PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

GILBERT ARSAC

Sur l'espace de Banach engendré par les coefficients d'une représentation unitaire

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1976, tome 13, fascicule 2 , p. 1-101

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1976__13_2_1_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1976 t.13-2

SUR L'ESPACE DE BANACH ENGENDRE PAR LES COEFFICIENTS D'UNE REPRESENTATION UNITAIRE

par Gilbert ARSAC

TABLE DES MATIERES.

Application 1 : Tout A_π est l'ensemble des coefficients d'une représentation π'.

Application 2 : Cas de deux sous-groupes conjugués

Application 3 : Calcul de $A_{\bar{\pi}}$.

Application 4 : Généralisation du résultat de LEPTIN sur les unités approchées de A(G).

B - Etude de A_π quand π est une somme hilbertienne.

C - Etude de $A_{\pi_1} \cap A_{\pi_2}$.

Corollaire 1 : Cas d'une somme hilbertienne de représentations disjointes

Corollaire 2 : Etude de $A_{\pi_1} \subset A_{\pi_2}$.

D - Applications des résultats précédents.

Application 1 : Un contre-exemple pour $B_{\oplus\pi_i}$

Application 2 : Caractérisation des A_π parmi les sous-espaces fermés de B(G). Décomposition de Lebesgue des représentations ; cas de A(G) et de B(G).

Application 3 : Le théorème de restriction pour A(G).

Application 4 : C N S pour que $A_\pi = B_\pi$ quand π est irréductible.

E - Etude de A_π quand π est un produit tensoriel.

Application : C N S pour que A_π soit une algèbre.

F - Propriétés de A_π quand π est une représentation induite.

Cas du produit semi-direct - Algèbre de Fourier d'un produit semi-direct

INTRODUCTION -

Soit G un groupe localement compact ; désignons par $C^*(G)$ la C^*-algèbre enveloppante de $L^1(G)$. Le dual de l'espace de Banach $C^*(G)$ s'identifie à l'espace vectoriel complexe B(G) engendré par l'ensemble P(G) des fonctions continues de type positif sur G. Comme P(G) est stable pour le produit ordinaire des fonctions, B(G) est une algèbre, et c'est même une algèbre de Banach pour la norme de dualité avec $C^*(G)$.

Cette algèbre B(G) a été étudiée par EYMARD [1] qui montre d'autre part que l'ensemble A(G) des coefficients de la représentation régulière gauche de G dans $L^2(G)$ est un idéal fermé de B(G) (appelé algèbre de Fourier de G) dont le dual s'identifie à l'algèbre de Von Neumann VN(G) engendrée, dans l'ensemble des opérateurs continus de $L^2(G)$, par les opérateurs de translation à gauche par G.

Après une première partie de notations et rappels, la deuxième partie de ce travail généralise cette dualité au cas d'une représentaion unitaire continue quelconque π de G : soit A_π l'espace vectoriel fermé engendré dans B(G) par l'ensemble des coefficients de π ; le dual de A_π s'identifie à l'algèbre de Von Neumann VN_π engendrée, dans l'ensemble des opérateurs de l'espace de π, par les opérateurs $\pi(s)$ où $s \in G$. Ceci permet de caractériser les éléments de A_π comme sommes de certaines séries absolument convergentes de coefficients de π et d'étudier les propriétés "fonctorielles" de A_π ; comme application de cette dernière étude, signalons en particulier que si H est un sous-groupe fermé de G, l'ensemble $A_\pi|H$ des restrictions à H des fonctions de A_π est toujours fermé dans B(H). Désignons d'autre part, d'après EYMARD (loc. cit.), par B_π l'ensemble des coefficients des représentations unitaires continues de G qui sont faiblement contenues dans π . On étudie également dans cette deuxième partie certaines propriétés de B_π : les espaces B_π sont des espaces A_π particuliers, caractérisés parmi les A_π par le fait qu'ils sont fermés pour la topologie faible de dualité $\sigma(B(G), C^*(G))$. D'autre part, si π est C.C.R., on a $A_\pi = B_\pi$.

Ainsi, à toute représentation π de G sont associés deux espaces de Banach A_π et B_π ; la troisième partie de ce travail est consacrée à l'étude de la correspondance $\pi \mapsto A_\pi$. C'est ainsi que, après avoir montré que les espaces A_π sont en bijection avec les classes de quasi-équivalence de représentations de G, on étudie comment calculer A_π lorsque π est une somme hilbertienne, un produit tensoriel, une représentation induite, une intégrale de représentations. La simplicité des résultats obtenus constitue une justification a posteriori du choix de l'objet A_π , en ce sens que l'étude de la correspondance qui à π associe l'ensemble de ses coefficients, ou l'espace vectoriel qu'ils engendrent algébriquement, ne conduirait pas à des résultats aussi naturels qu'en fermant ce dernier espace pour la norme de B(G) (ce qui conduit à A_π) ou pour la topologie de la convergence compacte (ce qui conduit à B_π). On signale aussi au passage certaines propriétés de la correspondance $\pi \mapsto B_\pi$ qui donne lieu en général à des résultats moins simples : par exemple, lorsque $\pi = \bigoplus_{i \in I} \pi_i$, alors que A_π est l'ensemble des sommes de séries normalement convergentes de fonctions appartenant aux A_{π_i} , un contre-exemple montre que, lorsque I est infini, il n'en est pas de même pour B_π .

L'étude de A_π , lorsque π est une intégrale de représentations, conduit à ce qui est sans doute l'application principale de cette troisième partie : l'extension au cas des groupes de type I (non nécessairement unimodulaires) de certaines résultats relatifs à la transformation de Fourier inverse, classiques dans le cas abélien. En particulier, le théorème de BOCHNER pour les fonctions de B(G) est déduit d'un résultat plus précis (3. 53) qui caractérise les espaces A_π comme images isométriques, par la transformation de Fourier, d'espaces d'opérateurs à trace intégrables sur le dual.

Diverses autres applications sont données au cours de cette troisième partie. Tout d'abord, on redémontre en l'améliorant le résultat suivant, obtenu par d'autres méthodes par C. HERZ [2] : l'algèbre de Fourier d'un sous-groupe fermé H de G n'est autre que l'ensemble des restrictions à H des fonctions de A(G) ; on étend ensuite au cas d'une représentation induite quelconque en l'améliorant, un résultat démontré par le même auteur pour la représentation régulière : il s'agit d'un principe de "domination" , pour toute représentation induite à partir d'un sous-groupe fermé H, des coefficients de cette représentation par ceux de la représentation quasi-régulière dans $L^2(G(H))$. Cette idée a des applications au comportement à l'infini des coefficients des représentations induites.

Certains résultats, connus pour la représentation régulière gauche, sont également généralisés à une représentation quelconque : c'est ainsi que l'on montre que tout espace A_π admet un unique supplémentaire topologique dans B_π qui soit de la forme $A_{\pi'}$. Dans le cas où G est moyennable (amenable) et où π est la représentation régulière gauche de G, on retrouve ainsi une décomposition de B(G) obtenue par FLORY [1], avec une nouvelle caractérisation du supplémentaire de A(G) qui permet des calculs explicites. On donne aussi une condition nécessaire et suffisante pour que la représentation triviale de dimension un de G soit faiblement contenue dans une représentation π : il faut et il suffit, pour cela, qu'il existe une unité approchée "externe" de A(G) constituée de fonctions de A_π, ce qui redonne, quand π est la représentation régulière gauche, le résultat de LEPTIN [1] sur l'existence d'une unité approchée de A(G) quand G est moyennable.

Sur un plan plus général, cette troisième partie permet d'établir, pour une représentation inéductible, la réciproque d'une propriété signalée dans la deuxième partie : si $A_\pi = B_\pi$, alors π est C.C.R.. On obtient également une caractérisation des espaces A_π parmi les sous-espaces vectoriels fermés de B(G) : ce sont ceux qui sont stables par translation à gauche et à droite.

Dans un prochain article, nous donnerons diverses applications, exemples et contre-exemples, ainsi que la démonstration de certaines résultats, annoncés dans les notes aux compte-rendus de l'Académie des Sciences, qui n'ont pas trouvé place ici.

PREMIERE PARTIE : NOTATIONS ET RAPPELS.

(1.1) ESPACES DE HILBERT. - Tous les espaces de Hilbert dont il sera question seront des espaces de Hilbert complexes. Soit X un tel espace ; la norme d'un vecteur $\xi \in X$ sera notée $|\xi|$, et celle d'un opérateur linéaire continu $T : X \to X$ sera notée $|||T|||$.

(1.2) MESURE DE HAAR. MESURES ET FONCTIONS SUR UN GROUPE. - Soit G un groupe localement compact. On désignera par ds une mesure de Haar à gauche sur G choisie une fois pour toutes ; si G est compact et infini, ds sera supposée normalisée : $\int_G ds = 1$. On désignera par $\mathcal{K}(G)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact et à valeurs complexes définies sur G. Plus généralement, si E est un espace topologique localement compact quelconque, $\mathcal{K}(E)$ désignera l'ensemble défini de manière analogue.

Pour toute fonction complexe f sur G, on définit $\check{f}$ et $\tilde{f}$ par les formules suivantes, où $s \in G$:

$$\check{f}(s) = f(s^{-1}), \quad \tilde{f}(s) = \overline{f(x^{-1})} \ :$$

On désigne par Δ_G (ou Δ, si aucune confusion n'est à craindre) le module de G. Pour toute mesure μ sur G, les mesures $\check{\mu}$ et $\bar{\mu}$ sont définies par les relations suivantes, valables pour toute $f \in \mathcal{K}(G)$:

$$\int_G f(s)\, d\check{\mu}(s) = \int_G f(s^{-1}) d\mu(s) \ , \quad \int_G f(s)\, d\bar{\mu}(s) = \overline{\int_G \bar{f}(s)\, d\mu(s)}$$

Enfin, on désigne par $\mathcal{M}_1(G)$ l'algèbre de Banach involutive des mesures complexes bornées sur G pour le produit de convolution, la norme $||\mu||_1 = \int_G d|\mu|(x)$ et l'involution isométrique $\mu \mapsto \mu^*$ où $\mu^* = \bar{\check{\mu}}$.

(1.3) REPRESENTATIONS. - Par représentation de G, on désignera toujours une représentation unitaire continue de G dans un espace de Hilbert. Soit π une telle représentation, on notera X_π l'espace de Hilbert dans lequel elle s'effectue ; si ξ et η appartiennent à X_π , on notera $\xi *_\pi \eta$ la fonction continue à valeurs complexes définie pour tout $s \in G$ par :

$$(1.4)\quad (\xi *_\pi \eta)(s) = \langle \pi(s)\xi | \eta \rangle .$$

(1.5) NOTATIONS F_π, $C^*(G)$, N_π , N'_π , C^*_π , $B(G)$, B_π , P_π , $P(G)$, N'_s. -

Soit π une représentation de G ; les fonctions $\xi *_\pi \eta$ sont les "coefficients" de π ; elles engendrent linéairement un espace vectoriel complexe que l'on notera F_π . On sait que les fonctions du type $\xi *_\pi \xi$ sont des fonctions de type positif dites "associées" à π. Elles engendrent également F_π .

(1.6) Les représentations unitaires continues de G sont en bijection avec les représentations non dégénérées de l'algèbre involutive $L^1(G)$ et avec les représentations non dégénérées de la C^*-algèbre de G ; elles se prolongent également en représentations de l'algèbre involutive $\mathcal{M}^1(G)$. Si π est une représentation de G, on notera toujours π ces divers prolongements. Pour les propriétés de ces prolongements, cf. DIXMIER [2] , 13.3.5. et 13.9.3. On notera Ker π, N_π et N'_π les noyaux de π considérée respectivement comme représentation de G, de $L^1(G)$, de $C^*(G)$. On sait que le quotient de $C^*(G)$ par N'_π est encore une C^*-algèbre, isométrique à $\pi(C^*(G))$ d'après les propriétés des C^*-algèbres. On notera C^*_π cette C^*-algèbre que l'on identifiera le plus souvent à $\pi[C^*(G)]$ qui, elle, est une C^*-algèbre "concrète" d'opérateurs dans l'espace de Hilbert X_π.

Comme on l'a vu à l'introduction, l'espace vectoriel B(G) des combinaisons linéaires complexes de fonctions continues de type positif sur G (qui est aussi l'ensemble des coefficients de toutes les représentations de G) s'identifie au dual de l'espace de Banach $C^*(G)$ par la formule suivante :

(1.7) si $u \in B(G)$ et $f \in L^1(G) \subset C^*(G)$, on a : $\langle f,u\rangle = \int_G f(x)u(x)dx$.

Dans la suite, B(G) sera toujours considéré comme muni de la norme de dualité avec $C^*(G)$, notée $||u||$, qui en fait un espace de Banach, et même une algèbre de Banach, l'algèbre de Fourier-Stieltjes de G, cf. EYMARD [1].

Comme C^*_π est un quotient de $C^*(G)$, son dual s'identifie à un sous-espace fermé de $B(G)$, que l'on notera B_π, la norme de dualité avec C^*_π étant la norme de $B(G)$, restreinte à B_π. Si l'on identifie C^*_π à $\pi(C^*(G))$, la formule de dualité entre $u \in B_\pi$ et $\pi(f) \in C^*_\pi$, où $f \in L^1(G)$, devient :

(1.8) $\langle\pi(f),u\rangle = \int_G u(x)\ f(x)\ dx.$

D'après EYMARD [1], 2.1 et 2.6, B_π peut être encore être défini de la manière suivante : soit P_π l'ensemble des fonctions sur G, limite uniformes sur tout compact de sommes de fonctions de type positif associées à π ; alors B_π est l'espace vectoriel engendré par P_π , et P_π s'identifie à l'ensemble des formes linéaires positives sur C^*_π . L'ensemble des formes linéaires positives sur $C^*(G)$ s'identifie, lui, à l'ensemble $P(G)$ de toutes les fonctions continues de types positif sur G.

(1.9) Soit π une représentation de G et S un ensemble de représentations de G. Désignons par N'_S l'intersection des N'_ω pour $\omega \in S$. D'après JMG. FELL [1] on dit que π est *faiblement contenue* dans S si $N'_S \subset N'_\pi$. Si S se réduit à un seul élément π', on dit que π est faiblement contenue dans π' (au lieu de : π faiblement contenue dans $\{\pi'\}$). Ceci signifie donc : $N'_{\pi'} \subset N'_\pi$.

Si $N'_\pi = N'_{\pi'}$, on dit que π et π' sont faiblement équivalentes, il revient au même de dire que chacune est faiblement contenue dans l'autre.

DEUXIEME PARTIE : DEFINITION DE L'ESPACE A_π . PROPRIETES GENERALES DE A_π ET DE B_π .

A - (2.1) DEFINITION DE A_π . - *Soit* π *une représentation de* G, *on désigne par* A_π *l'espace vectoriel fermé engendré dans* B(G) *par les coefficients de* π, *c'est-à-dire l'adhérence dans* B(G) *de* F_π.

REMARQUE 1. - Si π est la représentation régulière gauche ρ de G dans $L^2(G)$, alors A_ρ n'est autre que l'algèbre de Fourier A(G) ; l'espace A_π est donc en quelque sorte l' "espace de Fourier" de π. Mais dans le cas de $\pi = \rho$, une simplification importante intervient : l'ensemble des coefficients est déjà un espace vectoriel fermé : cf. EYMARD [1] , p. 218.

REMARQUE 2. - Dans la suite, A_π sera toujours considéré comme un espace de Banach muni de la norme induite par B(G).

REMARQUE 3. - L'inclusion $F_\pi \subset B_\pi$ entraine que A_π est un sous-espace de Banach de B_π.

B - LE DUAL DE A_π . - Pour toute représentation π, on notera VN_π l'algèbre de Von Neumann engendrée par $\pi(G)$ (ou, ce qui revient au même, par $\pi(L^1(G))$ dans l'ensemble $\mathscr{L}(X_\pi)$ des opérateurs bornés de l'espace de Hilbert X_π . Cette algèbre est le bicommutant de $\pi(G)$ (ou de $\pi(L^1(G))$) ; c'est aussi l'adhérence dans $\mathscr{L}(X_\pi)$, pour l'une quelconque des topologies faible, forte, ultrafaible, ultraforte, de $\pi[L^1(G)]$ ou de l'espace vectoriel engendré algébriquement par $\pi(G)$.

On sait (EYMARD [1]) que le dual de $A_\rho = A(G)$ s'identifie à VN_ρ qui est notée habituellement $VN(G)$. Le théorème suivant généralise ce résultat. Il a été d'abord été obtenu dans le cas d'une représentation quasi-régulière par P. NOUYRIGAT [1] . La méthode de démonstration utilise le produit tensoriel topologique dont l'introduction pour l'étude de $A(G)$ est due à C. HERZ [1].

(2.2) THEOREME (i) . - *Le dual de l'espace de Banach* A_π *s'identifie à l'espace de Banach* VN_π *, et* A_π *s'identifie au prédual de* VN_π *, c'est-à-dire à l'ensemble des formes linéaires ultrafaiblement continues sur* VN_π *; la formule d'identification est la suivante : lorsque* $u \in A_\pi$ *et* $f \in L^1(G)$*, on a :*

(2.3) $$\langle u,\pi(f)\rangle = \int_G f(x)u(x)dx.$$

(ii). - *L'espace* A_π *est l'ensemble des* $u \in B(G)$ *qui sont de la forme* $u = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n *_\pi \eta_n$ *où* ξ_n, η_n *appartiennent à* X_π *et* $\sum_{n=1}^{+\infty}|\xi_n||\eta_n| < +\infty$.

(iii) *Soit* $u \in A_\pi$*, la norme de* u *est la borne inférieure des* $\sum_{n=1}^{+\infty}|\xi_n||\eta_n|$ *pour toutes les décompositions possibles de* u *sous la forme* (ii).

DEMONSTRATION. - On va utiliser d'abord le lemme suivant dont nous donnons une démonstration, pour la commodité du lecteur :

(2.4) LEMME. - *Soit* X *un espace de Hilbert,* $\bar{X}$ *l'espace de Hilbert conjugué,* $X \hat{\otimes} \bar{X}$ *le produit tensoriel projectif de* X *et* $\bar{X}$. *Alors le dual de l'espace de Banach* $X \hat{\otimes} \bar{X}$ *s'identifie à l'ensemble* $\mathscr{L}(X)$ *des opérateurs bornés de* X *et, sur* $\mathscr{L}(X)$, *la topologie faible de dualité avec* $X \hat{\otimes} \bar{X}$ *est la topologie ultrafaible, alors que la topologie faible de dualité avec* $X \hat{\otimes} \bar{X}$ *est la topologie faible des opérateurs.*

DEMONSTRATION DU LEMME . - Il est bien connu que le dual de $X \hat{\otimes} \bar{X}$ est $\mathscr{L}(X)$ (cf. TREVES [1], 4.3.8) la formule de dualité étant :

$$(2.5) \qquad < \xi \otimes \eta, T > = < T \xi | \eta > \quad (\xi \in X,\ \eta \in \bar{X},\ T \in \mathscr{L}(X))$$

Le dual de $X \otimes \bar{X}$ muni de la norme induite par $X \hat{\otimes} \bar{X}$ est encore $\mathscr{L}(X)$ puisque $X \otimes \bar{X}$ est dense dans $X \hat{\otimes} \bar{X}$. La formule (2.5) montre que la topologie faible de dualité $\sigma(\mathscr{L}(X), X \otimes \bar{X})$ est la topologie faible des opérateurs. D'autre part, comme tout élément $z \in X \hat{\otimes} \bar{X}$ s'écrit :

$z = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n \otimes \eta_n$ où $\sum_{n=1}^{+\infty} |\xi_n| |\eta_n| < +\infty$ (TREVES [1], théorème 4.5.1), la topologie faible $\sigma(\mathscr{L}(X), X \hat{\otimes} \bar{X})$ est la moins fine de celles qui rendent continues les formes linéaires $T \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} < T\xi_n | \eta_n >$ où $\xi_n \in X$, $\eta_n \in X$, $\sum_{n=1}^{+\infty} |\xi_n| |\eta_n| < +\infty$

Montrons que l'on peut remplacer la condition $\sum_{n=1}^{+\infty} |\xi_n||\eta_n| < +\infty$ par $\Sigma|\xi_n|^2 < +\infty$ et $\Sigma|\eta_n|^2 < +\infty$. Cette nouvelle condition entraîne évidemment la première ; réciproquement, si $z = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n \otimes \eta_n$ avec $\sum_{n=1}^{+\infty} |\xi_n||\eta_n| < +\infty$, posons $\xi_n = \lambda_n x_n$ avec $\lambda_n \geqslant 0$ et $|x_n| = 1$ et de même $\eta_n = \mu_n y_n$ avec $\mu_n \geqslant 0$ et $|y_n| = 1$. Alors $\lambda_n \mu_n = |\xi_n||\eta_n|$. Posons enfin $\xi'_n = \sqrt{\lambda_n \mu_n}\, x_n$ et $\eta'_n = \sqrt{\lambda_n \mu_n}\, y_n$. On obtient :

$$z = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi'_n \otimes \eta'_n \text{ avec } \sum_{n=1}^{+\infty} |\xi'_n|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\eta'_n|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \mu_n < +\infty$$

Par définition, la topologie faible $\sigma(\mathscr{L}(X), X \hat{\otimes} \bar{X})$ est donc bien la topologie ultrafaible.

DEMONSTRATION DE (i) . - Désignons par $\hat{p}$ l'application linéaire de $X_\pi \hat{\otimes} \bar{X}_\pi$ dans $B(G)$ qui à $z \in X_\pi \hat{\otimes} \bar{X}_\pi$ associe $\hat{p}(z)$ définie par : $[\hat{p}(z)](s) = \langle z, \pi(s)\rangle$, $(s \in G)$. Soit p la restriction de $\hat{p}$ à $X_\pi \otimes \bar{X}_\pi$; comme $p(\xi \otimes \eta) = \xi *_\pi \eta$, on a $p(X_\pi \otimes \bar{X}_\pi) = F_\pi$. D'autre part, les formules $||\xi *_\pi \eta|| \leqslant |\xi|\ |\eta|$ (EYMARD, [1], 2.14) et $||\xi \otimes \eta|| = |\xi|\ |\eta|$ montrent que $\hat{p}$ est une application continue de $X_\pi \hat{\otimes} \bar{X}_\pi$ dans $B(G)$.

Le dual de l'espace normé quotient $X_\pi \otimes \bar{X}_\pi/\mathrm{Ker}\ p$ s'identifie au polaire $(\mathrm{Ker}\ p)^\circ$ de Ker p dans $\mathscr{L}(X)$. Or Ker p est, d'après la définition de p, l'orthogonal de $\pi(G)$, c'est-à-dire le polaire de l'espace vectoriel M engendré par $\pi(G)$.

Donc, $(\mathrm{Ker}\ p)^\circ$ est l'adhérence de M pour $\sigma(\mathscr{L}(X_\pi), X_\pi \otimes \bar{X}_\pi)$ c'est-à-dire l'adhérence faible de M (cf. Lemme) ; On en déduit que $(\mathrm{Ker}\ p)^\circ = VN_\pi$ et le même raisonnement montre que le dual de $X_\pi \hat{\otimes} \bar{X}_\pi/\mathrm{Ker}\ \hat{p}$ s'identifie également à VN_π (on utilise cette fois-ci la dualité entre $X_\pi \hat{\otimes} \bar{X}_\pi$ et $\mathscr{L}(X_\pi)$ et $(\mathrm{Ker}\ \hat{p})^\circ$ est l'adhérence ultrafaible de M).

Soit $u \in F_\pi$ et soit $z \in X_\pi \otimes \bar{X}_\pi$ tel que $p(z) = u$; désignons par $\dot{z}$ et $\hat{z}$ les classes de z dans $X_\pi \otimes \bar{X}_\pi/\mathrm{Ker}\ p$ et $X_\pi \hat{\otimes} \bar{X}_\pi/\mathrm{Ker}\ \hat{p}$ respectivement ; on va montrer que $\|u\| = \|\dot{z}\| = \|\hat{z}\|$. Tout d'abord on a :

$$||\dot{z}|| = \sup_{T \in VN_\pi, |||T|||\leqslant 1} |<\dot{z},T>| \text{ et } ||\hat{z}|| = \sup_{T \in VN_\pi, |||T|||\leqslant 1} |<\hat{z},T>|.$$

Mais, il résulte de la définition de la dualité entre $X_\pi \otimes \bar{X}_\pi/\mathrm{Ker}\ p$ et VN_π que $<\dot{z},T> = <z,T>$ et, de même, $<\hat{z},T> = <z,T>$ d'où $||\dot{z}|| = ||\hat{z}||$.

