ANDRÉ LICHNEROWICZ

Dérivations et déformations de certaines algèbres de Lie infinies classiques

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1976, tome 13, fascicule 4 , p. 1-26

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1976__13_4_1_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1976 t. 13-4

DERIVATIONS ET DEFORMATIONS DE CERTAINES ALGEBRES DE LIE INFINIES CLASSIQUES

par André LICHNEROWICZ

Elie Cartan a étudié localement, dès 1908, ce qu'il nommait dans le langage du temps les "groupes infinis transitifs simples". Récemment Gelfand et Fuks, Arnold, Losik ont étudié certaines cohomologies des algèbres de Lie correspondantes. Avez et moi-même, Takens ont étudié leurs structures, leurs dérivations, leurs idéaux et j'ai mis en évidence certaines propriétés de leurs déformations en collaboration avec Flato et Sternheimer (1974).

Les quatre algèbres de Lie infinies classiques sont les suivantes :

1) L'algèbre de Lie des champs de vecteurs d'une variété différentiable W.
2) L'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure unimodulaire (X,η) où η est une forme élément de volume.
3) L'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure symplectique (W,F).
4) L'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure de contact $\omega = 0$.

D'une manière générale, une *dérivation* d'une algèbre de Lie L est un endomorphisme $D : L \to L$ tel que, pour tout $X, Y \in L$,

$$D[X,Y] = [DX,Y] + [X,DY] \,, \tag{0-1}$$

On doit noter que, pour les algèbres de Lie infinies, on ne fait aucune hypothèse de continuité ou de différentiabilité sur D. En vertu de l'identité de Jacobi, le crochet pour un élément Z de L définit une dérivation de L, dite *dérivation intérieure*.

En ce qui concerne les dérivations des quatre algèbres de Lie infinies classiques, les résultats obtenus sont les suivants : dans les cas 1 (Takens 1973) et 4 (Lichnérowicz 1972), les dérivations sont toutes intérieures. Dans les cas 2 (Lichnérowicz 1973) et 3 (Avez et Lichnérowicz 1972), les dérivations sont données par les crochets par les champs de vecteurs qui reproduisent η (resp. F) à un facteur constant près. près. Toutes ces dérivations sont donc données par des opérateurs différentiels du premier ordre.

Dérivations et déformations font intervenir une cohomologie à valeurs dans l'algèbre de Lie, correspondant à la représentation adjointe, que j'appelle conventionnellement cohomologie différentiable de Chevalley.

J'étudierai ici principalement le cas 1 des champs de vecteurs et le cas 3 des algèbres de Lie attachées à une variété symplectique. Ce sont les cas les plus intéressants, du double point de vue de la goémétrie et de la physique mathématique, et ils se révèlent suffisamment proches et suffisamment différents.

I - SUR LA COHOMOLOGIE DE CHEVALLEY DE L'ALGEBRE DE LIE - DES CHAMPS DE VECTEURS.

1 - COHOMOLOGIE DE CHEVALLEY-EILENBERG.

Soit une variété différentiable connexe, paracompacte, de dimension m et classe C^∞. Tous les éléments introduits sont supposés de classe C^∞. Nous notons $L(W) = L$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de la variété W. Nous introduisons éventuellement sur W une métrique riemannienne auxiliaire $\underline{g}$ et désignons par ∇ l'opérateur de dérivation covariante pour la connexion riemannienne définie par $\underline{g}$.

Soit $\{x^i\}$ (i, tout indice latin $= 1,\ldots,m$) une carte locale de W de domaine U ; on désigne par $L(U)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur U.

a) Etant donnée une algèbre de Lie L, la cohomologie de Chevalley est définie de la manière suivante : les p-cochaînes $C_{(p)}$ sur L sont les applications p-linéaires alternées de L^p dans L, les 0-cochaînes s'identifiant aux éléments de L. L'opérateur cobord ∂ sur ces p-cochaînes est l'opérateur usuel correspondant à la représentation adjointe qui peut s'écrire :

$$(1-1)\quad \partial C_{(p)}(X_o,\ldots,X_p) = \frac{1}{p!}\,\varepsilon^{\alpha_o\ldots\alpha_p}_{o\ldots p}\,[X_{\alpha_o}, C_{(p)}(X_{\alpha_1},\ldots,X_{\alpha_p})]$$

$$- \frac{1}{2(p-1)!}\,\varepsilon^{\alpha_o\ldots\alpha_p}_{o\ldots p}\,C_{(p)}([X_{\alpha_o},X_{\alpha_1}], X_{\alpha_2},\ldots,X_{\alpha_p}).$$

où ε est l'indicateur antisymétrique de Kronecker et où $X_\alpha \in L$. On voit immédiatement que les 1-cocycles ne sont autres que les *dérivations* de L et les 1-cocycles exacts les *dérivations intérieures*.

b) Une p-cochaîne $C_{(p)}$ de l'algèbre de Lie L des champs de vecteurs est dite *locale* si pour tout élément $X_1 \in L$ tel que $X_1|_U = 0$ pour un domaine U, on a $C_{(p)}(X_1,\ldots,X_p)|_U = 0$. Si $C_{(p)}$ est locale, $\partial C_{(p)}$ est aussi locale.

Une p-cochaîne $C_{(p)}$ de L est dite d-*différentiable* ($d \geqslant 1$) si elle est locale et si sa restriction à tout domaine U est une p-cochaîne d-différentiable de L(U) en un sens évident. Une telle p-cochaîne est définie à partir d'opérateurs multi-différentiels d'ordre maximum d sur L. Ces opérateurs peuvent être exprimés au moyen de ∇.

