PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

ANDRÉ HAEFLIGER

Un modèle pour l'espace des sections d'un fibré

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1976, tome 13, fascicule 3
, p. 37-56
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1976__13_3_37_0>

Publication du
Département de
Mathématiques
Lyon 1976 t. 13-3

UN MODELE POUR L'ESPACE DES SECTIONS D'UN FIBRE

par André HAEFLIGER

INTRODUCTION.

Le but de cet exposé est de montrer que le modèle de Sullivan pour l'espace T_π des sections d'un fibré π donne bien une algèbre qui a le même type d'homotopie que l'algèbre des formes différentielles sur le complexe singulier de T_π. Nous avons choisi la présentation du modèle que nous avions présentée pour calculer la cohomologie de Gelfand-Fuchs.

1. L'APPLICATION D'EVALUATION.

Soit B un complexe simplicial dont les sommets sont ordonnés. Alors B peut être considéré comme la réalisation géométrique d'un ensemble simplicial B' dont les k-simplexes sont les applications affines du simplexe standard Δ^k sur les simplexes de B préservant l'ordre des sommets.

Considérons un fibré $\pi : E \to B$ au sens de Serre, et désignons par $\Gamma(\pi)$ l'espace des sections de E. Un k-simplexe singulier de $\Gamma(\pi)$ est une application continue

$$\sigma : B \times \Delta^k \to E$$

commutant avec les projections sur B.

Nous désignerons par $S^{\cdot\cdot}(\pi)$ l'ensemble bisimplicial dont les bisimplexes de type (p,q) sont les diagrammes commutatifs d'applications continues

$$\begin{array}{ccc} \Delta^p \times \Delta^q & \rightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \Delta^p & \xrightarrow{\phi} & B \end{array}$$

où $\phi \in B^{\cdot}$.

D'après l'exposé de P.P. Grivel, $S^{\cdot\cdot}(\pi)$ a le même type d'homotopie que le complexe singulier de E.

Désignons par $B^{\cdot} \times S^{\cdot}\Gamma(\pi)$ l'ensemble bisimplicial produit de $B^{\cdot}$ avec le complexe singulier $S^{\cdot}\Gamma(\pi)$ de $\Gamma(\pi)$.

On a un morphisme canonique d'évaluation :

$$e : B^{\cdot} \times S^{\cdot}\Gamma(\pi) \rightarrow S^{\cdot\cdot}(\pi)$$

commutant avec les projections sur B et défini somme suit.

Si $\sigma : \Delta^p \rightarrow B$ et $\tau : B \times \Delta^q \rightarrow E$ appartiennent à $B^{\cdot}$ et $S^{\cdot}\Gamma(\pi)$, alors $e(\sigma,\tau) : \Delta^p \times \Delta^q \rightarrow E$ est défini par

$$e(\sigma,\tau)(x,y) = \tau(\sigma(x),y).$$

Désignons par $A^*(\Gamma(\pi))$, $A^*(B)$ et $A^*(\pi)$ l'algèbre des formes différentielles (à coefficients rationnels) sur les ensembles simpliciaux $S^{\cdot}\Gamma(\pi)$, $B^{\cdot}$ et bisimplicial $S^{\cdot\cdot}(\pi)$ respectivement. Les formes différentielles sur $B^{\cdot} \times S^{\cdot}\Gamma(\pi)$ s'identifient aux éléments de $A^*(B) \hat{\otimes} A^*(\Gamma(\pi))$.

Ainsi l'application e induit un morphisme d'algèbres différentielles graduées

$$e^* : A^*(\pi) \to A^*(B) \hat{\otimes} A^*(\Gamma(\pi))$$

qui est un morphisme de $A^*(B)$-algèbres différentielles .

On se propose de construire un modèle (pas minimal) pour l'algèbre $A^*(\Gamma,\pi)$ à partir d'un modèle pour $A^*(\pi)$ analogue à une décomposition de Postnikov de π.

2. DECOMPOSITION DE POSTNIKOV DE π

Si V est un espace vectoriel gradué inférieurement, alors $S^*(V)$ désigne le dual de la coalgèbre symétrique sur V ; cette algèbre s'identifie à l'algèbre graduée des formes multilinéaires sur V et symétriques au sens gradué. Si V est de dimension finie en chaque degré et si $V_q = 0$ pour $q \leqq 0$ alors $S^*(V)$ s'identifie à l'algèbre symétrique sur le dual de V.

Pour les conventions de signes, nous renvoyons à [2] .

