PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

RENÉ DUJOLS

Le théorème de Karp-Myhill comme corollaire du théorème des mariages Divers aspects de la « non-généralisation » du théorème de Karp-Myhill

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1977, tome 14, fascicule 2
, p. 29-39

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1977__14_2_29_0>

PUBLICATIONS DU
DEPARTEMENT DE
MATHEMATIQUES
LYON 1977 t. 14-2

LE THEOREME DE KARP-MYHILL COMME COROLLAIRE DU THEOREME DES MARIAGES
DIVERS ASPECTS DE LA "NON-GENERALISATION" DU THEOREME DE KARP-MYHILL

Par René DUJOLS

1. PRÉLIMINAIRES; - Les notations et définitions de récursivité (non définies ici) sont celles de l'ouvrage de H. Rogers cité en (4).
N représente l'ensemble des entiers naturels, n un entier naturel fixe $(n \geq 2)$. $\vec{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ désigne un n-uple de fonctions injectives. On pose $[n] = \{1,\ldots,n\}$ et $S = \bigcup_{i\in[n]} \alpha_i$. Dom (α_i), Im(α_i) désignent respectivement le domaine et l'image de α_i. Un isomorphisme partiel est une fonction (partielle) injective récursive de N dans N, un isomorphisme est une permutation récursive de N. $\vec{A} = (A_1,\ldots,A_n)$ désigne un recouvrement en parties disjointes de Dom(S), $\vec{B} = (B_1,\ldots,B_n)$ désigne un recouvrement en parties disjointes de Im(S).

DEFINITIONS. - On dira que $(\vec{A},\vec{B})$ est un couple de compatibilité pour $\vec{\alpha}$ si on a : $\forall i \in [n]$, $A_i = \alpha_i^{-1}(B_i)$.

- On dira qu'un n-uple $\vec{\alpha}$ d'isomorphismes partiels est uniformisable (respectivement fortement uniformisable) s'il existe une fonction injective α (respectivement un isomorphisme partiel α) vérifiant :

Pour tout couple de compatibilité $(\vec{A},\vec{B})$ pour $\vec{\alpha}$ on a :

$$\forall i \in [n] \quad A_i = \alpha^{-1}(B_i).$$

On pose $X-Y = \{x/x \in X \text{ et } x \notin y\}$.

2. INTRODUCTION . - Le théorème de l'appendice de l'ouvrage cité en (1) dû à C. Karp et J. Myhill, peut être réécrit sous la forme un peu plus générale suivante :

THEOREME 1. (Karp-Myhill). - *Tout couple d'isomorphismes partiels admettant un couple de compatibilité est uniformément fortement uniformisable.*

Le théorème des mariages auquel nous nous référons est le suivant :

THEOREME 2 (Théorème des mariages). - *Soit* $G \subset U \times V$ *un graphe vérifiant* $\mathrm{Dom}(G) = U$ *et, pour tout* $x \in U$ $G(x)$ *est fini. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) Il existe un injection $f : U \longrightarrow V$ *telle que* $f \subset G$.

(ii) Pour toute partie finie X *de* U $\mathrm{card}(X) \leqslant \mathrm{card}(G(X))$.

Une démonstration par le théorème de compacité de ce résultat est fournie en (5).

Dans une première partie nous montrons que l'existence de couples de compatibilité pour un n-uple de fonctions injectives est un cas particulier du théorème des mariages, il en suivra que le théorème de Karp-Myhill apparait comme un corollaire du théorème des mariages.

Dans une seconde partie nous dégageons trois aspects de la non-généralisation du théorème de Karp-Myhill au cas des n-uples avec $n \geqslant 3$. Cette seconde partie est l'objet des publications citées en (2) et en (3). Nous montrons notamment qu'il existe des n-uples (pour tout n 3) d'isomorphismes partiels uniformisables et non fortement uniformisables.

3. THÉORÈME DES MARIAGES ET THEORÈME DE KARP-MYHILL.

PROPOSITION 3. - *Soit* $\vec{\alpha}$ *un n-uple de fonctions injectives. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) Il existe une fonction injective f *telle que* $f \subset S$ *et* $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(S)$.

ii) Il existe une fonction injective g *telle que* $g \subset S$ *et* $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{dom}(S)$ *et* $\bigcap_{i \in [n]} \mathrm{Im}(\alpha_i) \subset \mathrm{Im}(g)$.