Un calcul élémentaire direct montre que, si $C^{(d)}_{(p)}$ est une p-cochaîne d-différentiable, son cobord $\partial C^{(d)}_{(p)}$ est aussi d-différentiable. Nous notons $H^p_{(d)}(L)$ le p^e- espace de cohomologie d-différentiable de Chevalley de l'algèbre de Lie L, quotient de l'espace des p-cocycles d-différentiables pour l'espace des cobords de (p-1)-cochaînes d-différentiables.

Nous nous proposons dans cette section d'une part d'évaluer $H^p_{(1)}(L)$ pour tout p et $H^2_{(d)}(L)$ pour tout d - ces derniers espaces intervenant de manière essentielle dans la détermination des déformations différentiables de l'algèbre de Lie L- d'autre part d'étudier les 1-cochaînes à cobord-différentiable (1975).

2 - COHOMOLOGIE 1-DIFFERENTIABLE DE L'ALGEBRE DE LIE L.

a) Une métrique auxilaire étant donnée, une p-cochaine 1-différentiable $C^{(1)}_{(p)} = C_{(p)}$ de L peut s'écrire :

$$C_{(p)} = \sum_{q=o}^{p} A_{(p,q)} \tag{2-1}$$

où la p-cochaîne 1-différentiable $A_{(p,q)}$, dite de type (q,p-q) par rapport aux dériviées premières des vecteurs et aux vecteurs eux-mêmes, est donnée sur U par :

$$A^{i}_{(p,q)}(X_1,\ldots,X_p)\Big|_{U} = \frac{1}{p!}\,\varepsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{1\ \ldots\ p}\,A^{ir_1\ldots r_q}_{s_1\ldots s_q k_{q+1}\ldots k_p}\,\nabla_{r_1}X^{s_1}_{\alpha_1}\ldots\nabla_{r_q}X^{s_q}_{\alpha_q}X^{k_{q+1}}_{\alpha_{q+1}}\ldots X^{k_p}_{\alpha_p} \tag{2-2}$$

Les coefficients A sont supposés antisymétriques par rapport aux couples $(r_1,s_1),\ldots,(r_q,s_q)$, antisymétriques par rapport aux indices $k_{q+1},\ldots,k_p$. Ils définissent sur W un tenseur. Une telle p-cochaîne $A_{(p,q)}$ est dite pure ; ∇ étant donnée, la décomposition (2-1) de $C_{(p)}$ en somme de p-cochaînes pures est unique.

Nous notons $C_{(p,q)}$ une p-cochaîne 1-différentiable de *degré maximum* q $(q \leq p)$ en les dérivées premières des vecteurs. On a :

$$C_{(p,q)} = \sum_{h=o}^{q} A_{(p,h)} \tag{2-3}$$

où $A_{(p,h)}$ est une p-cochaîne 1-différentiable pure de type (h,p-h).

b) A partir de la définition de ∂ et de l'identité de Ricci, on établit relativement aux types

LEMME 1. - *L'opérateur ∂ admet une décomposition en somme de trois opérateurs*

$$\partial = \partial' + \Lambda + M \tag{2.4}$$

où les opérateurs ∂', Λ, M sont respectivement de type (1,0), (0,1), (-1,2) ; *pour raison de type , ∂' est aussi un opérateur de cohomologie* ($(\partial'^2 = 0)$.

Soit $A_{(p,q)}$ une p-cochaîne pure vérifiant $\partial' A_{(p,q)} = 0$. En introduisant le tenseur $B_{(p-1,q-1)}$ défini par :

$$B^{r_1;..r_q}_{s_2...s_q k_{q+1}...k_p} = A^{a\, r_1...r_q}_{a\, s_2...s_q k_{q+1}...k_p}$$

on démontre que :

$$A_{(p,q)} = -\frac{q}{mp}\ \partial'\ B_{(p-1,q-1)}.$$

En particulier pour $q = 0$, $\partial' A_{(p,0)} = 0$ implique $A_{(p,0)} = 0$. On a

LEMME 2. - *La cohomologie définie par ∂' sur les cochaînes 1-différentiables de L est triviale.*

De ces deux lemmes on déduit :

LEMME 3. - *Soit* $C_{(p,q)}$ *un* p-*cocycle* ($\partial C_{(p,q)} = 0$) *1-différentiable de de degré maximum* q *en les dérivées premières. Il existe une* (p-1)-*cochaîne 1-différentiable pure* $B_{(p-1,q-1)}$ *de type* (q-1;p-q) *telle que*

$$C_{(p,q)} = \partial B_{(p-1,q-1)} + C_{(p,q-1)}, \tag{2-5}$$

où $C_{(p,q-1)}$ *est un* p-*cocycle de degré maximum* (q-1).

Par récurrence sur q, il vient

THEOREME . - *La cohomologie 1-différentiable de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs d'une variété différentiable est toujours triviale :* $H^p_{(1)}(L) = 0$ *pour tout* p.

3 - LES 2 COCYCLES d-DIFFERENTIABLES.