Dans ce qui suit, on suppose donné

i) un espace vectoriel gradué $V = \{V_q\}$ et une différentielle d sur $S^*(V)$ qui en fait une algèbre différentielle graduée

ii) une différentielle sur l'algèbre $A^*(B) \otimes S^*(V)$ de sorte que

$$d(a \otimes 1) = d\,a \otimes 1$$
$$d(1 \otimes s) = 1 \otimes ds + \Sigma\, a_i \otimes v_i \text{ où } \deg a_i > 1$$

iii) un morphisme de $A^*(B)$-algèbres différentielles graduées

$$\phi : A^*(B) \otimes S(V) \to A^*(\pi)$$

induisant un isomorphisme sur la cohomologie.

Si $V_q = 0$ pour $q \leqq 1$ et si pour tout $v \in V_q$, $d(1 \otimes v)$ appartient à la sous-algèbre engendrée par $A(B) \otimes 1$ et les v_i de degré $< q$, alors on dit que ϕ est une *décomposition de Postnikov* ou un *modèle minimal* de la $A^*(B)$-algèbre $A^*(\pi)$.

La seconde condition qui apparaît sous ii) est justifiée par la remarque suivante. Considérons la filtration de $A^*(B) \otimes S^*(V)$ pour laquelle les éléments de filtration k sont ceux de la somme directe des $A^i(B) \otimes S^*(V)$ avec $i \geqq k$. Alors le terme $E_2^{p,q}$ de la suite spectrale associée est naturellement isomorphe à $H^p(A(B)) \otimes H^q(S^*(V))$.

Une décomposition de Postnikov pour π existe toujours si la fibre F de π est simplement connexe et si E est induit d'un fibré sur une base simplement connexe (c'est le cas par exemple si E admet un groupe structural connexe). (Pour une démonstration de ce fait, voir par exemple la proposition de 1.3 et celle de 1.4 de [2]).

3. CONSTRUCTION D'UN MODELE ALGEBRIQUE (cf. [1] , [2] , et [3]).

Soit A une algèbre différentielle graduée positivement sur un corps K de caractéristique 0, et soit V un espace vectoriel gradué (inférieurement) sur K. L'algèbre A n'a pas forcément d'élément unité.

On suppose donnée sur $A \otimes S^*(V)$ une différentielle d vérifiant les mêmes conditions que dans le paragraphe 2 ; autrement dit, avec cette différentielle, $A \otimes S^*(V)$ est une A-algèbre différentielle et $d(a \otimes s) = da \otimes s \pm a \otimes ds$ + termes de la forme $a_i \otimes s_i$, avec $\deg a_i \geqq 2$. Munie de cette différentielle, $A \otimes S^*(V)$ sera désignée par $A \otimes_\tau S^*(V)$.

Désignons par $A \otimes V$ l'espace vectoriel gradué, où

$$\deg a \otimes v = \deg v - \deg a$$

Soit $S^*(A \otimes V,A)$ l'algèbre graduée des formes multilinéaires symétriques au sens gradué sur $A \otimes V$ à valeur dans A.

On a un morphisme naturel d'algèbres graduées

$\varepsilon : A \otimes S^*(V) \to S^*(A \otimes V,A)$

défini par

$$\varepsilon(a \otimes h)(a_1 \otimes v_1,\ldots,a_k \otimes v_k) = \pm\, a\, a_1\ldots a_k h(v_1,\ldots,v_k)$$

Le signe étant déterminé par la permutation des variables graduées (cf. [2] , 1.1).

Désignons par C l'espace vectoriel gradué dual de A, le dual de A^q étant noté C_q. Si $c \in C_q$, alors $dc \in C_{q-1}$ est défini par

$$dc(a) = -(-1)^{\deg c}c(da).$$

Si $f \in S^*(A \otimes V,A)$, alors $c \cap f$ désigne l'élément de $S^*(A \otimes V)$ obtenu en composant f avec la forme linéaire c.

Dans ce paragraphe, nous ferons les hypothèses suivantes :

H_1) : A est telle que $A^q = 0$ pour $q > n$ et $\dim A^k$ est finie pour tout k.

H_2) : V_q est de dimension finie pour tout q et $V_q = 0$ pour $q \leqq n$.

Il en résulte que $(A \otimes V)_q = 0$ pour $q \leqq 0$ et qu'il est de dimension finie pour chaque q. De plus, $S^*(A \otimes V)$ s'identifie à l'algèbre symétrique sur le dual de $A \otimes V$, et $S^*(A \otimes V,A)$ à $A \otimes S^*(A \otimes V)$.

