

JACQUES VEY

**Rapport sur les champs symplectiques formels**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1976, tome 13, fascicule 3  
, p. 63-78

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1976\\_\\_13\\_3\\_63\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1976__13_3_63_0)

© Université de Lyon, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

RAPPORT SUR LES CHAMPS SYMPLECTIQUES FORMELS

par Jacques VEY

1. CHAMP DE VECTEURS FORMELS.

Dans tout ce qui suit, on notera  $k$  un corps commutatif de caractéristique nulle, et  $T$  un espace vectoriel fini sur  $k$ . L'algèbre  $\mathfrak{a}$  des champs formels est  $T$  en le produit tensoriel de  $T$  et de  $k[[T]]$ , algèbre (associative) des fonctions formelles sur  $T$ ;  $\mathfrak{a}$  est équipée du crochet de Lie.

Soit  $\ell$  un entier  $\geq -1$ : on pose  $\mathfrak{a}_\ell = S^{\ell+1} T^* \otimes T$  (champs polynomiaux homogènes de degré  $\ell+1$ );  $\mathfrak{a}$  est constitué des translations sur  $T$ ;  $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{gl}(T)$  des opérateurs linéaires sur  $T$ . Soit  $H = \sum x^i \partial / \partial x^i$  la multiplication scalaire sur  $T$ : un champ formel  $X$  appartient à  $\mathfrak{a}_\ell$  si et seulement si  $[H, X] = \ell X$ ; ce qui fait que les  $\mathfrak{a}_\ell$ ,  $\ell \geq -1$ , définissent une graduation d'algèbre de Lie sur  $\mathfrak{a}$ .

Il y a quelques années, Gelfand et Fuks ont entrepris de calculer la cohomologie de  $\mathfrak{a}$  dans différents modules, d'ordre fini. Voici ce qu'on entend par là, du moins quand la cohomologie est à coefficients dans le  $\mathfrak{a}$ -module trivial  $k$ . On forme, pour  $p$  entier  $\geq 0$ ,  $C^p(\mathfrak{a}, k)$  l'espace de  $p$ -formes multilinéaires alternées sur  $\mathfrak{a}$ , d'ordre fini (c'est-à-dire: la valeur de la cochaîne ne dépend que des jets d'un certain ordre des arguments). On équipe  $C^*(\mathfrak{a}, k) = \bigoplus_{p \geq 0} C^p(\mathfrak{a}, k)$  de la différentielle usuelle:

$$df(X_1 \wedge \dots \wedge X_{p+1}) = \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j} f([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{j}, \dots, X_{p+1})$$

( $f \in C^p(\mathfrak{a}, k)$ ,  $X_i \in \mathfrak{a}$ ) et on cherche la cohomologie  $H^*(\mathfrak{a}, k)$  du complexe

ainsi obtenu. Cette entreprise audacieuse réussit au-delà de toute espérance : la cohomologie en question s'avère de dimension finie, et complètement explicitable ([1]).

Ce succès engageait à renouveler l'opération pour d'autres algèbres de Lie infinies célèbres ; et parmi elles l'algèbre des champs symplectiques (ou hamiltoniens) formels, qui sont d'une extrême importance en mécanique. Malheureusement, ces recherches se sont heurtées à des difficultés, dont nous allons essayer de faire le point.

## 2. CHAMPS DE VECTEURS SYMPLECTIQUES.

Supposons donc  $T$  de dimension paire  $2m$ , équipé d'une forme bilinéaire alternée  $\omega$  non dégénérée : par un choix idoine de coordonnées sur  $T$  (coordonnées conjuguées) on peut écrire

$$\omega = \sum_1^m dp_i \wedge dq_i .$$

Un champ formel  $X \in \mathfrak{a}$  sera dit symplectique si  $\mathcal{L}_X \omega = 0$  ( $\mathcal{L}_X$  désigne la dérivée de Lie ; le groupe à un paramètre correspondant de difféomorphismes préserverait  $\omega$ ). Les champs formels symplectiques forment une algèbre de Lie que je noterai  $\mathfrak{S}$ .

Par ailleurs, si  $u \in k[[T]]$  est une fonction formelle, appelons gradient de  $u$  le champ  $U$  défini par

$$i_U \omega = -du .$$

Il est clair que  $U$  détermine  $u$  à une constante près ; en coordonnées conjuguées,

$$U = \sum_1^m \left( -\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right) .$$

LEMME. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow k \longrightarrow k[[T]] \xrightarrow{\text{grad}} \mathfrak{S} \longrightarrow 0 .$$

En effet, si  $\vartheta_X \omega = 0$ , la formule de Cartan donne

$$0 = \vartheta_X \omega = di_X \omega + i_X d\omega$$

indiquant, puisque  $d\omega = 0$ , que  $i_X \omega$  est fermée.