D'autre part, de l'inclusion $\pi(L^1 \quad) \subset VN_\pi$, on déduit :

$||\dot{z}|| \geqslant \sup_{f \in L^1(G), |||\pi(f)|||\leqslant 1} |<z,\pi(f)>|$. On va démontrer l'inégalité contraire en utilisant le théorème de densité de Kaplansky (DIXMIER [1] th. 3, p. 46) : d'après ce théorème, la boule unité de $\pi(L^1(G))$ est dense dans celle de VN_π fortement, donc faiblement. Il en résulte que pour tout $T \in VN_\pi$ tel que $|||T|||<1$, il existe une famille $(f_i)_{i \in I}$ dans $L^1(G)$ vérifiant pour tout $i \in I$, $|||\pi(f_i)||| \leqslant 1$ et telle que pour tout $z \in X_\pi \otimes \bar{X}_\pi$ on ait $<z,T> = \lim\limits_i <z, \pi(f_i)>$, d'où le résultat :

$$||\dot{z}|| = \sup_{f \in L^1(G), |||\pi(f)|||\leqslant 1} |<z, \pi(f)>| \quad .$$

Pour en conclure que $||\dot{z}|| = ||u||$, il suffit de calculer $< z, \pi(f)>$:

soit $z = \sum_{n=1}^{n=N} \xi_n \otimes \eta_n$, on a, d'après (2.5), $< z, \pi(f)> = \sum_{n=1}^{+N} < \pi(f)\ \xi_n|\eta_n >$

$= \sum_{n=1}^{N} \int_G <\pi(s)\xi_n|\eta_n>\ f(s)ds = \int_G < \sum_{n=1}^{N} \pi(s)\xi_n|\eta_n>\ f(s)ds = \int_G u(s)f(s)ds.$

$$||\dot{z}|| = \sup_{f \in L^1(G), |||\pi(f)|||\leq 1} |\int_G u(s)f(x)dx\ |.$$

On reconnait au deuxième membre l'expression de $||u||$ dans la dualité entre C^*_π et B_π donc $||\dot{z}|| = ||u||$.

Il en résulte que la bijection linéaire entre $X \otimes \bar{X}/\text{Ker } p$ et $F_\pi = p(X \otimes \bar{X})$ est une isométrie, donc le dual de F_π s'identifie aussi à VN_π et il en est de même du dual de $\overline{F_\pi} = A_\pi$. La formule d'identification est la suivante : si $u \in F_\pi$ et $f \in L^1(G)$, on a $<u, \pi(f)> = <z, \pi(f)>$ où z est un élément quelconque de $p^{-1}(u)$. D'après le calcul fait ci-dessus, on en déduit que $<u, \pi(f)> = \int_G u(x)\ f(x)dx$. Si maintenant $u \in A_\pi$, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F_π telle que $\lim_{n\ \infty} ||u - u_n|| = 0$. On a :

$<u, \pi(f)> = \lim < u_n, \pi(f) > = \lim \int_G u_n(x)\ f(x)\ dx.$

Mais d'après la formule de dualité (1.8) entre C^*_π et B_π on a

$\int_G u_n(x)f(x)dx = <\pi(f), u_n>$ donc $\lim \int_G u_n(x)f(x)dx = <\pi(f),u> = \int_G u(x)f(x)dx$

ce qui achève la démonstration de (i).

DEMONSTRATION DE (ii) ET DE (iii) . - D'après l'expression des éléments de $X_\pi \hat{\otimes} \bar{X}_\pi$ sous forme de série rappelée plus haut, il suffit de montrer **que** $A_\pi = \hat{p}(X_\pi \hat{\otimes} \bar{X}_\pi)$ pour démontrer (ii). Or, désignons par E l'ensemble **des** $\hat{z}$ où z décrit $X_\pi \otimes \bar{X}_\pi$ et par $\tilde{p}$ la bijection linéaire continue de $X_\pi \hat{\otimes} \bar{X}_\pi$**/Ker** $\hat{p}$ sur $\hat{p}(X_\pi \hat{\otimes} \bar{X}_\pi)$ induite par $\hat{p}$. L'espace vectoriel E est évidemment de**nse dans** $X_\pi \hat{\otimes} \bar{X}_\pi/\mathrm{Ker}\ \hat{p}$, on a $\tilde{p}(E) = F_\pi$ et la restriction de $\tilde{p}$ à E est une **isométrie** (ceci résulte de l'égalité $||u|| = ||\hat{z}||$ vue plus haut). Par conséquent, $\tilde{p}$ est une isométrie, donc $\tilde{p}(X_\pi \hat{\otimes} \bar{X}_\pi)$ est l'adhérence de $\tilde{p}(E)$ c'est-à-dire A_π .

Soit $z \in X_\pi \hat{\otimes} \bar{X}_\pi$; on a $||z|| = \inf \sum_{n=1}^{+\infty} |\xi_n||\eta_n|$ où l'inf est **étendu** à toutes les suites (ξ_n), (η_n) de X_π telles que $\sum_{n=1}^{+\infty} |\xi_n||\eta_n| < +\infty$ et $z = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n \otimes \eta_n$. D'autre part, on vient de voir que, grâce à $\tilde{p}$, **la norme** de A_π s'identifie à la norme quotient de $X \hat{\otimes} \bar{X}/\mathrm{Ker}\ \hat{p}$. L'assertion (iii) **en** résulte.

(2.6) REMARQUES. - 1°) La démonstration de (i) et (ii) montre que A_π **est** isométrique à $X_\pi \hat{\otimes} \bar{X}_\pi/\mathrm{Ker}\ \hat{p} = X_\pi \hat{\otimes} \bar{X}_\pi/(VN_\pi)^\circ$. En particulier, si π est irréductible, A_π est isométrique à $X_\pi \hat{\otimes} \bar{X}_\pi$ car $(VN_\pi)^\circ = \{0\}$.

2°) Lorsque $u \in F_\pi$, P. NOUYRIGAT [1] a démontré que **pour** calculer la norme de u, il suffit de considérer les décompositions *finies* de u dans (2.2) (ii).

On va maintenant montrer que, en fait, la borne inférieure introduite en (iii) est atteinte. Pour cela, on rappelle quelques définitions :

(2.7) RAPPEL. - Soit M une algèbre de Von Neumann et M_* son prédual, on peut munir M_* d'une structure de M-module à gauche (resp. à droite) de la façon suivante : soit $T \in M$, $u \in M_*$, on définit T.u (resp. u.T) par l'égalité, valable pour tout $S \in M$, $\langle T.u,S\rangle = \langle u,ST\rangle$ (resp. $\langle u.T,S\rangle = \langle u,TS\rangle$) (cf. SAKAI, [1] , 1.8.1). On vérifie que si

$$u = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n *_\pi \eta_n \text{ (où } \sum_{n=1}^{+\infty} |\xi_n||\eta_n < +\infty) \text{ on a } T.u = \sum_{n=1}^{+\infty} T\xi_n *_\pi \eta_n \text{ et}$$

$$u.T = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n *_\pi T^* \eta_n. \text{ (cf. NOUYRIGAT [1]).}$$

Lorsque T est de la forme $\pi(\mu)$, où $\mu \in \mathcal{M}^1(G)$, ces expressions s'interprètent comme des produits de convolution :

2.8) PROPOSITION. - *Soit* $\mu \in \mathcal{M}^1(G)$ *et* $u \in A_\pi$ *on a :*

$\pi(\mu).u = u * \Delta\check{\mu}$ *et* $u.\pi(\mu) = \check{\mu} * u$,

et, en particulier, si $h \in L^1(G)$:

$\pi(h).u = u * \check{h}$ *et* $u.\pi(h) = (\Delta^{-1}\check{h}) * u$.

DEMONSTRATION. - Supposons d'abord $u(s) = \langle\pi(s)\xi|\eta\rangle$. D'après ce qui a été rappelé ci-dessus, on a $(\pi(\mu).u)(s) = \langle \pi(s)\pi(\mu)\xi|\eta\rangle = \langle\pi(\mu)\xi|\pi(s^{-1})\eta\rangle =$

$= \int_G \langle\pi(t)\xi|\pi(s^{-1})\eta\rangle\, d\mu(t) = \int_G \langle\pi(st)\xi|\eta\rangle\, d\mu(t) = \int_G u(st)\, d\mu(t) =$

$= \int_G u(st^{-1})\, \Delta(t^{-1})\Delta(t) d\check{\mu}(t) = (u*\Delta\check{\mu})(s)$. On a de même :

$$[u.\pi(\mu)](s) = \langle\pi(s)\xi|\pi(\mu^*)\eta\rangle = \langle \pi(\mu)\ \pi(s)\xi|\eta\rangle = \int_G \langle\pi(t)\pi(s)\xi|\eta\rangle\, d\mu(t) =$$

$$= \int_G u(ts)\, d\mu(t) = \int_G u(t^{-1}s)\, d\check{\mu}(t) = (\check{\mu} * u)(s).$$ Par linéarité, on en déduit les formules annoncées, pour tout $u \in F_\pi$. On remarque ensuite que les applications $u \mapsto u * \Delta\check{\mu}$ et $u \mapsto \check{\mu} * u$, qui sont des applications linéaires et continues de A_π dans $B(G)$ (cf. EYMARD [1], (2.18)), coïncident sur F_π avec $u \mapsto \pi(\mu).u$ et $u \mapsto u.\pi(\mu)$ d'où le résultat. c.q.f.d.

Ceci va nous permettre de préciser la définition de la norme de A_π donnée par (2.2) (iii).

(2.9) PROPOSITION. - *Pour toute* $u \in A_\pi$, *il existe deux suites* $(\xi_n), (\eta_n)$ *dans* X_π *telles que* $u = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n *_\pi \eta_n$ et $||u|| = \sum_{n=1}^{+\infty} |\xi_n|\,|\eta_n|$.

DEMONSTRATION. - On utilise la décomposition polaire des éléments du prédual d'une algèbre de Von Neumann (cf. par exemple DIXMIER [2] , page 240, th. 2.2.4 pour toute $u \in A_\pi$, il existe un opérateur partiellement isométrique $V \in VN_\pi$ et un élément $|u| \in A_\pi$. tels que :

- $|u|$ définit une norme linéaire positive normale sur VN_π et $|||u||| = ||u||$,
- $u = V.\ |u|$.

Comme la forme $|u|$ est positive, il existe une suite (ξ'_n) dans X_π telle que $|u| = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi'_n *_\pi \xi'_n$ (cf. DIXMIER [1], th. 1, page 54).

D'autre part, comme $|u|$ est positive sur VN_π, elle est positive sur $\pi(L^1(G))$ donc sur C^*_π ; ainsi $|u| \in P_\pi$ et $|||u||| = |u|(e) = \sum_{n=1}^{+\infty} |\xi'_n|^2$.
L'égalité $u = \sum_{n=1}^{+\infty} (V\xi'_n) *_\pi \xi'_n$ entraine $||u|| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |v\xi'_n||\xi'_n| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |\xi'_n|^2$.

Or, $\sum_{n=1}^{+\infty} |\xi'_n|^2 = |||u||| = ||u||$ d'où $||u|| = \sum_{n=1}^{+\infty} |V\xi'_n||\xi'_n|$. Il suffit donc de poser $\xi_n = V\xi'_n$ et $\eta_n = \xi'_n$ pour obtenir la décomposition annoncée.

C - PROPRIETES FONCTORIELLES.

L'essentiel de ces propriétés se trouve dans la thèse de P. EYMARD [1] ; la proposition qui suit apporte seulement quelques précisions sur le cas des espaces A_π (énoncé (i)), et permet d'améliorer quelque peu le théorème (2.20) de EYMARD [1] (énoncé (ii) et remarques suivant la démonstration).

On reprend les notations de [1] : soient G_1 et G deux groupes localement compacts et $\sigma: G_1 \to G$ un homomorphisme de groupes ; on suppose de plus σ continu. Pour toute fonction f sur G on note j(f) la fonction $f \circ \sigma$ sur G_1.

(2.10) PROPOSITION. - *Soit π une représentation de* G. *Alors*

(i) $A_{\pi\circ\sigma} = j(A_\pi)$.

(ii) Pour toute $v \in A_{\pi\sigma}$, *il existe* $u \in A_\pi$ *telle que* $v = j(u)$ *et* $||v|| = ||u||$.

DEMONSTRATION. - L'égalité (i) résulte de l'expression des éléments de A_π sous forme de séries : A_π étant l'ensemble des $u \in B(G)$ qui s'écrivent sous la forme $u(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle \pi(s)\xi_n | \eta_n \rangle$, où (ξ_n) et (η_n) sont deux suites, dans l'espace X_π de π, vérifiant $\sum_{n=1}^{+\infty} |\xi_n| |\eta_n| < +\infty$, il en résulte que $j(A_\pi)$ est l'ensemble des fonctions v sur G_1 telles que $v(s_1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle \pi(\sigma(s_1))\xi_n | \eta_n \rangle$; on reconnait que $j(A_\pi) = A_{\pi\circ\sigma}$.

Soit $v \in A_{\pi\circ\sigma}$, et d'après (2.9) soit (ξ_n) et (η_n) des suites dans X_π telles que $v(s_1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle \pi[\sigma(s_1)]\xi_n | \eta_n \rangle$ avec $||v|| = \sum_{n=1}^{+\infty} |\xi_n| |\eta_n|$. On reconnait que v est de la forme $j(u)$ avec $||u|| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |\xi_n| |\eta_n|$, c'est-à-dire $||u|| \leqslant ||j(u)||$. Comme l'inégalité $||j(u)|| \leqslant ||u||$ est toujours vérifiée (cf. EYMARD [1], théorème 2.20) on en déduit (ii).

REMARQUE 1. - D'après (i), $j(A_\pi)$ est toujours fermé dans $B(G_1)$. On verra en (2.23) que pour toute représentation π, il existe une représentation π' telle que $B_\pi = A_{\pi'}$, donc les $j(B_\pi)$ (y compris $j(B(G))$ sont tous fermés dans $B(G_1)$.

REMARQUE 2. - La proposition exprime en particulier que $A_{\pi\circ\sigma}$ est isométrique à $A_\pi/\mathrm{Ker}\,j$. Ce résultat est lié à la proposition (2.37) de P. NOUYRIGAT [1].

REMARQUE 3. - Comme toute $u \in B(G)$ appartient à un espace A_π , l'énoncé (ii) implique en particulier que pour toute $v \in j(B(G))$; il existe $u \in B(G)$ telle que $j(u) = v$ et $||v|| = ||u||$.

(2.11) EXEMPLE 1. - En choisissant pour G_1 le même groupe que G muni d'une topologie plus fine en faisant toujours un groupe localement compact (par exemple la topologie discrète), et pour σ l'application identique de G on obtient le résultat suivant : soit π une représentation de G ; l'espace de Banach A_π ne change pas quand on remplace la topologie de G par une topologie plus fine.

(2.12) EXEMPLE 2. - Soit H un sous-groupe fermé de G. Soit σ l'injection canonique $H \to G$. En faisant jouer à H le rôle de G_1, on obtient des relations entre A_π et $j(A_\pi)$ qui est ici l'ensemble A_π/H des restrictions à H des fonctions de A_π. En particulier, A_π/H est fermé dans $B(H)$ pour toute π, par exemple $B(G)/H$ *est fermé dans* $B(H)$.

D - EXEMPLES D'ESPACES A_π : CAS D'UN GROUPE ABELIEN, CAS D'UNE REPRESENTATION QUASI-REGULIERE.

(2.13) EXEMPLE 1. - Supposons G abélien séparable et supposons que π est une représentation sans multiplicité dans un espace séparable. Alors, il existe une mesure positive μ sur le groupe dual $\hat{G}$ de G telle que, à une équivalence près, π soit la représentation de G dans $L^2(\hat{G},\mu)$ définie par $[\pi(s)f](z) = \langle s,z\rangle f(z)$. Si f et g appartiennent à $L^2(\hat{G},\mu)$ on a donc : $\langle\pi(s)f|g\rangle = \int_{\hat{G}} \langle s,z\rangle f(z)\bar{g}(z)d\mu(z)$, formule qui signifie que $f *_\pi g$ est la transformée de Fourier inverse de la mesure bornée $(f\bar{g}).\mu$. Comme toute fonction $h \in L^1(\hat{G},\mu)$ s'écrit sous la forme $f\bar{g}$, où f et g appartiennent à $L^2(\hat{G},\mu)$, et comme l'application $h \mapsto h.\mu$ est une isométrie de $L^1(\hat{G},\mu)$ dans $\mathcal{M}^1(\hat{G})$, on voit finalement que $L^1(\hat{G},\mu)$ est isométrique à A_π par l'application qui à h associe la transformée de Fourier inverse de $h.\mu$.

On verra plus loin, (3.1), que le fait de se limiter aux représentations sans multiplicité n'est pas gênant, car toute représentation d'un groupe abélien est quasi-équivalente à une représentation sans multiplicité (DIXMIER [2], 5.4.6). On généralisera la caractérisation de A_π au cas des groupes de type I en (3.53) et on donnera une caractérisation de B_π dans ce même cas ((3.41) et (3.56)).

(2.14) EXEMPLE 2. - Supposons G localement compact quelconque et soit H un sous-groupe fermé de G; On reprend les notations classiques suivantes (cf. par ex. Bourbaki [2]) : on désigne par ρ une fonction continue (ou éventuellement borélienne localement bornée) sur G, vérifiant, pour tout $s \in G$, $\rho(s) > o$ et satisfaisant à l'équation fonctionnelle :

(2.15) $$\rho(xh) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)} \rho(x) \text{ , quels que soient } x \in G,\ h \in H.$$

(Δ_H et Δ_G désignent les modules de H et G respectivement). On sait qu'il existe une mesure λ, sur l'espace G/H des classes $\dot{x} = xH$, quasi-invariante par l'action de G c.à.d. telle que l'on ait, pour toute $f \in L^1(G/H,\lambda)$.

$$(2.16)\qquad \int_{G/H} f(s\dot{x})d\lambda(\dot{x}) = \int_{G/H} \chi(s^{-1},\dot{x})f(\dot{x})d\lambda(\dot{x}) \quad (s\in G,\ \dot{x}\in G/H).$$

La mesure λ dépend du choix de ρ. Dans la suite, lorsque G et H seront fixés, on supposera que ρ a été choisie une fois pour toutes (dans certains cas, ce choix sera explicité) et on emploiera les notations $L^1(G/H)$ et $L^2(G/H)$ au lieu de $L^1(G/H,\lambda)$ et $L^2(G/H,\lambda)$.

On notera π_H la représentation *quasi-régulière* de G dans $L^2(G/H)$ définie par :

$$(2.17)\qquad [\pi_H(s)f](\dot{x}) = \sqrt{\chi(s^{-1},\dot{x})}\ f(s^{-1}\dot{x}) \quad (s\in G,\ f\in L^2(G/H))$$

On sait que la classe d'équivalence de π_H ne dépend que de H et non du choix de ρ, ce qui justifie la notation.

On emploiera les notations A_H, B_H, VN_H ... etc. au lieu de A_{π_H}, B_{π_H}, VN_{π_H} ... etc.

Si H est distingué, A_H est une algèbre, qui s'identifie canoniquement à l'algèbre de Fourier $A(G/H)$ (cf. NOUYRIGAT [1]). On verra dans la quatrième partie un certain nombre de propriétés de A_H dans des cas particuliers (H compact, H facteur semi-direct non distingué) et une réciproque de la propriété précédente.

On notera que, dans ce cas, si $z = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \otimes g_n$ appartient à $\overline{L^2(G/H)\hat{\otimes}\, L^2(G/H)}$ avec $\Sigma\|f_n\|_2\|g_n\|_2 < +\infty$) on a :

(2.18) $\left[\hat{p}(z)\right](s) = \int_{G/H} \sqrt{\chi(s^{-1},\dot{x})} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(s^{-1}\dot{x})\, \bar{g}_n(\dot{x})\right) d\lambda(\dot{x})$.

En effet, posons $h_n(\dot{x}) = \sqrt{\chi(s^{-1},\dot{x})}\, f_n(s^{-1}\dot{x})\, \bar{g}_n(\dot{x})$, alors $h_n \in L^1(G/H)$ et $||h_n||_1 \leqslant ||f_n||_2 ||g_n||_2$; la série $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc normalement dans $L^1(G/H)$ et si l'on pose $h = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n$ on a $\int_{G/H} h(\dot{x})\, d\lambda(\dot{x}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{G/H} h_n(\dot{x})\, d\lambda(\dot{x})$ et, pour presque tout $\dot{x}$, $h(\dot{x}) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n(\dot{x})$, ce qui démontre la formule. Il en résulte en particulier que, si $z \in L^2(G/H)\hat{\otimes}\overline{L^2(G/H)}$. La fonction $s \mapsto \int_{G/H} \sqrt{\chi(s^{-1},\dot{x})}\, z(s^{-1}\dot{x},\dot{x})\, d\lambda(\dot{x})$ appartient à A_π et réciproquement.

E - RELATIONS ENTRE A_π ET B_π.

D'après EYMARD [1] , (2.25), la boule unité de B(G) est fermée dans l'espace $\mathscr{C}(G)$ muni de la topologie de la convergence simple. On donnera en (3.42) un contre-exemple montrant que ce résultat est faux pour B_π qui possède cependant la propriété suivante :

(2.19) PROPOSITION. - *La boule unité de* B_π *est fermée dans l'espace* $\mathscr{C}(G)$ *de toutes les fonctions continues sur* G, *muni de la topologie de la convergence compacte.*

DEMONSTRATION. - Soit u_i une famille de fonctions de B_π indexée par un ensemble préordonné filtrant I et vérifiant pour tout $i \in I$, $||u_i|| \leqslant 1$; soit $u \in \mathscr{C}(G)$ telle que $u = \lim u_i$, pour la convergence compacte. D'après la formule de dualité entre C^*_π et B_π rappelée en (1.8), on a, pour toute $f \in L^1(G)$ et tout $i \in I$, $|\int_G f(x)u_i(x)\, dx| \leqslant |||\pi(f)|||$.
Or les hypothèses entraînent que u_i tend vers u faiblement dans $L^\infty(G)$, pour la dualité avec $L^1(G)$ (car on a $||u_i||_\infty \leqslant ||u_i|| \leqslant 1$), donc : $\lim_i |\int f(x)u_i(x)\, dx| = |\int f(x)u(x)\, dx|$. En rassemblant ces deux résultats, on obtient, pour toute $f \in L^1(G)$, $|\int f(x)u(x)dx| \leqslant |||\pi(f)|||$. Ceci montre que $u \in B_\pi$ et que $||u|| \leqslant 1$. c.q.f.d.

(2.20) PROPOSITION. - *B_π est l'ensemble des limites, pour la convergence compacte sur G, de fonctions de A_π bornées en norme ; c'est aussi l'adhérence de A_π pour la topologie faible de dualité $\sigma(B(G), C^*(G))$.*

DEMONSTRATION. - Remarquons que B_π est fermé pour $\sigma(B(G), C^*(G))$ car B_π, étant le dual de $C^*(G)/N'_\pi$ est le polaire de N'_π . D'autre part, d'après (2.19), toute limite, pour la convergence compacte sur G, de fonctions de B_π bornées en norme, appartient à B_π . Il suffit donc de montrer que toute $u \in B_\pi$ est limite de fonctions de A_π pour les deux convergences envisagées.

Soit tout d'abord $u \in P_\pi$; d'après la définition (1.5) de P_π, la fonction u est limite, pour la convergence compacte, d'une famille de fonctions de type positif, $u_i (i \in I)$, appartenant à A_π. On a : $u(e) = \lim u_i(e) = \lim ||u_i||$. La famille $||u_i||$ étant convergente, on peut, quitte à la remplacer par une famille cofinale, la supposer bornée.