PROPOSITION 1. - *Il existe sur* $S^*(A\otimes V)$ *une différentielle unique telle que l'application*

$$\varepsilon : A \otimes_\tau S^*(V) \to S^*(A \otimes V, A) \cong A \otimes S^*(A \otimes V)$$

commute avec les différentielles (le second membre étant muni du produit tensoriel des différentielles sur chaque facteur). De plus, pour toute algèbre différentielle graduée X *et tout morphisme de* A*-algèbres différentielles graduées*

$$\phi : A \otimes_\tau S^*(V) \to A \otimes X ,$$

il existe un morphisme unique

$$\Phi : S^*(A \otimes V) \to X$$

tel que

$$(1_A \otimes \Phi) \circ \varepsilon = \phi .$$

La différentielle sur $S^*(A\otimes V)$ *et le morphisme* Φ *sont caractérisés par les relations suivantes :*

1) $$d(c \cap \varepsilon(h)) = dc \cap \varepsilon(h) \pm c \cap \varepsilon(dh),$$

2) $$\Phi(c \cap \varepsilon(h)) = c \cap \phi(h)$$

(où $c \cap \phi(h)$ *est l'image de* $\phi(h)$ *par l'application* $c\otimes 1$ *de* $A\otimes X$ *dans* $K\otimes X = X$*).*

Cette proposition montre que l'algèbre différentielle $S^*(A\otimes V)$ est la solution d'un problème universel qui est l'analogue algébrique du problème universel que résout l'espace $\Gamma(\pi)$ des sections du fibré $\pi : E \to B$.

DEMONSTRATION. - Comme $A\otimes V$ est de dimension finie en chaque degré et nul en degré ≤ 0, alors $S^*(A\otimes V)$ s'identifie à l'algèbre symétrique sur le dual $C\otimes V'$ de $A\otimes V$.

Par cet isomorphisme, $c \cap \varepsilon(1\otimes\nu)$ s'identifie à $c\otimes\nu$, où $\nu\in V'$ = dual de V.

Ainsi la formule 1) définit d sur $C\otimes V'$; elle s'étend muniquement suivant une dérivation de $S^*(A\otimes V)$. De même la formule 2) définit Φ sur $C\otimes V'$ s'étend par multiplication de manière unique à $S^*(A\otimes V)$.

On va vérifier que les formules 1) et 2) sont encore satisfaites pour tout $h \in A\otimes S^*(V)$. Il en résultera que $d^2 = 0$ sur les générateurs $C\otimes V'$ de l'algèbre $S^*(A\otimes V)$, donc pour tout élément. De même, 2) impliquera que Φ commute avec les différentielles.

Remarquons tout d'abord que 1) et 2) sont vraies pour $h = a\otimes\nu$, $\nu \in V'$, car cela résulte de ce que $A^*\otimes S(V)$ est une A-algèbre différentielle et que ε et ϕ sont des morphismes de A-modules.

Il suffira ensuite de vérifier que si 1) et 2) sont vraies pour des éléments h et h' et pour tout c, alors elles sont aussi vraies pour hh' et pour tout c.

Dans ce but, introduisons quelques notations.

Si Y est une algèbre graduée, posons pour des éléments $a\otimes y$ et $a'\otimes y'$ de $A\otimes Y$.

3) $\quad (a\otimes y) \circ (a'\otimes y') = \pm\, a \otimes a' \otimes yy' \in A\otimes A\otimes Y.$

Comme A est de dimension finie, sa duale C est une coalgèbre dont l'application diagonale $\Delta : C \to C\otimes C$ est la duale du produit $A\otimes A \to A$. On a $\Delta d = (d\otimes 1 + 1\otimes d)\Delta$.

Pour $c, c' \in C$, posons

$(c\otimes c') \cap (a\otimes a'\otimes y) = \pm\, c(a)\, c'(a')y \in Y.$

On a alors

4) $$\Delta c \cap (a \otimes y) \circ (a'\otimes y') = c \cap [(a\otimes y).a'\otimes y')]$$

Donc si $\Delta c = \Sigma c_i' \otimes c_i''$ et si $h, h' \in A \otimes S^*(V)$, alors

$c \cap \varepsilon(hh') = \Delta c \cap [\varepsilon(h) \circ \varepsilon(h')] = \Sigma \pm (c_i' \cap \varepsilon(h)).(c'' \cap \varepsilon(h'))$

Si h et h' vérifient 1) pour tout c, alors

$d(c \cap \varepsilon(hh')) = \Sigma \pm d(c_i' \cap \varepsilon(h)).(c_i'' \cap \varepsilon(h')) + \Sigma \pm(c_i' \cap \varepsilon(h))d(c_i'' \cap \varepsilon(h')$

$= \Sigma(cd_i' \otimes c_i'' \pm c_i' \otimes dc_i'') \cap \varepsilon(h) \circ \varepsilon(h')$

$\pm \Sigma (c_i' \otimes c_i'') \cap [\varepsilon(dh) \circ \varepsilon(h') \pm \varepsilon(h) \circ \varepsilon(dh')]$

$= \Delta\, dc \cap \varepsilon(h) \circ \varepsilon(h') \pm \Delta\, c \cap [(\varepsilon(dh) \circ \varepsilon(h') + \varepsilon(h) \circ \varepsilon(dh')]$

$= dc \cap \varepsilon(hh') \pm c \cap \varepsilon d(hh')$.

