mathfrak{A} \prec^{\beta}_{\infty\lambda} \mathfrak{B}$.

Des résultats analogues sont valables pour les relations obtenues en omettant β ci-dessus, et aussi pour les relations $\prec^{\beta}_{\mathrm{Ex}_{\infty\lambda}}$, $\prec_{\mathrm{Ex}_{\infty\lambda}}$, etc.

DEMONSTRATION. - Appliquer 6.3 et 6.4 à chacune des paires suivantes de classes normales et reliées qui, en outre, vérifient les hypothèses du théorème 6.2 :

Φ	Φ^*
$\mathrm{Form}(L_{\infty\lambda}(<))$	$\mathrm{Form}(L_{\infty\lambda}(\mu))$
$\mathrm{Ex}_{\infty\lambda}(<)$	$\mathrm{Ex}_{\infty\lambda}(\mu)$
$\mathrm{Un}_{\infty\lambda}(<)$	$\mathrm{Un}_{\infty\lambda}(\mu)$.

REMARQUE. - Un théorème analogue est valable pour des formules positives, mais il n'est guère différent du premier des résultats précédents, car

$$\mathfrak{X}(\mathrm{Pos}^{\beta}_{\infty\lambda})\,\mathcal{Y} \Rightarrow \mathfrak{X} \equiv^{\beta}_{\infty\lambda} \mathcal{Y}.$$

En effet, chaque formule φ du langage $\{<\}$ est équivalente à une formule positive du même rang ; il suffit de mettre φ en forme réduite φ^* et de noter que chaque sous-formule atomique de φ^* est équivalente à une formule positive :

$$\neg (x < y) \leftrightarrow y < x \ \vee \ x \approx y \ ,$$
$$\neg (x \approx y) \leftrightarrow x < y \ \vee \ y < x \ .$$

Nous démontrerons, finalement, le théorème analogue à 6.2 pour la relation $\simeq^{p,e}_{\lambda}$. Nous aurons besoin du :

LEMME 6.6. - *Soient* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ *des ensembles d'indiscernables pour des structures* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *respectivement, et supposons* $\mathfrak{A} = \mathfrak{K}(|\mathfrak{X}|,\mathfrak{A})$ *et* $\mathfrak{X}$ *infini ; soit* **f** *un isomorphisme partiel de* $\mathfrak{X}$ *dans* $\mathfrak{Y}$. *Alors, l'isomorphisme partiel* f^* *de* $\mathfrak{A}$ *dans* $\mathfrak{B}$ *défini dans la preuve du* **théorème 6.**

(p. 86) peut être choisi de façon telle que :

(a) f^* *étend* f ;

(b) $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(f^*) \cap |\mathfrak{X}|$.

DEMONSTRATION. - (a) Il suffit de choisir les représentations $a \longmapsto \tau_a$, $a \longmapsto \bar{x}_a$ avec les conditions additionnelles que pour $z \in |\mathfrak{X}|$, τ_z **soit le** terme v_0 et $\bar{x}_z = z$; alors on aura :

$$f^*(z) = \tau_z^{\mathfrak{A}}[f(\bar{x}_z)] = f(z) \ .$$

(b) L'inclusion $\subseteq$ suit de (a). Pour l'autre inclusion, rappelons que $\mathrm{Dom}(f^*) = \mathfrak{K}(\mathrm{Dom}(f),\mathfrak{A})$ et supposons qu'il existe

$x \in \mathfrak{K}(\mathrm{Dom}(f),\mathfrak{A}) \cap |\mathfrak{X}| - \mathrm{Dom}(f)$; alors

$$(*) \qquad x = \tau^{\mathfrak{A}} [x_1,\ldots,x_n]$$

où $x_1 < \ldots < x_n$ est une suite croissante de Dom(f) ; en particulier, $x \neq x_i$ $(i=1,\ldots,n)$.

Supposons, par exemple, que $x_{k-1} < x < x_k$ pour quelque k, $1 < k \leqslant n$ (les cas $x < x_1$ et $x_n < x$ étant semblables sont laissés comme **exercice).** En mettant $x'_i = x_i$ pour $1 \leqslant i < k$, $x'_k = x$ et $x'_{i+1} = x_i$ pour $k \leqslant i \leqslant n$ (*) démontre que la formule

$$(**) \qquad v_k \approx \tau(v_1,\ldots,v_{k-1},v_{k+1},\ldots,v_n)$$

appartient à $\mathrm{Form}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X})$. Alors elle est satisfaite par *toute* suite **croissante** dans $\mathfrak{X}$ de longueur n+1.

Ceci implique que $\overline{\overline{\mathfrak{X}}} \leqslant n+1$, contredisant l'hypothèse que $\mathfrak{X}$ est **infini.** En effet, supposons que $\mathfrak{X} \geqslant n+2$; alors $\mathfrak{X}$ contient une suite **croissante**

$z_1 < \dots < z_{n+2}$; en appliquant (**) successivement aux suites $z_1,\dots,z_{k-1},z_k,z_{k+2},\dots,z_{n+2}$ et $z_1,\dots,z_{k-1},z_{k+1},z_{k+2},\dots,z_{n+2}$, on obtient : $z_k = \tau^{\mathcal{A}}[z_1,\dots,z_{k-1},z_{k+2},\dots,z_{n+2}]$ et $z_{k+1} = \tau^{\mathcal{A}}[z_1,\dots,z_{k-1},z_{k+2},\dots,z_{n+2}]$ d'où $z_k = z_{k+1}$, contradiction.

THEOREME 6.7. - *Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ des structures de la même signature engendrées par des ensembles d'indiscernables $\mathfrak{X}$, $\mathcal{Y}$, respectivement. Si l'un de $\mathfrak{X}$, $\mathcal{Y}$ est infini, alors*

$$\mathfrak{X} \simeq_{\lambda}^{p,e} \mathcal{Y} \Rightarrow \mathcal{A} \simeq_{\lambda}^{p,e} \mathcal{B}.$$

DEMONSTRATION. - Si l'un de $\mathfrak{X}, \mathcal{Y}$ est infini,l'autre l'est aussi, car $\mathfrak{X} \simeq_{\lambda}^{p,e} \mathcal{Y} \Rightarrow \mathfrak{X} \simeq_{\lambda}^{p} \mathcal{Y} \Rightarrow \mathfrak{X} \equiv_{\infty\lambda} \mathcal{Y}$ et l'on peut exprimer la propriété d'être infini par un énoncé de $L_{\infty\lambda}$. Donc, comme la relation $\simeq_{\lambda}^{p,e}$ est symétrique, on peut supposer $\mathfrak{X}$ infini.

Si $\mathbb{I} : \mathfrak{X} \simeq_{\lambda}^{p,e} \mathcal{Y}$, par la preuve du théorème 6.2 il suffit de voir que $\mathbb{I}^* = \{f^* \mid f \in \mathbb{I}\}$ a la propriété de λ-extension, où f^* est l'application construite à partir de f au moyen de la recette du lemme 6.6.

Soit $\mathbb{J}^* \subseteq \mathbb{I}^*$ une $\subseteq$-chaine de cardinalité $< \lambda$; soit $\mathbb{J} = \{f \in \mathbb{I} \mid f^* \in \mathbb{J}^*\}$. Evidemment $\mathbb{J} \in \mathbb{I}$ et $\overline{\overline{\mathbb{J}}} < \lambda$; on démontrera que $\mathbb{J}$ est aussi une $\subseteq$-chaine. En effet, soient $f,g \in \mathbb{J}$; alors f^* , $g^* \in \mathbb{J}^*$ d'où $f^* \subseteq g^*$ ou $g^* \subseteq f^*$; supposons par exemple, $f^* \subseteq g^*$; de 6.6 (b), on a

$\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(f^*) \cap |\mathfrak{X}| \subseteq \mathrm{Dom}(g^*) \cap |\mathfrak{X}| = \mathrm{Dom}(g)$, et de 6.6 (a) il suit que $f(x) = f^*(x) = g^*(x) = g(x)$ pour $x \in \mathrm{Dom}(f)$; alors $f \subseteq g$.

En vertu de $\mathfrak{X} \simeq_{\lambda}^{p,e} \mathcal{Y}$ il existe une application $h \in \mathbb{I}$ qui étend toute $f \in \mathbb{J}$; donc $h^* \in \mathbb{I}^*$ étend tout membre de $\mathbb{J}^*$.

REMARQUE. - Les arguments utilisés dans 6.6 et 6.7 prouvent aussi le théorème 4.5 (c) et (d) ; on laisse cette démonstration comme exercice.

NOTE HISTORIQUE. - L'application de la technique du va-et-vient aux structures engendrées par des indiscernables qu'on vient de présenter et ses conséquences (sauf 6.5 (4)) sont dus à l'auteur et ont été publiés (sauf 6.7) dans Dickmann [3] , p. 393-397. Le résultat 6.5 (4) est du à Chang [1] , qui donne une démonstration syntaxique différente de celle présentée ici et plus complexe qu'elle. Un argument semblable à celui du **Lemme 6.6 (b)** est utilisé dans Morley [10].

BIBLIOGRAPHIE. -

[1] CHANG C.C., Infinitary properties of models generated from **indiscernibles** dans *Logic, Methodology and Philosophy of Science III*, B. van **Rootselaar** and J.F. Staal, eds. (North-Holland, Amsterdam, 1968), p. 9-21.

[2] CHANG C.C., et KEISLER, H.J. *Model Theory* (North-Holland, **Amsterdam**, 1973), xii + 550 p.

[3] DICKMANN, M.A., *Large Infinitary Languages, Model Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1975), xv+464 p.

[4] ERDOS, P. GILLMAN, L. et HENRIKSEN M., An isomorphism theorem **for** real-closed fields, Ann. of Math. 61 (1955), p. 542-554.

[5] GILLMAN L. et JERISON M., *Rings of Continuous Functions* (Van **Nostrand** Reinhold, N.York, 1960), ix + 300 p.

[6] JACOBSON N. *Lectures in Abstract Algebra*, 3 vols. (Van Nostrand, **Princeton** 1951, 1953, 1964).

[7] KARTTUNEN M. Infinitary languages $N_{\infty\lambda}$ and generalized partial **isomor**phisms, manuscrit, Université d'Helsinki, 1976, 15 p.

[8] KEISLER H.J. *Model Theory for Infinitary Logic* (North-Holland, **Amsterdam**. 1971); x+ 208 p.

[9] KREISEL G. et KRIVINE J.L. *Eléments de Logique Mathématique :* ***Théorie*** *des modèles*, Monographies de la Soc. Math. de France 3 (Dunod, **Paris** 1967), viii+213 p.

[10] MORLEY M. Partitions and models, dans *Proceedings of the* ***Summer School*** *in Logic, Leeds, 1967*, M. Löb, ed., Lecture Notes in Mathematics **70** (Springer, Berlin, 1968), p. 109-158.