Si $u = \tilde{u}$, la décomposition $u = u^+ - u^-$ où $u^+ \in P_\pi$, $u^- \in P_\pi$ (cf. **EYMARD [1]** (2.6), 2°) fournit le même résultat. Enfin, si u est quelconque, la décomposition $u = \frac{u+\tilde{u}}{2} + i\,\frac{i\tilde{u} - iu}{2}$ permet de se ramener au cas précédent.

Ainsi toute $u \in B_\pi$ est limite pour la convergence compacte sur G d'une famille u_i de fonctions de A_π bornées en norme. On a déjà vu au cours de la démonstration de (2.19), que ce type de convergence entraîne que l'on a, pour toute $f \in L^1(G)$, $\lim \int u_i(x)f(x)dx = \int u(x)f(x)dx$. Autrement dit, les u_i convergent vers u simplement sur $L^1(G)$, qui est une partie dense de $C^*(G)$. Comme les $||u_i||$ sont bornés, l'ensemble $\{u_i,\ i \in I\} \cup \{u\}$ est équicontinu, donc $u = \lim u_i$ pour $\sigma(B(G), C^*(G))$.

(2.21) THEOREME. - *Supposons que pour toute* $f \in L^1_1(G)$, *l'opérateur* $\pi(f)$ *soit compact, autrement dit supposons que la représentation* π *soit C.C.R. Alors* $A_\pi = B_\pi$.

DEMONSTRATION. - Soit $\mathscr{L}c(X_\pi)$ la C^*-algèbre des opérateurs compacts de X_π ; on a $\pi(L^1(G)) \subset \mathscr{L}c(X_\pi)$ d'où $C^*_\pi \subset \mathscr{L}c(X_\pi)$. On va en déduire que l'on peut appliquer à C^*_π et VN_π le résultat 12.1.1. de J. DIXMIER [2] : pour que le dual $C^{*\prime}_\pi$ de C^*_π s'identifie au prédual de VN_π, il suffit que toute forme linéaire normiquement continue sur C^*_π soit ultrafortement continue.

Or, d'après le théorème de Hahn-Banach, toute forme linéaire normiquement continue sur C^*_π est la restriction d'une forme linéaire normiquement continue sur $\mathscr{L}c\,(X_\pi)$ et l'on sait qu'une telle forme est toujours ultrafortement continue. (J. DIXMIER [2] 12.1.2.). Par conséquent, l'application qui à tout élément ϕ du prédual de VN_π associe sa restriction à C^*_π est un isomorphisme du prédual de VN_π sur $C^{*\prime}_\pi$. Cet isomorphisme induit un isomorphisme de A_π sur B_π, qui à toute $u \in A_\pi$ associe $\theta(u) \in B_\pi$ telle que l'on ait, pour tout $T \in C^*_\pi$:

$$< T, \theta(u) > = < T, u > ;$$

d'où pour $T = \pi(f)$ avec $f \in \mathscr{K}(G)$:

$$\int_G [\theta(u)]\,(x)\ f(x)\ dx = \int_G u(x)\ f(x)\ dx.$$

Ainsi $\theta(u) = u$ c.à.d. $B_\pi = A_\pi$.

(2.22) REMARQUES. – 1) La proposition précédente s'applique en particulier dans les cas suivants :

1er cas : G est liminaire et π irréductible : dans ce cas, par définition, les hypothèses de (2.21) sont toujours réalisées. C'est le cas si G est un groupe compact ou un groupe de Lie réel connexe, nilpotent ou semi-simple.

2-ème cas : G est quelconque et π est la représentation quasi-régulière π_H associée à un sous-groupe fermé H tel que l'espace homogène G/H soit compact : d'après SCHOCHETMAN [1] l'hypothèse de (2.21) est vérifiée donc $A_H = B_H$. Le problème de la réciproque reste ouvert : l'égalité $A_H = B_H$ entraîne t-elle que G/H soit compact ? Une réponse affirmative constituerait une autre démonstration et une généralisation du résultat suivant de RICKERT [1] : si $A(G) \subset L^2(G)$, G est compact. En effet, si $A(G) \subset L^2(G)$, on montre, grâce au théorème du graphe fermé, qu'il existe une constante C telle que l'on ait pour toute $u \in A(G)$, $||u||_2 \leq C\, ||u||$, d'où l'on déduit, grâce à (2.20), $B_\rho(G) \subset L^2(G)$ et enfin, en utilisant DIXMIER [2] 13.8.6 , $A(G) = B_\rho(G)$.

2) On démontrera en (3.24) que la réciproque de (2.21) est exacte si π est irréductible.

(2.23). - On sait, (cf. par exemple DIXMIER [2]) que, à toute $u \in P(G)$, on peut associer une représentation π_u de G et un vecteur $\xi_u \in X_{\pi_u}$, totalisateur pour π_u, tels que $u(s) = \langle \pi_u(s)\, \xi_u | \xi_u \rangle$ pour $s \in G$, et $\langle u, g \rangle = \langle \pi_u(g)\, \xi_u | \xi_u \rangle$ pour $g \in C^*(G)$. La représentation $\omega = \bigoplus_{u \in P(G)} \pi_u$ considérée comme représentation de $C^*(G)$, est le représentation "universelle" de $C^*(G)$.

Pour toute représentation π de G, on notera ω_π la sous-représentation de ω définie par $\omega_\pi = \bigoplus_{u \in P_\pi} \pi_u$. On a le résultat suivant :

(2.24) PROPOSITION. - *Pour toute représentation* π *de* G, *on a* $B_\pi = B_{\omega_\pi} = A_{\omega_\pi}$

DEMONSTRATION. - Il suffit essentiellement de remarquer que, en tant que représentation de $C^*(G)$, la représentation ω_π se factorise en $\omega_\pi = \alpha_\pi \circ \pi$ où α_π est la représentation universelle de $C^*_\pi = \pi(C^*(G))$. On sait en effet que si $u \in P_\pi$, le noyau N'_{π_u} de π_u dans $C^*(G)$ contient le noyau N'_π de π, donc π_u se factorise en $\pi'_u \circ \pi$ où π'_u est une représentation de C^*_π dans X_{π_u}. Comme $\omega_\pi = \bigoplus_{u \in P_\pi} \pi_u$, on en déduit que $\omega_\pi = (\bigoplus_{u \in P_\pi} \pi'_u) \circ \pi$

Posons $\alpha_\pi = \bigoplus_{u \in P_\pi} \pi'_u$ et montrons que α_π est équivalente à la représentation universelle de C^*_π. Pour cela, désignons par ϕ_u la forme linéaire positive définie sur C^*_π par u. On a pour tout $g \in C^*(G)$,
$\phi_u(\pi(g)) = \langle g,u\rangle = \langle \pi_u(g)\xi_u | \xi_u\rangle = \langle \pi'_u[\pi(g)]\xi_u|\xi_u\rangle$.

Par conséquent, pour toute $u \in P_\pi$, π'_u est une représentation de C^*_π dans X_{π_u}, liée à ϕ_u par la formule précédente dans laquelle ξ_u désigne un vecteur totalisateur pour π'_u. Par définition, α_π est donc, à une équivalence près, la représentation universelle de C^*_π. On sait que α_π possède les propriétés suivantes (cf. DIXMIER [2] 2.7.6 et 12.1.3).

a) α_π est une isométrie. On en déduit que $\mathrm{Ker}\,\omega_\pi = \mathrm{Ker}\,\pi$ c.à.d. $N'_{\omega_\pi} = N'_\pi$ d'où $B_{\omega_\pi} = B_\pi$ (1.5).

b) Comme dans la proposition (2.21), le prédual de VN_{ω_π} s'identifie au dual de $C^*_{\omega_\pi}$: en effet VN_{ω_π} est l'algèbre de Von Neumann engendrée par $C^*_{\omega_\pi} = \alpha_\pi(C^*_\pi)$ donc on peut appliquer le corollaire 12.1.3 de J. DIXMIER [2] . On en déduit $A_{\omega_\pi} = B_{\omega_\pi}$. c.q.f.d.

REMARQUE. - D'après les propriétés de la représentation universelle d'une C^*-algèbre (DIXMIER [2] , 12.1.3), on sait aussi que toute forme linéaire ultrafaiblement continue sur VN_{ω_π} est faiblement continue ce qui signifie que toute $u \in A_{\omega_\pi} = B_\pi$ s'écrit sous la forme $u(s) = \langle\omega_\pi(s)\xi|\eta\rangle$ $(s \in G,\ \xi \in X_{\omega_\pi},\ \eta \in X_{\omega_\pi})$.

TROISIEME PARTIE : ETUDE DE LA CORRESPONDANCE $\pi \to A_\pi$

A - ETUDE DE L'EGALITE $A_{\pi_1} = A_{\pi_2}$

(3.1) PROPOSITION. - *Soit* π_1 *et* π_2 *deux représentations de* G.

(i) Pour que π_1 *soit faiblement contenue dans* π_2 *, il faut et il suffit que* $B_{\pi_1} \subset B_{\pi_2}$.

(ii) Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- π_1 *est quasi-équivalente à* π_2
- $A_{\pi_1} = A_{\pi_2}$.

DEMONSTRATION. - B_{π_1} , étant le dual de l'espace de Banach $C^*_{\pi_1} = C^*(G)/N'_{\pi_1}$ est le polaire, dans B(G), du sous-espace vectoriel fermé N'_{π_1} de $C^*(G)$:

(3.2) $B_{\pi_1} = (N'_{\pi_1})^\circ$ d'où $B^\circ_{\pi_1} = (N'_{\pi_1})^{\circ\circ} = N'_{\pi_1}$.

Ainsi, l'inclusion $B_{\pi_1} \subset B_{\pi_2}$ est équivalente à $B_{\pi_1}{}^\circ \supset B_{\pi_2}{}^\circ$, c.à.d. à $N'_{\pi_1} \supset N'_{\pi_2}$, ce qui démontre (i). On en déduit aussi que π_1 est faiblement équivalente à π_2 si et seulement si $B_{\pi_1} = B_{\pi_2}$.

Pour démontrer que $A_{\pi_1} = A_{\pi_2}$ si et seulement si π_1 est quasi-équivalente à π_2 , on va utiliser le résultat suivant (DIXMIER [3], 5.3.1) : π_1 est quasi-équivalente à π_2 si et seulement s'il existe un isomorphisme Φ de VN_{π_1} sur VN_{π_2} tel que : $\pi_2(f) = \Phi(\pi_1(f))$ pour toute $f \in L^1(G)$.

Supposons $A_{\pi_1} = A_{\pi_2}$. Alors $A'_{\pi_1} = A'_{\pi_2}$, donc il existe un isomorphisme d'espaces de Banach, Φ , de VN_{π_1} (qui s'identifie à A'_{π_1}), sur VN_{π_2} (qui s'identifie à A'_{π_2}). A tout opérateur T appartenant à VN_{π_1} , Φ associe $\Phi(T)$ défini par l'égalité suivante :

Pour toute $u \in A_{\pi_1}$, $\langle u,T\rangle = \langle u,\Phi(T)\rangle$;

d'où : $\langle u,\pi_1(f)\rangle = \langle u,\Phi[\pi_1(f)]\rangle$.

mais : $\langle u,\pi_1(f)\rangle = \int_G u(s)\ f(s)\ ds = \langle u,\pi_2(f)\rangle$

d'où : $\pi_2(f) = \Phi[\ \pi_1(f)]$

On en déduit que, pour T, T', éléments de $\pi_1(L^1(G))$, on a :

$$\Phi(T\ T') = \Phi(T)\ \Phi(T').$$

Or, $\pi(L^1(G))$ est ultrafaiblement dense dans VN_{π_1}, l'application $(T,T') \to TT'$ est séparément continue pour la topologie ultrafaible, et Φ reste continue quand on munit VN_{π_1} et VN_{π_2} de leurs topologies ultrafaibles puisque ces topologies sont les topologies faibles de dualité avec A_{π_1} et A_{π_2} . On en déduit que Φ est un isomorphisme d'algèbres, donc π_1 et π_2 sont quasi-équivalentes.

Réciproquement, supposons π_1 et π_2 quasi-équivalentes. Soit Φ l'isomorphisme d'algèbres de VN_{π_1} sur VN_{π_2} vérifiant $\Phi(\pi_1(f)) = \pi_2(f)$ pour toute $f \in L^1(G)$. Comme VN_{π_1} et VN_{π_2} sont isomorphes, leurs préduals A_{π_1} et A_{π_2} sont isomorphes : il existe une isométrie $\Theta : A_{\pi_1} \to A_{\pi_2}$ définie par la propriété suivante :

pour toute $u \in A_{\pi_1}$ et tout $T \in VN_{\pi_1}$ on a : $\langle u,T\rangle = \langle \theta(u), \Phi(T)\rangle$.

On en déduit que $\langle u,\pi_1(f)\rangle = \langle \theta(u),\Phi(\pi_1(f))\rangle = \langle \theta(u), \pi_2(f)\rangle$, autrement dit

$$\int_G u(s)\ f(s)\ ds = \int_G [\theta(u)]\ (s)\ f(s)\ ds.$$

Cette égalité, valable pour toute $f \in L^1(G)$, entraîne $u = \theta(u)$ puisque u et $\theta(u)$ sont continues. Ainsi $A_{\pi_1} = A_{\pi_2}$. c.q.f.d.

REMARQUE. - L'inclusion $A_{\pi_1} \subset A_{\pi_2}$ sera étudiée en (3.14).

(3.3) APPLICATION 1. - Pour tout cardinal c, les représentations π et $c\pi$ sont quasi-équivalentes donc $A_{c\pi} = A_\pi$. En particulier, soit ∞ le cardinal du dénombrable, on a $A_\pi = A_{\infty\pi}$ et, plus précisément, A_π est exactement l'ensemble des coefficients de $\infty\pi$; en effet, toute $u \in A_\pi$ s'exprime sous la forme

$u(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle \pi(s)\xi_n|\eta_n\rangle$ où les vecteurs ξ_n et η_n appartiennent à X_π et où l'on peut supposer, comme dans la démonstration de (2.4), que $\Sigma|\xi_n|^2 < +\infty$ et $\Sigma|\eta_n|^2 < +\infty$ ce qui signifie que u est un coefficient de $\infty\pi$

La réciproque résulte de l'inclusion $F_{\infty\pi} \subset A_{\infty\pi}$.

(3.4) APPLICATION 2. - Soit H_1 et H_2 deux sous-groupes fermés de G. S'il existe $a \in G$ tel que $H_2 = a\, H_1\, a^{-1}$, on vérifie facilement que π_{H_1} et π_{H_2} sont équivalentes, d'où $A_{H_1} = A_{H_2}$. Mais la réciproque est fausse : il existe des exemples de sous-groupes fermés propres H tels que $A_H = A(G)$. (cf. G. ARSAC [2], th. 4).

(3.5) APPLICATION 3. - Désignons par $\bar{A}_\pi$ (resp. $\check{A}_\pi$) l'ensemble des $\bar{u}$ (resp. des $\check{u}$) où u décrit A_π. On a le résultat suivant :

(3.6) PROPOSITION. - *Soit $\bar{\pi}$ la représentation conjuguée de π. On a $\bar{A}_\pi = \check{A}_\pi = A_{\bar{\pi}}$ et l'égalité $A_\pi = \bar{A}_\pi = \check{A}_\pi$ est réalisée si et seulement si π est quasi-équivalente à $\bar{\pi}$.*

DEMONSTRATION. - Rappelons que $\bar{\pi}$ est la représentation de G dans l'espace de Hilbert $\bar{X}$, conjugué de l'espace X de π, définie par $\bar{\pi}(s) = \pi(s)$ pour tout $s \in G$. Désignons par $< \mid >_{\bar{H}}$ et $< \mid >_H$ les produits scalaires dans $\bar{H}$ et H respectivement. Soit u un coefficient de $\bar{\pi}$: $u(s) = <\bar{\pi}(s)\xi|\eta>_{\bar{H}}$. D'après la définition du produit scalaire dans $\bar{H}$, $u(s) = \overline{<\pi(s)\xi|\eta>_H} =$ $= <\pi(s^{-1})\eta|\xi>_H$. On déduit de ceci que $\bar{u} \in F_\pi$ et $\check{u} \in F_\pi$ donc par linéarité $F_{\bar{\pi}} \subset \bar{F}_\pi$ et $F_{\bar{\pi}} \subset \check{F}_\pi$. En remplaçant π par $\bar{\pi}$ on obtient : $F_\pi \subset \bar{F}_{\bar{\pi}}$ et $F_\pi \subset \check{F}_{\bar{\pi}}$ d'où finalement $F_{\bar{\pi}} = \bar{F}_\pi = \check{F}_\pi$. Comme les applications $u \to \bar{u}$ et $u \to \check{u}$ sont des isométries de B(G) on obtient en définitive $A_{\bar{\pi}} = \bar{A}_\pi = \check{A}_\pi$ et la conclusion de la proposition résulte de (3.1).

EXEMPLE. - Si π la représentation quasi-régulière de G dans $L^2(G/H)$, où H est un sous-groupe fermé de G, la formule $\bar{\pi}(s)\bar{f} = \overline{\pi(s)f}$ valable pour $s \in G$, $f \in L^2(G/H)$ montre que $\bar{\pi}$ est équivalente à π grâce à l'isométrie $f \to \bar{f}$ de $L^2(G/H)$ sur $L^2(G/H)$. Ainsi $A_H = \bar{A}_H = \check{A}_H$. En revanche, pour une représentation non quasi-régulière, il est possible que $A_\pi \cap A_{\bar{\pi}} = \{o\}$;

c'est le cas, par exemple, si G est abélien et si π est définie par un caractère non trivial γ de G. Alors $\bar{\pi}$ est définie par $\bar{\gamma} = \gamma^{-1}$ et A_π et $A_{\bar{\pi}}$ sont les espaces vectoriels de dimension 1 engendrés par γ et γ^{-1} : leur intersection est réduite à $\{o\}$.

(3.7) APPLICATION 4. GENERALISATION DU RESULTAT DE LEPTIN SUR LES UNITES APPROCHES DE A(G). -

D'après l'assertion (i) de la proposition (3.1) la représentation π' est faiblement contenue dans π si et seulement si on a l'inclusion $B_{\pi'} \subset B_\pi$. Lorsque π est la représentation régulière de G et π' la représentation triviale de dimension 1, LEPTIN [1] a démontré que ceci équivaut à l'existence, dans l'algèbre de Banach A(G), d'une unité approchée bornée. La proposition suivante généralise ce résultat. Elle montre en particulier que la représentation triviale de dimension 1 est faiblement contenue dans π si et seulement si il existe, dans A_π , une unité approchée "externe" bornée pour A(G) ; de façon précise :

PROPOSITION. - *Soit* π' *une représentation d'un groupe localement compact* G, *admettant un vecteur totalisateur* ξ'. *Soit* $u \in P_{\pi'}$, *la fonction sur* G *définie par* $u(s) = \langle \pi'(s)\xi' | \xi' \rangle$. *Pour que* π' *soit faiblement contenue dans une représentation* π *de* G, *il faut et il suffit qu'il existe une suite généralisée* $(u_i)_{i \in I}$ *de fonctions de* A_π *bornées en norme telle que, pour toute* $v \in A(G)$, *on ait* $\lim_I ||u_i v - uv|| = 0$.

DEMONSTRATION. - Si π' est faiblement contenue dans π, on sait par définition que u est limite uniforme sur tout compact de fonctions $(u_i)_{i \in I}$ où les u_i sont des sommes de fonctions de type positif associées à π, donc des éléments de A_π. On a $\lim_I u_i(e) = u(e)$, ce qui s'écrit aussi $\lim ||u_i|| = ||u||$; quitte à remplacer la famille $(u_i)_{i \in I}$ par une famille cofinale, on peut donc supposer les $||u_i||$ bornés. On sait alors (cf. la démonstration de (2.19)) qu'il en résulte, pour toute $f \in L^1(G)$, $\lim_I \int_G u_i(x)\ f(x)\ dx = \int_G u(x)\ f(x)\ dx$. On applique alors le résultat suivant dû à MAC KENNON [1], théorème (5.5) page 47 :

LEMME. - *Soit* $u \in P(G)$, *et soit* $(u_i)_{i \in I}$ *une suite généralisée dans* B(G) *vérifiant :*

(i) $\lim_I ||u_i|| = ||u||$,

(ii) Pour toute $f \in L^1(G)$, $\lim \int_G u_i(x)\ f(x)\ dx = \int_G u(x) f(x) dx$.

Alors, pour toute $v \in A(G)$, *on a* $\lim_I ||u_i v - uv|| = 0$.

Réciproquement, supposons qu'il existe dans A_π une famille $(u_i)_{i \in I}$ possédant les propriétés de l'énoncé et montrons qu'alors $u = \lim u_i$ pour $\sigma(B(G), C^*(G))$, ce qui entraînera $u \in B_\pi$ (2.20), donc $u \in P_\pi$ car $B_\pi \cap P(G) = P_\pi$ (ceci résulte de EYMARD [1], remarque (2.6),2°).

Comme la famille des $||u_i||$ est bornée, il suffit de montrer que $u = \lim_I u_i$ pour $\sigma(B(G)), \mathcal{K}(G))$. Soit $f \in \mathcal{K}(G)$, et soit K le support de f ; soit $v \in A(G)$ telle que $v(x) = 1$ lorsque $x \in K$ de sorte que $vf = f$, on a :

$$\int_G (u_i(x) - u(x))\ f(x)\ dx = \int_G (u_i(x) - u(x))\ v(x)\ f(x)\ dx = \langle u_i v - uv, \rho(f)\rangle$$

dans la dualité $(B(G), C^*(G))$. On en déduit que u appartient à P_π ce qui signifie que π' est faiblement contenue dans π (cf. DIXMIER [2] 3.4.9).

B - ETUDE DE A_π QUAND π EST UNE SOMME HILBERTIENNE.

(3.8) LEMME. - *Soit* π_1 *une sous-représentation de* π_2. *Alors,* A_{π_1} *est un sous-espace de* A_{π_2}.

DEMONSTRATION. - Il suffit de remarquer que, du fait de l'inclusion $X_{\pi_1} \subset X_{\pi_2}$, tout coefficient de π_1 est un coefficient de π_2 ; on a donc l'inclusion $F_{\pi_1} \subset F_{\pi_2}$ et, par passage à l'adhérence dans $B(G)$, $A_{\pi_1} \subset A_{\pi_2}$.

(3.9) THEOREME. - *Soit* $(\pi_i)_{i \in I}$, *une famille de représentations de* G.

Soit $\pi = \bigoplus_{i \in I} \pi_i$ *leur somme hilbertienne. Alors :*

(i) A_π *est l'ensemble des* $u \in B(G)$ *qui s'écrivent* $u = \sum_{i \in I} u_i$ *où* $u_i \in A_{\pi_i}$ *et* $\sum_{i \in I} ||u_i|| < +\infty$.

(ii) Pour toute $u \in A_\pi$, *on a* $||u|| = \inf \sum_{i \in I} ||u_i||$ *où l'inf est étendu à toutes les familles* $(u_i)_{i \in I}$ *avec* $u_i \in A_{\pi_i}$, *telles que* $\sum_{i \in I} ||u_i|| < +\infty$ *et* $u = \sum_{i \in I} u_i$. *De plus, cette borne inférieure est atteinte.*

(iii) Si I *est fini,* B_π *est la somme algébrique des* B_{π_i} *et, pour tout* $u \in B_\pi$*, on a* $||u|| = \inf \sum_{i \in I} ||u_i||$ *où l'inf est étendu à toutes les familles* $u_i (i \in I)$ *avec* $u_i \in B_{\pi_i}$ *et* $u = \sum_{i \in I} u_i$*.*
De plus, cette borne inférieure est atteinte.

DEMONSTRATION DE (i) ET (ii). - D'après le lemme (3.8), pour tout i, A_{π_i} est un sous-espace de A_π, de sorte que toute famille $(u_i)_{i \in I}$ vérifiant $u_i \in A_{\pi_i}$ et $\Sigma ||u_i|| < +\infty$ est une famille sommable dans A_π ; toute fonction de la forme envisagée dans (i) appartient donc à A_π.