On enrichit la structure en équipant  $k[[T]]$  d'une loi d'algèbre de Lie qui fait du gradient un morphisme : c'est le crochet de Poisson, qu'on définit par

$$\begin{aligned} [u, v] &= \vartheta_U v = -\vartheta_V u = \langle \omega, U \wedge V \rangle \\ &= \sum_1^m \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} - \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} \end{aligned}$$

( $u, v \in k[[T]]$  ;  $U$  et  $V$  sont leurs gradients). On notera  $\mathfrak{P}$  l'algèbre de Poisson ainsi obtenue, on vérifie immédiatement que  $k$  (fonctions constantes) est son centre.

Si  $f, g \in T^* \hookrightarrow \mathfrak{P}$ , si  $r, s$  sont des entiers  $\geq 0$ , on a

$$[f^r, g^s] = rs(f, g)f^{r-1}g^{s-1}$$

où  $(f, g)$  désigne le produit symplectique dans  $T^*$ . Graduons

$\mathfrak{P} = \prod_{\ell \geq 0} S^\ell T^*$  en attribuant le poids  $\ell - 2 \geq -2$  à  $S^\ell T^*$  : on voit qu'on

obtient une graduation d'algèbre de Lie, et la situation se présente ainsi :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathfrak{P} & = & \mathfrak{P}_{-2} & \oplus & \mathfrak{P}_{-1} & \oplus & \mathfrak{P}_0 & \oplus & \mathfrak{P}_1 & \oplus & \dots & \oplus & \mathfrak{P}_\ell & \oplus & \dots \\ \downarrow \text{grad} & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \dots & & \parallel & & \dots \\ & & k & & T^* & & S^2 T^* & & S^3 T^* & & \dots & & S^{\ell+2} T^* & & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \dots & & \downarrow & & \dots \\ \mathfrak{e} & = & 0 & \oplus & \mathfrak{e}_{-1} & \oplus & \mathfrak{e}_0 & \oplus & \mathfrak{e}_1 & \oplus & \dots & \oplus & \mathfrak{e}_\ell & \oplus & \dots \\ & & & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \\ & & & & T & & sp(T) & & a_1 \mathfrak{n}\mathfrak{e} & & & & a_\ell \mathfrak{n}\mathfrak{e} & & \\ & & & & & & \parallel & & & & & & & & \\ & & & & & & \mathfrak{gl}(T) \mathfrak{n}\mathfrak{e} & & & & & & & & \end{array}$$

La graduation induite sur  $\mathfrak{E}$  par les  $\mathfrak{E}_\ell = \mathfrak{E} \cap \mathfrak{a}_\ell$  se retrouve ainsi : le champ  $H \in \mathfrak{gl}(T) \subset \mathfrak{a}$  n'appartient pas à  $\mathfrak{E}$  ( $\theta_H \omega = 2\omega \neq 0$ ) mais il la normalise :  $[H, \mathfrak{E}] \subset \mathfrak{E}$  et les  $\mathfrak{E}_\ell$  sont des espaces propres. Aussi bien, l'opérateur  $\text{ad } H$  sur  $\mathfrak{E}$  se relève sur  $\mathfrak{P}$  par l'opérateur  $\alpha$  :

$$\alpha u = \theta_H u - 2u \quad (u \in \mathfrak{P})$$

qui est une dérivation extérieure de l'algèbre de Poisson, les  $\mathfrak{P}_\ell$  étant ses espaces propres.

Il est naturel de distinguer dans  $\mathfrak{E}$  la sous-algèbre  $\mathfrak{s}$  d'isotropie formée des champs nuls à l'origine :

$$\mathfrak{s} = \prod_{\ell \geq 0} \mathfrak{E}_\ell = \prod_{\ell \geq 0} \mathfrak{P}_\ell = \mathfrak{m}^2$$

( $\mathfrak{m}$ , idéal maximal de  $\mathfrak{P} = k[[T]]$ ).

### 3. LA ZONE STABLE.

Un premier résultat est le suivant ([2]).

PROPOSITION 1. Pour  $0 < p \leq 2m$ ,  $H^p(\mathfrak{P}, k) = 0$  ; et  $\dim_k H^{2m+1}(\mathfrak{P}, k) = 1$ .

Une base de  $H^{2m+1}(\mathfrak{P}, k)$  s'explique comme suit :  $\omega \in \wedge^2 T^*$  est une 2-forme sur  $\mathfrak{E}_{-1} = T$ , et peut être remontée sur  $\mathfrak{E}$  par  $\tau_{-1}^*$  ( $\tau_\ell$  désigne la projection de  $\mathfrak{E}$ , ou  $\mathfrak{P}$ , sur  $\mathfrak{E}_\ell$ , ou  $\mathfrak{P}_\ell$ ) ; puis sur  $\mathfrak{P}$  par  $\text{grad}^*$ . Pareillement, soit  $K = \pi_{-2}$  la 1-forme sur  $\mathfrak{P}$  évaluation à l'origine. Alors  $dK = \omega$ , et  $K \wedge \alpha^m$  est un  $(2m+1)$ -cocycle sur  $\mathfrak{P}$  qui donne une base de  $H^{2m+1}(\mathfrak{P}, k)$ .

PROPOSITION 2. En degré  $\leq 2m+1$ , l'algèbre  $H^*(\mathfrak{E}, k)$  est librement engendrée par un générateur de degré 2.

Ce générateur est la classe de  $\omega \in C^2(\mathfrak{e}, k)$  ; on a sur  $\mathfrak{e}$ ,  $d\omega = 0$ . Cet énoncé se déduit aisément du précédent en considérant l'extension toute simple

$$0 \rightarrow k \rightarrow \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{e} \rightarrow 0$$

qui donne naissance à une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = H^p(k, H^q(\mathfrak{e}, k)) = H^{p+q}(\mathfrak{p}, k)$$

dont le fonctionnement est aisément analysable dans les bas degrés. Quant à la proposition 1, elle est une adaptation d'un argument que Gelfand et Fuks utilisaient pour montrer la nullité de  $H^q(\mathfrak{a}, k)$ ,  $1 \leq q \leq \dim T$ , avant qu'ils n'obtiennent la description complète de  $H^*(\mathfrak{a}, k)$  par la méthode que je vais rappeler ci-dessous.

#### 4. INTERVENTION DE ROSENFELD.

On commence d'ordinaire le calcul de  $H^*(\mathfrak{a}, k)$  par l'observation suivante. Faisons opérer  $H$ , ou  $\theta_H$ , sur  $C^*(\mathfrak{a}, k)$ , qui va se scinder en somme de sous-espaces propres

$$C^*(\mathfrak{a}, k) = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} C_r^*(\mathfrak{a}, k)$$

du fait que  $d\theta_H = \theta_H d$ , les  $C_r^*$  sont des sous-complexes. Ils sont acycliques pour  $r \neq 0$ , en effet sur  $C_r^*$ ,

$$r = \theta_H = di_H + i_H d$$

ainsi la cohomologie se réfugie dans  $C_0^*$ , complexe dont on découvre rapidement qu'il est de dimension finie, nul en degré  $> n^2 + 2n$  ( $n = \dim T$ ). Ainsi la finitude de  $H^*(\mathfrak{a}, k)$  apparaît immédiatement. Il apparaît dans le même temps que l'argument s'effondre dans le cas de  $\mathfrak{e} : H \notin \mathfrak{e}$  et l'opérateur  $i_H$  fait défaut.

Dans le cas de l'algèbre  $\mathfrak{a}$ , on procède ensuite, par une méthode devenue classique, (voyez [1]), à la définition d'un morphisme  $w$  de

l'algèbre de Weil

$$W(\mathfrak{gl}(T)) = \Lambda \mathfrak{gl}(T)^* \otimes S \mathfrak{gl}(T)^*$$

dans  $C^*(\mathfrak{a}, k)$  (en fait dans  $C^*_0(\mathfrak{a}, k)$ ) ; on envoie une forme  $\xi \in \Lambda^1 \mathfrak{gl}(T)^*$  sur  $\pi_0^* \xi$  ( $\pi_0$  est la projection naturelle de  $\mathfrak{a}$  sur  $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{gl}(T)$ ) ; et on envoie la même forme  $\xi$ , considérée comme élément de  $S^1 \mathfrak{gl}(T)^*$ , sur

$$d\pi_0^* \xi - \frac{1}{2} [\pi_0^* \xi, \pi_0^* \xi] .$$

On vérifie aisément que  $w$  anéantit l'idéal  $I$  de  $W(\mathfrak{gl}(T))$  engendré par  $S^{n+1} \mathfrak{gl}(T)^*$  ce qui induit

$$\bar{w} : \bar{W}(\mathfrak{gl}(T)) = W(\mathfrak{gl}(T))/I \rightarrow C^*(\mathfrak{a}, k)$$

et le théorème fondamental, c'est que  $\bar{w}$  induit un isomorphisme des cohomologies. Le principe de la preuve est le suivant : on filtre par rapport à  $\mathfrak{gl}(T) = \mathfrak{a}_0$  les deux complexes en question ; la suite spectrale de Koszul-Hochschild-Serre, par réductivité, donne d'une part

$$E_2^{p,q}(\bar{W}) = H^q(\mathfrak{gl}(T), k) \otimes [S \mathfrak{gl}(T)^*/I]^{\mathfrak{gl}(T)}$$

où le second facteur sera l'algèbre symétrique  $k[c_1, \dots, c_n]$ , engendrée par des  $c_i$  de degré  $2i$ , et tronquée en degré  $> 2n$  ; et d'autre part

$$E_2^{p,q}(C^*(\mathfrak{a}, k)) = H^q(\mathfrak{gl}(T), k) \otimes H^p(\mathfrak{a}, \mathfrak{gl}(T), k)$$

où le second facteur est la cohomologie du sous-complexe

$C^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{gl}(T), k) \subset C^*(\mathfrak{a}, k)$  formé des cochaînes  $\xi$  basiques :

$i_L \xi = i_L \xi = 0$  quel que soit  $L \in \mathfrak{gl}(T)$ . On calcule  $C^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{gl}(T), k)$  et on a l'agréable surprise de ne rien trouver en degré impair ou  $> 2n$  ; et de ne trouver que l'image de  $\bar{w}$  en degré pair - après quoi tout se trivialise.

Au vu de ces phénomènes, le projet de V.I. Rosenfeld a été le suivant : abandonnons à leur sort, au moins provisoirement, les complexes  $C_r^*(\mathfrak{e}, k)$ ,  $r \neq 0$  ; et voyons si le morphisme évident

$$\bar{w} : W(\mathfrak{sp}(T))/I \rightarrow C^*_0(\mathfrak{e}, k)$$

va induire un isomorphisme de cohomologies. Dans sa note [3], Rosenfeld

annonce que tel est bien le cas, et il se borne à ajouter que la démonstration est analogue au cas de Gelfand-Fuks : l'algèbre  $\mathfrak{a}$ .

Il n'y a rien que de plausible dans cet isomorphisme ; mais je suis sceptique quant à l'analogie de preuves. Je vais produire dans un instant une cochaîne de  $C^*_0(\mathfrak{e}, \mathfrak{sp}, k)$ , de degré impair : donc à supposer même que  $C^*(\mathfrak{e}, \mathfrak{sp}, k)$  se laisse décrire commodément, on ne sera pas dispensé, contrairement au cas de  $\mathfrak{a}$ , du calcul de la différentielle et de sa cohomologie. Considérons en effet, sur l'espace

$$\Lambda^3 T^* \otimes S^3 T^* \otimes S^4 T^* = \Lambda^3 \mathfrak{e}_{-1} \otimes \mathfrak{e}_1 \otimes \mathfrak{e}_2$$

la forme linéaire définie par

$$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \otimes \xi^3 \otimes \eta^4 \longrightarrow \sum (\alpha, \beta)(\gamma, \eta)(\xi, \eta)^3$$

où  $\xi, \eta, \alpha, \beta, \gamma \in T^*$ , et où  $\sum$  indique une sommation circulaire sur  $\alpha, \beta, \gamma$ . Elle est trivialement invariante par  $Sp(T)$  ; elle se relève naturellement en une 5-cochaîne sur  $\mathfrak{e}$ , qui sera de poids 0, et s'annulera dès qu'un argument sera dans  $\mathfrak{e}_0 = \mathfrak{sp}(T)$ .

Signalons que le calcul de  $H^*_0(\mathfrak{e}, k)$  est équivalent au calcul de  $H^*(\mathfrak{sc}, k)$  cohomologie de l'algèbre  $\mathfrak{sc}$  des champs conformes symplectiques, c'est-à-dire les champs  $X \in \mathfrak{a}$  tels que  $\theta_X \omega$  soit un multiple constant de  $\omega$  (cf [3], [4]).

## 5. INTERVENTION DES ORDINATEURS.

En toute hypothèse, que faire contre les complexes  $C^*_r(\mathfrak{e}, k)$  et leurs mystérieuses cohomologies  $H^*_r(\mathfrak{e}, k)$  ? Afin de débloquer la situation, Gelfand, Fuks et Kalinin ([4]) entreprirent le calcul mécanique de  $C^q_r(\mathfrak{e}, \mathfrak{sp}, k)$  pour les basses valeurs de  $r$  et de  $q$ . En effet, soit  $f$  une  $q$ -cochaîne basique : elle est déterminée par les valeurs

$$f(\xi_1^{\ell_1}, \dots, \xi_q^{\ell_q}) \quad , \quad \ell_i \geq 0 \quad , \quad \xi_i \in T^*$$



sur les puissances parfaites dans  $k[[T]] = \mathbb{P}$ , d'après la théorie des invariants ([1]) le polynôme obtenu est un polynôme

$$F(\dots(\xi_i, \xi_j)\dots)$$

en les produits symplectiques des  $\xi_i$ , unique modulo les relations : celle-ci, d'après [5] pp. 167-168, loc. cit. complété par [6], pp. 23 et 24, sont engendrées par la relation

$$J_0 = \sum \pm(\xi_1, \xi_2)(\xi_3, \xi_4)\dots(\xi_{2m+1}, \xi_{2m+2}) \equiv 0.$$

En outre,  $F$  doit satisfaire les conditions d'antisymétrie requises d'une cochaîne. (Un peu d'attention montre d'ailleurs que le poids d'un invariant est forcément pair). La détermination des polynômes  $F$  possibles peut très bien être confiée à un ordinateur pour les petites valeurs de  $q$  et  $r$ , grâce aux techniques de calcul algébrique mises au point depuis quelques années. C'est ce qu'ont fait Gelfand, Fuks et Kalinin pour  $\dim T = 2$  ( $m=1$ ) ; et voici leurs conclusions :

PROPOSITION. Si  $\dim T = 2$ ,  $H_r^q(\mathbb{C}, \mathfrak{sp}, k) = 0$  pour  $q > 0$ ,  $0 \neq r < 8$  ; et pour  $0 < q \neq 7$ ,  $r = 8$  ; par contre  $\dim H_8^7(\mathbb{C}, \mathfrak{sp}, k) = 1$ .

(Chaque complexe  $C_r^*(\mathbb{C}, \mathfrak{g}, k)$  s'annule en degré assez grand, donc la proposition est le résultat d'un calcul de longueur finie). On trouvera dans [4] l'expression explicite et déroutante d'un 7-cocycle de poids 8 non trivial. On déduit de là très aisément que  $H_8^{10}(\mathbb{C}, \mathfrak{g}, k)$  est de dimension 1, etc... par la suite spectrale de Koszul-Hochschild-Serre.

Peut-être la philosophie principale à retenir de ces résultats est la nécessité pour les algébristes de s'intéresser à ces calculs algébriques sur machine, qui me semblent ouvrir des perspectives prometteuses dans toutes sortes de domaines.

6. LE THEOREME DE PERCHIK.

Il est facile de voir que chaque complexe  $C_r^*(\mathbb{C}, \mathfrak{sp}, k)$  est de dimension finie, et de majorer explicitement sa longueur. Nous pouvons donc considérer les caractéristiques d'Euler-Poincaré

$$\chi_r = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \dim H_r^q(\mathbb{C}, \mathfrak{sp}, k) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \dim C_r^q(\mathbb{C}, \mathfrak{sp}, k) .$$

J. Perchik a fait voir [7] comment on peut calculer les  $\chi_r$  à partir de la deuxième expression, et obtenir par là des informations, certainement très implicites et indirectes, sur les groupes  $H_r^*(\mathbb{C}, \mathfrak{sp}, k)$ .

PROPOSITION. Formons le produit

$$(n!)^{-1} 2^{-m} \prod_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^m \\ |\alpha+\beta| > 0 \\ |\alpha+\beta|=2 \Rightarrow \alpha \neq \beta}} (1-t^{|\alpha+\beta|-2} x^{\alpha-\beta}) , \quad t \in k , \quad x \in k^m$$

où  $|\alpha+\beta| = \sum_1^m (\alpha_i + \beta_i)$  ,  $x^{\alpha-\beta} = \prod_1^m x_i^{\alpha_i - \beta_i}$  . Dans le développement en série entière en  $t$  , de Laurent en  $x$  , de ce produit ,  $\chi_r$  est le coefficient de  $t^r x_1^0 \dots x_m^0$  .

Lorsque  $m = 1$  ( $\dim T = 2$ ) , un calcul d'ordinateur a abouti au résultat suivant :

$$\begin{aligned} \sum \chi_r t^r &= t^{-2} + 2 - t^8 - t^{14} - t^{22} - t^{28} + t^{30} - t^{32} + t^{34} - t^{36} \\ &+ t^{40} - 2t^{42} - t^{46} + 3t^{48} - 2t^{50} + 3t^{52} - t^{58} - 3t^{60} \\ &+ 3t^{62} - 8t^{64} + 9t^{66} + 10t^{70} + \dots \end{aligned}$$

qui manifeste l'existence de 57 classes de cohomologie indépendantes.

Pour  $r \leq 8$  , les résultats sont en accord avec les résultats des § précédents. On ne sait pas décider, même dans ce cas, si une infinité de  $\chi_r$  sont  $\neq 0$  , ou non nuls. Ce résultat donne en tout cas la mesure du problème.

Signalons que J. Perchik a établi un résultat analogue relatif aux champs isochores (préservant le volume) - ces champs donnent lieu à une problématique très analogue, mais un peu plus simple, à celle des champs symplectiques.

## 7. L'ISOTROPIE.

Il n'est pas sans intérêt d'examiner la sous-algèbre  $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{C}$  des champs nuls à l'origine ; on peut considérer que  $\mathfrak{s} = \mathfrak{m}^2 \subset k[[T]]$  (idéal des fonctions critiques à l'origine) équipé du crochet de Poisson.

Soit  $j : \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{sp} \rightarrow 0$  le jet d'ordre 1 (qui est indépendant du choix des coordonnées curvilignes sur  $T$ ) et  $i : \mathfrak{sp} \rightarrow \mathfrak{s}$  (liée au privilège des coordonnées linéaires sur  $T$ ), qui en est inverse à droite. Nous obtenons un morphisme  $j^* : H^*(\mathfrak{sp}, k) \rightarrow H^*(\mathfrak{s}, k)$  ; et la possibilité (par  $i$ ) de considérer la cohomologie  $H^*(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, k)$  des cochaînes basiques par rapport à  $\mathfrak{sp}$ .

PROPOSITION. On a un isomorphisme

$$H^*(\mathfrak{s}, k) \simeq H^*(\mathfrak{sp}, k) \otimes H^*(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, k) .$$

Preuve : On considère la suite spectrale de Koszul-Hochschild-Serre

$$E_2^{p,q} = H^q(\mathfrak{sp}, k) \otimes H^p(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, k)$$

et on observe que  $i^*$  relève les termes de la fibre  $E_2^{0,*} = H^*(\mathfrak{sp}, k)$  dans  $H^*(\mathfrak{s}, k)$ .

PROPOSITION ([8], §2).  $H^1(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, k) = 0$  et  $\dim H^2(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, k) = 1$  .  
Si de plus  $\dim T \geq 4$  ( $m \geq 2$ )  $H^3(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, k) = 0$  et  $\dim H^4(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, k) \geq 2$  .

Un 2-cocycle fondamental s'explicite ainsi : on considère sur

$\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{e}_1 = S^3 T^*$  la 2-forme bilinéaire alternée  $\beta_1$  définie par

$$\beta_1 : \xi^3 \wedge \eta^3 \longmapsto (\xi, \eta)^3, \quad \xi, \eta \in T^*$$

et on la relève sur  $\mathfrak{s}$  par  $\pi_1^*$ .

A cet endroit, je vais formuler une conjecture. Quel que soit l'entier  $p > 0$ , considérons la  $2p$ -forme bilinéaire alternée  $\bar{s}_p$  sur  $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{e}_1 = S^3 T^*$  définie par

$$\bar{s}_p : \bar{\xi}_1^3 \wedge \dots \wedge \bar{\xi}_{2p}^3 \longmapsto \langle \omega^p, \bar{\xi}_1 \wedge \dots \wedge \bar{\xi}_{2p} \rangle^3 \quad (\xi_i \in T^*)$$

que nous relevons en une  $2p$ -cochaîne sur  $\mathfrak{s}$ ; cette cochaîne est ouvertement basique, et un calcul d'une ligne montre que c'est un cocycle (dans  $\mathfrak{s}$ , toujours).

Conjecture : En degré  $\leq m$ , l'algèbre  $H^*(\mathfrak{s}, \mathfrak{s}_p, k)$  est librement engendrée par les classes de  $\beta_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ .

La restriction sur les degrés s'introduit comme suit : si l'on reprend les considérations du §5 sur les générateurs des invariants de  $Sp(T)$ , on voit que les relations n'interviennent qu'en degré  $\geq m+2$ , ce qui distinguerait assez naturellement une zone stable  $0 \leq q \leq m$ . Le fondement expérimental de cette conjecture est des plus minces, et elle reflète surtout le manque d'imagination de son auteur ; lorsque  $m \geq 4$ , les deux classes décelées dans  $H^4(\mathfrak{s}, \mathfrak{s}_p, k)$  sont bien  $\beta_1 \wedge \beta_1$  et  $\beta_2$  ; et je m'étais convaincu d'un lien entre cette conjecture et l'assertion de Rosenfeld.

## 8. INVARIANTS SYMETRIQUES.

On se rappelle que dans le cas des algèbres de Lie semi-simples, les invariants symétriques sont d'un accès beaucoup plus facile que la cohomologie. Ceci incite à battre en retraite vers le problème suivant : appelons polynôme sur  $\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{e}$ , etc... une fonction  $f : \mathfrak{a} \rightarrow k$  qui ne

dépend que du jet d'un certain ordre de l'argument, et qui est un polynôme par rapport aux coefficients de la série de Taylor ; et cherchons ceux qui sont invariants par l'action adjointe de  $\mathfrak{a}$  (resp.  $\mathfrak{E}$ , etc...) : soit  $I_S(\mathfrak{a})$  (resp.  $I_S(\mathfrak{E})$  etc...) l'algèbre qu'ils forment.

PROPOSITION. Il n'y a pas d'invariant symétrique non nul sur  $\mathfrak{a}$ , ni sur  $\mathfrak{E}$ .

Cela résulte aisément des trois faits suivants : a) un polynôme sur  $\mathfrak{a}$  (ou  $\mathfrak{E}$ ) est déterminé par sa restriction aux champs non nuls à l'origine ; b) un champ non nul à l'origine est conjugué à une translation ; c) il n'y a pas de polynôme non nul sur  $T = \mathfrak{a}_{-1}$  ou  $\mathfrak{E}_{-1}$  invariant par  $Gl(T)$  ou  $Sp(T)$ .

Passons donc aux sous-algèbres d'isotropie  $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{E}$  des champs nuls à l'origine. Soit  $G$  (resp.  $SG$ ) le groupe de jets de difféomorphismes (resp. de difféomorphismes symplectiques) préservant l'origine. Le jet d'ordre 1

$$\begin{aligned} j : \mathfrak{b} &\rightarrow gl(T) \rightarrow 0 \\ \mathfrak{s} &\rightarrow sp(T) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

transforme l'action de  $G$  sur  $\mathfrak{b}$  (resp. de  $SG$  sur  $\mathfrak{s}$ ) en l'action (adjointe) de  $Gl(T)$  sur  $gl(T)$  (resp. de  $Sp(T)$  sur  $sp(T)$ ). Il en résulte une flèche

$$\begin{aligned} j^* : I_S(gl(T)) &\rightarrow I_S(\mathfrak{b}) \\ I_S(sp(T)) &\rightarrow I_S(\mathfrak{s}) \end{aligned}$$

qui est injective (les coordonnées linéaires sur  $T$  fournissent un inverse à droite  $i : gl(T) \rightarrow \mathfrak{b}$  de  $j$ ) ; les algèbres d'invariants  $I_S(gl(T))$  et  $I_S(sp(T))$  sont bien connues : elles sont librement engendrées par les coefficients du polynôme caractéristique ([10], vol.2, ch.XII) (resp. par les coefficients d'indice pair, les autres étant identiquement nuls).

PROPOSITION.  $j^* : I_S(gl(T)) \rightarrow I_S(\mathfrak{b})$  est un isomorphisme.

Preuve : Soit  $f \in I_S(b)$ ,  $f_0 = j^*(f|_{i(g|T)})$ , et  $g = f - f_0$  qui est un invariant nul sur  $g|T \subset b$ . Nous allons voir que  $g(X) = 0$  quel que soit  $X \in b$ . Soit  $r$  l'ordre de  $g$  (c'est-à-dire : l'ordre du jet dont il dépend). Nous rappelons que si  $X \in b$ , et si les valeurs propres de  $jX \in g|T$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , sont toutes distinctes et évitent les relations de dépendance sur  $\mathbb{Z}$

$$\lambda_i = \alpha_1 \lambda_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}, \quad \sum_1^n \alpha_i \leq r$$

(ces relations sont en nombre fini, et seront donc évitées sur un ouvert de Zariski  $\Omega \subset g|T$ ), alors le champ  $X$  est conjugué par  $G$  à un champ linéaire  $X'$  modulo un champ nul à l'ordre  $r$ . Si donc  $jX \in \Omega$ , on aura  $g(X) = g(X') = 0$  : ainsi  $g$  est identiquement nulle sur  $j^{-1}(\Omega)$ , donc partout puisque c'est un polynôme.

Ainsi donc, rien de neuf sur  $I_S(b)$ . Mais la situation symplectique est plus riche : le monomorphisme  $j^* : I_S(\mathfrak{sp}) \rightarrow I_S(\mathfrak{g})$  n'est pas surjectif. La raison en est qu'un champ symplectique  $U$  nul à l'origine ne se laisse linéariser que très exceptionnellement. Pour examiner de plus près ce phénomène, nous allons le décaler sur la fonction génératrice de  $U$  ( $U = \text{grad } u$ ). Conjuguer  $U$  à un champ linéaire revient en effet à conjuguer  $u$  à une forme quadratique ; c'est-à-dire à changer de coordonnées conjuguées en sorte que  $u$  s'exprime comme une forme quadratique ; c'est-à-dire poser à nouveau la question du lemme de Morse, mais en se restreignant à des changements de coordonnées symplectiques.

## 9. LE LEMME DE MORSE.

Soit donc  $u \in k[[T]]$  une fonction formelle, critique (et nulle) à l'origine ( $u \in \mathfrak{m}^2$ ), et soit  $h$  sa hessienne, c'est-à-dire sa projection dans  $\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3 \simeq S^2 T^*$ . Nous pouvons faire l'hypothèse générique que  $h$  est non dégénérée ( $u$  est de Morse) mais le problème est beaucoup plus fin. En effet le gradient identifie  $S^2 T^*$  et  $\mathfrak{sp}(T)$ , ce qui introduit les

valeurs propres de la hessienne  $h$ . Pour alléger, je vais supposer le corps de base  $k$  algébriquement clos. Les valeurs propres, comme on le voit facilement, vont par couples opposés  $\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_2, \dots, \lambda_m, -\lambda_m$ . Une première hypothèse générique naturelle consiste à les supposer toutes distinctes ; alors  $h$ , considérée comme opérateur linéaire, s'écrit dans des coordonnées conjuguées convenables

$$h = \sum_1^m \lambda_i \left( -q_i \frac{\partial}{\partial p_i} + p_i \frac{\partial}{\partial q_i} \right)$$

et considérée comme forme quadratique,

$$h = \sum_1^m \lambda_i p_i q_i .$$

Cela dit, le théorème suivant remonte à Birkhoff ([9], § 30).

**THEOREME.** Soit  $u \in m^2$ . Supposons les valeurs propres  $\pm \lambda_1, \dots, \pm \lambda_n$  de la hessienne de  $u$  distinctes, et libres de toute relation linéaire entière

$$\sum_1^m \lambda_i (\alpha_i - \beta_i) = 0 \text{ avec } \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}, \sum_1^m (\alpha_i + \beta_i) \leq 2r .$$

Il existe alors un système de coordonnées formelles conjuguées,  $p_i, q_i$ , telles que dans ces coordonnées,

$$u = F(p_1 q_1, p_2 q_2, \dots, p_m q_m) \text{ modulo } m^{2r+1} .$$

Un tel système de coordonnées n'est pas unique, mais les fonctions  $h_i = p_i q_i$  sont canoniquement attachées à  $u$  et à la structure symplectique, modulo  $m^{2r+1}$ , et modulo l'ordre et le signe des  $h_i$ .

La fonction  $F$  est donc canoniquement attachée à  $u$ , modulo  $m^r$  et modulo l'ordre et le signe de ses arguments. Noter que la condition sur les valeurs propres, pour  $r$  fixé, est réalisée sur un ouvert de Zariski de  $S^2 T^*$ . (Si par contre, on passe à la limite  $r = \infty$ , la condition devient l'indépendance sur  $\mathbb{Z}$  des  $\lambda_i$ , condition qui n'est plus générique dans un sens aussi sain).

Considérons le développement de la fonction caractéristique  $F$  :

$$F(h_1, \dots, h_m) = \sum_1^m \lambda_i h_i + \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^m \\ |\gamma| \geq 2}} c_\gamma h^\gamma \pmod{\mathfrak{m}^{r+1}} .$$

Il s'avère que les  $c_\gamma$  (qui sont des invariants sur  $\mathfrak{m}^2$  par  $SG$ , définis sur un ouvert générique, de poids 1) s'expriment comme des quotients  $N_\gamma(u)/D_\gamma(u)$  d'un numérateur  $N_\gamma(u)$ , qui est polynomial en les coefficients de  $u$  d'ordre  $> 2$ , et en les valeurs propres  $\lambda_i$  de la hessienne ; par un dénominateur  $D_\gamma(u)$  qui est un polynôme  $Sp(T)$ -invariant en la hessienne de  $u$  ( $c_\gamma(u)$  a pour domaine de définition l'ouvert  $D_\gamma \neq 0$ ). Naturellement,  $c_\gamma(u)$  et  $N_\gamma(u)$  ne sont canoniques que modulo l'action du groupe  $W$  qui permute et change de signe les  $\lambda_i$  (donc les  $h_i$ ) : c'est le groupe de Weyl de  $Sp(T)$ , évidemment, et c'est aussi le groupe de Galois de l'équation aux valeurs propres de la hessienne  $h \in \mathfrak{sp}(T)$ . En d'autres termes, les  $N_\gamma(u)$  dépendent algébriquement de la hessienne de  $u$ , et polynomialement du reste du développement. Il résulte du théorème de Birkhoff que tout invariant sur  $\mathfrak{s} = \mathfrak{m}^2$ , d'ordre fini, algébrique en la hessienne et polynomial (resp. rationnel) en le reste du développement s'exprime de façon unique à l'aide des  $N_\gamma$  (resp. des  $c_\gamma$ ). On obtiendra donc les invariants polynomiaux sur  $\mathfrak{m}^2$  en formant des expressions polynomiales  $W$ -invariantes en les  $N_\gamma$  : il est manifeste qu'on débord largement l'image  $j^*(I_S(\mathfrak{sp}))$ . Malheureusement, il paraît laborieux de préciser le degré des dénominateurs  $D_\gamma$ , donc des  $N_\gamma$ , et donc des éléments de  $I_S(\mathfrak{s}) \setminus j^*(I_S(\mathfrak{sp}))$  ; dans l'attente d'applications intéressantes, la question ne m'a pas semblé mériter trop d'attention.



REFERENCES.

- [1] C. GODBILLON , Cohomologie d'algèbres de Lie de champs de **vecteurs** formels ; séminaire Bourbaki n°421 (1972-73).
- [2] J. VEY , Sur la cohomologie des champs de vecteurs symplectiques formels ; C.R.A.S. t. 280 (24 mars 1975) p. 805.
- [3] V.I. ROSENFELD , Cohomology of some infinite dimensional Lie algebras: Funktsional Analisis i ego prilozhenia, vol.5, n°4, p. 845 (1971).
- [4] I.M. GELFAND, D.I. KALININ, D.B. FUKS , Cohomology of the Lie algebra of hamiltonian vector fields ; ibidem, vol.6, n°3, pp. 25-29 (1972).
- [5] H. WEYL , Classical Groups, Princeton 1946.
- [6] Th. VUST , Sur la théorie des invariants des groupes classiques ; Annales de l'Institut Fourier, t. 26, fasc.1 (1976).
- [7] J. PERCHIK , Cohomology of hamiltonian and related formal vector field Lie algebras ; à paraître dans Topology.
- [8] J. VEY , Déformation du crochet de Poisson sur une variété symplectique ; Commentarii Mathematici Helvetici, vol.50 (1975) p. 421 S .
- [9] C. SIEGEL et J. MOSER , Lectures on Celestial Mechanics, Springer 1971.
- [10] KOBAYASHI et NOMIZU , Foundations of Differential Geometry.

Jacques VEY  
Centre Universitaire de Savoie  
et Laboratoire de Mathématiques Pures (associé au C.N.R.S.)  
BP 116  
38402-ST MARTIN D'HERES