Etudions les 2-cocycles d-différentiables sur L. D'après ce qui précède on peut prendre $d \geqslant 2$. On établit d'abord :

LEMME. - *Soit* $C^{(d)}$ *un 2-cocycle* d-*différentiable, où* d *est* $\geqslant 2$. *On a :*

$$C^{(d)} = \Gamma^{(d)} + C^{(d-1)}$$

où $C^{(d-1)}$ *est une 2-cochaîne* (d-1)-*différentiable et* $\Gamma^{(d)}$ *une 2-cochaîne* d-*différentiable ne comportant que des opérateurs bidifférentiels d'ordre maximum* (d,1).

On montre alors qu'on peut construire une 1-cochaîne $T^{(d)}$ d-différentiable telle que

$$C^{(d)} - \partial T^{(d)} = \hat{\Gamma}^{(d)} + C^{(d-1)}$$

où $\hat{\Gamma}^{(d)}$ ne comporte que des opérateurs bidifférentiels d'ordre (d,0). Le second membre étant un cocycle on en déduit $\hat{\Gamma}^{(d)} = 0$ et l'on a $C^{(d)} = \partial T^{(d)} + C^{(d-1)}$. Les 2-cocycles 1-différentiables étant tous exacts, on en déduit par récurrence sur d que les 2-cocycles d-différentiables sont tous exacts.

THEOREME . - *Pour tout* $d \geq 1$, *on a* $H^2_{(d)}(L) = 0$.

Les méthodes employées ici sont directes et élémentaires, maix les résultats obtenus sont suffisants pour le but poursuivi qui est l'étude des déformations différentiables de l'algèbre de Lie L.

A partir de considérations cohomologiques étendant celle de Losik et de Gelfand-Fuchs, Shiga a établi notamment, dans un remarquable travail, que le cohomologie adjointe locale de L est isomorphe à sa cohomologie d-différentiable pour $d > 1$, cette cohomologie étant stable relativement à d. Il en résulte que $H^p_{(d)}(L) = 0$ pour tout d (et tout p) et que les espaces de cohomologie locale $H^p(L)$ sont nuls. Le théorème de Peetre (ou son extension) joue ici un rôle important.

4 - 1-COCHAINES DE L A COBORD d-DIFFERENTIABLE.

a) Soit U le domaine d'une carte $\{x^k\}$ de W. Donnons-nous un endomorphisme T_U de L(U) tel que ∂T_U *soit une 2-cochaine d-différentiable* ($d \geq 1$) ; pour $X, Y \in L(U)$, on a sur U :

(4-1) $$T_U[X,Y] - [T_U X,Y] - [X,T_U Y] = C^{(d)}(X,Y)$$

où $C^{(d)}$ est une 2-cochaîne d-différentiable.

On établit

PROPOSITION 1. - *Si* T_U *est un endomorphisme de* L(U) *tel que* ∂T_U *soit une 2-cochaîne* d-*différentiable de* L(U), *on a* $T_U = P_U$, *où* P_U *est un opérateur différentiel d'ordre* d *sur* L(U).

La démonstration de cette proposition est trop technique pour être esquissée ici. Disons eseulement qu'on construit un opérateur différentiel P_U d'ordre d, unique et invariant par translation de la carte, tel que $T^{(d)}_{\underline{U}} = T_U - P_U$ annule tous les vecteurs dont les composantes sont des polynômes de degré d en les coordonnées de la carte. On établit, à partir de (4-1), d'une part que $T^{(d)}_U$ annule tous les vecteurs dont les composantes sont des polynômes de degré (d+1), d'autre part que si $X \in L(U)$ a un (d+1)-jet nul en un point x_o de U, $T^{(d)}_U(X)$ est nul en x_o. La proposition en résulte.

b) On établit immédiatement :

PROPOSITION 2. - *Une 1-cochaîne* T *sur* L *telle que* ∂T *soit une 2-cochaîne locale est nécessairement locale.*

Des deux propositions précédentes on déduit par un raisonnement standard.

THEOREME. - *Si* T *est une 1-cochaîne de* L *telle que* ∂T *soit une 2-cochaîne* d-*différentiable* (d $\geqslant$ 1), *la 1-cochaîne* T *est différentiable.*

Ce théorème entraîne la connaissance des *dérivations* de L et le résultat de Takens. Désignons par T une dérivation de L ; ∂T étant nulle, T est nécessairement 1-différentiable d'après le théorème précédent. La cohomologie 1-différentiable étant triviale, le 1-cocycle T est nécessairement exact et T est une dérivation intérieure de L.

COROLLAIRE (TAKENS). - *Toute dérivation de* L *est 1-différentiable, donc intérieure.*

II - DEFORMATIONS DIFFERENTIABLES DE L'ALGEBRE DE LIE DES CHAMPS DE VECTEURS.

5 - DEFORMATIONS DE L'ALGEBRE DE LIE L.

Rappelons, en les adaptant à notre but et en les complètant, certains éléments de la théorie algébrique des déformations due à Gerstenhaber.

a) Soit $E(L;\lambda)$ l'espace des fonctions formelles en le paramètre réel λ à coefficients dans L. Considérons une application bilinéaire alternée $L \times L \to E(L;\lambda)$, qui donne une série formelle en λ :

$$[X,Y]_\lambda = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r C_r(X,Y) \tag{5-1}$$

où $C_0(X,Y) = [X,Y]$ et où les $C_r (r \geqslant 1)$ sont des 2-cochaînes sur L. Ces cochaînes s'étendent naturellement à $E(L\ ;\ \lambda)$. Si S est la sommation après permutation circulaire sur $X,Y\ Z \in L$, on obtient :

$$S[[X,Y]_\lambda, Z]_\lambda = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t D_t(X,Y,Z) \tag{5-2}$$

où l'on a introduit les 3-cochaînes :

$$(5\text{-}3) \qquad D_t(X,Y,Z) \equiv \sum_{r+s=t} S\, C_s(C_r(X,Y),Z) \qquad (r,s \geqslant o).$$