Réciproquement, soit $u \in A_\pi$, il existe deux suites (ξ_n), (η_n), dans X_π, vérifiant $\sum_{n=1}^{+\infty} |\xi_n||\eta_n| < +\infty$, et telles que pour tout $s \in G$, on ait $u(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} < \pi(s)\xi_n|\eta_n>$.

Comme $X_\pi = \bigoplus_{i \in I} X_{\pi_i}$, on peut écrire :

$$\xi_n = \sum_{i \in I} \xi_n \text{ , avec } \xi_n \in X_{\pi_i} \text{ , et } |\xi_n|^2 = \sum_{i \in I} |\xi_n|^2$$

et de même : $\eta_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \eta_{ni}$, avec $\eta_{ni} \in X_{\pi_i}$ et $|\eta_n|^2 = \sum_{i \in I} |\eta_{ni}|^2$.

On a alors : $\pi(s)\xi_n = \sum_{i \in I} \pi_i(s)\xi_{ni}$ et $< \pi(s)\xi_n|\eta_n > = \sum_{I \in i} < \pi_i(s)\xi_{ni}|\eta_{ni}>$

d'où $u(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I} < \pi_i(s)\xi_{ni}|\eta_{ni} >\right)$.

Or la famille de nombres complexes $(<\pi_i(s)\xi_{ni}|\eta_{ni}>)_{\substack{i\in I\\ n\in N^*}}$ est absolument sommable car $|<\pi_i(s)\xi_{ni}|\eta_{ni}>| \leqslant |\xi_{ni}||\eta_{ni}|$ et

$\sum_{i\in I}|\xi_{ni}||\eta_{ni} \leqslant (\sum_{i\in I}|\xi_{ni}|^2)^{1/2}(\sum_{i\in I}|\xi_{ni}|^2)^{1/2} = |\xi_n||\eta_n|$ d'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_{i\in I}|\xi_{ni}||\eta_{ni}|) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}|\xi_n||\eta_n| < +\infty.$$

On en déduit que $u(s) = \sum_{i\in I}(\sum_{n=1}^{+\infty}<\pi_i(s)\xi_{ni}|\eta_{ni}>)$. Posons

$u_i(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}<\pi_i(s)\xi_{ni}|\eta_{ni}>$, comme $\sum_{n=1}^{+\infty}|\xi_{ni}||\eta_{ni}| < +\infty$, $u_i \in A_{\pi_i}$ et

$||u_i|| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}|\xi_{ni}||\eta_{ni}|$. On en déduit $\sum_{i\in I}||u_i|| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}|\xi_n||\eta_n$ ce qui démontre (i).

D'autre part, pour toute décomposition $u = \sum_{i\in I}u_i$ avec $u_i \in A_{\pi_i}$ et $\sum_{i\in I}||u_i|| < +\infty$, on a $||u|| \leqslant \sum_{i\in I}||u_i||$, ce qui montre déjà que l'on a :

$||u|| \leqslant \inf \sum_{i\in I}||u_i||$. Mais on sait ((2.2), iii) que $||u|| = \inf \sum_{n=1}^{+\infty}||\xi_n||\eta_n|$

et la démonstration de (i) montre que, à toute décomposition de u sous la forme $u = \sum_{n=1}^{+\infty}\xi_n *_\pi \eta_n$, avec $\sum_{n=1}^{+\infty}|\xi_n||\eta_n| < +\infty$, on peut associer une décomposition de u de la forme $u = \sum_{i\in I}u_i$, avec $u_i \in A_{\pi_i}$ et

$\sum_{i\in I}||u_i|| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}|\xi_n||\eta_n|$. Ceci montre que $||u||$ est bien la borne inférieure des $\sum_{i \in I} ||u_i||$, et comme on peut choisir $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $||u|| = \sum_{n=1}^{+\infty} |\xi_n||\eta_n|$ (2.9), la borne inférieure est atteinte.

DEMONSTRATION DE iii : Comme I est fini, pour prouver que B_π est la **somme** algébrique des B_{π_i}, on peut se limiter au cas où $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$ et $X_\pi = X_{\pi_1} \oplus X_{\pi_2}$: le résultat général s'en déduit par récurrence. **Rappelons** que l'on note C^*_π, $C^*_{\pi_1}$ et $C^*_{\pi_2}$ les C^*-algèbres $\pi(C^*(G))$, $\pi_1(C^*(G))$ et $\pi_2(C^*(G))$. Si $g \in C^*(G)$ et si $\xi_1 \in X_{\pi_1}$ et $\xi_2 \in X_{\pi_2}$ on a

$$[\pi(g)](\xi_1 + \xi_2) = \pi_1(g)\xi_1 + \pi_2(g)\,\xi_2$$

et $\quad |||\pi(g)||| = \mathrm{Max}(|||\pi_1(g)|||, |||\pi_2(g)|||)$

Il en résulte que l'on peut définir une application linéaire $\phi : C^*_\pi \to C^*_{\pi_1} \times C^*_{\pi_2}$ par la formule $\phi(\pi(g)) = (\pi_1(g), \pi_2(g))$, et que ϕ est une isométrie quand on munit $C^*_{\pi_1} \times C^*_{\pi_2}$ de la norme

$||(T_1,T_2)|| = \mathrm{Max}(|||T_1|||, |||T_2|||)$ qui en fait un espace de Banach. On va utiliser le fait que le dual de cet espace de Banach s'identifie à la somme des duals de $C^*_{\pi_1}$ et $C^*_{\pi_2}$, c'-à-d. à l'espace de Banach $B_{\pi_1} \oplus B_{\pi_2}$ obtenu en munissant $B_{\pi_1} \times B_{\pi_2}$ de la norme $||(u_1,u_2)|| = ||u_1|| + ||u_2||$, au moyen de la formule suivante :

$$\langle (T_1,T_2),(u_1,u_2)\rangle = \langle T_1,u_1\rangle + \langle T_2,u_2\rangle .$$

Le dual B_π de C^*_π , s'identifie au dual de $\phi(C^*_\pi)$ c.à.d. au quotient de $B_{\pi_1} \oplus B_{\pi_2}$ par l'orthogonal E de $\phi(C^*_\pi)$ dans $B_{\pi_1} \oplus B_{\pi_2}$. Autrement dit, pour tout $(u_1,u_2) \in B_{\pi_1} \times B_{\pi_2}$, il existe $u \in B_\pi$ tel que l'on ait, pour tout $g \in C^*(G)$:

$$<\pi(g),u> = <(\pi_1(g),\pi_2(g)),\ (u_1,u_2)> = <\pi_1(g),u_1> + <\pi_2(g),u_2>.$$

En appliquant cette formule à $g = f \in L^1(G)$, on obtient pour toute $f \in L^1(G)$

$$\int_G f(x)u(x)dx = \int_G f(x)u_1(x)dx + \int_G f(x)u_2(x)dx = \int_G f(x)\left[u_1(x)+u_2(x)\right]dx$$

d'où l'on déduit $u = u_1+u_2$ et, comme il s'agit d'une identification, tout $u \in B_\pi$ est de ce type, autrement dit, $B_\pi = B_{\pi_1} + B_{\pi_2}$.

Quant à la formule sur la norme, elle résulte de (ii), puisque, d'après (2.23), tout B_π est un espace A_π particulier.

(3.10) REMARQUES. - 1°) Même dans le cas où I est un ensemble fini, on n'a évidemment pas une décomposition en somme directe de A_π. Si, par exemple, π_1 et π_2 sont équivalentes, alors $A_{\pi_1} = A_{\pi_2}$ et $A_{\pi_1 \oplus \pi_2} = A_{\pi_1}+A_{\pi_2} = A_{\pi_1} = A_{\pi_2}$. Dans le paragraphe suivant, on verra que, si les π_i sont deux à deux disjointes, la décomposition $u = \sum_{i \in I} u_i$ est unique .

2°) Si $\pi = \bigoplus_{i\in I} \pi_i$, on a $N'_\pi = \bigcap_{i\in I} N'_{\pi_i}$, donc B_π , qui est le polaire de N'_π , est l'enveloppe convexe faiblement fermée (pour $\sigma(B(G), C^*(G))$) de $\bigcup_{i\in I} B_{\pi_i}$. Autrement dit, B_π est l'adhérence pour cette même topologie de dualité, de la somme algébrique des B_{π_i} , ensemble des $u = \sum_{i\in I} u_i$, où pour tout i, $u_i \in B_{\pi_i}$ et où les u_i sont nuls à l'exception d'un nombre fini. En général, cette adhérence est strictement plus grande que l'ensemble des $\sum_{i\in I} u_i$, où la famille $u_i (u_i \in B_{\pi_i})$ vérifie $\sum_{i\in I} ||u_i|| < +\infty$ (cf. Ci-après (3.15)).

C - ETUDE DE $A_{\pi_1} \cap A_{\pi_2}$.

(3.11) RAPPEL. - D'après DIXMIER [2] , (5.7.2), étant donné deux représentations π_1 et π_2 de G, on peut les décomposer en $\pi_1 = \pi'_1 \oplus \pi''_1$ et $\pi_2 = \pi'_2 \oplus \pi''_2$ de façon que π'_1 soit équivalente à π'_2, que π'_1 soit disjointe de π''_1, que π'_2 soit disjointe de π''_2 et que π''_1 soit disjointe de π''_2.

(3.12) PROPOSITION. - *Soit π_1 et π_2 deux représentations de* G. *On a, avec les notations de (3.11),* $A_{\pi_1} \cap A_{\pi_2} = A_{\pi'_1} = A_{\pi'_2}$. *D'autre part, pour que* $A_{\pi_1} \cap A_{\pi_2} = \{0\}$, *il faut et il suffit que π_1 et π_2 soient disjointes.*

DEMONSTRATION. -

On va d'abord démontrer que $A_{\pi_1} \cap A_{\pi_2} = \{0\}$ si et seulement si π_1 et π_2 sont disjointes.

Si π_1 et π_2 sont non disjointes, il existe une sous-représentation ω de π_1 dans un espace non nul équivalente à une sous-représentation de π_2. Alors, d'après (3.8), on a $A_\omega \subset A_{\pi_1} \cap A_{\pi_2}$ et, l'espace de ω n'étant pas nul, A_ω n'est pas réduit à $\{0\}$.

Réciproquement, si π_1 et π_2 sont disjointes, posons $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$. On sait déjà, d'après (3.9), que A_π est la somme algébrique de A_{π_1} et A_{π_2}. On va montrer de plus que cette somme est directe. Pour cela, on remarque que, puisque π_1 et π_2 sont disjointes le projecteur P_1 de X_π sur X_{π_1} appartient à VN_π (DIXMIER [2] , 5.2.4). Si T_1 et T_2 sont deux opérateurs dans X_{π_1} et X_{π_2} respectivement, notons (T_1,T_2) l'opérateur sur X_π défini par

$$(T_1,T_2)\ (\xi_1 + \xi_2) = T_1\ \xi_1 + T_2\ \xi_2 \ \text{(où } \xi_1 \in X_{\pi_1} \text{ et } \xi_2 \in X_{\pi_2}\text{)}.$$

Alors $P_1 = (I_1,0)$, où I_1 est l'opérateur identique de X_{π_1}. Comme $P_1 \in VN_\pi$, il existe une suite généralisée $(T_i)_{i\in I}$, d'opérateurs appartenant à l'ensemble E des combinaisons linéaires d'éléments de $\pi(G)$ telle que $(I_1,0) = \lim T_i$, ultrafaiblement. Soit $s \in G$, la continuité séparée de l'application $(S,T) \to ST$ pour la topologie ultrafaible permet d'écrire, dans cette topologie :

$(\pi_1(s),o) = (\pi_1(s),\pi_2(s))(I_1, o) = \lim\limits_{I} (\pi_1(s),\pi_2(s))\ T_i.$

Or $(\pi_1(s),\pi_2(s))T_i$ appartient à E car E est évidemment une algèbre. Il en résulte que $(\pi_1(s),o)$ appartient à VN_π . Soit $u = u_1 + u_2 \in A_\pi$ avec $u_1 \in A_{\pi_1}$ et $u_2 \in A_{\pi_2}$ et calculons $\langle u, (\pi_1(s),o)\rangle = \langle u_1,(\pi_1(s),O)\rangle + \langle u_2,(\pi_1(s),o)\rangle$. Soit ξ_n , η_n des vecteurs de X_{π_1} tels que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |\xi_n||\eta_n| < +\infty$ et tels que $u_1(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \langle \pi_1(s)\xi_n|\eta_n\rangle = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \langle\pi(s)\xi_n|\eta_n\rangle$. On a, dans la dualité (A_π,VN_π),

$\langle u_1,(\pi_1(s),o) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \langle(\pi_1(s),o)\xi_n|\eta_n\rangle = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \langle \pi_1(s)\xi_n|\eta_n\rangle = u_1(s)$. On trouve de même $\langle u_2,(\pi_1(s),o)\rangle = 0$ d'où $u_1(s) = \langle u,(\pi_1(s),o)\rangle$, ce qui assure l'unicité de u_1. On en déduit $A_{\pi_1} \cap A_{\pi_2} = \{0\}$.

Pour achever de démontrer (ii), il suffit d'appliquer (3.11) : soit π_1 et π_2 quelconques et soit $\pi_1 = \pi'_1 \oplus \pi''_1$ et $\pi_2 = \pi'_2 \oplus \pi''_2$ leurs décompositions suivant (3.11). En désignant par A l'espace $A_{\pi'_1}$ (égal à $A_{\pi'_2}$), on a $A_{\pi_1} = A + A_{\pi''_1}$ et $A_{\pi_2} = A + A_{\pi''_2}$ d'où $A \subset A_{\pi_1} \cap A_{\pi_2}$. Réciproquement, soit $x \in A_{\pi_1} \cap A_{\pi_2}$; puisque $x \in A_{\pi_1}$, on a $x = a_1 + a''_1$ $(a_1 \in A,\ a''_1 \in A_{\pi''_1})$; de même, $x = a_2 + a''_2$ $(a_2 \in A,\ a''_2 \in A_{\pi_2})$. On en déduit $a_1 - a_2 = a''_1 - a''_2$ où $a_1 - a_2 \in A$ et $a''_2 - a''_1 \in A_{\pi''_1} + A_{\pi''_2}$. Mais π'_1 est disjointe de π''_1 et de π''_2 donc π'_1 est disjointe de $\pi''_1 \oplus \pi''_2$ d'où l'on déduit que $A_{\pi'_1} \cap (A_{\pi''_1} + A_{\pi''_2}) = \{o\}$ et ainsi, $a_1 - a_2 = a''_1 - a''_2 = 0$.

Comme $A_{\pi''_1} \cap A_{\pi''_2} = \{o\}$ on a $a''_1 = a''_2 = o$ et $x = a_1 \in A$. c.q.f.d.

REMARQUE. - On pourrait déduire de l'appartenance à VN_π des opérateurs $(\pi_1(s),o)$ et $(0,\pi_2(s))$, que $VN_\pi = VN_{\pi_1} \times VN_{\pi_2}$, ce qui est bien connu, au moins dans le cas séparable, (cf. AUSLANDER et MOORE [1], p. 40), et que l'on retrouve ci-après :

(3.13) COROLLAIRE 1. - *Soit* $\pi = \bigoplus_{i \in I} \pi_i$ *où* I *un ensemble quelconque d'indices. Si les* π_i *sont deux à deux disjointes, toute* $u \in A_\pi$ *s'écrit d'une manière unique sous la forme d'une famille absolument convergente* $u = \sum_{i\in I} u_i$, *où* $u_i \in A_{\pi_i}$ *et on a de plus* $||u|| = \sum_{i \in I} ||u_i||$. *L'algèbre de Von Neumann* VN_π *est le produit des algèbres de Von Neumann* VN_{π_i}.

DEMONSTRATION. - Soit $i \in I$. On a $\pi = \pi_i \oplus (\bigoplus_{j \in I, j\neq i} \pi_j)$, et l'hypothèse implique que π_i est disjointe de π_j pour tout $j \neq i$, donc que π_i est disjointe de $\pi'_i = \bigoplus_{j \in I, j\neq i} \pi_j$. D'après (3.9) et (3.12), on a une décomposition en somme directe $A_\pi = A_{\pi_i} \oplus A_{\pi'_i}$. Soit $u \in A_\pi$; pour toute décomposition de u sous la forme $u = \sum_{j\in I} u_j$ (3.9), la fonction $u'_i = \sum_{j\in I, j\neq i} u_j$ appartient à $A_{\pi'_i}$ et $u = u_i + u'_i$, on en déduit l'unicité de u_i c.à.d. celle de la décomposition $u = \sum_{i\in I} u_i$. D'après (3.9), (ii), nécessairement $||u|| = \sum_{i\in I} ||u_i||$; ainsi A_π est isomorphe à l'espace de Banach des familles $(u_i)_{i\in I}$, où $u_i \in A_{\pi_i}$ et $\sum ||u_i|| < +\infty$, muni de la norme $||(u_i)|| = \sum_{i\in I} ||u_i||$. Par dualité on en déduit que A'_π s'identifie à l'espace de Banach des familles $(T_i)_{i\in I}$, où $T_i \in VN_{\pi_i}$, $\sup |||T_i||| < +\infty$ muni de la norme $\sup_{i\in I} |||T_i|||$, c.à.d. à l'algèbre de Von Neumann $\prod_{i\in I} VN_{\pi_i}$ (cf. DIXMIER [1] n° 2, p. 21). Par conséquent, il existe un isomorphisme de VN_π sur $\prod_{i\in I} VN_{\pi_i}$. Il suffit de vérifier que cet isomorphisme est l'identité. Soit $T \in VN_\pi$ et soit $(U_i) \in \prod VN_{\pi_i}$ l'élément associé définissant la même forme linéaire sur A_π. Soit u un coefficient de π; il existe deux vecteurs ξ et η de X_π tels que $u(s)=\langle\pi(s)\xi|\eta\rangle$ Posons $\xi = \sum_{i\in I} \xi_i$ et $\eta = \sum_{i\in I} \eta_i$ où, pour tout i, ξ_i et η_i appartiennent à X_{π_i}. D'après la démonstration de (3.9) on a, $u = \sum_{i\in I} u_i$ où $u_i(s) = \langle\pi_i(s)\xi_i|\eta_i\rangle$. Dans la dualité (A_π, VN_π), on a

$\langle u,T\rangle = \langle T\xi|\eta\rangle = \sum_{i\in I} \langle T\xi_i|\eta_i\rangle$ (car X_{π_i} est stable par $\pi(G)$ donc par VN_π). D'autre part, dans la dualité $(A_\pi, \prod_{i\in I} VN_{\pi_i})$, on a :

$$\langle \sum_{i\in I} u_i, (U_i)\rangle = \sum_{i\in I} \langle u_i, U_i\rangle = \sum_{i\in I} \langle U_i \xi_i|\eta_i\rangle.$$

La comparaison de ces deux formules de dualité montre que les U_i sont les restrictions de T aux espaces des π_i, autrement dit que

$$VN_\pi = \prod_{i\in I} VN_{\pi_i} .$$

(3.14) **COROLLAIRE 2.** - *On a l'inclusion $A_{\pi_1} \subset A_{\pi_2}$ si et seulement si π_1 est quasi-équivalente à une sous-représentation de π_2.*

DEMONSTRATION. - Ceci résulte de (3.1), de (3.8) et de (3.11) et (3.12).

D - APPLICATIONS DES RESULTATS PRECEDENTS.

(3.15) APPLICATION 1. - Un contre-exemple pour $B \underset{i \in I}{\oplus} \pi_i$. On va déduire de ce qui précède que, comme il a été annoncé en (3.10), 2°, il est possible de trouver un groupe G et un ensemble S de représentations de G, tels que $B \underset{\pi \in S}{\oplus} \pi$ soit différent de l'ensemble des $\sum_{\pi \in S} u_\pi$ où, pour toute π, $u_\pi \in B_\pi$ et où $\sum_{\pi \in S} ||u_\pi|| < + \infty$. En effet, soit G un groupe liminaire non compact tel que le dual $\hat{G}$, ensemble des classes de représentations irréductibles de G, soit non discret pour la topologie de Fell. Soit S une partie non fermée de $\hat{G}$ et soit $\omega \in \bar{S}$,$\omega \notin S$. La condition $\omega \in \bar{S}$, qui exprime que ω est faiblement contenue dans S, se traduit par $N'_\omega \supset \bigcap_{\pi \in S} N'_\pi$ ou encore par $N'_\omega \supset N'_{\underset{\pi \in S}{\oplus} \pi}$ c'est-à-dire $B_\omega \subset B_{\underset{\pi \in S}{\oplus} \pi}$
La condition $\omega \notin S$, qui exprime, vu l'irréductibilité des représentations en question, que ω est disjointe de toutes les $\pi \in S$ ou encore que ω est disjointe de $\underset{\pi \in S}{\oplus} \pi$, se traduit par $A_\omega \cap A_{\underset{\pi \in S}{\oplus} \pi} = \{o\}$. Comme G est liminaire, $A_\omega = B_\omega$, et $A_\pi = B_\pi$ pour toute $\pi \in S$ (cf. 2.21). On en déduit que $B_{\underset{\pi \in S}{\oplus} \pi}$ est différent de $A_{\underset{\pi \in S}{\oplus} \pi}$, ce qui est exactement le contre-exemple cherché.

APPLICATION 2. - Caractérisation des sous-espaces de B(G) qui sont **de la** forme A_π ; décomposition de Lebesgue des représentations.

Les énoncés qui suivent caractérisent les sous-espaces vectoriels fermés de B(G) qui sont de la forme A_π (théorème 3.17. Ils analysent plus précisément la situation d'un espace A_{π_1} sous-espace d'un A_π (propositions 3.16 et théorème 3.18) . Ces résultats sont liés à un résultat de TAKESAKI [1], th. 1, sur les sous-espaces invariants du prédual d'une algèbre de Von Neumann.

(3.16) PROPOSITION. - *Soit* π_1 *et* π *deux représentations d'un groupe localement compact* G *telles que* $A_{\pi_1} \subset A_\pi$. *Pour tout* $T \in VN_\pi$, *on a* $T.A_{\pi_1} \subset A_{\pi_1}$ *et* $A_{\pi_1}.T \subset A_{\pi_1}$ *et il existe un unique projecteur* P *qui soit dans le centre de* VN_π *et tel que* $A_{\pi_1} = P.A_\pi = A_\pi.P$ *Réciproquement, tout sous-espace vectoriel fermé de* A_π *qui est un sous* VN_π*-module de* A_π *à gauche et à droite, est de la forme* A_{π_1} *pour une certaine représentation* π_1.

DEMONSTRATION. - 1°) Supposons $A_{\pi_1} \subset A_\pi$. D'après (3.11), il existe deux sous-représentations disjointes, π'_1 et π_2, de π telles que $\pi = \pi'_1 \oplus \pi_2$ et $A_{\pi'_1} = A_{\pi_1}$. Quitte à remplacer π_1 par π'_1, on peut donc supposer que $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$ avec π_2 disjointe de π_1 ; on a alors $X_\pi = X_{\pi_1} \oplus X_{\pi_2}$ et on sait d'après (3.13) que $VN_\pi = VN_{\pi_1} \times VN_{\pi_2}$. Soit $u = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n *_{\pi_1} \eta_n \in A_{\pi_1}$,

avec $\xi_n \in X_{\pi_1}$, $\eta_n \in X_{\pi_1}$, et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |\xi_n||\eta_n| < +\infty$ et soit $T = (T_1,T_2) \in VN_\pi$, avec $T_1 \in VN_{\pi_1}$ et $T_2 \in VN_{\pi_2}$; comme on a aussi bien $u = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \xi_n *_\pi \eta_n$, on a, d'après les formules rappelées en (2.7), $T.u = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} T\xi_n *_\pi \eta_n =$
$= \sum\limits_{n=1}^{+\infty} T_1\xi_n *_\pi \eta_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} T_1\xi_n *_{\pi_1} \eta_n = T_1.u$, et de même $u.T = u.T_1$ donc $T.u$ et $u.T$ appartiennent à A_{π_1} .