DEMONSTRATION. - Il suffit d'établir i)$\Longrightarrow$ii). Soit f une fonction injective vérifiant (i). Posons $R = \bigcap_{i \in [n]} \mathrm{Im}(\alpha_i)$.

et $R' = (\bigcap_{i \in [n]} \mathrm{Im}(\alpha_i)) - \mathrm{Im}(f)$

On peut supposer $R' \neq \emptyset$, sinon f répond à la question.

Pour tout $b \in R'$ on définit par récurrence la fonction $\hat{b}$ par

$$\hat{b}(o) = \alpha_1^{-1}(b)$$

$$\hat{b}(k+1) = \begin{cases} \alpha_1^{-1}(f(\hat{b}(k))) & \text{si } f(\hat{b}(k)) \in R \\ \text{non défini sinon.} \end{cases}$$

Soit g définie par

$$g(x) = \begin{cases} \alpha_1(x) & \text{Si } \exists b \in R', \exists k \in N,\ x = \hat{b}(k) \\ f(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

g est une fonction répondant à la question.

COROLLAIRE 4. critère de compatibilité . - *Soit* $\vec{\alpha}$ *un n-uple de fonctions injectives les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) $\vec{\alpha}$ *admet un couple de compatibilité.*

ii) Pour toute partie finie X *de* Dom(S) card(X) $\leq$ card(S(X)).

DEMONSTRATION. - Il suffit d'établir ii)$\Rightarrow$ i). De la proposition (3) et du théorème des mariages il résulte l'existence d'une fonction f vérifiant $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(S)$ et $f \subset S$ et $\bigcap_{i \in [n]} \mathrm{Im}(\alpha_i) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Soit, pour $i \in [n]$, $A_i = \{x / f(x) = \alpha_i(x) \text{ et } \forall j (o < j < i \Rightarrow x \notin A_j)\}$

Posons $i_o(x) = \mathrm{Min}\,\{i \in [n] \ / \ x \notin \mathrm{Im}(\alpha_i)\}$.

$$B'_i = \{x \in \mathrm{Im}(S)-\mathrm{Im}(f) \ / \ i_o(x) = i\}$$

$$B_i = f(A_i) \cup B'_i.$$

$((A_1,\ldots,A_n),(B_1,\ldots,B_n))$ est un couple de compatibilité pour $\vec{\alpha}$.

COROLLAIRE 5. (Théorème de Karp-Myhill). - *Tout couple d'isomorphismes partiels admettant un couple de compatibilité est uniformément fortement uniformisable.*

DEMONSTRATION. - Soit (α_1,α_2) un couple d'isomorphismes partiels **admettant** un couple de compatibilité.

Pour tout $x \in \mathrm{Dom}(S)$ soit $L(x)$ l'ensemble des x' tels qu'il **existe une** suite finie $x_o,\dots,x_p$, sans répétition, vérifiant

i) $x = x_o$ et $x' = x_p$

ii) $\forall_k < p \ \exists i, j \in [2] \ \ \alpha_i(x_k) = \alpha_j(x_{k+1})$.

Les ensembles $L(x)$ sont des classes d'équivalence.

$L(x)$ et $S'L(x))$ sont des ensembles r.e.

Pour tout couple $(\vec{A},\vec{B})$ de compatibilité pour $\vec{\alpha}$ on a :

$\forall i \in [2] \quad x \in A_i \Leftrightarrow L(x) \subset A_i$

et $\forall_i \in [2] \ x \in A_i \Leftrightarrow S(L(x)) \subset B_i \qquad (1).$

Pour établir ceci, il suffit de remarquer que l'on a : $\forall_i \in [2], x \in A_i \Leftrightarrow S(x) \subset B_i$.

Soit $x_o,\dots,x_q,\dots$ une énumération effective sans répétition de Dom(S).

On définit par récurrence :

$\alpha(x_o)$ premier élément d'un énumération effective de $S(L(x_o))$

$\alpha(x_{q+1})$: premier élément d'une énumération effective de

$S(L(x_{q+1})) - \{\alpha(x_o),\dots,\alpha(x_q)\}$.

Montrons que, pour tout q, $\alpha(x_q)$ converge.

Soit $m < q$. Si $x_m \notin L(x_q)$ on a $\alpha(x_m) \notin S(L(x_q))$.

Soit $X = \{x_m / m < q \text{ et } x_m \in L(x_q)\}$.

$X \cup \{x_q\} \subset L(x_q)$. En raison du critère de compatibilité on a

$\mathrm{card}(S(L(x_q)) \geqslant \mathrm{card}(X \cup \{x_q\}) > \mathrm{card}(\alpha(X))$.

Donc $S(L(x_q)) - \{\alpha(x_o),\dots,\alpha(x_{q-1})\} \neq \emptyset$ et $\alpha(x_q)$ converge.

α est injective par construction, α est récursive car Dom(S) et les $S(L(x))$ sont r.e. α est obtenu uniformément à partir de $\vec{\alpha}$. α uniformise $\vec{\alpha}$ en **raison** de (1).

4. DIVERS ASPECTS DE LA "NON-GÉNÉRALISATION" DU THÉORÈME DE KARP-MYHILL.

Soit f un isomorphisme partiel, on rappelle

$A \simeq B$ via $f \Leftrightarrow f(A) = B$.

et $A \cong B$ si et seulement si $A \simeq B$ via au moins un isomorphisme.

PROPOSITION 6. - *Il existe des isomorphismes* f_1, f_2 *et des ensembles* A_1, A_2, B_1, B_2 *vérifiant*

1°) $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$ et $A_1 \cup A_2 = N$

2°) $\forall i \in [2]$, $A_i \cong B_i$ via f_i.

3°) Pour aucun isomorphisme partiel h *on a* $\forall i \in [2]$, $A_i \simeq B_i$ via h.

DEMONSTRATION. - Soit f_1, f_2 des isomorphismes vérifiant $f_1(2N) = 4N+1$, $f_1(4N+1) = 4N+3$, $f_2(2N) = 4N$ et $f_2(4N+3) = 4N+2$. Soit $h_1, h_2, \ldots$ une énumération de tous les isomorphismes h partiels vérifiant $h(2N) \cap (4N)$ est infini.

On construit par récurrence une suite infinie $a_0, a_1, \ldots,$

Etape 0 : $a_0 = 0$.

Soit $U_n = h_n^{-1}(h_n(2N) \cap 4N)$.

Etape n+1 : $a_{n+1} = \mu x [x \in U_{n+1} - \{0, \ldots, a_n+2\}]$.

Soit $A_1 = \{a_0, \ldots, a_n, \ldots\} \cup (4N+3)$ $A_2 = N - A_1$.

$B_1 = f_1(A_1)$ $B_2 = f_2(A_2)$.

On a $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ et $A_1 \cup A_2 = N$ et $A_2 \cap 2N$ est infini.

$B_1 \subset (4N+1) \cup (4N+3)$ et $B_2 \subset 4N \cup (4N+2)$ - donc $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Supposons que h est un isomorphisme tel que $\forall i \in [2], h(A_i) = B_i$.

On a $f_2(A_2 \cap 2N) \subset h(2N) \cap (4N)$, donc il existe $k \in N$ tel que $h_k = h$. Par suite $h(a_k) = h_k(a_k)$ et $h(a_k) \in 4N$ ce qui contredit $h(A_1) = B_1$. Ce qui achève la démonstration de la proposition.

COROLLAIRE. 7. - *Il existe* $\aleph_0$ *couples d'isomorphismes* (f_1, f_2) *tels que pour chaque couple* (f_1, f_2) *il existe* $2^{\aleph_0}$ *couples d'ensembles* (A_1, A_2) *et* (B_1, B_2) *et satisfaisant aux conditions i), ii) et ii) de la proposition 6.*

PROPOSITION 8. - *Il existe des partitions* $(A_1,A_2,A_3),(B_1,B_2,B_3)$ **de N** *telles que :*

i) $\forall i \in [3],\ A_i \cong B_i$.

ii) Pour aucun isomorphismes h *on a* $\forall i \in [3], A_i \cong B_i$ via h.

DEMONSTRATION. - Soit f_1,f_2,f_3 les isomorphismes définis par

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \notin 4N+3 \\ x-3 & \text{si } x \in 4N+3. \end{cases}$$

$$f_2(x) = x.$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \notin 4N \\ x+3 & \text{si } x \in 4N. \end{cases}$$ f_3 est la réciproque de f_1.

On dira : $f \neq h$ un peu partout si $\{x/f(x) \neq h(x)\}$ est infini.

Soit $k_o,k_1,\ldots$ une énumération de tous les isomorphismes k **vérifiant** $k \neq f_1$ un peu partout.

Soit $l_o,l_1,\ldots$ une énumération de tous les isomorphismes l **vérifiant** $l \neq f_3$ un peu partout.

Par récurrence nous construisons trois chaînes croissantes d'**ensembles** finis $X_o \subset X_1 \ldots,\ Y_o \subset Y_1 \ldots,\ Z_o \subset Z_1 \ldots$ telles que pour tout n

$$U_n = X_n \cup Y_n \cup Z_n = f_1(X_n) \cup f_2(Y_n) \cup f_3(Z_n).$$

Etape 0 : $X_o = Y_o += Z_o = \emptyset$.

Etape 2s+1 : Il existe $a \notin U_{2s}$ tel que $k_s(a) \neq f_1(a)$ et $k_5(a) \notin Z_{2s}$

On pose $X_{2s+1} = X_{2s} \cup \{a\}$

$$Z_{2s+1} = \begin{cases} Z_{2s} \cup \{a+1\} & \text{si } a \notin 4N+3. \\ Z_{2s} \cup \{a-3\} & \text{si } a \in 4N+3. \end{cases}$$ On a $Z_{2s+1} = f_1(X_{2s+1})$

Soit $u = \text{Max}.\{4i+3/4_i \leqslant a \leqslant 4_{i+3}$ ou $4_i \leqslant k_s(a) \leqslant 4_{i+3}\}$

$$Y_{2s+1} = \{o,\ldots,u\} - (X_{2s+1} \cup Z_{2s+1}).$$ On a $k\ (a) \in X_{2s+1} \cup Y_{2s+1}$.

Etape 2s+2. Il existe $c \notin U_{2s+1}$ tel que $l_s(c) \neq f_3(c)$.et $l_z(c) \notin X_{2s+1}$

On pose $Z_{2s+2} = Z_{2s+1} \cup \{c\}$

$$X_{2s+2} = \begin{cases} X_{2s+1} \cup \{c-1\} & \text{si } c \notin 4N \\ X_{2s+1} \cup \{c+3\} & \text{si } c \in 4N \end{cases}$$. On a $X_{2s+2} = f_3(Z_{2s+2})$.

Soit $v = \mathrm{Max}\{4i+3 / 4i \leqslant c \leqslant 4i+3 \text{ ou } 4i \leqslant l_s(c) \leqslant 4i+3\}$

$Y_{2s+2} = \{o, \ldots, v\} - (X_{2s+2} \cup Z_{2s+2})$. On a $l_s(c) \in Y_{2s+2} \cup Z_{2s+2}$.

Soit $A_i = \bigcup_{n \in N} X_n$, $A_2 = \bigcup_{n \in N} Y_n$, $A_3 = \bigcup_{n \in N} Z_n$.

$B_1 = f_1(A_1)$, $B_2 = f_2(A_2)$, $B_3 = f_3(A_3)$

(A_1, A_2, A_3) est une partition de N et U_n est un segment initial de N.

Par récurrence sur n on vérifie :

i) les ensembles $f_1(X_n)$, $f_2(Y_n)$, $f_3(Z_n)$ sont disjoints deux à deux.

ii) $U_n = f_1(X_n) \cup f_2(Y_n) \cup f_3(Z_n)$.

Par suite (B_1, B_2, B_3) est une partition de N.

Supposons que h est un isomorphisme vérifiant

$\forall i \in [3] /\ h(A_i) = B_i$.

1°) Si $h \neq f_1$ un peu partout, $h = k_s$ pour un entier s. A l'étape 2s+1, la récurrence introduit un élément a vérifiant :

$a \in A_1$ et $k_s(a) \notin B_1$. Ce qui contredit $h(A_1) = B_1$.

2°) Sinon $h \neq f_3$ un peu partout, car $f_1 \neq f_3$ un peut partout. Alors $h = l_s$ pour un $s \in N$. A l'étape 2s+2, la récurrence introduit un élément c vérifiant :

$c \in A_3$ et $l_s(c) \notin B_3$. Ce qui contredit $h(A_3) = B_3$.

Ce qui achève la démonstration de la proposition.

La proposition précédente se généralise clairement au cas des n-uples avec $n \geqslant 3$.

COROLLAIRE 9. - *Pour tout* $n \geq 3$, *il existe* $\aleph_0$ *n-uples d'isomorphismes* $(f_1,\dots,f_n)$ *tels que pour chaque n-uple* $(f_1,\dots,f_n)$ *il existe* $2^{\aleph_0}$ *partitions* $(A_1,\dots,A_n)$ *et* $(B_1,\dots,B_n)$ *de* N *vérifiant :*

i) $\forall i \in [n]$ $A_i \cong B_i$ via f_i.

ii) Pour aucun isomorphisme h *on a :* $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ $A_i \cong B_i$ **via h.**

THEOREME 10. - *Pour tout* $n \geq 3$ *il existe un n-uple d'isomorphismes partiels uniformisable et non fortement uniformisable.*

DEMONSTRATION. - Nous avons ici une démonstration pour n = 3 qui se **généralise** clairement au cas $n \geq 3$.

Soit $\varphi_0,\dots,\varphi_x, \dots$ une énumération de Gödel des fonctions **partielles** récursives. Considérons les ensembles r e définis par :

$U_i = \{4x/\varphi_x(x+1)$ converge ou $\varphi_x(o) = i-1\}$ (avec $i \in [3]$).

Posons $U = \{4x/\varphi_x(X+1)$ converge$\}$ et $4N = \{4x/x \in N\}$.

On a i) $U_1 \cup U_2 \cup U_3 = 4N$

ii) $U_1 \cap U_2 = U_2 \cap U_3 = U_3 \cap U_1 = U_1 \cap U_2 \cap U_3 = U$.

iii) $U_1-(U_2 \cup U_3) = U_1-U$, $U_2-(U_3 \cup U_1) = U_2-U$, $U_3-(U_1 \cup U_2) = U_3-U$.

Considérons l'ensemble créatif $K = \{x/\varphi_x(x)$ converge$\}$.

Pour $i \in [3]$ soit f_i la fonction récursive définie par

$$\varphi_{f_i(x)}(o) = \begin{cases} i-1 & \text{Si } \varphi_x(x) \text{ ne converge pas en x étapes} \\ \\ \text{diverge sinon.} \end{cases}$$

$$\varphi_{f_i(x)}(y+1) = \begin{cases} \varphi_x(x) & \text{si } x \in K \\ \\ \text{diverge sinon.} \end{cases}$$

On a $K \leqslant_m N-(U_i-U)$ via $4f_i$ (1).

En effet, si $x \in K$, $\varphi_{f_i(x)}(f_i(x)+1) = \varphi_x(x)$ et par suite

$\varphi_{f_i(x)}(f_i(x)+1)$ converge ou $\varphi_{f_i(x)}(o) \neq (-1$ et $4f_i(x) \notin U_i-U$.

Si $x \notin K$, $\varphi_{f_i(x)}(o) = i-1$ et $\varphi_{f_i(x)}(f_i(x)+1)$ diverge donc $4f_i(x) \in U_i-U$.

De (1) il résulte les ensembles U_1-U sont productifs, donc non r.e. .

Pour $i \in [3]$ on définit :

$\alpha_i(4x) = 4x+i$ si $4x \in U_i$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_i(4x+i) = 4x \\ \alpha_1(4x+3) = 4x+3 \\ \alpha_2(4x+1) = 4x+1 \\ \alpha_3(4x+2) = 4x+2 \end{array}\right\} \text{ si } 4x \in U$$

$\alpha(x)$ diverge si l'on n'est pas dans un des cas ci-dessus.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont des isomorphismes partiels.

Soit $A'_1 = U_1 \cup (U+1) \cup (U+3)$, $A'_2 = U_2-U$, $A'_3 = (U_3-U) \cup (U+2)$ où
$U+i = \{x+i / x \in U\}$.
$B'_i = \alpha_i(A'_i)$.

On a : (A'_1, A'_2, A'_3) est un recouvrement en parties disjointes de Dom(S).

(B'_1, B'_2, B'_3) est un recouvrement en parties disjointes de Im(S).

De plus $A'_i = \alpha_i^{-1}(B'_i)$.

Les recouvrements en parties disjointes (A_1, A_2, A_3) de Dom(S) et (B_1, B_2, B_3) de Im(S) sont caractérisés par

(1) $\forall i \in [3]$ $U_i-U \subset A_i$ et $\{4x+i / 4x \in U_i-U\} \subset B_i$

(2) Pour tout $x \in U$ et pour tout $i \in [3]$ les conditions suivantes sont équivalentes

$.4x \in A_i$

$.4x \in B_i$

$.4x+i \in A_i$

$.4x+i \in B_i$

$. \forall_j \in [3] - \{i\}, 4x+j \notin A_j$

$. \forall_j \in [3] - \{i\}, 4x+j \notin B_j$

(1) résulte de ce que pour tout $i \in [3]$ $U_i - U \subset Dom(\alpha_i)$ et pour tout $j \in [3] - \{i\}$ $(U_i - U) \cap Dom(\alpha_j) = \emptyset$.

(2) résulte de la construction de α_1, α_2, α_3 pour $4x \in U$.

Soit α' la fonction définie par

$\forall k \in \{0,1,2,3\}, \alpha'(4x+k) = 4x+k$ si $4x \in U$

et $\alpha'(4x) = 4x+i$ si $\exists i \in [3]$ $4x \in U_i - U$

α' est une fonction injective vérifiant :

i) $\alpha'(U_i - U) = \alpha_i(U_i - U)$.

ii) $\alpha'(U+k) = U+k$ pour $k \in \{0,1,2,3\}$.

De (1) et (2) il résulte que α' est une fonction qui uniformise $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

On a donc $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est un n-uple uniformisable.

En raison de (1) et (2) les fonctions injectives α uniformisant $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sont les fonctions injectives vérifiant :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \forall i \in [3], \alpha(U_i - U) = \alpha_i(U_i - U) \\ \text{ii) } \forall k \in \{0,1,2,3\}, \alpha(4x+k) = 4x+k \text{ si } 4x \in U \end{array} \right.$$

On a $4x \in U_1 - U \Rightarrow \alpha(4x) \in 4N+1$

$4x \in U \Rightarrow \alpha(4x) \in 4N$.

D'où $4x \in U_1 - U \Leftrightarrow \alpha(4x) \in 4N+1$.

Par suite si α est une fonction récursive, $U_1 - U$ est un ensemble r.e.

Ce qui contredit la construction de $U_1 - U$.

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ n'est donc pas fortement uniformisable.

COROLLAIRE 11. - *Pour tout* $n \geq 3$, *il y a* $\aleph_0$ *n-uples d'isomorphismes partiels uniformisables et non fortement uniformisables admettant chacun* $2^{\aleph_0}$ *fonctions d'uniformisation.*

BIBLIOGRAPHIE. -

(1) J.C.E. DEKKER et J. MYHILL, *Recursive Equivalence types*. University of CAlifornia, Publications in Mathematics, n.s., 3, 1960, p. 76-213.

(2) R. DUJOLS, *Le résultat de Karp-Myhill est en un sens le meilleur possible,* Contribution libre au Séminaire international et Congrès international de Logique. Clermont-Ferrand 1975. N° 60 **F.13** aux Annales Scientifiques de l'Université de Clermond-Ferrand. 1976.

(3) R. DUJOLS, *Quelques remarques sur le théorème de Karp-Myhill,* Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 1976. 282.

(4) H. ROGERS, Jr., *Theory of Recursive functions and effective computabi lity,* Mc Graw-Hill Book Company, 1967.

(5) J.L. BELL et A.B. SLOMSON, *Models and ultra products,* North Holland Publishing Company p. 47-48, 1969.