(5-1) définit une *déformation formelle* de l'algèbre de Lie L si l'identité de Jacobi correspondante est formellement satisfaite, soit :

$$S[[X,Y]_\lambda,Z]_\lambda = 0.$$

D_o étant nul, cette condition peut se traduire par $D_t = 0$ $(t = 1,2,\ldots)$.
Posons

$$(5\text{-}4) \qquad E_t(X,Y,Z) \equiv \sum_{r+s=t} S\, C_s(C_r(X,Y),Z) \qquad (r,s \geqslant 1).$$

On vérifie immédiatement que :

$$(5\text{-}5) \qquad D_t \equiv E_t - \partial C_t.$$

Si (5-1) est tronquée à l'ordre q, on dira que c'est une *déformation à l'ordre q* de L si l' identité de Jacobi correspondante est satisfaite à l'ordre (q+1) près. S'il en est ainsi, on sait, d'après Gestenhaber, que E_{q+1} est un 3-cocycle de L. On peut trouver une 2-cochaîne C_{q+1} vérifiant

$$D_{q+1} = E_{q+1} - \partial C_{q+1} = o\ ,$$

si et seulement si E_{q+1} est *exact*. La classe définie par E_{q+1} est *l'obstruction à l'ordre* (q+1) à la construction d'une déformation formelle de L.

Une déformation à l'ordre 1 de L est dite une *déformation infinitésimale*. Comme $E_1 = 0$, on a seulement $\partial C_1 = 0$, c'est-à-dire que C_1 doit être un 2-cocycle de L.

b) Considérons une série formelle en λ

$$T_\lambda = \sum_{s=o}^{\infty} \lambda^s T_s = \mathrm{Id.} + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^s T_s \; . \tag{5-6}$$

Formons :

$$T_\lambda [X,Y]_\lambda - [T_\lambda X,\ T_\lambda Y] = \sum_{t=o}^{\infty} \lambda^t F_t(X,Y) \tag{5-7}$$

où l'on a introduit les 2-cochaînes

$$F_t(X,Y) = \sum_{r+s=t} T_s\, G_r(X,Y) - \sum_{r+s=t} [T_r X, T_s Y] \quad (r,s \geqslant o) \tag{5-8}$$

On a $F_o = 0$. Posons

$$G_t(X,Y) = \sum_{r+s=t} T_s\, G_r(X,Y) - \sum_{r+s=t} [T_r X, T_s Y] \qquad (r,s \geqslant 1) \tag{5-9}$$

On a immédiatement

$$F_t \equiv C_t - \partial T_t + G_t \tag{5-10}$$

En évaluant de deux manières différentes $S\, T_\lambda [[X,Y]_\lambda, Z]_\lambda$ on obtient :

LEMME. - *Pour toute application biblinéaire (5-1) et série formelle (5-6), on a l'identité*

$$\begin{aligned} & D_t(X,Y,Z) + \sum_{r+s=t} T_s\, D_r(X,Y,Z) \\ & = -\partial F_t(X,Y,Z) + \sum_{r+s=t} S\{F_r(X_s(X,Y),Z) + [F_r(X,Y), T_s Z]\} \end{aligned} \tag{5-11}$$

avec $r,\ s \geqslant 1\ ,\ t = 1,2,\ldots$.

Supposons (5-1) et (5-6) telles que l'identité

$$T_\lambda[X,Y]_\lambda - [T_\lambda X, T_\lambda Y] = o \qquad (5\text{-}12)$$

soit formellement satisfaite. On a $F_t = 0 (t = 1,2,\ldots)$, soit $C_t = \partial T_t - G_t$. vérifiant (5-12).

Il en résulte que (5-6) détermine (5-1) de manière unique.
Pour cette application (5-1), les relations (5-11) se résuisent à :

$$D_t(X,Y,Z) + \sum_{r+s=t} T_s\, D_r(X,Y,Z) = o \qquad (r,s \geqslant 1\ ;\ t=1,2,\ldots)$$

et entraînent par récurrence $D_t = 0$ pour tout t. L'identité de Jacobi relative à (5-1) est satisfaite.

PROPOSITION. - *Toute série formelle en λ du type (5-6) engendre une application bilinéaire unique du type (5-1) vérifiant l'identité (5-12). Cette application est une déformation formelle de l'algèbre de Lie* L.

Nous sommes conduits à la définition suivante :

DEFINITION. - *Une déformation formelle de l'algèbre de Lie* L *est dite triviale s'il existe (5-6) telle que l'identité (5-12) soit formellement satisfaite.*

c) Considérons une déformation formelle de $L (D_t = 0$ pour $t = 1,2,\ldots)$ et supposons la triviale jusqu'à l'ordre q ; par hypothèse $F_t = 0$ pour $t = 1, \ldots, q$, c'est-à-dire

$$C_t + G_t = \partial T_t \qquad (t=1,\ldots,q). \qquad (5\text{-}13)$$

Pour $t = (q+1)$, la relation (5-11) se réduit à :

(5-14) $$\partial(C_{q+1}+G_{q+1}) = o.$$

La déformation est triviale à l'ordre $(q+1)$ si et seulement si le 2-cocycle $(C_{q+1} + G_{q+1})$ est exact. La classe définie par ce 2-cocycle est l'*obstruction à la trivialité à l'ordre* $(q+1)$ de cette déformation.