Soit I_1 l'application identique de X_{π_1} dans X_{π_1} , l'opérateur $P = (I_1,o)$ est un projecteur central de VN_π vérifiant la condition de l'énoncé. D'autre part, comme VN_{π_2} est le polaire de A_{π_1} dans la dualité (A_π,VN_π), pour qu'un projecteur P vérifie cette condition, il faut et il suffit que VN_{π_2} soit l'ensemble des opérateurs $T \in VN_\pi$ tels que $PT = TP = 0$; or VN_{π_2} est un idéal ultrafaiblement fermé de VN_π donc, d'après DIXMIER [1], p. 45, cor. 3, il n'existe qu'un seul projecteur central répondant à la question.

2°) Réciproquement, soit A un sous-espace vectoriel fermé de A_π qui soit un sous VN_π-module de A_π à gauche et à droite. D'après TAKESAKI [1] th. 1, le polaire $A°$ de A dans VN_π est un idéal ultrafaiblement fermé de VN_π ; il existe donc, d'après DIXMIER [1] (loc. cit.), un projecteur central P de VN_π tel que $A°$ soit l'ensemble des $T \in VN_\pi$ vérifiant $PT = TP = 0$ c.à.d. tel que $A = P.A_\pi = A_\pi.P$. Soit $X_1 = P(X_\pi)$ et soit X_2 l'orthogonal de X_1 dans X_π ; les sous-espaces X_1 et X_2 sont stables par π

et définissent deux sous-représentations π_1 et π_2 de π, qui sont disjointes puisque P est central (DIXMIER [2], 5.2.4), telles que $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$. D'après la partie directe, on a $A_{\pi_1} = P.A_{\pi}$ donc $A_{\pi_1} = A$.

c.q.f.d.

Le théorème suivant améliore la caractérisation des A_π ; il a d'abord été démontré, par une autre méthode, par P. LEFRANC [1] .

(3.17) THEOREME. - *Les espaces* A_π *sont exactement les sous-espaces vectoriels fermés de* B(G) *stables par translations à gauche et à droite.*

DEMONSTRATION. - a) Désignons par ω la représentation universelle de G, de sorte que $B(G) = A_\omega$. Pour toute $u \in B(G)$ et tout $s \in G$, on sait d'après (2.8) que $\omega(s).u$ (resp. $u.\omega(s)$) est la translatée à droite (resp. à gauche) de u par s (resp. s^{-1}). Il en résulte que tout A_π est stable par translations puisque c'est un VN_ω-module à gauche et à droite.

b) Réciproquement, soit A un sous-espace fermé de B(G) stable par translations à gauche et à droite. D'après (3.16) il suffit de montrer que A est un sous VN_ω-module à gauche et à droite.

Soit $T \in VN_\omega$, et $u \in A$, il s'agit de prouver que $T.u \in A$ et $u.T \in A$. Du fait que A est stable par translations, on sait déjà d'après a) que ceci est exact lorsque T appartient à la sous $*$ -algèbre B de VN_ω engendrée algébriquement par $\omega(G)$. Si maintenant T est quelconque dans VN_ω, il existe des suites généralisées (T_α) et (S_β) dans B telles que :

$$T = \lim T_\alpha \;,\; T^* = \lim S_\beta\,.$$

On a $T_\alpha.u \in A$ et $\lim \|T.u - T_\alpha.u\| = 0$ (P. NOUYRIGAT, [1], 2.19) donc $T.u \in A$. D'autre part, la même démonstration que celle de NOUYRIGAT (loc. cit.) permet aussi de montrer que $\lim \|u.T - u.S_\beta^*\| = 0$ donc que $u.T \in A$.

c.q.f.d.

(3.18) THEOREME. - *Soit* π_1 *et* π *deux représentations d'une groupe localement compact* G *telles que* $A_{\pi_1} \subset A_\pi$:

1) Il existe un unique sous-espace vectoriel supplémentaire de A_{π_1} *dans* A_π *qui soit de la forme* A_{π_2}.

2) A_{π_2} *est l'espace vectoriel engendré algébriquement par les coefficients des représentations de* G *contenues dans* π *et disjointes de* π_1.

DEMONSTRATION. - 1°) L'existence d'un supplémentaire de A_{π_1} résulte de la démonstration de (3.16). Supposons que A_{π_2} et $A_{\pi'_2}$ répondent à la question, on a $A_\pi = A_{\pi_1} \oplus A_{\pi_2} = A_{\pi_1} \oplus A_{\pi'_2}$ donc, d'après (3.9) et (3.1), $\pi_1 \oplus \pi_2$ est quasi-équivalente à $\pi_1 \oplus \pi'_2$. Soit ω une sous-représentation de π_2 ; comme π_2 est disjointe de π_1, ω est disjointe de π_1. Si ω était disjointe de π'_2 elle serait disjointe de $\pi_1 \oplus \pi'_2$ donc de $\pi_1 \oplus \pi_2$ ce qui est absurde. Ainsi, aucune sous-représentation de π_2 n'est disjointe de π'_2. En échangeant les rôles de π_2 et π'_2, on en conclut que π_2 est quasi-équivalente à π'_2 (DIXMIER [2], 5.3.1) d'où $A_{\pi_2} = A_{\pi'_2}$.

2°) Soit E l'espace vectoriel engendré algébriquement par les coefficients des représentations de G disjointes de π_1 et contenues dans π. Pour toute telle représentation π', on a $A_{\pi'} \subset A_\pi$ et $A_{\pi'} \cap A_{\pi_1} = \{0\}$. On en déduit immédiatement $E \subset A_\pi$ donc $A_{\pi_1} + E \subset A_\pi$. De plus, $E \cap A_{\pi_1} = \{o\}$, en effet, soit $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$, où u_i est un coefficient d'une représentation π'_i disjointe de π_1 ; alors $u \in A_{\pi'_1} + \ldots + A_{\pi'_n} = A_{\pi'_1 \oplus \ldots \oplus \pi'_n}$ et, $\pi'_1 \oplus \ldots \oplus \pi'_n$ étant encore disjointe de π_1, on a $A_{\pi_1} \cap A_{\pi'_1 \oplus \ldots \oplus \pi'_n} = \{o\}$ d'où le résultat. Remarquons enfin que la représentation π_2, définie au 1°), est disjointe de π_1 et quasi-équivalente à une sous-représentation ω de π, d'où l'on déduit, en utilisant le résultat (3.3), $A_\omega \subset E$ c.à.d. $A_{\pi_2} \subset E$ d'où $A_{\pi_1} + E \supset A_\pi$; c.q.f.d.

(3.19) REMARQUE 1. - D'après (3.9), l'espace A_{π_2} du 1°) est nécessairement un supplémentaire topologique de A_{π_1} dans A_π.

(3.20) REMARQUE 2. - On peut appliquer le théorème (3.18) en choisissant pour π_1 la représentation régulière gauche de G, et pour π la représentation universelle de G, de sorte que $A_{\pi_1} = A(G)$ et $A_\pi = B(G)$.

On démontre ainsi que A(G) *admet un supplémentaire dans* B(G) *qui est de la forme* A_ω *et qui est l'ensemble des combinaisons linéaires des coefficients des représentations de* G *disjointes de la représentation régulière*. Lorsque G est moyennable (= amenable), FLORY [1] a donné une caractérisation directe des fonctions de A_ω laquelle généralise la condition donnée par R. DOSS [1] dans le cas abélien pour les transformées de Fourier-Stieltjes des mesures singulières (cf. FLORY [1], la coïncidence entre notre espace A_ω et celui de FLORY résulte immédiatement de l'unicité du projecteur P de la proposition (3.17)). Ainsi, lorsque G est abélien, A_ω n'est autre que l'ensemble des transformées de Fourier des mesures bornées sur le dual $\hat{G}$ de G qui sont étrangères à la mesure de Haar de $\hat{G}$ (mesures singulières). En quelque sorte, l'égalité $B(G) = A(G) \oplus A_\omega$ pourrait s'appeler décomposition de Lebesgue de B(G) et notre théorème (3.18) étend cette décomposition au cas des représentations unitaires les plus générales. En particulier, si π est une représentation unitaire, puisque B_π est un $A_{\pi'}$ contenant A_π , on a une unique "décomposition de Lebesgue" $B_\pi = A_\pi \oplus A_\omega$.

APPLICATION 3. - Le théorème de restriction pour $A(G)$. On va retrouver par une méthode plus simple, tout en l'améliorant légèrement en ce qui concerne la norme, le résultat de C. HERZ [2] selon lequel pour tout sous-groupe fermé d'un groupe localement compact G on a $A(G)|H = A(H)$. Pour cela, on démontre d'abord le lemme suivant.

(3.21) LEMME. - *Soit* π *une représentation de* G. *Supposons que* A_π *soit une sous-algèbre de* $A(G)$ *autoadjointe et séparant les points de* G. *Supposons de plus que :*

- si G *est localement compact non compact, pour tout* $a \in G$, *il existe* $u \in A_\pi \cap \mathcal{K}(G)$ *telle que* $u(a) \neq 0$.

- Si G *est compact,* A_π *contient les constantes.*

Alors $A_\pi = A(G)$.

DEMONSTRATION. - Supposons $A_\pi \neq A(G)$: il existerait $T \in VN(G)$, non nul, et tel que, pour tout $v \in A_\pi$, on ait $\langle v,T \rangle = 0$.
Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{K}(G)$; pour toute $v \in A_\pi$, d'après (3.16), $\rho(f * g).v$ appartient à A_π, donc :

$$\langle v, T.\rho(f * g) \rangle = \langle \rho(f * g).v, T \rangle = 0.$$

Ainsi, $T_1 = T.\rho(f * g)$ est encore un élément de $VN(G)$ orthogonal à A_π. Calculons $T_1(h)$: si $h \in \mathcal{K}(G)$, on a : $T_1(h) = T[\rho(f * g)(h)] = T(f * g * h) = T(f * g) * h$ car T commute aux convolutions à droite par les $h \in \mathcal{K}(G)$ (cf. EYMARD [1], (3.9)). D'autre part, on peut choisir f et g de sorte que $T(f * g) \neq 0$ puisque l'ensemble des $f * g$, où f et g appartiennent à $\mathscr{K}(G)$, est dense dans $L^2(G)$. Ainsi, on peut supposer T_1 non nul.

Lorsque $w \in A(G) \cap \mathscr{K}(G)$, $\langle w, T_1 \rangle$ a une expression simple ; en effet, d'après EYMARD [1] , (3.17), 2° et 3°, on a

$\langle w, T_1 \rangle = [T_1(\check{w})](e) = [T(f * g) * \check{w}](e)$ c.à.d. :

$$(3.22) \qquad \langle w, T_1 \rangle = \int_G [T(f * g)](s) \; w(s) \, ds.$$

D'après EYMARD [1], (3.17), 3°, on sait que $T(f * g) \in A(G) \cap L^2(G)$, en particulier $T(f * g)$ est une fonction continue. Soit $a \in G$ tel que $[T(f * g)](a) \neq 0$, par hypothèse, il existe $u \in A_\pi \cap \mathscr{K}(G)$ telle que $u(a) \neq 0$, posons $k = u \, T(f * g)$, alors $k \in \mathscr{K}(G)$ et pour toute $v \in A_\pi$ on a, d'après la formule (3.22) :

$$\int_G k(s)v(s)ds = \int_G u(s)v(s) \; T(f * g)(s)ds = \langle uv, T_1 \rangle = 0,$$

en effet, $uv \in A_\pi \cap \mathscr{K}(G)$. Comme, d'après le théorème de Stone-Weierstrass, A_π est uniformément dense dans $C_0(G)$ on en déduit, puisque k est à support compact, que l'on a, pour toute $v \in C_0(G)$, $\int_G k(s)v(s)ds = 0$. Ceci est absurde car k n'est pas nulle (en effet $k(a)$ n'est pas nul). c.q.f.d.

(3.23) PROPOSITION. - *Soit* G *un groupe localement compact,* H *un sous-groupe fermé de* G. *On a* $A(G)|H = A(H)$ *et, pour toute fonction* $u \in A(H)$ *il existe* $v \in A(G)$ *telle que* $v|H = u$ *et* $||v|| = ||u||$.

DEMONSTRATION. - D'après (2.10), $A(G)|H$ est de la forme A_π où π est une représentation de H (on peut prendre pour π la restriction à H de la représentation régulière gauche de G). D'autre part, on a l'inclusion $A(G)|H \subset A(G)$; en effet, si $u \in P(G) \cap \mathcal{K}(G)$ sa restriction à H appartient à $P(H) \cap \mathcal{K}(H)$ donc à $A(H)$. Comme $P(G) \cap \mathcal{K}(G)$ engendre un sous-espace dense de $A(G)$, on en déduit le résultat par linéarité et continuité de l'application restriction. Enfin, comme pour tout compact K de G, il existe $u \in A(G) \cap \mathcal{K}(G)$ telle que $u(x) = 1$ lorsque $x \in K$, l'espace $A_\pi = A(G)|H$ vérifie la condition imposée par le lemme (3.21) ; il en résulte que $A(G)|H = A(H)$. Le reste de la proposition provient de (2.10).

(3.24) APPLICATION 4 : Etude de l'égalité $A_\pi = B_\pi$ lorsque π est irréductible.

Les résultats qui viennent d'être établis sur la correspondance $\pi \mapsto A_\pi$ permettent de démontrer le résultat suivant.

PROPOSITION. - *Soit π une représentation irréductible d'un groupe localement compact séparable* G. *Il y a équivalence entre :*

(i) $A_\pi = B_\pi$;

(ii) $\{\pi\}$ *est fermé dans* $\hat{G}$ *pour la topologie de Fell ;*

(iii) C^*_π *est la* C^* *-algèbre des opérateurs compacts de l'espace de* π

(iv) toute représentation π' *faiblement contenue dans* π *est multiple de* π.

DEMONSTRATION. - i)$\Longrightarrow$ ii). En effet, soit π' une représentation irréductible de G faiblement contenue dans π. On a $B_{\pi'} \subset B_{\pi'}$, d'où $A_{\pi'} \subset A_{\pi}$ puisque $A_{\pi} = B_{\pi}$. Ainsi π' est quasi-équivalente à une sous-représentation de π d'où l'on déduit, d'après l'irréductibilité de π et de π', que π et π' sont équivalentes.

ii)$\Longrightarrow$ iii). Comme $C^*(G)$ est séparable, C^*_{π} qui est isomorphe à $C^*(G)/N'_{\pi}$ (1.5) est aussi séparable. On va démontrer que le spectre de C^*_{π} se réduit à un point, ce qui entraînera déjà (DIXMIER [2](4.7.3)) que C^*_{π} est isomorphe à la C^*-algèbre des opérateurs compacts d'un certain espace de Hilbert. Pour cela, soit ω une représentation irréductible de C^*_{π} dans un espace de Hilbert X_{ω} (nécessairement séparable), alors $\omega\circ\pi$ est une représentation de $C^*(G)$, faiblement contenue dans π donc équivalente à π. Ainsi, il existe une isométrie U de X_{ω} sur l'espace X_{π} de π telle que l'on ait, pour tout $x \in C^*(G)$, $\pi(x)\circ U = U\circ\omega[\pi(x)]$; autrement dit, on a pour tout $y \in C^*_{\pi}$, $y\circ U = U\circ\omega(y)$ donc ω est équivalente à la représentation identique de C^*_{π} . Le Spectre de C_{π} étant réduit à un point, il existe (DIXMIER loc. Cit.) un espace de Hilbert X et un isomorphisme θ de C^*_{π} sur l'algèbre A des opérateurs compacts de X. En tant que représentation de C^*_{π} dans X, θ est irréductible puisque le commutant de A est réduit aux scalaires, θ est donc équivalente à la représentation identique de C^*_{π} ce qui signifie qu'il existe une isométrie $V : X \to X_{\pi}$ telle que l'on ait, pour tout $y \in C^*_{\pi}$, $y = V\circ\theta(y)\circ V^{-1}$. On en déduit le résultat.

iii) $\Longrightarrow$ i) : cf. proposition (2.20).

i) $\Longrightarrow$ iv). En effet, on montre, comme dans la démonstration de i) $\Longrightarrow$ ii) que π' est quasi-équivalente à une sous-représentation de π, donc multiple de π d'après l'irréductibilité de π.

iv) $\Longrightarrow$ (ii) évident.

REMARQUE. - Lorsque π n'est pas irréductible, il se peut que $A_\pi = B_\pi$ sans que π soit C.C.R.. Soit par exemple π_o la représentation triviale de dimension 1, et soit $\pi = \infty\, \pi_o$ où ∞ est le cardinal du dénombrable. Alors A_π est de dimension 1, donc $A_\pi = B_\pi$ (2.20), et les $\pi(f)$ non nuls, qui sont des homothéties d'un espace de dimension infinie ne sont pas compacts.

E - ETUDE DE A_π QUAND π EST PRODUIT TENSORIEL DE DEUX REPRESENTATIONS.

(3.25) PROPOSITION. - *Soit* $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$. *Alors* A_π *est l'espace vectoriel fermé engendré dans* B(G) *par les fonctions de la forme* $u_1\, u_2$, *où* $u_1 \in A_{\pi_1}$ *et* $u_2 \in A_{\pi_2}$.

DEMONSTRATION. - On utilisera les notations suivantes : si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de B(G), l'espace vectoriel engendré algébriquement par les produits $u_1\, u_2$ où $u_1 \in E_1$ et $u_2 \in E_2$ sera noté $E_1\, E_2$; pour toute partie E de B(G), la notation $\bar{E}$ désignera l'adhérence de E dans B(G) ; enfin $X_{\pi_1} \otimes X_{\pi_2}$ désignera le produit tensoriel hilbertien de X_{π_1} et X_{π_2} de sorte que $X_\pi = X_{\pi_1} \otimes X_{\pi_2}$.

1°) On a $F_{\pi_1} F_{\pi_2} \subset F_{\pi}$. En effet, soit $u_1 = \xi_1 *_{\pi_1} \eta_1 \in F_{\pi_1}$ $(\xi_1 \in X_{\pi_1}, \eta_1 \in X_{\pi_1})$ et $u_2 = \xi_2 *_{\pi_2} \eta_2 \in F_{\pi_2}$ $(\xi_2 \in X_{\pi_2}, \eta_2 \in X_{\pi_2})$. Alors

$(u_1 u_2)(s) = \langle \pi_1(s)\xi_1 | \eta_1 \rangle \langle \pi_2(s)\xi_2 | \eta_2 \rangle = \langle [\pi_1 \otimes \pi_2(s)](\xi_1 \otimes \xi_2) | \eta_1 \otimes \eta_2 \rangle$

c'est-à-dire que $(\xi_1 *_{\pi_1} \eta_1)(\xi_2 *_{\pi_2} \eta_2) = (\xi_1 \otimes \xi_2) *_{\pi} (\eta_1 \otimes \eta_2)$. Par linéarité, on en déduit le résultat, on peut même préciser que $F_{\pi_1} F_{\pi_2}$ est exactement l'espace vectoriel engendré par les $\xi *_{\pi} \eta$ où ξ et η appartiennent au produit tensoriel *algébrique* de X_{π_1} et X_{π_2}.

2°) On a : $F_{\pi} \subset \overline{F_{\pi_1} F_{\pi_2}}$. En effet, soit $u \in F_{\pi}$. Si $u = \xi *_{\pi}$ où ξ et η appartiennent à $X_{\pi_1} \otimes X_{\pi_2}$, soit $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'éléments du produit tensoriel algébrique de X_{π_1} et X_{π_2} telles que $\xi = \lim_n \xi_n$, $\eta = \lim_n \eta_n$. Alors $\xi *_{\pi} \eta = \lim \xi_n *_{\pi} \eta_n$ dans B(G) car l'application $(\xi,\eta) \mapsto \xi *_{\pi} \eta$ de $X_{\pi} \times \bar{X}_{\pi}$ dans B(G) est bilinéaire continue. On en déduit que $\xi *_{\pi} \eta \in \overline{F_{\pi_1} F_{\pi_2}}$, grâce à la caractérisation de $F_{\pi_1} F_{\pi_2}$ donnée en 1°), puis le résultat général par linéarité.

3°) Les inclusions $F_{\pi_1} \subset A_{\pi_1}$ et $F_{\pi_2} \subset A_{\pi_2}$ entraînent $F_{\pi_1} F_{\pi_2} \subset A_{\pi_1} A_{\pi_2}$ d'où, en utilisant 2°), $F_{\pi} \subset \overline{F_{\pi_1} F_{\pi_2}} \subset \overline{A_{\pi_1} A_{\pi_2}}$ et, par passage à l'adhérence, $A_{\pi} \subset \overline{A_{\pi_1} A_{\pi_2}}$.

Réciproquement, comme B(G) est une algèbre de Banach, on a $\overline{F}_{\pi_1} \overline{F}_{\pi_2} \subset \overline{F_{\pi_1} F_{\pi_2}}$ c.à.d. $A_{\pi_1} A_{\pi_2} \subset \overline{F_{\pi_1} F_{\pi_2}}$; d'autre part, d'après le 1°), on a $\overline{F_{\pi_1} F_{\pi_2}} \subset A_\pi$ d'où $A_{\pi_1} A_{\pi_2} \subset A_\pi$ et, par passage à l'adhérence, $\overline{A_{\pi_1} A_{\pi_2}} \subset A_\pi$, ce qui achève de démontrer l'égalité $\overline{A_{\pi_1} A_{\pi_2}} = A_\pi$.

APPLICATION : Condition nécessaire et suffisante pour que A_π soit une algèbre.

On sait que, pour certaines représentations π, l'espace A_π est une sous-algèbre de B(G) ; il en est ainsi par exemple de la représentation régulière de G et plus généralement de la représentation quasi-régulière π_H associée à un sous-groupe H distingué fermé. Dans ce cas, l'algèbre A_H est isomorphe à l'algèbre de Fourier A(G/H) (cf. P. NOUYRIGAT, [1], prop. 3.8). Ce résultat admet une réciproque lorsque H est compact (cf. G. ARSAC [1] et [2]). Lorsque H n'est pas distingué, A_H n'est pas en général une algèbre (cf. G. ARSAC loc. cit.).

Si maintenant π est une représentation quelconque, pour que A_π soit une algèbre, il faut et il suffit que l'on ait $A_\pi A_\pi \subset A_\pi$. Ceci équivaut à $\overline{A_\pi A_\pi} \subset A_\pi$ c.à.d. $A_{\pi \otimes \pi} \subset A_\pi$; tenant compte de (3.14), on peut donc énoncer :

(3.26) PROPOSITION. - *Soit* π *une représentation de* G. *Pour que* A_π *soit une sous-algèbre de* B(G), *il faut et il suffit que* $\pi \otimes \pi$ *soit quasi-équivalente à une sous-représentation de* π.

(3.27) REMARQUE. - On retrouve immédiatement que A(G) est une algèbre : en effet, la représentation régulière gauche ρ de G possède la propriété suivante : pour toute représentation π, la représentation $\rho\otimes\pi$ est équivalente à $(\dim\pi)\rho$ (ceci résulte de FELL [2], lemme 4.2, page 260).

F - PROPRIETES DE A_π LORSQUE π EST UNE REPRESENTATION INDUITE.

Dans tout ce paragraphe, on suppose donnés un groupe G localement compact séparable (c.à.d. dont la topologie admet une base dénombrable d'ouverts) et un sous-groupe fermé H de G. On utilise les notations définies en (2.14).

(3.28) RAPPELS : Soit ω une représentation de H dans un espace de Hilbert séparable X_ω. On définit la représentation induite U^ω de G de la manière suivante : soit X l'ensemble des applications mesurables f de G dans X_ω vérifiant, pour tout $s\in G$ et tout $h\in H$, $f(sh) = \omega(h^{-1})[f(s)]$, et telles que $\dot{s} \mapsto \langle f(s)|f(s)\rangle$ soit sommable pour la mesure quasi-invariante λ ; si l'on convient d'identifier deux fonctions égales presque partout (pour la mesure de Haar de G), on peut faire de X un espace de Hilbert en définissant le produit scalaire $\langle f|g\rangle$ par : $\langle f|g\rangle = \int_{G/H} \langle f(s)|g(s)\rangle \, d\lambda(\dot{s})$.