De même si h et h' vérifient 2) pour tout c, alors

$\Phi(c \cap \varepsilon(hh') = \Sigma \pm \Phi[(c_i' \cap \varepsilon(h))\ (c_i'' \cap \varepsilon(h'))]$

$= \Sigma \pm\ \Phi(c_i' \cap \varepsilon(h))\ \Phi\ (c_i'' \cap \varepsilon(h'))$

$= \Sigma \pm [c_i' \cap \phi(h)][c_i'' \cap \phi(h')]$

$= \Delta\, c \cap \phi(h) \circ \phi(h') = c \cap \phi(hh')$.

4. FONCTORIALITE DU MODELE

a) Relativement à la base.

Soit A' une algèbre différentielle graduée telle que $A'^q = 0$ si $q > n$ et soit $\alpha : A \to A'$ un morphisme d'algèbres différentielles graduées (avec élément unité).

Soit $\psi = \alpha \otimes \text{id.} : A \otimes S^*(V) \to A' \otimes S\ (V)$

On peut définir une différentielle sur $A' \otimes S^*(V)$ en posant

$$d(a' \otimes s) = da' \otimes s \pm a'\psi\, d(1 \otimes s)$$

Ainsi ψ commute avec d.

La même construction que précédemment donne une différentielle sur $S^*(A' \otimes V)$ vérifiant les conditions de la proposition 1.

L'application

$\psi : S^*(A' \otimes V) \to S^*(A \otimes V)$

obtenue par dualité à partir de $\alpha \otimes 1_V$, est un morphisme d'algèbres différentielles graduées.

PROPOSITION 2. - *Avec les hypothèses précédentes, si α induit un isomorphisme en cohomologie, alors ψ induit aussi un isomorphisme en cohomologie.*

<u>Idée de la démonstration</u> (pour plus de détails, cf. [2]).

Un élément de $S^*(A \otimes V)$ sera de filtration k s'il appartient à la somme directe des $S^i(A \otimes V)$, avec $i \geqq k$. On obtient ainsi une filtration convergente sur $S^*(A \otimes V)$, et de même sur $S^*(A' \otimes V)$.

L'application ψ est compatible avec ces filtrations et l'on montre qu'elle induit un isomorphisme sur les termes E_1 des suites spectrales associées.

b) <u>Relativement à la fibre.</u>

Soit V' un espace vectoriel gradué tel que V'_q est de dimension finie et est nul pour $q \leqq n$.

Supposons donnée sur $A \otimes S^*(V')$ une différentielle comme dans 3 qui en fait une A-algèbre différentielle notée $A \otimes_{\tau'} S^*(V')$.

Soit $\psi : A \otimes_{\tau'} S^*(V') \to A \otimes_{\tau} S^*(V)$

un morphisme de A-algèbres différentielles graduées.

La construction ci-dessus donne une différentielle sur $S^*(A\otimes V')$ et le morphisme d'algèbres

$$\psi : S^*(A\otimes V') \to S^*(A\otimes V)$$

défini par

$$\psi(c \cap \varepsilon'(h')) = c \cap \varepsilon\psi(h)$$

commute avec les différentielles.

C'est le cas particulier de la proposition 1 avec $X = S^*(A\otimes V)$ et $\phi = \varepsilon\psi$.

PROPOSITION 3. -

Supposons que $H^\circ(A) = K$ et soit $u : A \to K$ une augmentation. Supposons que ψ induise un isomorphisme en cohomologie sur les fibres (c'est-à-dire que l'application de $S^*(V')$ dans $S^*(V)$ appliquant s sur $(u \otimes id) \circ \psi$ induit un isomorphisme en cohomologie). Alors ψ induit un isomorphisme en cohomologie.

Nous ne donnerons pas ici la démonstration de cette proposition. L'idée est de filtrer $S^*(A\otimes V)$ de sorte que $f \in S^r(A\otimes V)$ est de filtration r si $f(a_1 \otimes v_1, \dots, a_r\otimes v_r) = 0$, lorsque la somme des degrés des a_i est supérieure à k.

5. EXTENSION DE LA CONSTRUCTION POUR A DE DIMENSION INFINIE.

Dans le cas qui nous intéresse, A est l'algèbre des formes différentielles polynomiales sur un complexe fini. Elle n'est pas de dimension finie, et nous voulons généraliser la construction précédente pour pouvoir l'appliquer à ce cas.

L'hypothèse H_1 sera remplacée par la suivante.

H'_1) L'algèbre A est telle que $A^q = 0$ pour $q > n$. Il existe de plus une suite croissante de sous-espaces vectoriels gradués $A_{(k)}$ de dimension finie, tels que $dA_{(k)} \subset A_{(k)}$ et $A_{(k)}.A_{(1)} \subset A_{(k+1)}$.

Par exemple, si A est l'algèbre des formes polynomiales sur un complexe fini, alors un élément a de degré q appartient à $A_{(k)}$ si, sur chaque simplexe, la forme a peut s'exprimer avec des coefficients qui sont des polynômes de degré $\leq k-q$.

L'hypothèse H_2 de 3 sera remplacée par l'hypothèse plus forte suivante.

H'_2) V_q est de dimension finie en chaque degré q et $V_q = 0$ pour $q \leq n$. De Plus $A \otimes_\tau S^*(V)$ est la limite directe de sous-algèbres $A \otimes S^*(V^r)$ différentielles graduées où V^r est un sous-espace gradué de V de dimension finie.

Cette dernière condition sera certainement remplie si $A \otimes_\tau S^*(V)$ est un fibré de Postnikov.

PROPOSITION 1'. - *Avec les hypothèses* H'_1 *et* H'_2 *la proposition* 1 *est encore valable, si l'on suppose que* X *est une limite projective d'algèbres différentielles graduées* X_I *et que* ϕ *est un morphisme de* A *-algèbres différentielles*

$$\phi : A \otimes_\tau S^*(V) \to A \hat{\otimes} X = \varprojlim A \otimes X_I$$

(c'est-à-dire une collection de A*-morphismes compatibles*

$$\phi_I : A \otimes_\tau S(V) \to A \otimes X_I.$$

Introduisons d'abord quelques notations.

Soit $C^{(k)}$ le dual de $A_{(k)}$. Alors le dual C de A est la limite projective des $C^{(k)}$. Désignons par ρ_k la projection de C sur $C^{(k)}$ (qui est aussi la restriction à $A_{(k)}$).

Le dual $C \hat{\otimes} C$ de $A \otimes A$ est également la limite projective des duaux $(C \hat{\otimes} C)_{(k)}$ de $(A \otimes A)_{(k)}$ = somme des $A_{(r)} \otimes A_{(s)}$, avec $r + s = k$. L'application diagonale $\Delta : C \to C \otimes C$ est aussi la limite des $\Delta_{(k)} : C_{(k)}$ $\Delta_{(k)} : C_{(k)} \to (C \otimes C)_{(k)}$.

Désignons par $S^p(A \otimes V)_{(k)}$ le dual du sous-espace de la puissance symétrique p-ème $S_p(A \otimes V)$ engendré par les $(a_1 \otimes v_1)\ldots(a_p \otimes v_p)$, où $a_i \in A_{(k_i)}$ et la somme des k_i est k.

Soit aussi ρ_k l'homomorphisme de restriction

$$\rho_k : S^*(A \otimes V) \to S^*(A \otimes V)_{(k)}.$$

Il est clair que $S^*(A \otimes V)$ est la limite projective des $S^*(A \otimes V)_{(k)}$.

Soit $S^*(A \otimes V)^\circ$ la sous-algèbre de $S^*(A \otimes V)$ formée des sommes finies de produits de formes linéaires sur $A \otimes V$. La limite projective des intersections de $S^*(A \otimes V)^\circ$ avec les $S^*(A \otimes V)_{(k)}$ est aussi $S^*(A \otimes V)$.

On définit d sur le dual $S^1(A \otimes V)$ de $A \otimes V$ par la condition 1) puis on l'étend multiplicativement à $S^*(A \otimes V)^\circ$. On voudrait étendre d à $S^*(A \otimes V)$ tout entier.

LEMME. - Il existe un s tel que si $f \in S^1(A \otimes V)$ Ker ρ_{s+k}, alors $df \in$ Ker ρ_k, pourvu que V soit de dimension finie.

On choisit s tel que $d(1 \otimes \nu) \in A_{(s)} \otimes S^*(V)$ pour tout ν dans le dual de V, ce qui est possible si V est de dimension finie.

Il résulte du lemme que $d : S^*(A \otimes V)^\circ \to S^*(A \otimes V)$ se factorise suivant des applications $d_k : S^*(A \otimes V)_{(k+s)} \to S^*(A \otimes V)_{(k)}$. En passant à la limite des d_k , on obtient une dérivation d sur $S^*(A \otimes V)$ vérifiant encore la condition 1), car elle est vraie quand on compose les deux membres avec ρ_k.

Dans le cas où V n'est plus de dimension finie, mais où la condition H_2' est vérifiée, on passe à la limite inductive.

La formule 2) définit Φ sur $S^1(A \otimes V)$. Supposons de nouveau V de dimension finie. Pour un I donné, il existe un r tel que $\phi_I(1 \otimes S^1(V)) \subset A_{(r)} \otimes X_I$. Il en résulte que Φ est la limite projective d'applications de $S^1(A \otimes V)_{(r)} \to X_I$.

Si l'on étend multiplicativement Φ à $S^*(A \otimes V)^\circ$, alors Φ donne aussi par passage aux quotients des applications de $S^*(A \otimes V)_{(r)}$ dans X_I. On obtient le morphisme Φ en passant à la limite inductive. La relation 2) est vraie pour $h \in A \otimes S(V)$ puisqu'elle est vraie après composition avec les projections $X \to X_I$.

Pour un V vérifiant H_2' , on passe à la limite inductive.

6. UNE SUITE SPECTRALE.

On va rétalir pour le modèle $S^*(A \otimes V)$ une suite spectrale analogue à la suite spectrale de Serre de la fibration de l'espace des sections d'un fibré obtenue en se restreignant à un sous-espace.

On suppose que les hypothèses du paragraphe précédent sont vérifiées.

Soit I un idéal différentiel de A, et considérons la suite exacte

$$0 \to I \to A \to A_o \to 0.$$

où $A_o = A/I$.

Dans le cas qui nous intéresse, on prendra pour I les formes différentielles qui s'annulent sur un sous-complexe.

On a une suite exacte correspondante de fibrés

$$0 \to I \otimes_\tau S^*(V) \to A \otimes_\tau S^*(V) \to A_o \otimes_{\tau o} S^*(V) \to 0$$

Pour chacun de ces fibrés, on peut construire une algèbre différentielle graduée $S^*(I \otimes V)$, $S^*(A \otimes V)$ et $S^*(A_o \otimes V)$ comme précédemment.

Un élément α de degré total r de $S^*(A \otimes V)$ sera de filtration $k \leq r$ si α s'annule sur toute suite $a_1 \otimes v_1, \ldots, a_s \otimes v_s$ où la somme des degrés des termes $a_i \otimes v_i$ pour lesquels $a_i \otimes I$ est supérieure à r-k.

On définit ainsi sur $S^*(A \otimes V)$ une filtration convergente, compatible avec la structure d'algèbre.

PROPOSITION 4. - *Supposons que* $A_o^q = 0$ *pour* $q \geq n$ *et que la cohomologie de* $S^*(I \otimes V)$ *soit de dimension finie en chaque degré.*
La suite spectrale associée à la filtration précédente de $S^*(A \otimes V)$ *converge vers la cohomologie de* $S^*(A \otimes V)$. *Son terme* E_2 *est naturellement isomorphe à*

$$E_2^{p,q} = H^p(S^*(A_o \otimes V)) \otimes H^q(S^*(I \otimes V)).$$

DEMONSTRATION. - On vérifie d'abord que E_o est isomorphe à l'algèbre bigraduée des applications multilinéaires symétriques sur $A_o \otimes V$ à valeur dans l'algèbre $S^*(I \otimes V)$, la différentielle d_o correspondant par cet isomorphisme à la différentielle définie par celle de $S^*(I \otimes V)$

Donc le terme E_1 est isomorphe à l'algèbre des applications multilinéaires symétriques sur $A_o \otimes V$ à valeur dans $H^*(S^*(I \otimes V))$. Comme cet espace est de dimension finie en chaque degré, on a l'isomorphisme

$$E_1^{k,\ell} = S^*(A_o \otimes V)^k \otimes H^\ell(S^*(I \otimes V))$$

où $S^*(A_o \otimes V)^k$ désigne la composante de degré k dans $S^*(A_o \otimes V)$.

On veut montrer que d_1 est la différentielle donnée par celle de $S^*(A_o \otimes V)$. Comme c'est une différentielle d'algèbre, il suffit de vérifier que, pour $\alpha \in S^*(A_o \otimes V)$ et $\beta \in H^\ell(S^*(I \otimes V))$, on a

$$d_1(\alpha \otimes 1) = d\alpha \otimes 1 \text{ et } d_1(1 \otimes \beta) = 0$$

La seconde égalité est évidente, car $d_1(1 \otimes \beta)$ doit appartenir à $S^*(A_o \otimes V)^1 \otimes H^\ell(I \otimes V)$; mais $S^*(A_o \otimes V)^1 = 0$, puisque $A_o \otimes V$ est nul en degré ≤ 1 par hypothèse ($A_o^q = 0$ pour $q \geq n$ et $V_q = 0$ pour $q \geq n$).

Pour vérifier la première égalité, il suffit de filtrer $S^*(A_o \otimes V)$ par le degré et de remarquer que l'inclusion naturelle de $S^*(A_o \otimes V)$ dans $S^*(A \otimes V)$ est compatible avec les filtrations.

7. LE THEOREME PRINCIPAL.

THEOREME. - *Soit* $\pi : E \to B$ *un fibré sur un complexe simplicial fini* B *de dimension* n, *à fibre* F n-*connexe. On suppose que le fibré est induit d'un fibré sur un espace* 1 -*connexe.*

Soit Γ_π *l'espace des sections continues du fibré* π.
Soit V *l'espace vectoriel gradué défini par* $V_q = \pi_q(V) \otimes Q$.
Il existe une décomposition de Postnikov de ce fibré

$$\phi : A^*(B) \otimes_\tau S^*(V) \to A^*(E)$$

c'es-à-dire un morphisme de $A^*(B)$-*algèbres différentielles graduées induisant un isomorphisme sur la cohomologie.*
Considérons $A^*(B) \otimes V$ *comme un espace vectoriel gradué en posant* $\deg(a \otimes v) = \deg v - \deg a$. *On peut construire sur l'algèbre des formes multilinaires symétriques* $S^*(A(B))\otimes V)$ *sur* $A^*(B) \otimes V$ *une différentielle et un morphisme d'algèbres différentielles graduées*

$$\Phi : S^*(A^*(B) \otimes V) \to A^*(\Gamma_\pi)$$

induisant un isomorphisme en cohomologie.

Tout est fonctoriel relativement aux restrictions aux sous-complexes de B.
Si A' *est une algèbre différentielle graduée de dimension finie et nulle en degré* $>n$, *et si* $\alpha : A' \to A^*(B)$ *est un morphisme induisant un isomorphisme sur la cohomologie, on peut construire sur* $S^*(A') \otimes V)$ *une différentielle et un morphisme*

$$S^*(A^*(B) \otimes V) \to S^*(A' \otimes V)$$

induisant un isomorphisme sur la cohomologie.

DEMONSTRATION. - Pour un sous-complexe B_o de B, on désignera par

$$\pi_{B_o} : \pi^{-1}(B_o) \to B_o$$

La restriction de π à B_o et par Γ_{π_o} l'espace des sections de ce fibré. En particulier, $\pi = \pi_B$.

Notons $\phi_B : A^*(B) \otimes_\tau S(V) \to A^*(\pi_B)$ le composé de ϕ avec l'inclusion de $A^*(E)$ dans $A^*(\pi_B)$ (cf. notation de 1). Par hypothèse, ce morphisme de $A^*(B)$-modulesinduit un isomorphisme sur la cohomologie. (Dans ce qui suit, il n'est pas nécessaire de supposer que c'est un modèle minimal, mais seulement que le condition H_2' de 5 est vérifiée).

Par restriction aux sous-complexes B_o de B, on obtient des morphismes $\phi_{B_o} : A^*(B_o) \otimes S^*(V) \to A^*(\pi_{B_o})$ qui induisent encore des isomorphismes en cohomologie. Cela se voit en remarquant que ϕ_B envoie la suite spectrale mentionnée en 2 dans celle construite par Grivel dans son exposé. Comme ϕ_B induit des isomorphismes sur les aboutissements de ces suites spectrales et sur les bases, un théorème de comparaison implique qu'il induit un isomorphisme sur la cohomologie des fibres. Autrement dit, pour un sommet b, alors $\phi_b : S^*(V) \to A(\pi_b)$ induit un isomorphisme sur la cohomologie. Remarquons que $A^*(\pi_b)$ est l'algèbre des formes différentielles sur le complexe bisimplicial singulier de la fibre au-dessus de b ; sa cohomologie est celle de la fibre.

Construisons comme dans 3 et 5 une différentielle sur $S^*(A^*(B) \otimes V)$. On peut appliquer la proposition 1' de 5 (en prenant $X = A(\Gamma_\pi)$ et ϕ égal à $e^* o\ \phi_B$), et l'on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A^*(B) \hat{\otimes} A^*(\Gamma_{\pi_B}) & & A^*(\pi) \arrow[ll, "e^*"'] \\
A^*(B) \hat{\otimes} S^*(A^*(B) \otimes V) \arrow[u, "1 \hat{\otimes} \phi_B"] & & A^*(B) \otimes_\tau S^*(V) \arrow[ll, "\varepsilon"'] \arrow[u, "\Phi_B"']
\end{tikzcd}$$

Le morphisme $\phi_B : S^*(A^*(B) \otimes V) \to A(\Gamma_{\pi_B})$ est fonctoriel par rapport aux restrictions aux sous-complexes B_o de B. Lorsqu'on se restreint à un sommet b de B, alors Φ_b se réduit à $e^* o\ \phi_b$; il induit donc un isomorphisme sur la cohomologie, car c'est vrai pour ϕ_b comme on l'a remarqué plus haut, et aussi pour e^* qui est le morphisme naturel faisant passer des formes différentielles sur le complexe bisingulier aux formes différentielles sur le complexe singulier.

Soit B_o un sous-complexe de B. Soit s une section de π_B et s_o sa restriction à B_o. Alors l'application

$$\Gamma_{\pi_B} \to \Gamma_{\pi_{B_o}}$$

obtenue par restriction à B_o est une fibration au sens de Serre ; sa fibre au-dessus de s_o notée $\Gamma_{\pi(B,B_o)}$, est l'espace des sections de π_B qui coïncident avec s_o sur B_o.

Par passage au complexe singulier, on obtient une fibration de Kan, à laquelle on peut appliquer la suite spectrale de l'exposé de Grivel.

Si B_o est de dimension $\leq n-1$, alors la base Γ_{π_B} de ce fibré est simplement connexe, de sorte que le terme E_2 de la suite spectrale s'écrit comme un produit tensoriel.

On va également considérer la suite spectrale de 6. Notons $A = A^*(B)$, $A_o = A^*(B_o)$ et (A,A_o) le noyau de la restriction $A^*(B) \to A^*(B_o)$. (noté I dans 6). Les hypothèses de la proposition 4 sont vérifiées. Pour voir que la cohomologie de $S^*(A,A_o) \otimes V)$ est de dimension finie, on peut appliquer les considérations de 4.

Le morphisme $\Phi_B : S^*(A \otimes V) \to A^*(\Gamma_{\pi_B})$ est compatible avec les filtrations. Par passage au quotient, il induit un morphisme

$$\Phi_{(B,B_o)} : S^*((A,A_o) \otimes V) \to A^*(\Gamma_{\pi_{(B,B_o)}}).$$

En passant au deuxième terme des suites spectrales, on obtient un morphisme d'algèbres

$$H^k(S^*(A_o \otimes V)) \otimes H^\ell(S(A,A_o) \otimes V) \to H^k(\Gamma_{\pi_{B_o}}) \otimes H^\ell(\Gamma_{\pi_{(B,B_o)}})$$

Par les théorèmes de comparaison de suites spectrales, on sait que si deux des morphismes Φ_B, Φ_{B_o} et $\Phi_{(B,B_o)}$ induisent un isomorphisme en cohomologie, c'est aussi vrai pour le troisième. On va raisonner par induction sur la dimension des squelettes de B.

On a déjà vu que Φ_B induit un isomorphisme en cohomologie si B est un point. C'est aussi vrai si B est un simplexe, car dans ce cas Γ_{π_B} a le même type d'homotopie que Γ_{π_b} , où b est un sommet de B ; d'autre part, l'application de $S^*(V)$ dans $S^*(A(B) \otimes V)$ induite par la restriction $A^*(B) \to A^*(b) = Q$ induit un isomorphisme sur la cohomologie (proposition 2).

Supposons que Φ_B induise un isomorphisme sur la cohomologie lorsque la dimension de B_o est $< r < n$. Si B est un r-simplexe et B_o son bord, alors Φ_B et Φ_{B_o} induisent des isomorphismes sur la cohomologie. Il en est de même pour $\Phi_{(B,B_o)}$.

En prenant ensuite pour B_o le squelette de dimension $r-1$ et pour B le squelette de dimension r, alors ce qui précède implique que $\Phi_{(B,B_o)}$ induit un isomorphisme pour la cohomologie (par excision). Il en est de même pour Φ_{B_o} par hypothèse d'induction donc aussi pour Φ_B.

La dernière partie du théorème résulte de considérations analogues à celles du paragraphe 4.

BIBLIOGRAPHIE. -

[1] A. HAEFLIGER, Sur la cohomologie de Gelfand-Fuchs, *Journées différentielles de Dijon*, Springer-Verlag, Lecture Notes.

[2] A. HAEFLIGER, Sur la cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs. A paraître aux Annales de l'E.N.S.

[3] D. SULLIVAN, Infinitesimal computations in topology, to appear.

A. HAEFLIGER
Université de Genève
Section de Mathématiques
2-4 rue du Lièvre,
1211 GENEVE 84.