6 - DEFORMATIONS FORMELLES DIFFERENTIABLES DE L'ALGEBRE DE LIE L.

Une déformation formelle (5-1) de L est dite *différentiable* si les 2-cochaînes C_r de L sont différentiables pour tout r.

Supposons le 2-cocycle C_1 d-différentiable. D'après le théorème du § 4, si la déformation envisagée est triviale à l'ordre 1, T_1 est nécessairement un opérateur différentiel d'ordre d. Inversement d'après le théorème sur les 2-cocycles, tout 2-cocycle C_1 d-différentiable est le cobord d'un opérateur différentiel T_1 d'ordre d.

En procédant par récurrence, on démontre à partir de (5-9), (5-13) et du théorème $H^2_{(d)}(L) = 0$, que toute déformation formelle différentiable (5-1) est *triviale* et que les termes de la série (5-6) qui engendre (5-1) sont nécessairement définis par des opérateurs différentiels. C'est ce dernier fait que nous traduirons en disant que (5-1) est *différentiablement triviale*.

THEOREME. - *Toute déformation formelle différentiable de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs d'une variété différentiable est différentiablement triviale.*

III - ALGEBRES DE LIE ATTACHEES A UNE VARIETE SYMPLECTIQUE.

7 - VARIETES SYMPLECTIQUES.

Pour abréger un p-tenseur contravariant antisymétrique est appelé dans la suite un p-tenseur.

a) Etant donnée une variété différentiable W de dimension paire $m = 2n$, une *structure symplectique* est définie sur W par une 2-forme F fermée telle que F^n soit partout $\neq 0$; la structure symplectique est dite exacte si F est exacte ; il n'en est jamais ainsi si W est compacte. Tout fibré cotangent admet une structure symplectique exacte canonique et ce fait joue un rôle fondamental en macanique analytique.

Nous notons $\mu: TW \to T^*W$ l'isomorphisme de fibrés vectoriels défini par $X \in TW \to \mu(X) = -i(X)F$ (où i(.) désigne le produit intérieur) ; cet isomorphisme s'étend naturellement aux fibrés tensoriels. Soit G le 2-tenseur $\mu^{-1}(F)$ de rang 2n ; ses composantes sont données par la matrice inverse de la matrice des composantes de F. On sait que W admet des atlas de cartes canoniques $\{x^i\} = \{x^\lambda, x^{\bar\lambda}\}$ $(\lambda = 1,\ldots n\ ;\ \bar\lambda = \lambda + n)$ telles que, sur le domaine U de la carte :

$$(7\text{-}1) \qquad F|_U = \sum_\lambda dx^\lambda \wedge dx^{\bar\lambda}$$

Pour une telle carte, F et G ont des composantes constantes sur U.

b) Une *transformation infinitésimale* (t.i.) *symplectique* est définie par un vecteur X tel que, $\mathscr{L}(X)$ étant l'opérateur de dérivation de Lie, on ait $\mathscr{L}(X)F = 0$. On note L l'algèbre de Lie des t.i. symplectiques pour que X appartienne à L, il faut et il suffit que la 1-forme $\mu(X)$ soit fermée ; X est aussi appelé un champ de vecteurs localement hamiltonien. Pour $X, Y \in L$

$$\mu([X,Y]) = di(G)\ (\mu(X) \wedge \mu(Y)). \tag{7-2}$$

Si K est l'espace vectoriel des 1-formes fermées, μ définit un isomorphisme de l'algèbre de Lie L sur l'algèbre de Lie déterminée sur K par le crochet

$$[\xi,\eta] = di(G)(\xi \wedge \eta) \qquad (\xi, \eta \in K). \tag{7-3}$$

Soit K^* l'idéal de K défini par les 1-formes *exactes* et posons $L^* = \mu^{-1}(K^*)$. Un élément de L^* est souvent appelé un champ de vecteurs globalement hamiltonien. On démontre que L^* est l'idéal dérivé de L (ou K^* l'idéal dérivé de K) ; L/L^* est abélien et de dimension $b_1(W)$, premier nombre de Betti pour la cohomologie de de Rham non restreints.

c) Un vecteur X définit une t.i. conforme symplectique si $\mathscr{L}(X)F = aF$; pour $n > 1$, a est nécessairement une constante. Nous notons L^c (*algèbre de Lie des t.i. conformes symplectiques)* l'algèbre de Lie des champs de vecteurs pour lesquels il existe une constante K_X telle que

$$\mathscr{L}(X)F + K_X F = 0. \tag{7-4}$$

Pour $X \in L^c$, $Y \in L$, on a :

$$\mu([X,Y]) = di(G)\ (\mu(X) \wedge \mu(Y)) + K_X\, \mu(Y). \tag{7-5}$$

On déduit de (7-5) que L et L^* sont des idéaux de L^c. Si $X \in L^c$, (7-4) peut s'écrire $K_X F = d\,\mu(X)$.

Si F *n'est pas exacte* (en particulier si W est compacte) $K_X = 0$ pour tout $X \in L^c$ et L^c coïncide avec L.

Si F *est exacte* $F = d\mu(Z)$ et $Z \in L^c$ avec $K_Z = 1$; on a $L^c = L + C_Z$, où C_Z est le sous-espace de dimension 1 engendrée par Z. On déduit de cette décomposition, de (7-5) et de $L^* = [L, L]$.