La représentation U^ω est la représentation de G dans X définie par la formule : $[U^\omega(s)f](x) = \sqrt{\chi(s^{-1},\dot{x})}\, f(s^{-1}x)$.

On peut donner une forme équivalent de U^{ω} de la manière suivante ; les hypothèses faites sur G entraînent qu'il existe une section borélienne de l'application canonique $G \mapsto G/H$, c.à.d. qu'il existe une application borélienne $\sigma : G/H \to G$, telle que pour tout $\xi \in G/H$, $\widehat{\dot{\sigma(\xi)}} = \xi$. Ainsi, pour tout $s \in G$, $\sigma(\dot{s})^{-1}s$ appartient à H, on peut donc définir une application $\theta : G \longrightarrow H$ par la formule $\theta(s) = \sigma(\dot{s})^{-1}s$ et cette application est évidemment borélienne ; dans la suite, on utilisera fréquemment la formule suivante, évidente sur la définition de θ :

(3.29) $\theta(sh) = \theta(s)h \quad (s \in G,\ h \in H)$.

Il résulte des propriétés de σ et de θ que l'application $f \to f\circ\sigma$ est une isométrie de X sur l'espace de Hilbert $L^2(G/H, X_\omega)$ des applications mesurables et de carré sommable pour λ de G/H dans X_ω. Par transport de structure, on obtient une représentation π de G dans $L^2(G/H, X_\omega)$, équivalente à U^{ω} et donnée par la formule

(3.30) $\left[\pi(s)g\right](\dot{x}) = \sqrt{\chi(s^{-1},\dot{x})}\,(\omega\left[\theta(s^{-1}\sigma(\dot{x}))^{-1}\right])(g(s^{-1}\dot{x}))$.

On peut également, en utilisant θ, préciser le choix de λ. En effet, d'après MACKEY [2], on peut choisir σ telle que, pour tout compact K de G, $KH \cap \sigma(G/H)$ soit relativement compact. Posons alors, pour $s \in G$, $\rho(s) = \dfrac{\Delta_H(\theta(s))}{\Delta_G(\theta(s))}$; la fonction ρ, évidemment borélienne, est localement bornée grâce aux choix de σ et vérifie (2.15) grâce à la formule (3.29).

Il existe donc une mesure quasi-invariante λ sur G/H, associée à ρ. L'expression de la fonction χ est, dans ce cas :

$$\chi(s,\dot{x}) = \frac{\rho(sx)}{\rho(x)} = \frac{\Delta_H[\theta(sx)]}{\Delta_G[\theta(sx)]} = \frac{\Delta_G[\theta(x)]}{\Delta_H[\theta(x)]} = (\Delta_G\,\Delta_H^{-1})(\theta(x)\theta(sx)^{-1}).$$

Or la définition de θ montre que $\theta(x)\theta(sx)^{-1} = \theta(s\sigma(\dot{x}))^{-1}$.

On en déduit que :

(3.31) $\chi(s^{-1},\dot{x}) = \Delta_G\,\Delta_H^{-1}\ (\theta(s^{-1}\sigma(\dot{x}))^{-1})$

EXEMPLE : produit semi-direct. - Supposons que G = HN soit produit semi-direct topologique des deux sous-groupes fermés H et N, N étant distingué. La formule (3.30) se simplifie notablement, que ω soit une représentation de H ou de N.

(3.32) 1-er cas). - ω est une représentation de H.

L'espace homogène G/H s'identifie à N au moyen de l'application qui à tout $\dot{s} \in G/H$ associe $n \in N$ tel que $s = nh (h \in H)$. Une fois cette identification faite, on peut choisir pour σ l'injection canonique $N \to G$: l'application θ est alors l'homomorphisme de groupes $G \to H$ qui à $s = h$ associe h. La mesure λ sur G/H associée à ce choix de σ comme il a été dit plus haut, s'identifie à une mesure de Haar à gauche sur N. Pour appliquer la formule (3.30), on pose $s = n_1\, h_1$ et $\dot{x} = n$; on a $s^{-1}\sigma(\dot{x}) = s^{-1}n = h_1^{-1}n_1^{-1}n$ d'où $\theta(s^{-1}\,\sigma(\dot{x})) = h_1^{-1}$ ce qui montre d'après (3.31) que $\chi(s^{-1},\dot{x}) = \Delta_G\,\Delta_H^{-1}(h_1)$, donc que la mesure de Haar de N est relativement invariante par l'action à gauche de G sur N, de multiplicateur $\Delta_G^{-1}\ \Delta_H \circ \theta$.

Le transport de structure $G/H \to N$ définit une action à gauche de G sur N qui à $s = n_1\ h_1 \in G$ (où $n_1 \in N$ et $h_1 \in H$) et $n \in N$, associe $s.n = n_1\ h_1\ nh_1^{-1}$. On obtient ainsi $[\pi(s)g]\ (n) = \sqrt{\Delta_G\ \Delta_H^{-1}(h_1)}\omega(h_1)g(s^{-1}.n)$.

En particulier, en choisissant pour ω la représentation triviale de dimension 1, on trouve que π_H se réalise dans L (N) par la formule $[\pi_H(s)g](n) = \sqrt{\Delta_G\ \Delta_H^{-1}(h_1)}g(s^{-1}.n)$. Si ω est quelconque, soit π' la représentation équivalente à π qui se réalise dans le produit tensoriel hilbertien $L^2(G/H) \otimes X_\omega$ grâce à l'isométrie $\Phi : L^2(G/H) \otimes X_\omega \to L^2(G/H, X_\omega)$ définie sur les éléments décomposés par $[\Phi(f \otimes \xi)](\dot{s}) = f(\dot{s})\xi$. On trouve :

$$[\pi'(s)][f \otimes \xi] = \pi_H(s)f \otimes \omega(h_1)\xi = \pi_H(s)f \otimes [\omega\circ\theta(s)](\xi).$$

Cette formule exprime que $\pi' = \pi_H \otimes (\omega\circ\theta)$ (ceci est un cas particulier de la formule 4.2 de J.M.G. FELL [2]). Ainsi, avec les notations de (3.25), $A_\pi = \overline{A_H\ A_{\omega\circ\theta}}$ et $A_{\omega\circ\theta} = A_\omega \circ\theta$ est l'ensemble des $u\circ\theta$ où $u \in A_\omega$ (cf. 2.10). Si l'on applique ceci en choisissant pour ω la représentation régulière gauche de H on obtient le résultat suivant :

(3.33) PROPOSITION. - *Soit* $G = NH$ *un produit semi-direct topologique où* N *est distingué. Si* $s = nh \in G$ *où* $n \in N$ *et* $h \in H$, *posons* $\theta(s) = h$. *Alors, l'ensemble des fonctions* $u.(v\circ\theta)$, *où* $u \in A_H$ *et* $v \in A(H)$, *engendre un sous-espace vectoriel partout dense de l'algèbre de Fourier* A(G).

(3.34) - 2-ème cas). - ω est une représentation de N.

Dans ce cas G/N s'identifie à H : à tout $\dot{s} \in G/N$ on associe $h \in H$ tel que $s = nh = hn'$ $(n \in N,\ n' \in N)$. On peut choisir pour σ l'injection canonique $H \to G$; à tout $s = hn'$, θ associe n' : ainsi $\theta(nh) = h^{-1}nh$. D'autre part, la mesure quasi-invariante λ sur G/H s'identifie à une mesure de Haar à gauche sur H, et, dans ce cas, elle est en fait invariante par l'action de G. Pour appliquer la formule (3.30), on pose $s = n_1h_1$ (où $n_1 \in N$ et $h_1 \in H$) et $\dot{x} = h \in H$; on a :

$s^{-1}\sigma(\dot{x}) = s^{-1}h = h_1^{-1}n_1^{-1}h = h_1^{-1}h(h^{-1}n_1^{-1}h)$ d'où $\theta(s^{-1}\sigma(\dot{x})) = h^{-1}n_1^{-1}h$.

L'élément $s^{-1}.\dot{x} = \widehat{s^{-1}x}$ s'identifie à $h_1^{-1}h$ et on obtient ainsi :

$$(3.35) \qquad [\pi(s)g](h) = \omega(h^{-1}n_1h)\ g(h_1^{-1}h) \quad (s = n_1h_1, g \in L^2(H, X_\omega)),$$

PRINCIPE DE MAJORATION. - L'utilisation de la première définition des représentations induites permet d'obtenir le résultat suivant (dû à HERZ [3] lorsque ω est la représentation triviale de H).

(3.36) PROPOSITION. - *Soit* G *un groupe localement compact,* H *un sous-groupe fermé de* G, ω *une représentation de* H, π *la représentation de* G *induite par* ω. *Alors, pour toute* $u \in A_\pi$ *il existe* $v \in A_\mu$ *telle que l'on ait :*

(i) $||v|| \leqslant ||u||$;

(ii) pour tout $s \in G$, $|u(s)| \leqslant v(s)$.

DEMONSTRATION. - (notations de (3.28)). Soit tout d'abord $u(s) = \langle\pi(s)\, f|g\rangle$ où $f \in X$, $g \in X$. Définissons f_1 et g_1 par $f_1(\dot{x}) = |f(x)|$ et $g_1(\dot{x}) = |g(x)|$, d'après la définition de X, les fonctions f_1 et g_1 appartiennent à $L^2(G/H)$; soit $v \in A_H$ définie par $v(s) = \langle\pi_H(s) f_1|g_1\rangle$.
On a :

$$u(s) = \int_{G/H} \sqrt{\chi(s^{-1},\dot{x})}\ \langle f(s^{-1}x)|g(x)\rangle\ d\lambda(\dot{x}) \text{ d'où :}$$

$$|u(s)| \leqslant \int_{G/H} \sqrt{\chi(s^{-1},\dot{x})}\,|f(s^{-1}x)|\,|g(x)|\ d\lambda(\dot{x}) \quad \text{c.à.d.} \quad |u(s)| \leqslant v(s).$$

Soit maintenant u quelconque dans A_π , on peut trouver deux suites (f_n) et (g_n) dans X telles que $u(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle\pi(s) f_n|g_n\rangle$ et $||u|| = \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n||g_n|$.

Soit $f_{n,1}$ et $g_{n,1}$ les éléments de $L^2(G/H)$ définis comme ci-dessus. On a $||f_{n,1}||_2 = |f_n|$ et $||g_{n,1}||_2 = |g_n|$, on peut donc définir $v \in A_H$ par la formule :

$$v(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle\ \pi(s) f_{n1}|g_{n1}\rangle \text{ ; on a } ||v|| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} ||f_{n1}||_2 ||g_{n1}||_2 \text{ c.à.d.}$$

$||v|| \leqslant ||u||$ et le calcul donne, d'après le premier cas :

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \langle\pi(s) f_n|g_n\rangle\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle\pi(s) f_n|g_n\rangle| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \langle\ \pi_H(s) f_{n1}|g_{n1}\rangle\ ,$$

c.à.d. $|u(s)| \leqslant v(s)$ c.q.f.d.

RELATION ENTRE A_π **ET** A_ω. L'utilisation de la deuxième définition (au moyen d'une section borélienne) permet d'obtenir le résultat suivant (analogue au résultat de HERZ [4], § 7).

(3.37 PROPOSITION. - *Il existe une application bilinéaire continue* L :
$(L^2(G/H) \hat{\otimes} \overline{L^2(G/H)}) \times A_\omega \to A_\pi$ *telle que* $||L|| \leqslant 1$ *définie par :*
$$[L(\phi,u)](s) = \int_{G/H} \sqrt{\chi(s^{-1},\dot{x})}\ \phi\ (s^{-1}\dot{x},\dot{x})\ u[\theta(s^{-1}\sigma(\dot{x}))^{-1}]d\lambda(\dot{x}).$$
L'espace vectoriel engendré par les $L(\phi,u)$ *où* $\phi \in L^2(G/H)\hat{\otimes}\ \overline{L^2(G/H)}$,
et $u \in A_\omega$, *est dense dans* A_π.

DEMONSTRATION. - On suppose toujours π réalisée dans $L^2(G/H,X_\omega)$ au moyen de (3.30). L'application $(f,\xi) \mapsto U_{f,\xi}$ de $L^2(G/H) \times X$ dans $L^2(G/H,X_\omega)$ définie par $U_{f,\xi}(\dot{x}) = f(\dot{x})\xi$ est une application bilinéaire de $L^2(G/H) \times X_\omega$ dans $L^2(G/H,X_\omega)$ mais aussi de $\overline{L^2(G/H)} \times \bar{X}_\omega$ dans $\overline{L^2(G/H,X_\omega)}$. Elle est de norme 1 car $||U_{f,\xi}||_2 = ||f||_2|\xi|$. Par linéarisation, on en déduit deux applications linéaires $L^2(G/H) \hat{\otimes} X_\omega \to L^2(G/H,X_\omega)$ et $\overline{L^2(G/H)} \hat{\otimes} \bar{X}_\omega \to \overline{L^2(G/H,X_\omega)}$. Enfin, par produit tensoriel, on en déduit une application linéaire continue :
$$(L^2(G/H) \hat{\otimes} X_\omega) \hat{\otimes} (\overline{L^2(G/H)} \hat{\otimes} \bar{X}_\omega) \to L^2(G/H,X_\omega) \hat{\otimes} \overline{L^2(G/H,X_\omega)}$$

On désignera par Φ le morphisme d'espaces de Banach obtenu à partir du précédent en identifiant $(L^2(G/H) \hat{\otimes} X_\omega) \hat{\otimes} (\overline{L^2(G/H)}\hat{\otimes} \bar{X}_\omega)$ à

$(L^2(G/H) \hat{\otimes} \overline{L^2(G/H)}) \hat{\otimes} (X_\omega \hat{\otimes} \overline{X_\omega})$ (par "commutativité et associativité" du produit tensoriel projectif). On a donc :

$$\begin{cases} \Phi\left[(f \otimes g) \otimes (\xi \otimes \eta)\right] = U_{f,\xi} \otimes U_{g,\eta} \\ ||\Phi|| \leqslant 1. \end{cases}$$

Désignons par P l'application canonique $L^2(G/H,X_\omega) \hat{\otimes} \overline{L^2(G/H,X_\omega)} \to A_\pi$ et par p l'application analogue $X_\omega \hat{\otimes} \overline{X_\omega} \to A_\omega$. La démonstration va résulter du lemme suivant :

LEMME. - *Soit* $\phi \in L^2(G/H) \hat{\otimes} \overline{L^2(G/H)}$, $\psi \in X_\omega \hat{\otimes} \overline{X_\omega}$, *on a :*

(i) $\left[P\circ\Phi(\phi \otimes \psi)\right](s) =$

$$= \int_{G/H} \sqrt{\chi(s^{-1},\dot{x})}\ \phi\ (s^{-1}\dot{x},\dot{x})\left[p(\psi)\right](\theta(s^{-1}\sigma(\dot{x}))^{-1})\ d\lambda(\dot{x})$$

(ii) $||\ P\circ\Phi(\phi \otimes \psi)|| \leqslant ||\phi||\ ||p(\psi)||$.

DEMONSTRATION. - Si $\phi = f \otimes g$ et $\psi = \xi \otimes \eta$, on a $\Phi(\phi \otimes \psi) = U_{f,\xi} \otimes U_{g,\eta}$ et $\left[P\circ\Phi(\phi \otimes \psi)\right](s) = \langle\pi(s)U_{f,\xi}|U_{g,\eta}\rangle =$

$= \int_{G/H} \sqrt{\chi(s^{-1},\dot{x})}f(s^{-1}\dot{x})\bar{g}(\dot{x})\langle\omega\left[\theta(s^{-1}\sigma(\dot{x}))^{-1}\right](\xi)|\eta\rangle d\lambda(\dot{x})$ ce qui est, dans ce cas, la formule (i). Si $\phi = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \otimes g_n$ avec $\Sigma||\ f_n||_2||g_n||_2 < +\infty$

on a par linéarité et continuité :

$$P\circ\Phi\left[\phi \otimes (\xi \otimes \eta)\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} P\circ\Phi\left[(f_n \otimes g_n) \otimes (\xi \otimes \eta)\right] \text{ d'où :}$$

$$(P\circ\Phi\left[\phi \otimes (\xi \otimes \eta)\right])((s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{G/H} \sqrt{\chi(s^{-1},\dot{x})}f_n(s^{-1}\dot{x})\bar{g}_n(\dot{x})\left[p(\xi\otimes\eta)\right](\theta(s^{-1}\sigma(\dot{x}))^{-1}d\lambda(\dot{x})$$

Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{G/H} \sqrt{\chi(s^{-1},\dot{x})}\,|f_n(s^{-1}\dot{x})|\,|g_n(\dot{x})|\ \ d_\lambda(\dot{x})$ existe pour tout s

(c'est la valeur en s d'un élément de A_H) le théorème de Fubini (ou de Lebesgue) permet d'intervertir les signes $\int_{G/H}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}$ ce qui donne, dans ce cas, la formule (i). Enfin, si ϕ et ψ sont quelconques, soit $\psi = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n \otimes \eta_n$ avec $\sum_{n=1}^{+\infty} |\xi_n|\,|\eta_n| < +\infty$ on a :

$$P\circ\Phi\left[\phi\otimes \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n \otimes \eta_n\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} P\circ\Phi\left[\phi\otimes (\xi_n \otimes \lambda_n)\right]$$

et, en utilisant le résultat précédent :

$$\left[P\circ\Phi(\phi \otimes \psi)\right](s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{G/H} \sqrt{\chi(s^{-1},\dot{x})}\phi(s^{-1}\dot{x},\dot{x})(p(\xi_n \otimes \eta_n))(\theta(s^{-1}\sigma(\dot{x}))^{-1})d\lambda(\dot{x})$$

Un raisonnement analogue au précédent montre que l'on peut, cette fois aussi, intervertir les signes $\sum_{n=1}^{+\infty}$ et $\int_{G/H}$: il suffit essentiellement de remarquer que pour tout $s \in G$, on a

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \left[p(\xi_n \otimes \eta_n)\right](\theta(s^{-1}\sigma(\dot{x}))^{-1})\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |\xi_n|\,|\eta_n| < +\infty.$$

La formule (i) s'en déduit. Soit maintenant ψ' telle que $p(\psi') = p(\psi)$; d'après (i) on a $P\circ\Phi(\phi \otimes \psi) = P\circ\Phi(\phi \otimes \psi)$ d'où $||P\circ\Phi(\phi\otimes\psi)|| \leqslant ||\phi||\,||\psi'||$. Comme $||p(\psi)||$ est la borne inférieure des $||\psi'||$ lorsque $p(\psi') = p(\psi)$. (ii) s'en déduit.

FIN DE LA DEMONSTRATION DE (3.37). - Soit $\phi \in L^2(G/H) \hat{\otimes} \overline{L^2(G/H)}$ et $u \in A_\omega$, soit $\psi \in X_\omega \hat{\otimes} \bar{X}_\omega$ tel que $p(\psi) = u$; on pose $L(\phi,u) = P\circ\Phi(\phi \otimes \psi)$. La formule (i) montre que cette définition est cohérente ($L(\phi,u)$ ne dépend que de ϕ et u et non de ψ et que $[L(\phi,u)](s)$ est donné par la formule annoncée. L'application L est évidemment bilinéaire et l'on a $||L(\phi,u)|| \leq ||\phi||\,||u||$.

Enfin, il est connu que l'espace vectoriel engendré par les $U_{f,\xi}$ est dense dans $L^2(G/H,X_\omega)$. Par produit tensoriel il en résulte que Φ est un épimorphisme (c.à.d. que son image est partout dense dans $L^2(G/H,X_\omega) \hat{\otimes} \overline{L^2(G/H,X_\omega)})$. Comme P est surjective, $P\circ\Phi$ est encore un épimorphisme donc l'espace vectoriel engendré par les $P\circ\Phi(\phi \otimes \psi)$, c.à.d. par les $L(\phi,u)$, est dense dans A_π.

REMARQUE. - Lorsque $G = NH$ est un produit semi-direct topologique et ω une représentation de H, il résulte du calcul fait en (3.32) que $\theta(s^{-1}\sigma(\dot{x})) = h_1^{-1}$ (où $s = n_1h_1$) ne dépend pas de $\dot{x}$ et $[L(\phi,u)](s)$ apparait comme un produit $v(s)u(h_1)$ où v est un élément de A_H : on retrouve le résultat (3.33). On pourrait d'ailleurs voir que c'est là le seul cas où $\theta(s^{-1}\sigma(\dot{x}))$ ne dépend pas de $\dot{x}$.

G - ETUDE DE A_π QUAND π EST UNE INTEGRALE DE REPRESENTATIONS.

Dans ce qui suit, G désignera toujours un groupe localement compact séparable (c.a.d. admettant une base dénombrable d'ouverts). On utilisera la terminologie suivante (cf. DIXMIER [2] , appendice B) :

- un espace borélien $(Z,\underline{B})$ est un ensemble Z muni d'une tribu $\underline{B}$ de parties de Z appelées parties boréliennes de Z. En général, $\underline{B}$ sera sous-entendu et on parlera simplement de l'espace borélien Z ;

- si Z et Z' sont deux espaces boréliens, une application $f : Z \to Z'$ est dite borélienne si l'image inverse de toute partie borélienne de Z' est une partie borélienne de Z.

- une mesure positive sur un espace borélien $(Z,\underline{B})$ est une mesure positive sur la tribu $\underline{B}$ qui est en outre σ-finie : il existe une suite de parties boréliennes B_n de Z telles que $Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ et vérifiant pour tout n, $\mu(B_n) < +\infty$.

- soit Z et Z' deux espaces boréliens, μ une mesure sur Z. Une application $f : Z \to Z'$ est dite μ-mesurable (ou mesurable si aucune confusion n'en résulte) si l'image inverse de toute partie borélienne de Z' appartient à la tribu complétée de la tribu des boréliens de Z pour la mesure μ. Les éléments de cette tribu complétée sont appelés parties μ-mesurables (ou mesurables) de Z.

(Pour toutes ces définitions, on peut aussi se reporter à MACKEY [1] p. 61-55 ou AUSLANDER et MOORE [1]).

- Pour tout ce qui concerne les définitions et propriétés élémentaires des intégrales de représentations ou d'algèbres de Von Neumann, on utilisera DIXMIER [2] Appendice A.

Afin d'obtenir, dans ce paragraphe, des énoncés analogues au cas abélien, en particulier le théorème de BOCHNER pour les groupes de type I, on utilisera, lorsque X est un espace de Hilbert complexe, l'isométrie entre $X \hat{\otimes} X$ et l'espace $\mathcal{T}(X)$ des opérateurs à trace sur X: à tout $\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \otimes \eta_n \in X \hat{\otimes} \bar{X}$ (donc tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} |\xi_n||\eta_n| < +\infty$) on associe l'opérateur à trace T_ϕ défini par :

$$T_\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} < x|\eta_n > \xi_n .$$

L'application $\phi \longmapsto T_\phi$ est une isométrie de $X \otimes \bar{X}$ sur l'espace de Banach obtenu en munissant $\mathcal{T}(X)$ de la norme-trace notée $||\cdot||_1$:

$$||\phi|| = ||T_\phi||_1 = \mathrm{tr}(|T_\phi|).$$

On a de plus la formule $\mathrm{tr}(T_\phi) = \sum_{n=1}^{+\infty} < \xi_n|\eta_n>$ d'où, plus généralement, pour tout opérateur borné U sur X : $\mathrm{tr}(UT_\phi) = \sum_{n=1} < U\xi_n|\eta_n>$ (cf. par ex. TREVES [1]) formule qui identifie le dual topologique de l'espace de Banach $\mathcal{T}(X)$ à l'ensemble $\mathcal{L}(X)$ des opérateurs bornés sur X (cf 2.4).

Si π est une représentation unitaire continue de G, on peut donc caractériser A_π de la manière suivante : une fonction $u : G \to \mathbf{C}$ appartient à A_π si et seulement si il existe $T \in \mathcal{T}(X)$ tel que l'on ait pour tout $s \in G$:

$$u(s) = \mathrm{tr}(\pi(s)T).$$

On a alors, plus généralement, si $S \in VN_\pi$, $\langle u,S\rangle = \mathrm{tr}(ST) = \mathrm{tr}(TS)$. De plus, si π est irréductible, l'opérateur T est unique et l'on a $||u|| = ||T||_1$ (cf. 2.6, 1°).

Nous aurons à utiliser dans la suite diverses notions de mesurabilité. Leur équivalence résultera en général du lemme suivant :

(3.38) LEMME. - *Soit* X *un espace de Hilbert complexe séparable. Tout opérateur borné* U *sur* X *est limite ultrafaible d'une suite d'opérateurs de rang fini.*

DEMONSTRATION. - Soit $\mathcal{L}(X)$ l'ensemble des opérateurs bornés sur X, et A la sous $*$-algèbre de $\mathcal{L}(X)$ constituée par l'ensemble des opérateurs de rang fini. Le commutant de A est réduit aux homothéties, donc son bicommutant est égal à $\mathcal{L}(X)$; d'autre part, l'ensemble des Tx pour $T \in A$, $x \in X$ est évidemment égal à X. Il en résulte que A est fortement dense dans $\mathcal{L}(X)$ (cf. DIXMIER [1] ch. 1, §3 , cor. 1 du th. 2). D'après le théorème de densité de KAPLANSKY (loc. cit th. 3), la boule unité de A est fortement dense dans celle de $\mathcal{L}(X)$ et, comme X est séparable, cette dernière est métrisable (loc. cit, prop. 1).

Ainsi, pour tout $U \in \mathscr{L}(X)$, il existe une suite (U_n) dans A telle que $U = \lim U_n$ pour la topologie forte avec de plus $|||U_n||| \leqslant |||U|||$. Cette dernière condition implique que l'on a aussi $U = \lim U_n$ pour la topologie ultraforte car celle-ci coïncide avec la forte sur les parties bornées de $\mathscr{L}(X)$. Enfin, comme la topologie ultrafaible est moins fine que l'ultraforte, on a $U = \lim U_n$ ultrafaiblement c.q.f.d.

Soit (Z,μ) un espace borélien mesuré, et $z \to X_z$ un champ mesurable d'espaces hilbertiens sur Z ; on désignera par $L^1(Z,\mu)^{\oplus}$ l'ensemble des champs mesurables $T : z \to T_z$ d'opérateurs à trace tels que $\int_Z ||T_z||_1 \, d\mu(z) < +\infty$ et par $L^{\infty}(Z,\mu)^{\oplus}$ l'ensemble des champs mesurables d'opérateurs bornés tels que ess sup$|||T_z||| < +\infty$ c.a.d. l'ensemble des "opérateurs décomposables" (dans ces définitions, on identifie deux champs égaux μ-presque partout).

Cas d'un champ constant. - Soit Z un espace borélien, μ une mesure positive sur Z ; un champ mesurable $z \to X_z$ d'espaces de Hilbert sur Z est appelé champ constant si

(i) il existe un espace de Hilbert séparable X tel que, pour tout z, $X_z = X$;

(ii) Les champs de vecteurs mesurables associés au champ $z \to X_z$ sont les applications mesurables $Z \to X$ (c.a.d. puisque X est séparable, les $f : Z \to X$ telles que, pour tout $a \in X$, $z \mapsto \langle f(z) | a \rangle$ soit mesurable).

Dans ces conditions, l'intégrale hilbertienne $\int^{\oplus} X_z d\mu(z)$ est simplement l'espace de Hilbert $L^2(Z,\mu,X)$.

Avec les mêmes hypothèses, un champ $z \mapsto \pi_z$ de représentations d'un groupe G dans X est un champ mesurable de représentations si et seulement si, pour toute f mesurable $Z \to X$ et tout $s \in G$, l'application $z \to \pi_z(s)[f(z)]$ est mesurable. La représentation $\pi = \int_Z^{\oplus} \pi_z d\mu(z)$ de G dans $L^2(Z,\mu,X)$ est alors définie par :

(3.39) $\quad [\pi(s)f](z) = [\pi_z(s)](f(z)) \qquad (s \in G,\ z \in Z,\ f \in L^2(Z,\mu,X))$.

EXEMPLE. - Cas d'un groupe abélien séparable. -

Soit G un groupe abélien séparable. On choisit pour Z le groupe dual $\hat{G}$ muni de la structure borélienne déduite de sa topologie ; on choisit X = C. Si $z \in \hat{G}$, la représentation π_z est la représentation de G dans C définie par le caractère z. Pour toute mesure positive π sur G, ce champ de représentations est mesurable et la représentation $\pi = \int_{\hat{G}}^{\oplus} \pi_z d\mu(z)$ s'effectue dans $L^2(\hat{G},\mu)$ par la formule :

(3.40) $\quad [\pi(s)f](z) = \langle s,z \rangle f(z)$ (où $s \in G$, $z \in \hat{G}$ et $f \in L^2(\hat{G},\mu)$).

On a déjà utilisé en (2.13) le fait que toute représentation sans multiplicité de G est équivalente à une représentation ainsi définie et on en a déduit une caractérisation de A_π . On peut également caractériser B_π par un procédé analogue. Pour cela, si π' est une représentation de G dans un espace de Hilbert séparable disons qu'une mesure μ positive sur G est associée à π' si π' est quasi-équivalente à la représentation π de

G dans $L^2(\hat{G},\mu)$ définie par (3.40) (l'ensemble des mesures positives associées à π' constitue une classe d'équivalence de mesures : cf. DIXMIER [2]). D'après FELL ([2] , th. 3.3), la représentation π' est faiblement équivalente à l'ensemble des représentations irréductibles de G appartenant au support de μ noté supp(μ). Il en résulte que si μ_1 et μ_2 sont associées à π'_1 et π'_2 , la représentation π'_1 est faiblement contenue dans π'_2 si et seulement si supp $\mu_1 \subset$ supp μ_2 (ceci résulte par exemple de DIXMIER [2], 18.1.5). On déduit de ce qui précède le résultat suivant :

(3.41) PROPOSITION. - *Soit π une représentation d'un groupe abélien localement compact séparable G dans un espace de Hilbert séparable et μ une mesure positive sur $\hat{G}$ associée à π. Alors B_π est l'ensemble des transformées de Fourier inverses des mesures bornées sur $\hat{G}$ dont le support est contenu dans celui de μ.*

DEMONSTRATION. - Soit ν une mesure bornée sur $\hat{G}$ telle que supp $\nu \subset$ supp μ ; on peut supposer, quitte à décomposer ν, que ν est une mesure positive. Soit ω la représentation de G dans $L^2(\hat{G}\ ;\nu)$ définie comme en (3.40), cette représentation est faiblement contenue dans π, on a donc l'inclusion $A_\omega \subset B_\pi$. Or, $1 \in L^1(\hat{G},\nu)$ donc $\bar{\mathcal{F}}(1.\nu) = \bar{\mathcal{F}}(\nu) \in A_\omega$ (2.13) ; on en déduit $\bar{\mathcal{F}}(\nu) \in B_\pi$.

Réciproquement, soit $u \in B_\pi$. D'après EYMARD [1], (2.1), il existe une représentation ω faiblement contenue dans π telle que $u(s) = \langle\omega(s)\xi|\eta\rangle$, où ξ et η sont des vecteurs de X_ω, donc u appartient à A_ω. En remplaçant X_ω par le sous-espace stable engendré par les $\pi(s)\xi$ où $s \in G$, on se ramène au cas où X_ω est séparable. Soit ν une mesure positive sur $\hat{G}$ associée à ω et soit ω' la représentation correspondante de G dans $L^2(\hat{G},\nu)$. Alors $u \in A_{\omega'}$, puisque $A_{\omega'} = A_\omega$, donc (2.13) il existe $h \in L^1(\hat{G},\nu)$ telle que $u = \bar{\mathscr{F}}(h\nu)$. On a $\mathrm{supp}(h\nu) \subset \mathrm{supp}(\nu)$, et comme ω est faiblement contenue dans π, $\mathrm{supp}(\nu) \subset \mathrm{supp}(\mu)$ d'où $\mathrm{supp}(h\nu) \subset \mathrm{supp}(\mu)$. c.q.f.d.

Ce résultat sera généralisé aux groupes de type I, pour une représentation quelconque en (3.56).

(3.42) UN CONTRE-EXEMPLE POUR LA BOULE UNITE DE B_π. - Nous allons pouvoir, grâce à ce qui précède, montrer que, contrairement à ce qui se passe pour B(G) la boule unité de B_π n'est pas en général fermée dans l'espace des fonctions continues sur G, muni de la topologie de la convergence simple (cf. (2.19)). Le contre-exemple qui suit m'a été communiqué par R. SPECTOR :

Soit $G = \mathbb{R}$ et $\hat{G} = \mathbb{R}$. Soit π une représentation de R dans un espace de Hilbert séparable dont le support (c.a.d. le support d'une mesure associée à π) soit $\mathbb{N}^*$.

(par exemple la somme hilbertienne des représentations définies par les caractères $t \mapsto e^{imt} | n > 0$). Nous allons voir qu'il existe une suite généralisée de mesures bornées de norme 1 sur $\hat{G} = \mathbb{R}$, à support contenu dans $\mathbb{N}^*$, dont les transformées de Fourier, qui constituent une suite généralisée dans la boule unité de B_π, convergent simplement vers 1. Or 1 transformée de Fourier inverse de la mesure de Dirac en 0, n'appartient pas à B_π.

Pour construire la suite généralisée en question, nous utiliserons le résultat suivant :

LEMME. - *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *et toute partie finie* $A \subset \mathbb{R}$ *il existe un entier* $p \in \mathbb{N}^*$ *tel que l'on ait, pour tout* $t \in A$; $|e^{ipt} - 1| \leqslant \varepsilon$.

Ceci résulte d'un théorème de DIRICHLET (cf. KAHANE et SALEM, [1], page 177).

Pour tout $\varepsilon > 0$ et toute partie finie $A \subset \mathbb{R}$, soit $p_{\varepsilon,A}$ le plus petit entier strictement positif satisfaisant au lemme. Soit I l'ensemble des couples (ε,A) ordonné par la relation : "$(\varepsilon,A) < (\varepsilon',A')$ ssi $\varepsilon' \leqslant \varepsilon$ et $A \subset A'$". Cet ensemble est ordonné filtrant et, d'après le lemme, la suite généralisée des mesures de Dirac $\delta_{p_{\varepsilon,A}}$ répond à la question.

Revenons maintenant à un champ constant quelconque. L'espace $L^1(Z,\mu)^{\otimes}$ s'identifie alors à l'espace $L^1(Z,\mu,\mathcal{T}(X))$ des classes de fonctions $Z \to \mathcal{T}(X)$ intégrables au sens de BOCHNER pour la mesure μ. Car, soit $T : Z \to \mathcal{T}(X)$, nous allons voir qu'il revient au même de dire que T est μ-mesurable au sens de BOCHNER, ou que T est un champ d'opérateurs, mesurable relativement au champ constant défini par μ et X.

En effet, puisque X est séparable, $X \hat{\otimes} \bar{X}$ donc $\mathcal{T}(X)$, est séparable. Ainsi, T est mesurable au sens de BOCHNER ssi il vérifie :

(C_1) : Pour tout $U \in \mathcal{L}(X)$, la fonction $z \mapsto tr(T_z U)$ est μ-mesurable.

Alors que T définit un champ mesurable d'opérateurs ssi il vérifie :

(C_2) : Pour toute fonction μ-mesurable $f : Z \to X$, la fonction $z \mapsto T_z[f(z)]$ est encore mesurable.

Mais, en considérant une base hilbertienne de X, on voit que cette dernière condition équivaut à :

(C_3) : Pour tout couple $(\xi,\eta) \in X \times X$, la fonction $z \mapsto \langle T_z(\xi)|\eta\rangle$ est mesurable.

Cette dernière condition s'écrit aussi :

(C_3') : Pour tout $\phi = \xi \otimes \eta$, la fonction $z \mapsto tr(T_z T_{\xi\otimes\eta})$ est mesurable.

Elle équivaut donc à (C_1) d'après le lemme (3.38) puisque la topologie ultrafaible sur $\mathcal{L}(X)$ est la topologie de dualité $\sigma(\mathcal{L}(X),\mathcal{T}(X))$ (cf. 2.4).

D'après SAKAI [1] , (1.22,13), le dual de $L^1(Z,\mu,\mathscr{T}(X))$ est l'**algèbre** de Von Neumann $L^\infty(Z,\mu,\mathscr{L}(X))$ des applications $U : Z \to \mathscr{L}(X)$ qui **vérifient :**

1°) (C_4) : Pour tout $T \in \mathscr{T}(X)$, la fonction $z \mapsto tr(TU_z)$ est **mesurable.**

2°) Le champ U est essentiellement borné.

La formule de dualité est : $\langle T,U\rangle = \int_Z tr(T_z U_z)d\mu(z)$.

Autrement dit, $L^1(Z,\mu,\mathscr{T}(X))$ est le prédual de $L^\infty(Z,\mu,\mathscr{L}(X))$. La condition (C_4) est équivalente à (C_3) du fait de l'expression des **éléments** de $X \hat{\otimes} \bar{X}$, donc de $\mathscr{T}(X)$, sous forme de séries ; elle équivaut donc finalement à (C_2) et exprime ainsi que U est un champ mesurable d'**opérateurs.** Finalement, $L^\infty(Z,\mu,\mathscr{L}(X)) = L^\infty(Z,\mu)^\oplus$ dans le cas d'un champ constant.

Les considérations précédentes vont permettre d'étendre au cas d'un groupe de type I les résultats obtenus en (2.13) dans le cas abélien c.a.d. de caractériser A_π quand π est une intégrale de représentations irréductibles. Lorsque G est quelconque, je ne connais en revanche que le résultat suivant :

(3.43) PROPOSITION. - *Soit* Z *un espace borélien,* μ *une mesure positive sur* Z *et* $z \mapsto \pi_z$ *un champ* μ*-mesurable de représentations irréductibles de* G. *Soit* $\pi = \int_Z^\oplus \pi_z d\mu(z)$. *Alors, pour toute* $u \in A_\pi$, *il existe* $T \in L^1(Z,\mu)^\oplus$ *tel que :*

(i) Pour tout $s \in G$, $u(s) = \int_Z tr(\pi_z(s)T_z)d\mu(z)$.

(ii) Soit $f_z \in A_{\pi_z}$ *définie par* $f_z(s) = \mathrm{tr}(\pi_z(s)T_z)$*. Alors pour tout* $S \in C^*(G)$, *on a :*

$$< S,u> = \int_Z <S,f_z> d\mu(z).$$

(iii) on a $||u|| \leqslant \int_Z ||T_z||_1 \, d\mu(z)$, *et on peut choisir le champ* $T \in L^1(Z,\mu)^{\oplus}$ *de façon à avoir l'égalité.*

DEMONSTRATION. - Soit dans A_π la fonction $s \mapsto u(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} <\pi(s)\xi_k|\eta_k>$ où (ξ_k) et (η_k) sont des suites de vecteurs de X_π telles que $\sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k||\eta_k| < +\infty$

Comme $X_\pi = \int_Z^{\oplus} X_{\pi_z} \, d\mu(z)$, il existe des champs de vecteurs de carré sommable $z \mapsto \xi_k(z)$ et $z \mapsto \eta_k(z)$ tels que $\xi_k = \int_Z^{\oplus} \xi_k(z)d\mu(z), |\xi_k|^2 = = \int_Z |\xi_k(z)|^2 d\mu(z)$, $\eta_k = \int_Z^{\oplus} \eta_k(z)d\mu(z)$, $|\eta_k|^2 = \int_Z^{\oplus} |\eta_k(z)|^2 d\mu(z)$. Avec ces notations, on trouve que :

$$u(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_Z <\pi_z(s)\xi_k(z)|\eta_k(z) > d\mu(z). \tag{3.44}$$

On va montrer, en utilisant le théorème de Fubini, que l'on peut, dans (3.44), permuter Σ et $\int$. Pour cela, on pose : $v_k(z,s) = <\pi_z(s)\xi_k(z)|\eta_k(z)>$. On sait que $z \mapsto v_k(z,s)$ est mesurable, donc $(k,z) \mapsto v_k(z,s)$ est une application mesurable $\mathbb{N} \times Z \to \mathbb{C}$. D'autre part, on a $|v_k(z,s)| \leqslant |\xi_k(z)||\eta_k(z)|$ et, comme $z \mapsto |\xi_k(z)|$ et $z \mapsto |\eta_k(z)|$ sont de carré sommable, $z \mapsto |\xi_k(z)||\eta_k(z)|$ est intégrable et, de même que pour $v_k(z,s)$. L'application $(k,z) \mapsto |\xi_k(z)||\eta_k(z)|$ est mesurable. On a alors successivement :

$$\int_Z |\xi_k(z)||\eta_k(z)|d\mu(z) \leqslant \left(\int_Z |\xi_k(z)|^2 d\mu(z)\right)^{1/2}\left(\int_Z |\eta_k(z)|^2 d\mu(z)\right)^{1/2}$$

d'où : $\sum_{k=1}^{+\infty} \int_Z |\xi_k(z)||\eta_k(z)|d\mu(z) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k||\eta_k| < +\infty.$

On peut donc appliquer le théorème de Fubini aux fonctions $|\xi_k(z)||\eta_k(z)|$ et $v_k(z,s)$, ce qui donne :

$$u(s) = \int_Z \left(\sum_{k=1}^{+\infty} <\pi_z(s)\xi_k(z)|\eta_k(z)>\right) d\mu(z)$$

ou en posant $f_z(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} <\pi_z(s)\xi_k(z)|\eta_k(z)>$, quantité qui est finie pour presque tout z :

$$u(s) = \int_Z f_z(s)\, d\mu(z).$$

Le théorème de Fubini montre aussi que :

$$(3.45)\quad \int_Z \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k(z)||\eta_k(z)|\right) d\mu(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_Z |\xi_k(z)||\eta_k(z)d\mu(z) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k||\eta_k|;$$

en particulier, pour presque tout z, $\sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k(z)||\eta_k(z)|$ est fini, ce qui montre que $\phi_z = \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k(z) \otimes \eta_k(z) \in X_z \hat{\otimes} \bar{X}_z$ pour presque tout z et que $f_z(s) = tr(\pi_z(s)T_{\phi_z})$. On obtient donc l'égalité (i) en posant $T_z = T_{\phi_z}$

On a de plus :

$$||T_{\phi_z}||_1 = ||\sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k(z) \otimes \eta_k(z)|| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k(z)||\eta_k(z)|$$

d'où l'on déduit, d'après (3.45), que $z \to ||T_z||_1$ est intégrable et vérifie :

$$(3.46)\quad \int ||T_z||_1\, d\mu(z) \leqslant \Sigma|\xi_k||\eta_k|.$$

Ainsi, $T \in L^1(Z,\mu)^{\oplus}$.

On va montrer maintenant que, pour tout $S \in C^*(G)$, on a :

$\langle S,u\rangle = \int_Z \langle S,f_z\rangle d\mu(z)$. Pour cela, supposons d'abord que S est une fonction $g \in L^1(G)$. On a :

$$\langle g,u\rangle = \int_G g(s)u(s)ds = \int_G g(s)\Big[\int_Z f_z(s)d\mu(z)\Big]ds = \int_Z d\mu(z) \int_G g(s)f_z(s)ds$$

ce qui est bien, dans cas, la formule désirée. En effet, l'application du théorème de Fubini est justifiée par les considérations suivantes. Tout d'abord, on sait que pour tout $z \in Z$, l'application $s \mapsto v_k(z,s)$ est continue et que pour tout $s \in G$, l'application $z \mapsto v_k(z,s)$ est mesurable, il en résulte que v_k est une application mesurable : $Z \times G \to C$ (cf. MACKEY [1], lemme 9.2) et il en est de même de l'application : $(z,s) \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(z,s)=f_z(s)$.
On a d'autre part

$$\int_G |g(s)|\, ds \int_Z |f_z(s)|d\mu(z) \leqslant \int_G |g(s)| \quad (\sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k||\eta_k|)\ ds < + \infty.$$

d'après (3.45)).

Si S est un élément quelconque de $C^*(G)$, il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $L^1(G)$ telle que $\lim ||S-g_n|| = 0$, d'où
$\langle S,u\rangle = \lim \langle g_n,u\rangle = \lim \int_Z \langle g_n,f_z\rangle\ d\mu(z)$. Or, pour tout $z \in Z$, $\lim \langle g_n,f_z\rangle = \langle S,f_z\rangle$. D'autre part, soit A un majorant de l'ensemble des $||g_n||$. On a : $|\langle g_n,f_z\rangle| \leqslant A||f_z|| \leqslant A\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k(z)|\ |\eta_k(z)|\right)$ et ce majorant est intégrable d'après (3.41).

L'application du théorème de Lebesgue donne $\lim \int_Z \langle g_n, f_z\rangle \, d\mu(z) = \int_Z \langle S, f_z\rangle \, d\mu(z)$, ce qui est le résultat (ii) annoncé.

D'après le résultat (ii), on a donc, pour tout $S \in C^*(G)$:

$$|\langle S, u\rangle| \leqslant \int_Z |\langle S, f_z\rangle| \, d\mu(z) \leqslant ||S|| \int_Z ||f_z|| \, d\mu(z)$$

c.a.d. $\quad |\langle S,u\rangle| \leqslant ||S|| \int_Z ||T_z||_1 d\mu(z)$.

d'où $\quad ||u|| \leqslant \int_Z ||T_z||_1 \, d\mu(z)$.

Soit (ξ_k) et (η_k) telles que $u(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle \pi(s)\xi_k | \eta_k\rangle$ et $||u|| = \sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k||\eta_k|$ (2.9) ; on a vu en (3.46) que :

$$\int_Z ||T_z||_1 \, d\mu(z) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k||\eta_k| \, .$$

On en déduit que, grâce à ce choix particulier des suites (ξ_k) et (η_k) on obtient un champ T tel que : $||u|| = \int_Z ||T_z||_1 \, d\mu(z)$. C.Q.F.D.

REMARQUES. 1) - On peut généraliser ce résultat au cas d'une décomposition intégrale en représentations non irréductibles à condition d'abandonner le langage des opérateurs à trace (cf. ARSAC [2])

2) La portée de cet énoncé est limitée par le fait qu'il ne permet pas de calculer $\langle u,S\rangle$ quand $S \in VN_\pi$ (sauf si $S \in \pi(C^*(G))$: formule (ii)). Ceci provient du fait que l'on ne connait pas la relation entre VN_π et VN_{π_z}. Au contraire, si G est de type I, cette relation existe. VN_π est l'intégrale des VN_{π_z} ; c'est l'idée de l'énoncé suivant qui traite le cas d'un champ constant.

(3.47) PROPOSITION. - *Soit* (Z,μ) *un espace borélien,* μ *une mesure positive sur* Z*,* X *un espace de Hilbert complexe séparable. Pour tout* $z \in Z$*, soit* π_z *une représentation irréductible de* G *dans* X*. Supposons que le champ* π_z *soit mesurable relativement au champ constant d'espaces de Hilbert défini par* (Z,μ,X) *et soit* $\pi = \int_Z^{\oplus} \pi_z d\mu(z)$ *. Supposons en outre que* $VN_\pi = \int_Z^{\oplus} VN_{\pi_z} d\mu(z)$ *(ce qui est toujours vrai pour les groupes de type I). Alors les espaces de Banach* A_π *et* $L^1(Z,\mu,\mathcal{T}(X))$ *sont isométriques. De façon plus précise, pour tout* $T \in L^1(Z,\mu,\mathcal{T}(X))$*; il existe une unique* $u \in A_\pi$ *telle que :*

(i) Pour tout $s \in G$, $u(s) = \int_Z tr(\pi_z(s)T_z)d\mu($

et l'on a de plus :

(ii) Pour tout $S = \int^{\oplus} S_z d\mu(z) \in VN_\pi$

$$\langle u,S\rangle = \int_Z tr(T_z S_z)d\mu(z)$$

(iii) $||u|| = \int_Z ||T_z||_1 d\mu(z)$.