PROPOSITION. - *Si* F *est exacte, l'algèbre* L^c *admet* L *pour idéal dérivé et* $\dim L^c/L = 1$.

d) Nous notons N l'espace des fonctions $C^\infty(W;R)$. Soit $\bar{N}$ l'espace des classes de fonctions éléments de N modulo les constantes additives, $\pi : u \in N \to \bar{u} \in \bar{N}$ la projection canonique de N sur $\bar{N}$. L'isomorphisme naturel de l'espace vectoriel K^* sur $\bar{N}$ induit sur $\bar{N}$ une structure d'algèbre de Lie définie de la manière suivante : si $\bar{u}, \bar{v} \in \bar{N}$, il résulte de (7-3) que la fonction

$$N = i(G)(d\bar{u} \wedge d\bar{v}) \tag{7-6}$$

définit une classe $\bar{w}$ qui est le crochet de $\bar{u}$ et $\bar{v}$.

La fonction (7-6) définit la parenthèse de Poisson, par rapport à la structure symplectique, de $\bar{u}$ et $\bar{v}$ ou de deux représentants u et v dans N. On note cette parenthèse

$$\{u,v\} = \{\bar{u},\bar{v}\} = i(G)(du \wedge dv)$$

On montre immédiatement que la parenthèse de Poisson définit sur N une structure d'algèbre de Lie. On définit ainsi *l'algèbre de Lie dynamique* N de la variété symplectique envisagée.

8 - DERIVATIONS.

a) On sait comment sont définies les cohomologies de Chevalley des algèbres de Lie infinies L^c, L, L^* et N. En ce qui concerne N, on établit de manière assez analogue au cas des champs de vecteurs.

THEOREME. - *Si* T *est une 1-cochaîne de* N *telle que* ∂T *soit une 2-cochaîne* d-*différentiable, la 1-cochaîne* T *est* d-*différentiable.*

En particulier toute dérivation *locale* de N étant un 1-cocycle est 1-différentiable.

Si la variété W est non compacte, on peut établir que la localité de ∂T entraîne la localité de T pour une 1-cochaîne. On en déduit

COROLLAIRE. - *Si* (W,F) *est non compacte, toute 1-cochaîne* T *de* N *telle* ∂T *soit* d-*différentiable, est elle-même* d-*différentiable. En particulier les dérivations de* N *sont toutes 1-différentiables.*

b) On établit immédiatement que les dérivations de L^c, L, L^* sont toujours locales. On montre, par des raisonnements non triviaux, que la connaissance des dérivations locales de N entraîne celle des dérivations de $\bar{N}$ ou L^*, puis de L et L^c. Or les dérivations locales de N étant 1-différentiables sont données, en vertu de l'identité des dérivations, par

$$\mathscr{D} = \mathscr{L}(Z) + K_S ,$$

où $Z \in L^c$. Il vient ainsi :

THEOREME. - *Toute dérivation de* L^c, L, L^* *est donnée par* $X \to [Z,X]$ *où* $Z \in L^c$. *Ainsi* $H^1(L^c) = 0$, $H^1(L)$ *est isomorphe à* L^c/L *et* $H^1(L^*)$ *à* L^c/L^*. *Si* F *n'est pas exacte (en particulier si* W *est compacte),* $\dim H^1(L) = 0$, $\dim H^1(L^*) = b_1(W)$.
Si F *est exacte,* $\dim H^1(L) = 1$, $\dim H^1(L^*) = 1+b_1(W)$.

En ce qui concerne l'algèbre de Lie N, on a :

THEOREME. - *1°) Si* W *est non compacte, toute dérivation de* N *est donnée par* $\mathcal{L}(Z)+K_Z$, *où* $Z \in L^c$ *et* K_Z *est la constante correspondante ;* $\dim H^1(N) = \dim H^1(L^*)$..

2°) Si W *est compacte, toute dérivation* $\mathcal{D}$ *de* N *est donnée par par :*

$$\mathcal{D}u = \mathcal{L}(Z)u + \lambda \int_W u\, \eta,$$

où $X \in L$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *;* $\dim H^1(N) = 1+b_1(W)$. *Il existe des dérivations non locales.*

9 - COHOMOLOGIE 1-DIFFERENTIABLE.

a) Pour une variété différentiable quelconque, Schouten et Nijenhuis ont introduit un instrument intéressant : le crochet de Schouten sur les tenseurs contravariants antisymétriques. Si A (resp. B) est un p-tenseur (resp. q-tenseur), $[A,B]$ est un (p+q-1)-tenseur défini de la manière suivante : on a pour tout (p+q-1)-forme fermée β :

$$i([A,B])\beta = (-1)^{pq+q} i(A)di(B)\beta + (-1)^p i(B)di(A)\beta . \tag{9-1}$$

Pour $p = 1$, $[A,B] = \mathscr{L}(A)B$. On a

$$[A,B] = (-1)^{pq}[B,A]$$

De plus si C est un r-tenseur, on a la pseudo identité de Jacobi :

$$S(-1)^{pq}[[B,C],A] = 0 \tag{9-2}$$

Le crochet définit ainsi une structure d'algèbre de Lie graduée sur l'espace des tenseurs contravariants antisymétriques.

Sur une variété W de dimension 2n, une *structure symplectique* peut être définie par un 2-tenseur G, de rang 2n partout, vérifiant

$$[G,G] = 0 \tag{9-3}$$

(9-3) exprime en fait que le crochet de Poisson défini par i(G) satisfait l'identité de Jacobi. De plus si A est un p-tenseur, on a :

$$\mu([G,A]) = d\mu(A) \tag{9-4}$$

b) Considérons la cohomologie 1-différentiable de Chevalley de l'algèbre N d'une variété symplectique (W,F) (ou (W,G)). Une p-cochaîne cochaîne C admet une décomposition de la forme C = A+B, où A et B sont respectivement définies par un p-tenseur et un (p-1)-tenseur de W, de telle sorte que sur le domaine U d'une carte $\{x^k\}$, on ait :

$$\begin{cases} A(u_1,\dots,u_p)| = A^{k_1\dots k_p}\partial_{k_1} u_1 \dots \partial_{k_p} u_p \quad (\partial_k = \partial/\partial x^k) \\ \\ B(u_1,\dots,u_p)| = \dfrac{i}{(p-1)!}\,\varepsilon^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{1\dots p}\, B^{k_2\dots k_p}\, u_{\alpha_1}\partial_{k_2} u_{\alpha_2}\dots \partial_{k_p} u_{\alpha_p} \end{cases}$$

Une p-cochaîne 1-différentiable dont la partie de type B est nulle est dite *pure*. D'après (9-4) la cohomologie 1-différentiable de N est isomorphe à la cohomologie définie de la manière suivante : si $C = (A,B)$ est une p-cochaîne de N, faisons lui correspondre $(\mu(A),\mu(B))$. On obtient ainsi la représentation suivante : une p-cochaîne est l'ensemble (α,β) d'une p-forme et d'une (p-1)forme de N ; le cobord est donné par :

$$(9\text{-}5) \qquad \partial(\alpha,\beta) = (-d\alpha + F\wedge\beta\ , d\beta).$$

Si $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$ est une autre cochaîne, on peut en outre introduire le produit extérieur

$$(9\text{-}6) \qquad (\alpha,\beta)\wedge(\bar{\alpha},\bar{\beta}) = (\alpha\wedge\bar{\alpha},\ \beta\wedge\bar{\alpha} + (-1)^p\,\alpha\wedge\bar{\beta}).$$

Si on se limite aux cochaînes pures ($\beta = 0$), on voit que le p^{e}-espace $\hat{H}^p_{(1)}(N)$ de cohomologie 1-différentiable pure est isomorphe à $H^p(W;R)$. En ce qui concerne le cas général introduisons l'opérateur $e([F])$ défini sur les classes de cohomologie réelles de W par le produit extérieur par F. On obtient :

THEOREME. - *Le* p^{e} *espace de cohomologie 1-différentiable de Chevalley* $H^p_{(1)}(N)$ *est isomorphe à*

$$P^{p-1}(W;F) \oplus H^p(W;\mathbb{R})/Q^p(W;F),$$

où $P^{p-1}(W;F)$ *est le noyau de l'opérateur* $e([F]) : H^{p-1}(W;\mathbb{R}) \to H^{p+1}(W;\mathbb{R})$ *et où* $Q^p(W;F)$ *est l'image par* $e([F])$ *de* $H^{p-2}(W;\mathbb{R})$ *dans* $H^p(W;\mathbb{R})$. *Le produit extérieur (9-6) induit sur l'espace des classes de cohomologie 1-différentiable de* N *une structure d'algèbre de cohomologie.*

Si F *est exacte* $P^{p-1}(W;F) = H^{p-1}(W;\mathbb{R})$, $Q^{p}(W,F) = \{0\}$; $H^{p}_{(1)}(N)$ est isomorphe à $H^{p-1}(W;\mathbb{R}) \oplus H^{p}(W;\mathbb{R})$

Pour p = 1, on trouve un résultat en accord avec l'étude des dérivations

Si F^{n} *n'est pas exacte* (c'est-à-dire si W est compacte), on a pour $p \leq n$, $P^{p-1}(W;F) = \{0\}$, $Q^{p}(W;F) \simeq H^{p-2}(W;R)$

c) Pour L et L^{*} on établit :

PROPOSITION. - *Pour* $p \geq 2$ *les* p-*cochaînes 1-différentiables de* L *sont données par* $C(X_1,\dots,X_p) = \mu^{-1}(dA(\xi_1,\dots,\xi_p))$, *où* X_α L, $\xi_\alpha = \mu(X_\alpha)$ *et où* A *est un* p-*tenseur ; elles sont à valeurs dans* L^{*}.
Pour p=1 *, on doit y ajouter les 1-cochaînes* K X, *où* $X \in L$ *et où* K *est une constante.*
Les p-*cochaînes 1-différentiables de* L^{*} *sont les restrictions à* L^{*} *des* p-*cochaînes de* L.

On en déduit :

THEOREME. - *1°) Pour* $p \geq 3$ *le* p^{e} *espace de cohomologie 1-différentiable* $H^{p}_{(1)}(L^{*})$ *est isomorphe à* $H^{p}(W;\mathbb{R})$.
2°) Pour p = 2, $H^{2}_{(1)}(L^{*})$ *est isomorphe à* $H^{2}(W;\mathbb{R})/Q^{2}(W;F)$
3°) Pour p = 1, $H^{1}_{(1)}(L^{*})$ *est isomorphe à* $P^{0}(W;F) \oplus H^{1}(W;\mathbb{R})$

Résultats identiques pour L sauf pour le 3° ($\simeq P^{0}(W;F)$). Ceci est en accord avec l'étude des dérivations.

10 - DEFORMATIONS 1-DIFFERENTIABLES.

a) Considérons une déformation formelle de l'algèbre de Lie N

$$(10\text{-}1) \qquad [u,v]_\lambda = \{u,v\} + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r C_r(u,v)$$

(10-1) est dite *1-différentiable* si les C_r sont des 2-cochaînes 1-différentiables. Cette restriction offre dans ce cas un cadre cohérent pour les déformations d'après le lemme suivant.

LEMME. - *Si* C, C' *sont deux 2-cochaînes 1-différentiables de* N, *la 3-cochaîne* D *définie par*

$D(u,v,w) = S\, C(C'(u,v),w) + S\, C'(C(u,v),w)$

est 1-différentiable.

Il en résulte que, dans ce contexte, E_t est une 3-cocycle 1-différentiable de N. Considérons une série formelle en λ

$$(10\text{-}2) \qquad T_\lambda = Id + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^s T_s$$

où T_s est un opérateur différential d'ordre s. C'est pour ces opérateurs que nous considérons la trivialité. Le théorème du § 8, a montré la cohérence de cette définition. Pour une déformation infinitésimale triviale, le 2-cocycle C_1 est exact dans la cohomologie différentiable. On a

PROPOSITION. - *L'espace des déformations infinitésimales 1-différentiables de* N, *modulo les déformations triviales, est isomorphe à :*

$H^2_{(1)}(N) \simeq P^1(W;F) \oplus H^2(W;R)/Q^2(W;F)$

b) Considérons une série formelle en

(10-3) $$G_\lambda = G + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r G_r$$

où les G_r sont des 2-tenseurs tels que l'identité :

(10-4) $$[G_\lambda, G_\lambda] = 0$$

soit formellement satisfaite ; (10-3) définit *une déformation formelle de la structure symplectique* G.

$$\{u,v\}_{G_\lambda} = i(G_\lambda)(du \wedge dv)$$

définit une déformation formelle 1-différentiable de N déduite de la déformation de la structure symplectique. Une déformation formelle 1-différentiable est dite *inessentielle* s'il existe G_λ et T_λ tels que

(10-5) $$T_\lambda(u,v)_\lambda - \{T_\lambda u, T_\lambda v\}_{G_\alpha} = 0 \;,$$

définition analogue pour une déformation infinitésimale inessentielle. On a

PROPOSITION. - *L'espace des déformations infinitésimales 1-différentiables de* N, *modulo les déformations inessentielles, est isomorphe à* $P^1(W;F)$.

c) *Supposons* F *exacte*. On a
$H^2_{(1)}N \simeq H^1(W;R) \oplus H^2(W;R) \quad H^3_{(1)}(N) \simeq H^2(W;R) \oplus H^3(W;R)$

On a :

THEOREME. - *Soit* (W,F) *une variété symplectique à* F *exacte. Si les nombres de Betti de* W *vérifient* $b_1(W) \neq 0$, $b_2(W) = b_3(W) = 0$, *l'algèbre de Lie dynamique* N *admet les déformations formelles 1-différentiables inessentielles et, en particulier, non triviales.*

On peut mettre en évidence dans ce cas des déformations à l'ordre 1 qui sont en fait rigoureuses.

PROPOSITION. - *Soit* (W,F) *une variété symplectique à* F *exacte* ($F = d\omega$, $\mu(Z) = \omega$) *et soit* β *une 1-forme fermée non exacte telle que* $i(Z)\beta = \text{const.}$ *Si* $B = \mu^{-1}(\beta)$.

$$[u,v]_\lambda = \{u,v\} + \lambda C(u,v)$$

où $C = [Z \wedge B, B)$ *définit une déformation rigoureuse de* N *qui est essentielle.*

On a une telle situation pour $w = T^* M$, avec $b_1(M) \neq 0$.

d) En ce qui concerne l'algèbre de Lie K, on a

THEOREME. - *L'espace des déformations infinitésimales 1-différentiables de l'algèbre de Lie* K, *modulo les déformations triviales, est isomorphe à*

$$H^2(K) \simeq H^2(W;R)/Q^2(W;F)$$

Une telle déformation est toujours symplectique.

Mêmes résultats en ce qui concerne K^*.

BIBLIOGRAPHIE.

1 A. AVEZ et A. LICHNEROWICZ, C.R. Acad Sc. Paris, 275, série A, (1972) p. 113-117.

2 A. AVEZ et A. LICHNEROWICZ, A. DIAZ-MIRANDA, *J. of Diff. Geom.* t. 9 (1974), p. 1-40.

3 M. FLATO, A. LICHNEROWICZ, D. STERNHEIMER, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 279, série A (1974), p. 877-881 ; Compos. Math. t. 31, (1975), p. 47-82.

4 M. GESTENHABER, *Ann. of Math.*, V. 79, (1964), p. 59-103.

5 I.M. GUELFAND et D.B. FUKS, *Funct Anal. and Appl.* , 4 (1970), p. 10-25 et 110-116.

6 A. LICHNEROWICZ, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 281, série A (1975), p. 507-512.

7 A. LICHNEROWICZ, *J. Math. pures et appl.* 53, (1974), p. 459-489.

8 M.V. LOSIK, *Funct. Anal. and Appl.* 4 (1970) p. 127-135.

9 K. SHIGA, *J. Math. Soc. Japan*, 26 (1974), p. 324-361

10 F. TAKENS, *Compo. Math.* 26, (1973), p. 95-99.