DEMONSTRATION. - Puisque $VN_{\pi_z} = \mathcal{L}(X)$ pour tout z, l'hypothèse $VN_\pi = \int_Z^{\oplus} VN_{\pi_z} d\mu(z)$ signifie que $VN_\pi = L^\infty(Z,\mu,\mathcal{L}(X))$. Ainsi, le prédual de VN_π qui s'identifie à A_π , s'identifie aussi à $L^1(Z,\mu,\mathcal{T}(X))$, ce qui prouve que ces deux espaces sont isométriques par l'application qui à tout $T \in L^1(Z,\mu,\mathcal{T}(X))$ associe la fonction $u \in A_\pi$ définissant la même forme linéaire sur VN_π c.a.d. telle que, pour tout $S = \int_Z^{\oplus} S_z d\mu(z)$ on ait :

$$\langle u,S\rangle = \int_Z tr(T_z S_z)d\mu(z).$$

Comme il s'agit d'une isométrie, on a de plus :

$$||u|| = \int_Z ||T_z||_1 \, d\mu(z).$$

Enfin, en choisissant $S = \pi(s)$ avec $s \in G$, on a :

$$u(s) = \langle u,\pi(s)\rangle = \int_Z tr(\pi_z(s)T_z)d\mu(z).$$

et cette dernière relation définit u sans ambigüité.

C.Q.F.D.

On va maintenant déduire de cet énoncé, par un procédé classique, l'énoncé général pour un groupe de type I :

GROUPES DE TYPE I - RAPPELS. - Soit G un groupe de type I et $\hat{G}$ l'ensemble des classes de représentations irréductibles de G. Pour tout $n = 1,2,\ldots \infty$ (où ∞ désigne le cardinal du dénombrable) soit $\hat{G}_n$ l'ensemble des $z \in \hat{G}$ qui sont de dimension n ; on sait que $\hat{G}$ est muni canoniquement d'une structure borélienne standard (d'ailleurs déduite de la topologie de Fell) pour laquelle chacun des $\hat{G}_n$ est borélien. Pour tout n, on désigne par X_n un espace de Hilbert fixé de dimension n.

(3.49) Toute mesure positive μ sur G définit un champ mesurable d'espaces hilbertiens sur $\hat{G}$ de façon suivante : pour tout n, soit μ_n (resp. μ'_n), la mesure sur $\hat{G}_n$ (resp. sur $\hat{G}$) induite par μ (resp. égale à $\chi_{\hat{G}_n} \cdot \mu$ où $\chi_{\hat{G}_n}$ est la fonction caractéristique de $\hat{G}_n$) ; pour tout $z \in \hat{G}_n$ soit $X_z = X_n$;

un champ de vecteur $z \mapsto x(z)$ où, pour tout z, $x(z) \in X_z$, sera dit mesurable si sa restriction à $\hat{G}_n$ est une application μ_n-mesurable $\hat{G}_n \to X_n$. On a la formule évidente :

$$(3.50) \quad \int_{\hat{G}}^{\oplus} X_z d\mu(z) = L^2(\hat{G},\mu'_1,X_1) \oplus L^2(\hat{G},\mu'_2,X_2) \oplus \dots \oplus L^2(\hat{G},\mu'_\infty,X_\infty).$$

De plus, chacun des espaces de Hilbert qui figurent dans cette formule est séparable, puisque $\hat{G}$ est standart.

(3.51). Il existe un champ $z \to \beta_z$ de représentations de G dans X_z tel que β_z appartient à la classe z pour tout z. Ce champ est mesurable relativement au champ d'espaces de Hilbert défini par n'importe quelle mesure positive μ sur $\hat{G}$ Dans la suite, on ne se préoccupera que de ce champ d'espaces hilbertiens.

(3.52). Pour toute représentation π de G dans un espace de Hilbert séparable X, il existe une mesure positive μ sur $\hat{G}$ telle que π soit équivalente à $\int_{\hat{G}}^{\oplus} c_z\beta_z d\mu(z)$ où, pour tout z, c_z est un cardinal. On adoptera dans la suite la notation simplifiée $\int^{\oplus} c_z z \, d\mu(z)$. Réciproquement, toute mesure μ définit une telle représentation à une quasi-équivalence près. Les sous-espaces $L^2(\hat{G},\mu'_n,X_n)$ de l'espace de π sont évidemment invariants par π donc la décomposition (3.50) induit une décomposition de π : $\pi = \pi'_1 \oplus \pi'_2 \oplus \dots \oplus \pi'_\infty$ où pour tout n, $\pi'_n = \int_{\hat{G}}^{\oplus} c_z z d\mu'_n(z)$.

Les mesures μ'_n étant concentrées sur les $\hat{G}_n$ sont deux à deux étrangères donc les représentations π'_n sont deux à deux disjointes (DIXMIER [2], 8.4.7). La représentation π'_n est trivialement équivalente à $\pi_n = \int^{\oplus}_{\hat{G}_n} c_z z d\mu_n(z)$ où l'intégrale est relative au champ constant défini par $\hat{G}_n$, μ_n et X_n. L'application à π_n, lorsque $c_z = 1$ pour tout z, de la proposition (3.47) va permettre de démontrer le résultat suivant :

(3.53) THEOREME. - *On garde les notations précédentes : soit* π *une représentation d'un groupe de type* I *dans un espace de Hilbert séparable, soit* μ *une mesure sur* $\hat{G}$ *associée à* π. *Alors, les espaces de Banach* A_π *et* $L^1(G,\mu)^{\oplus}$ *sont isométriques. De façon plus précise, pour tout* $T \in L^1(\hat{G},\mu)^{\oplus}$, *il existe un unique* $u \in A_\pi$ *tel que l'on ait :*

(i) pour tout $s \in G$, $u(s) = \int_{\hat{G}} tr(\beta_z(s)T_z)d\mu(z)$.

et l'on a de plus :

(ii) Pour tout $S \in VN_\pi$, *il existe un unique* $U \in L^\infty(Z,\mu)^{\oplus}$ *tel que :*

$$\langle u,S\rangle = \int_{\hat{G}} tr(T_z U_z)d\mu(z).$$

(iii) La correspondance définie en (ii) est une isométrie de VN_π *sur* $L^\infty(Z,\mu)^{\oplus}$.

(iv) $||u|| = \int_{\hat{G}} ||T_z||_1 d\mu(z)$.

DEMONSTRATION. - On sait que la représentation $\omega = \int_{\hat{G}}^{\oplus} z\, d\mu(z)$ est quasi- équivalente à π (DIXMIER [2] 8.4.4). On a donc $A_\omega = A_\pi$. On a, comme en (3.52), $\omega = \omega'_1 + \ldots + \omega'_n + \ldots + \omega'$, où $\omega'_n = \int_{\hat{G}}^{\oplus} z\, d\mu'_n(z)$ et $\omega_n = \int_{\hat{G}_n}^{\oplus} z d\mu_n(z)$ donc $A_{\omega'_n} = A_{\omega_n} = A_{\pi_n} = A_{\pi'_n}$.

Remarquons d'autre part que si $T \in L^1(\hat{G},\mu)^\oplus$ et si T_n désigne sa restriction à $\hat{G}_n$, on a $T_n \in L^1(\hat{G}_n,\mu_n)^\oplus$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} ||T_n||_1 = ||T||_1$. Réciproquement, si (T_n) est une suite de champ mesurables telle que, pour tout n, $T_n \in L^1(\hat{G}_n,\mu_n)^\oplus$, vérifiant de plus $\sum_{n=1}^{+\infty} ||T_n|| < +\infty$ et si T désigne le champ d'opérateurs sur $\hat{G}$ qui coïncide sur chaque $\hat{G}_n$ avec T_n on a :

$$T \in L^1(\hat{G},\mu) \text{ et } ||T||_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} ||T_n||_1 .$$

Or, on peut appliquer à ω_n la proposition (3.47) car on a $VN_{\omega'_n} = \int_{\hat{G}}^{\oplus} VN_{\beta_z} d\mu'_n(z)$ (DIXMIER [2] , 8.4.1) donc $VN_{\omega_n} = \int_{\hat{G}}^{\oplus} VN_{\beta_z} d\mu_n(z)$. Ainsi, $L^1(\hat{G}_n, \mu_n)$ est isométrique à $A_{\omega_n} = A_{\pi'_n}$. On en déduit, en utilisant (3.13) et la caractérisation de $L^1(\hat{G},\mu)^\oplus$ en fonction des $L^1(\hat{G}_n,\mu_n)$ donnée ci-dessus, que $A_\pi = A_\omega$ est isométrique à $L^1(\hat{G},\mu)$. D'autre part, on a $VN_\omega = \int_{\hat{G}}^{\oplus} VN_{\beta_z} d\mu(z)$ (d'après DIXMIER [2], 8.41) et comme $VN_{\beta_z} = \mathscr{L}(X_z)$ ceci signifie que $VN_\omega = L^\infty(\hat{G},\mu)^\oplus$. Ainsi le dual de l'espace de Banach A_π s'identifie d'une part à VN_π , d'autre part à $L^\infty(\hat{G},\mu)^\oplus$, ce qui prouve que ces deux espaces sont isométriques.

Il reste à préciser ces isométries :

A tout $T \in L^1(\hat{G},\mu)^{\oplus}$, on associe d'après ce qui précède la fonction $u \in A_\pi$ définie de la manière suivante : à T, on associe d'abord la suite des T_n comme ci-dessus, puis à chaque T_n on associe $u_n \in A_{\omega_n}$ grâce à (3.47) ; autrement dit :

$$(3.54)\quad u_n(s) = \int_{\hat{G}_n} tr(\beta_z(s)T_n(z))d\mu_n(z) = \int_{\hat{G}} tr(\beta_z(s)T_z)\chi_{\hat{G}_n}(s)d\mu(s).$$

Enfin, à la suite (u_n) on associe $u = u_1+u_2+\ldots+u_\infty$ où la série converge dans B(G), donc uniformément. On en déduit :

$$u(s) = u_1(s)+u_2(s)+\ldots+u_\infty(s).$$

donc, d'après (3.54) :

$$u(s) = \int_{\hat{G}} tr(\beta_z(s)T_z)\, d\mu(z).$$

ce qui démontre (i) et (iv) (car on sait que la correspondance ainsi définie est une isométrie),

Soit maintenant $S \in VN_\pi$, on lui associe $U \in L^\infty(\hat{G},\mu)^{\oplus} = VN_\omega$ tel que S et U définissent la même forme linéaire sur $A_\pi = A_\omega$:

$$\langle u,S\rangle = \langle u,U\rangle .$$

Dans cette formule, $\langle u,U\rangle$ est calculé dans la dualité (A_ω, VN_ω), donc, d'après (3.13) on a :

$$\langle u,U\rangle = \langle u_1,U_1'\rangle + \ldots + \langle u_\infty,U_\infty'\rangle$$

où $U'_n = U_n\chi_{\hat{G}_n}$ où $\langle u_1,U'_1\rangle \ldots \langle u_\infty,U'_\infty\rangle$ sont calculés dans les dualités $(A_{\omega'_n}, VN_{\omega'_n})$. On a ensuite : $\langle u_n,U'_n\rangle = \langle u_n,U_n\rangle$ où U_n désigne le champ sur $\hat{G}_n$ défini par restriction de U et où le crochet $\langle u_n, U_n \rangle$ est calculé dans la dualité $(A_{\omega_n}, VN_{\omega_n})$ ce qui donne finalement :

$$\langle u_n, U_n \rangle = \int_{\hat{G}_n} tr(T_n(z)U_n(z)d\mu_n(z) = \int_{\hat{G}} tr(T_z U_z)\chi_{\hat{G}_n}(z)d\mu(z)$$

d'où l'on déduit (ii) et (iii) (car on sait déjà que la correspondance ainsi définie est une isométrie). C.Q.F.D.

(3.55) COROLLAIRE 1 : THEOREME DE BOCHNER. - *Soit* G *un groupe de type* I.

1) Pour toute $u \in B(G)$, *il existe une mesure positive* μ *sur* $\hat{G}$ *et un champ d'opérateurs* $T \in L^1(G,\mu)^{\oplus}$ *tels que :*

$$u(s) = \int_{\hat{G}} tr(\beta_z(s)T_z)d\mu(z)$$

2) Pour toute mesure positive μ *sur* $\hat{G}$ *et tout* $T \in L^1(\hat{G},\mu)^{\oplus}$ *vérifiant* $u(s) = \int_{\hat{G}} tr(\beta_z(z)T_z)d\mu(z)$ *, on a* $||u|| = \int_{\hat{G}} ||T_z||_1 \, d\mu(z)$.

3) Soit (μ,T) *et* (μ',T') *deux couples vérifiant les conditions de 1). Supposons de plus que l'on ait* $T_z \neq 0$ μ-pp *et* $T'_z \neq o$ μ'pp; *alors les mesures* μ *et* μ' *sont équivalentes. Soit* h μ'*-mesurable telle que* $\mu = h\mu'$ *; on a alors* $T'_z = h(z)T_z$ μ'pp.

DEMONSTRATION. - Soit $u \in B(G)$, soit π une représentation telle que $u(s) = \langle\pi(s)\xi|\eta\rangle$ avec $(\xi,\eta) \in X_\pi \times X_\pi$ (par exemple, la représentation universelle de G). En remplaçant X_π par le sous-espace stable engendré par les $\pi(s)\xi$ où $s \in G$, on se ramène au cas où X_π est séparable. On obtient alors 1) en appliquant le théorème précédent.

Soit (μ,T) tel que $u(s) = \int_{\hat{G}} tr(\beta_z(s)T_z)\, d\mu(z)$ avec $T \in L^1(\hat{G},\mu)^{\oplus}$.

Soit $\pi = \int_{\hat{G}}^{\oplus} z\, d\mu(z)$; alors, d'après le théorème précédent, on a $u \in A_\pi$ et $||u|| = \int_{\hat{G}} ||T_z||_1\, d\mu(z)$ d'où 2).

Soit (μ',T') un autre couple vérifiant les mêmes conditions et $\pi' = \int_{\hat{G}}^{\oplus} z\, d\mu'(z)$. On a $u \in A_\pi + A_{\pi'} = A_{\pi\oplus\pi'}$, et $\pi + \pi'$ s'effectue dans $X_\pi \oplus X_{\pi'}$, qui est séparable comme X_π et $X_{\pi'}$. Soit ν la mesure positive sur $\hat{G}$ associée à $\pi\oplus\pi'$. Comme π et π' sont des sous-représentations de $\pi\oplus\pi'$, les mesures μ et μ' sont de base ν (DIXMIER [2] 8.4.5) : il existe f et f' ν-mesurables telles que $\mu = f\nu$ et $\mu' = f'\nu$ d'où :

$$u(s) = \int_{\hat{G}} tr[\beta_z(s)(f(z)T_z)]\, d\nu(z) = \int_{\hat{G}} tr[\beta_z(s)(f'(z)T'_z)]\, d\nu(z)$$ d'où

d'après le théorème précédent, puisque $f(z)T_z \in L^1(\hat{G},\nu)^{\oplus}$ et $f'(z)T'_z \in L^1(\hat{G},\nu)^{\oplus}$:

$$f(z)T_z = f'(z)T'_z \quad \nu\,p.p.$$

d'où $$f(z)||T_z||_1 = f'(z)||T'_z||_1 \quad \nu\,p.p.$$

On a donc l'égalité de mesures :

$$||T_z||_1 f(z)d\nu(z) = ||T'_z||_1 f'(z)d\nu(z)$$

c.a.d. $$||T_z||_1 d\mu(z) = ||T'_z||_1\, d\mu'(z).$$

Si l'on suppose de plus $T_z \neq 0$ μ-p.p et $T'_z \neq 0$ μ'-pp la mesure μ est équivalente à $||T_z||_1\, d\mu(z)$ et la mesure μ' est équivalente à

$||T'_z||_1\, d\mu'(z)$. D'après l'égalité précédente, ces deux mesures sont donc équivalentes; On a plus précisément $d\mu(z) = h(z)\, d\mu'(z)$ où

$h(z) = \dfrac{||T'_z||_1}{||\, T_z||_1}$ (on sait par hypothèse que $||T_z||_1 \neq 0$ μpp. donc $\dfrac{1}{||T_z||_1}$ est défini μ.pp et, ce qui revient au même, μ'pp). On en déduit grâce aux égalités obtenues au cours du calcul : $h(z) = \dfrac{f(z)}{f'(z)}$ μpp. ou μ'pp

d'où $T'_z = h(z)T_z$ c.q.f.d.

REMARQUE. - Les résultats (3.53) et (3.55) constituent une généralisation au cas des groupes de type I de la théorie de la transformation de Fourier inverse dans les groupes abéliens, la fonction $u(s) = \int_{\hat{G}} tr(\beta_z(s)T_z)\, d\mu(z)$ étant la "transformée de Fourier inverse" du couple (T,μ) où T $L^1(\hat{G},\mu)^{\oplus}$ (intuitivement c'est la transformée de Fourier inverse de la "mesure vectorielle bornée" de densité T par rapport à μ). Comme dans le cas abélien, on peut caractériser B_π :

(3.56) COROLLAIRE 2. - *Soit π une représentation unitaire continue d'un groupe de type* I. *Alors B_π est l'ensemble des "transformées de Fourier inverses" des couples (T,ν) où ν est une mesure positive à support contenu dans celui de π et où $T \in L^1(\hat{G},\nu)^{\oplus}$.*

DEMONSTRATION. - Rappelons que le support S de π est par définition l'ensemble des représentations irréductibles faiblement contenues dans π. C'est un fermé de $\hat{G}$ qui coïncide, lorsque l'espace de π est séparable, avec le support de toute mesure associée à π (FELL [2], th. 3.3).

Soit ν une mesure positive sur $\hat{G}$ telle que supp $\nu \subset S$. Soit $\omega = \int_{\hat{G}}^{\oplus} \beta_z d\nu(z)$ on a suppω = supp$\nu \subset S$ donc ω est faiblement contenue dans π ce qui implique l'inclusion $A_\omega \subset B_\pi$; d'après (3.53), pour tout $T \in L^1(\hat{G},\nu)^{\oplus}$, la transformée de Fourier inverse de (T,ν) appartient à A_ω, donc à B_π.

Réciproquement soit $u \in B_\pi$, et soit ω comme en (3.41) une représentation dans un Hilbert séparable, faiblement contenue dans π et telle que $u(s) = \langle\omega(s)\xi|\eta\rangle$; soit ν une mesure positive sur $\hat{G}$ associée à ω et soit $\omega' = \int_{\hat{G}}^{\oplus} \beta_z \, d\nu(z)$.

On a suppν = supp$\omega \subset S$, d'autre part $u \in A_\omega$ et $A_\omega = A_{\omega'}$, donc u est bien de la forme annoncée. c.q.f.d.

REMARQUE. - On sait que l'ensemble des B_π est en bijection avec l'ensemble des fermés de $\hat{G}$ par l'application qui à tout B_π associe le support de π (cf. EYMARD [1], 1.2.4). L'énoncé précédent permet de définir directement l'espace B_π à partir du fermé correspondant de $\hat{G}$.

BIBLIOGRAPHIE

G. ARSAC

[1] Sur un espace fonctionnel associé à une représentation unitaire d'un groupe localement compact, (C.R. Acad. Sc. série A, t. 273, 1971, p. 298-300).

[2] Sur un espace fonctionnel associé à une représentation unitaire d'un groupe localement compact, (C.R. Acad. Sc. série A, t. 280, 1975, p. 1599-1602)

L. AUSLANDER ET CALVIN C. MOORE

[1] Unitary representations of solvable lie groups (memoirs of the A.M.S., n° 62, 1966).

N. BOURBAKI

[1] Topologie générale Ch. 3 et Ch. 4 (Act. sc. et ind., n° 1143, Hermann, Paris 1960).

[2] Intégration, Ch. 7 et Ch. 8 (Act. sc. et ind., n° 1306, Hermann, Paris, 1963).

M. COTLAR

[1] Introduccion a la teoria de la representacion de grupos. (Universidad de Buenos Aires, cursos y seminarios, 1963, Fasc. 11)

J. DIXMIER

[1] Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de Von Neumann) (cahiers scientifiques, Gauthier-Villars, Paris, 1957).

[2] Les C^*-algèbres et leurs représentations (cahiers scientifiques, 29, Gauthier-Villars, Paris 1964).

R. DOSS

[1] On the transform of a singular or an absolutely continuous measure (proceedings of the A.M.S. 1968, 19 Janvier, p. 361).

EHRENPREIS ET MAUTNER

Some properties of the Fourier transform on semi-simple Lie groups.

[1] Première partie (Annals of meth., vol. 61, 1955, p. 406-439).

[2] Deuxième partie (Trans. of the A.M.S., vol. 84, 1957, p. 1-55)

[3] Troisième partie (Trans. of the A.M.S., vol. 90, 1959, p. 431-484).

P. EYMARD

[1] L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact (BULL. soc. math. France, 92, 1964, p. 181-236).

J.M.G. FELL

[1] The dual space of C^*-algebras (Trans. American math. soc., t. 94, 1960, p. 365-403).

[2] Weak containment and induced representations of groups (Canadian, J. of math., t. 14, 1962, p. 237-268).

[3] A Hausdorff topology for the closed subsets of a locally compact non Hausdorff space (Proc Am. math. Soc., 13, 1962, p. 472-476).

V. FLORY

[1] Eine Lebesgue-Zerlelung and funktorielle Eigenschaften der Fourier-Siteltjes algebra (inaugural dissertation, Heidelberg, 1972).

C. HERZ

[1] Remarques sur la note précédente de M. Varopoulos (C.R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 9 juin 1965, p. 6001-6004).

[2] Le rapport entre l'algèbre A_p d'un groupe et d'un sous-groupe (C.R. Acad. Sc. Paris, t. 272, 27 juillet 1970, p. 244-246).

[3] Sur le phénomène de Kunze et Stein (C.R. Acad. Sc. Paris, t. 271, 14 septembre 1970, p. 491-493).

[4] Harmonic synthesis for subgroups (Annales de l'Institut Fourier, 1973).

E. HEWITT ET K.A. ROSS

[1] Abstract harmonic analysis Vol. II (Springer-Verlag, Berlin 1970).

I. KHALIL

[1] Sur l'analyse harmonique de la droite et du groupe affine de la droite (thèse, Université de Nancy-I, 1973).

KAHANE ET SALEM

[1] Ensembles parfaits et séries trigonométriques (Hermann, Paris, 1963).

KLEPPNER ET LIPSMAN

[1] The Plancherel formula for group extensions (Annales Sc. de l'Ecole Normale supérieure, 4-ème série, T. 5, 1972, p. 459-516).

P. LEFRANC

[1] Thèse : Université des sciences et techniques du Languedoc (oct. 1972).

H. LEPTIN

[1] Sur l'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact (C.R. Ac. Sc. Paris, t. 266, 17 juin 1968, p. 1180-1182).

K. MAC KENNON

[1] Multipliers, positive functionals, positive-definite functions, and Fourier-Stieltjes transforms (memoirs of the A.M.S., 111, 1971).

G.W. MACKEY

[1] Theory of group representations (University of Chicago, department of math., 1955).

[2] Induced representations of locally groups I (Annals of math., t. 55, 1952 p. 101-139).

P. NOUYRIGAT

[1] Sur le prédual de l'algèbre de Von Neumann associée à une représentation unitaire d'un groupe localement compact (Publications du Département de mathématiques de l'Université de Lyon-I, 1972, t.9-2).

REITER

[1] Classical harmonic analysis and locally compact groups (Clarendon Press, Oxford, 1968).

N.W. RICKERT

[1] Convolution of L^2 functions (Colloquium math. 19, 1968, p. 301-303).

S. SAKAI

[1] C^*-algebras and W^*-algebras (Springer-Verlag, Berlin, 1971).

SCHOCHETMAN

[1] Topology and the duals of certain locally compact groups (Trans. of the A.M.S., vol. 150, Aout 1970, p. 477-489).

TAKESAKI

[1] On the conjugate space of operator algebra (Tokohu math. journal, vol. 10, 1958, p. 194-203).

TREVES

[1] Topological vector spaces - Distributions and kernels (Acad. press 1967).

N. Ja. VILENKIN

[1] Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes (Dunod, Paris, 1969).

K. YOSHIDA

[1] Functional analysis (Springer-Verlag, Berlin, 1968).

G. ARSAC
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE