PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

LUISA ITURRIOZ

Algèbres de Lukasiewicz symétriques

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1976, tome 13, fascicule 1
, p. 73-96
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1976__13_1_73_0>

© Université de Lyon, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1976 t. 13-1

ALGEBRES DE LUKASIEWICZ SYMETRIQUES

par Luisa ITURRIOZ

I - INTRODUCTION. - En 1954, Moisil [11], guidé par l'étude des circuits électriques, a introduit et développé la notion d'algèbre de Boole symétrique. Ainsi, une *algèbre de Boole symétrique* est une paire de la forme (A,α) où A est une algèbre de Boole $(A,\wedge,\vee,-,0,1)$ et α un automorphisme involutif sur A, c'est-à-dire un automorphisme α sur A tel que $\alpha(\alpha(x)) = x$ pour tout $x \in A$. Si l'automorphisme α coïncide avec l'identité I on retrouve la notion d'algèbre de Boole. Un exemple simple d'une algèbre de Boole symétrique où $\alpha \neq I$ est donné par l'algèbre de Boole $A = \{0,a,b,1\}$ à quatre éléments où $\alpha(0) = 0$, $\alpha(a) = b$, $\alpha(b) = a$ et $\alpha(1) = 1$. Moisil a montré que toutes les opérations du système (A,α) jouent un rôle dans les applications.

Dans les algèbres de Boole symétriques on peut définir, à partir de la négation $-$ et l'automorphisme α, une nouvelle application $\sim$ au moyen de l'égalité suivante : $\sim x = \alpha(-x)$. L'opération ainsi définie est une symétrie

---

Cet exposé a été réalisé pendant que l'auteur jouissait d'une bourse du Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina, et il a été l'objet d'une conférence tenue à l'Université de Lyon I le 19 novembre 1975.

ou une négation de De Morgan sur A, c'est-à-dire une opération unaire définie sur A satisfaisant aux conditions suivantes :

(N1) $\sim\sim x = x$ (N2) $\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

Le système $(A,\sim)$ où A est une algèbre de Boole et $\sim$ une négation de De Morgan sur A est dit une *algèbre de Boole involutive*.

Inversement, si $(A,\sim)$ est une algèbre de Boole involutive, l'application $\alpha x = \sim -x$ est un automorphisme involutif sur A de telle sorte que (A,α) soit une algèbre de Boole symétrique. On peut alors étudier ces structures sous les deux points de vue indifféremment.

En 1942, guidé par l'étude des symétries dans les calculs propositionnels, Moisil [10] avait déjà considéré un calcul propositionnel appelé *modal symétrique*, dont l'étude a été reprise en 1962 par Moisil [12] lui-même. Ce calcul est défini en ajoutant à l'alphabet $(\{g_i\},\wedge,\vee,\Rightarrow,(,))$ du calcul propositionnel positif de Hilbert et Bernays un nouveau connecteur appelé la négation, et au système d'axiomes et règles de déduction du même calcul, les axiomes et règles de déduction qui caractérisent une symétrie : les lois de la double négation et la règle de contraposition. Ainsi l'ensemble τ des tautologies est défini au moyen des axiomes (schèmes) et règles suivantes :

HB) axiomes du calcul propositionnel positif de Hilbert et Bernays.

N1) $(\sim\sim X \Rightarrow X)$

N2) $(X \Rightarrow \sim\sim X)$

R1) Modus Ponens

R2) $\dfrac{X \Rightarrow Y}{\sim Y \Rightarrow \sim X}$ (Contraposition).

Parmi les propriétés les plus importantes qu'on déduit de ces axiomes nous trouvons les formules de De Morgan, qui indiquent que $\sim$ est une dualité :

$$(\sim (X \wedge Y) \Rightarrow (\sim X \vee \sim Y))$$

$$(\sim (X \vee Y) \Rightarrow (\sim X \wedge \sim Y)$$

$$((\sim X \vee \sim Y) \Rightarrow \sim (X \wedge Y))$$

$$((\sim X \wedge \sim Y) \Rightarrow \sim (X \vee Y))$$

A. Monteiro [17,18] a étudié le cas particulier du calcul propositionnel modal symétrique qu'on obtient en ajoutant aux axiomes de Moisil l'axiome suivant :

$$\text{(B)} \qquad (((Y \Rightarrow X) \Rightarrow Y) \Rightarrow Y)$$

et il a montré que ce calcul propositionnel a pour matrice caractéristique l'algèbre de Boole symétrique à quatre éléments donnée ci-dessus comme exemple. Cet auteur a montré que les algèbres de Booles symétriques jouent par rapport à ce calcul le même rôle que les algèbres de Boole par rapport au calcul propositionnel classique.

II - DEFINITIONS .- Guidés par les résultats précédents nous pouvons introduire la notion *d'algèbre de Lukasiewicz* n-*valente symétrique*. Ainsi :

2.1. Une algèbre de Lukasiewicz n-valente symétrique est une paire (L,α) où L est une algèbre de Lukasiewicz n-valente et α un automorphisme involutif sur A.

2.2. Rappelons qu'une algèbre de Lukasiewicz n-valente [14], (n un entier ≥ 2) est un système $(L,0,1,\wedge,\vee,-,S_1,\dots,S_{n-1})$ où

(1) $(L,0,1,\wedge,\vee,-)$ est une algèbre de De Morgan et

(2) $S_1,\dots,S_{n-1}$ sont des opérateurs unaires, définis sur L, satisfaisant aux conditions suivantes :

(L1) $S_i(x \vee y) = S_i x \vee S_i y$

(L2) $S_i x \vee -S_i x = 1$

(L3) $S_i S_j x = S_j x$

(L4) $S_i -x = -S_{n-i} x$

(L5) $S_1 x \leq S_2 x \leq \dots \leq S_{n-1} x$

(L6) Principe de détermination : si $S_i x = S_i y$ pour $1 \leq i \leq n-1$ alors $x = y$.

Pour abréger on parlera de l'algèbre L.

Cette notion a été introduite par Moisil [9] en 1941, et étudiée plus tard par Moisil lui-même et d'autres auteurs (voir par exemple [3]).

2.3. Nous allons rappeler quelques propriétés des algèbres de Lukasiewicz n-valentes. Ainsi les propriétés suivantes sont satisfaites :

(L7) $S_i 1 = 1$, $S_i 0 = 0$

(L8) $S_i(x \wedge y) = S_i x \wedge S_i y$

(L9) $S_i x \wedge -S_i x = 0$

(L10) $x \leqslant y$ si et seulement si $S_i x \leqslant S_i y$ pour tout $i = 1,\ldots,n-1$

(L11) $S_1 x \leqslant x$

(L12) $X \leqslant S_{n-1} x$

(L13) $x \wedge -x \leqslant y \vee -y$ (voir [24])

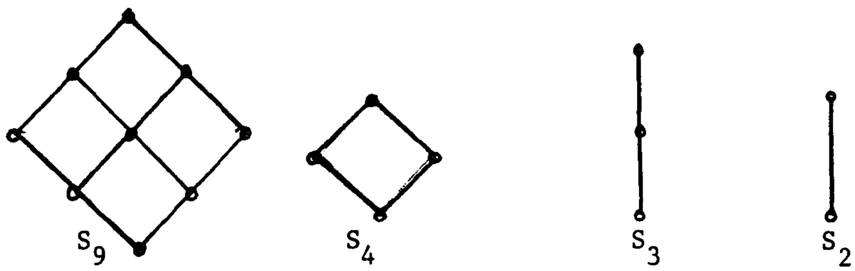
2.4 . Pour chaque $i = 1,\ldots,n-1$ l'ensemble $S_i(L)$ de tous les éléments de la forme $S_i x$ est l'algèbre de Boole $B(L)$ des éléments complémentés de L.

2.5. La condition (L13) signifie que les algèbres de Lukasiewicz n-valentes sont, en particulier, des algèbres de Kleene. Ainsi si $z \in B(L)$ et z' est le complément booléen, on a $z' = -z$ ([20] p. 454). D'autres conséquences de cette propriété seront considérées plus loin.

2.6. Comme dans le cas des algèbres de Boole on peut définir sur (L,α), à partir des opérations primitives, une nouvelle opération $\sim$ de la façon suivante : $\sim x = \alpha -x$. Cette opération est une négation de De Morgan sur L, c'est-à-dire la paire $(L,\sim)$ est une algèbre de Lukasiewicz involutive telle que $\sim -x = -\sim x$ et $S_i \sim x = \sim S_{n-i} x$. Réciproquement, si $(L,\sim)$ est une algèbre de Lukasiewicz involutive telle que $\sim -x = -\sim x$ et $\sim S_{n-i} x = S_i \sim x$, on peut définir un automorphisme involutif sur L au moyen de l'égalité $\alpha x = \sim -x$.

2.7. Un exemple d'algèbre de Lukasiewicz n-valente symétrique est le suivant : soit L_n l'ensemble des fractions $j/n-1$, $j = 0,1,\ldots,n-1$

considéré comme un sous-treillis du treillis des nombres réels, avec $-(j/n-1) = 1 - (j/n-1)$ et $S_i(j/n-1) = 0$ si $i+j < n$ et $S_i(j/n-1) = 1$ si $i+j \geqslant n$. Il est connu que L_n est une algèbre de Lukasiewicz n-valente. Prenons $L = L_n^2 = L_n \times L_n$ avec les opérations $\wedge, \vee, -, S_i$ définies composante par composante, et α de la façon suivante : $\alpha(x,y) = (y,x)$. Alors (L,α) est une algèbre de Lukasiewicz n-valente symétrique. Si n=3, on obtient l'algèbre à neuf éléments que nous avons appelée S_9 (voir [6]), qui a comme sous-algèbres propres les algèbres S_4, S_3 et S_2 , selon les diagrammes que voici :



2.8. Moisil [13] a montré que toute algèbre de Lukasiewicz trivalente est une algèbre de Heyting, et il a utilisé ce fait pour donner une axiomatique du calcul propositionnel trivalent de Lukasiewicz, dans lequel l'implication intuitionniste joue un rôle essentiel (voir aussi [5]). En tenant compte de l'existence d'une négation de De Morgan, dans une algèbre de Lukasiewicz trivalente, ces algèbres sont en réalité une classe spéciale d'algèbres de Heyting symétriques. Ce fait a été utilisé dans [20] afin de donner une caractérisation des algèbres de Lukasiewics trivalentes parmi les algèbres de Heyting symétriques.

Nous avons montré que [8] toute algèbre de Lukasiewicz n-valente est en particulier une algèbre de Heyting. En effet, si $x,y \in L$ prenons

2.9. $$x \to y = \bigwedge_{j=1}^{n-1} (-S_j x \vee S_j y)$$

L'élément $z = x \to y$ est un élément booléen qui a les propriétés suivantes :

a) $x \wedge (x \to y) \leqslant y$

b) si z est booléen, $x \wedge z \leqslant y$ équivaut à $z \leqslant x \to y$

De plus on peut montrer que la condition

(D) $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$

est vérifiée.

Moyennant les résultats précédents et le corollaire 3.2 du travail de Epstein et Horn [4] on peut conclure que l'élément $x \twoheadrightarrow y$ défini au moyen de l'égalité

2.10. $x \twoheadrightarrow y = (x \twoheadrightarrow y) \vee y$ ([4] ,p. 198)

est l'implication intuitionniste de x et y.

Observons que dans le cas $x,y \in B(L)$ alors $x \twoheadrightarrow y$ coïncide avec l'implication classique de x et y, c'est-à-dire $x \Rightarrow y = x' \vee y$.

De plus, si n=3 la formule 2.10 coïncide avec l'expression de l'implication intuitionniste donnée par Moisil [13] et simplifiée par A. Monteiro [20]. Si l'algèbre de Lukasiewicz est une algèbre de Post alors l'égalité 2.10 est justement l'expression donnée dans [22, p. 139] et due à Rousseau [23] .

2.11. Plaçons nous pour l'instant dans le cas trivalent. Si $n = 3$ il est connu [20, p. 458] que l'implication intuitionniste vérifie encore la propriété

$$(T3) \quad ((x \Rightarrow z) \Rightarrow y) \Rightarrow (((y \Rightarrow x) \Rightarrow y) \Rightarrow y) = 1$$

Ainsi, dans le cas trivalent, on voit qu'une algèbre de Lukasiewicz trivalente symétrique est une paire $(H_3, \sim)$ où H_3 est une algèbre de Heyting trivalente, c'est-à-dire satisfaisant à la condition (T3), et $\sim x = \alpha - x$ une négation de De Morgan sur H_3.

Inversement supposons qu'on a une paire $(H_3, \sim)$ où H_3 est une algèbre de Heyting vérifiant la condition (T3) et $\sim$ une négation de De Morgan sur H_3. Montrons qu'elle admet une structure d'algèbre de Lukasiewicz trivalente symétrique.

Dans une algèbre de Heyting, la condition (T3) équivaut à dire que tout filtre premier est minimal ou un ultrafiltre, et que chaque filtre premier est contenu au maximum dans un ultrafiltre [21].

Toute algèbre de Heyting symétrique étant une algèbre de De Morgan on peut considérer la transformation ϕ définie sur l'ensemble Π des filtres premiers, introduite par Bialynicki-Birula et Rasiowa [1] de la façon suivante : si P est un filtre premier de L alors $\phi(P) = C(\sim P)$ où C est le complémentaire de $\sim P$ par rapport à L et $\sim P = \{\sim p : \text{où } p \in P\}$.

P étant un filtre premier, $\sim P$ est un idéal premier et $\phi(P)$ est aussi un filtre premier. ϕ est une bijection de Π sur Π telle que :

1) $\phi(\phi(P)) = P$,

2) $P \subsetneq Q$ équivaut à $\phi(Q) \subsetneq \phi(P)$.

Moyennant les deux résultats précédents on peut dire que, pour $n = 3$, chaque ultrafiltre contient proprement au plus un filtre premier. En effet, s'il existait deux filtres premiers distincts P et Q tels que $P \subset U$ et $Q \subset U$ alors on aurait $\phi(U) \subset \phi(P)$ et $\phi(U) \subset \phi(Q)$, ce qui est impossible.

De plus, dans le cas où $n = 3$, on peut dire aussi que pour que P soit un filtre premier minimal il faut et il suffit que $\phi(P)$ soit un ultrafiltre. En effet, soit P un filtre premier minimal. Si $\phi(P)$ n'est pas un ultrafiltre, il existe un filtre premier U tel que $\phi(P) \subset U$; alors $\phi(U) \subset \phi\phi(P) = P$ et P ne serait pas minimal. Inversement, soit $\phi(P)$ un ultrafiltre. Si P n'est pas minimal, il existe un filtre premier Q tel que $Q \subset P$; donc $\phi(P) \subset \phi(Q)$ et $\phi(P)$ ne serait pas un ultrafiltre.

Dans ce cas [25] l'algèbre H_3 admet une structure d'algèbre de Lukasiewicz trivalente. La négation peut alors s'exprimer de la façon suivante (cf. 10,p.49) :

$$-x = \neg x \vee (x \wedge \ulcorner x),$$

où $\neg x = x \Rightarrow 0$ et $\ulcorner x = \sim \neg \sim x$.

Dans ce cas, les opérations S_1 et S_2 peuvent être définies au moyen des opérations $\Rightarrow$ et $-$ de la façon suivante :

$$S_2 x = -x \Rightarrow x \quad , \quad S_1 x = -S_2 - x.$$

2.12. En résumé, pour le cas $n=3$, les structures (L,α) où L est une algèbre de Lukasiewicz trivalente et α un automorphisme involutif coïncident avec les systèmes $(H_3, \sim)$ où H_3 est une algèbre de Heyting vérifiant la condition (T3) et $\sim$ est une négation de De Morgan sur H_3.

2.13. En revenant au calcul propositionnel modal symétrique de Moisil, le résultat précédent nous conduit à remplacer l'axiome (B), considéré par A. Monteiro , par l'axiome

(T3) $((X \Rightarrow Z) \Rightarrow Y) \Rightarrow (((Y \Rightarrow X) \Rightarrow Y) \Rightarrow Y)$

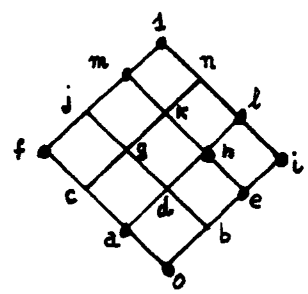
Nous avons montré [6,7] que l'algèbre S_9, définie ci-dessus, est une matrice caractéristique pour ce calcul et que, si L est l'algèbre de Lindenbaum de ce calcul, elle est l'algèbre de Lukasiewicz trivalente symétrique ayant $\underline{c}$ générateurs libres, où $\underline{c}$ est la puissance de l'ensemble des variables d'énoncé.

2.14. Nous avons encore montré [5,6] que, si l'on ajoute aux axiomes précédents l'axiome

$$(X \wedge \sim X) \Rightarrow (Y \vee \sim Y),$$

nous obtenons un calcul propositionnel (équivalent à celui de Lukasiewicz) ayant pour matrice caractéristique l'algèbre S_3.

2.15. Dans le cas général $(n > 3)$, cette analogie ne se présente plus. En effet, considérons l'algèbre de Lukasiewicz symétrique $(L_4^2, \wedge, \vee, -, S_1, S_2, S_3, \alpha)$ dont le diagramme de Hasse est le suivant : L_4^2 est en particulier un treillis distributif fini donc elle est une algèbre de Heyting du type



$(L_4^2, \wedge, \vee, \Rightarrow, S_1, S_2, S_3, \sim)$, où $\sim x = \alpha - x$. On peut voir que $-a = n$, mais on ne peut pas exprimer $-a$ au moyen des opérations $\wedge, \vee, \Rightarrow, S_1, S_2, S_3, \sim$, car l'ensemble $\{0,a,e,f,h,i,1,m,1\}$ est fermé par rapport aux opérations $\wedge, \vee, \Rightarrow, S_1, S_2, S_3, \sim$, mais il ne contient pas l'élément $-a = n$.

III - HOMOMORPHISMES.

- En revenant au cas général nous allons étudier la théorie des homomorphismes.

3.1. Un homomorphisme d'une algèbre de Lukasiewicz symétrique n-valente L dans une autre telle algèbre L' est une application h de L dans L' qui est un homomorphisme d'algèbre n-valente de Lukasiewicz staisfaisant, en plus, à la condition

$$h(\alpha\, x) = \alpha h(x) \text{ pour tout } x \in L.$$

3.2. Le noyau D d'un homomorphisme h possède les propriétés suivantes :

(D1) D est un filtre,

(D2) si $d \in D$ alors $S_1 \alpha d \in D$,

Une partie D de L vérifiant les conditions (D1) et (D2) est dite un $S_1\alpha$-filtre. Elle est propre si $D \neq L$.

3.3. La condition (D2) est équivalente aux deux conditions suivantes :

(D'2) si $d \in D$ alors $\alpha d \in D$

(D''2) si $d \in D$ alors $S_1 d \in D$.

Une autre caractérisation des noyaux au moyen de la notion de filtre est la suivante :

3.4. Pour qu'un filtre D soit un noyau il faut et il suffit qu'il vérifie la condition suivante :

(D) pour tout $d \in D$ il existe un $d' \in D$ tel que $\sim d \wedge d' = 0$.

En effet, soit $d \in D$ alors $d' = S_1 \alpha d \in D$ et

$\sim d \wedge d' = \sim d \wedge S_1 \alpha d = \sim d \wedge S_1 - \sim d = \sim (\alpha \vee - S_1 d) = \sim 1 = 0$

Réciproquement, supposons que $d \in D$ et qu'il existe un $d' \in D$ tel que $\sim d \wedge d' = 0$ donc $S_{n-1} \sim x \wedge S_{n-1} d' = 0$ et alors $d' \leq S_{n-1} d' \leq - S_{n-1} \sim d = S_1 - \sim D = S_1 \alpha d$ d'où $S_1 \alpha d \in D$.

3.5. Pour qu'un $S_1\alpha$-filtre D soit propre il faut que si $d \in D$ alors $\sim d \notin D$. La condition est aussi suffisante, car si $1 \in D$ on a $\sim 1 = 0 \notin D$ et D est propre.

Nous allons déterminer toutes les images homomorphes de L au moyen d'une construction sur L.

3.6. Si D est un $S_1\alpha$-filtre posons : $x \equiv y$ (mod D) si et seulement si il existe un $d \in D$ tel que $x \wedge d = y \wedge d$. La relation $\equiv$ ainsi définie est une congruence sur L. En effet, il est connu que $\equiv$ est une relation d'équivalence compatible avec les opérations $\wedge, \vee, -, S_i$. De plus, si $x \equiv y$ (mod D) alors $\alpha x \equiv \alpha y$ (mod D). L'algèbre quotient $A' = A/D$ est une image homomorphe de A et toutes les images homomorphes de A peuvent être déterminées de cette manière.

3.7. Dans un algèbre de Boole involutive $(A,\sim)$ A. Monteiro [17,18] a montré que les noyaux N(h) peuvent être aussi caractérisés comme étant les sous-ensembles de A qui satisfont aux conditions

(1) $1 \in N(h)$

(2) Modus Ponens. Si $a, a \twoheadrightarrow b \in N(h)$ alors $b \in N(h)$.

Il suffit de prendre $x \twoheadrightarrow y = \sim x \vee -x \vee y$.

Dans une algèbre de Lukasiewicz trivalente , à partir de l'implication de Lukasiewicz $\rightarrowtail$, où $x \rightarrowtail y = -x \vee y \vee (S_2 -x \wedge S_2 y)$ on peut définir une nouvelle opération, appelée *l'implication faible* $\twoheadrightarrow$, au moyen de l'égalité :

$$x \twoheadrightarrow y = x \rightarrowtail (x \rightarrowtail y) = S_2 -x \vee y$$

Les noyaux N(h) sont alors caractérisés commeles sous-ensembles de L qui satisfont aux conditions (1) et (2). (A. Monteiro [16]).

Nous allons généraliser ces résultats au cas des algèbres de Lukasiewicz n-valentes symétriques.

3.8. Ainsi, à partir des opérations primitives nous allons considérer une nouvelle opération $\mapsto$, dite *l'implication faible* au moyen de l'égalité suivante :

$$x \mapsto y = S_{n-1} \sim x \vee S_{n-1} -x \vee y \ .$$

Dans le cas des algèbres de Lukasiewicz $\sim x = -x$, et cette opération coïncide avec celle donnée dans [3, p.9] . Dans le cas des algèbres de Boole symétriques $S_{n-1} = I$ et l'expression est justement celle donnée un peu plus haut.

Cette opération binaire a les propriétés suivantes :

(1) si $a \leqslant b$ alors $a \mapsto b = 1$

(2) $a \mapsto (b \mapsto a) = 1$ (loi de simplification)

(3) $a \mapsto (b \mapsto c) = (a \mapsto b) \mapsto (a \mapsto c)$ (loi de Frege)

(4) $(a \mapsto b) \mapsto a = a$ (loi de Peirce)

(5) si $a = 1$ et $a \mapsto b = 1$ alors $b = 1$.

D'après les propriétés (2), (3) et (5) il est connu que l'implication faible satisfait au théorème de la déduction.

Nous allons caractériser les noyaux D au moyen de l'implication faible. Ainsi :

3.9. Pour qu'une partie D soit un noyau il faut et il suffit qu'elle satisfasse aux conditions :

(1) $1 \in D$

(2) Modus Ponens. Si $a, a \mapsto b \in D$ alors $b \in D$.

Montrons que tout $S_1\alpha$-filtre D satisfait aux conditions (1) et (2). En effet, si D est un $S_1\alpha$-filtre alors $1 \in D$. Supposons que $a, a \mapsto b \in D$. De $a \in D$ on déduit $S_1\alpha a$, $S_1 a \in D$, c'est-à-dire $S_1\alpha a \wedge S_1 a \in D$. Donc $S_1\alpha a \wedge S_1 a \wedge (a \mapsto b) \in D$.
Mais $S_1\alpha a \wedge S_1 a \wedge (a \mapsto b) = S_1\alpha a \wedge S_1 a \wedge (S_{n-1} \sim a \sim S_{n-1} - a \vee b) =$
$= (S_1\alpha a \wedge S_1 a \wedge \sim S_1 a) \vee (S_1\alpha a \wedge S_1 a \wedge - S_1 a) \vee (S_1\alpha a \wedge S_1 a \wedge b) = S_1\alpha a \wedge S_1 a \wedge b \leqslant b$;
d'où $b \in D$.

Inversement, si D satisfait aux conditions (1) et (2) alors D est un $S_1\alpha$-filtre. En effet, $1\in D$ et supposons que $a,b\in D$. Mais $a \mapsto (a\wedge b) = (a\mapsto a)\wedge(a\mapsto b) = 1\wedge(a\mapsto b) = a\mapsto b$. En outre, de $b\mapsto(a\mapsto b) = 1\in D$ et $b\in D$ on déduit, d'après le Modus Ponens que $a\mapsto b\in D$. Donc $a\mapsto(a\wedge b)\in D$. En vertu du Modus Ponens on obtient $a\wedge b\in D$.

Soit $a\in D$ et $a\leqslant x$, donc $a\mapsto x = 1\in D$ et d'après le Modus Ponens $x\in D$.

Finalement soit $d\in D$. Mais $d\mapsto S_1\alpha d = S_{n-1}\sim d\vee S_{n-1}-d\vee S_1\alpha d =$
$= \sim S_1 d\ \alpha S_{n-1}-d\vee \alpha S_1 d = 1\in D$. D'après le Modus Ponens $S_1\alpha d\in D$.

En vertu de la définition de l'implication intuitionniste on peut voir que si h est un homomorphisme, l'égalité $h(x\Rightarrow y) = h(x)\Rightarrow h(y)$ est satisfaite.

On va essayer de caractériser les noyaux au moyen de l'implication intuitionniste. Ainsi :

3.10. Une partie D d'une algèbre de Lukasiewicz n-valente symétrique L est dite un *système déductif* si elle vérifie les conditions :

(C1) $1\in D$

(C2) si $a, a\Rightarrow b\in D$ alors $b\in D$ (Modus Ponens)

(C3) si $a\Rightarrow b\in D$ alors $S_1\alpha a\Rightarrow S_1\alpha b\in D$.

Supposons que D vérifie les conditions (C1), (C2) et (C3). Donc (D1) est valable. De plus, si $d\in D$ alors $1\Rightarrow d = d\in D$. D'après (C3) $S_1\alpha 1\Rightarrow S_1\alpha d = S_1\alpha d\in D$, d'où $S_1\alpha d\in D$, qui est (D2).

Inversement, supposons $a \Rightarrow b \in D$. D'après (D2) $S_1\alpha(a \Rightarrow b) \in D$, mais

$$S_1\alpha(a \Rightarrow b) = S_1\alpha(\bigwedge_{j=1}^{n-1} (-S_j a \vee S_j b) \vee b) = \bigwedge_{j=1}^{n-1} -S_j\alpha a \vee S_j\alpha b \vee S_1\alpha b =$$

$$= \bigwedge_{j=1}^{n-1} -S_j\alpha a \vee S_j\alpha b \leqslant -S_1\alpha a \vee S_1\alpha b = S_1\alpha a \Rightarrow S_1\alpha b.$$

D étant un filtre, de $S_1\alpha(a \Rightarrow) \in D$ et $S_1\alpha(a \Rightarrow b) \leqslant S_1\alpha a \Rightarrow S_1\alpha b$ on déduit $S_1\alpha a \Rightarrow S_1\alpha b \in D$, ce qu'il fallait démontrer.

IV - NOYAUX MAXIMAUX. - Un $S_1\alpha$-filtre propre M est dit *maximal* lorsque, pour tout $s_1\alpha$-filtre F, si $M \subset F$ alors $F = L$.

La famille de tous les $S_1\alpha$-filtres propres ordonnée par inclusion est inductive supérieurement, donc chaque $S_1\alpha$-filtre propre est contenu dans un $S_1\alpha$-filtre maximal.

En raison des propriétés (2), (3), (4) et (5) de l'opération $\mapsto$ et de la caractérisation des $S_1\alpha$-filtres au moyen de l'implication faible, on peut conclure, d'après un résultat de A. Monteiro [19] que l'intersection de tous les $S_1\alpha$- filtres maximaux d'une algèbre de Lukasiewicz symétrique n-valente est égale à $\{1\}$. Autrement dit :

4.1. Les algèbres de Lukasiewicz n-valentes symétriques sont semi-simples.

D'après ce résultat et un théorème de Birkhoff [2, p. 140] d'algèbre universelle, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

4.2. Toute algèbre de Lukasiewicz n-valente symétrique L, non triviale, est isomorphe à un sous-produit direct d'algèbres quotients L/M_i, où $\{M_i\}_{i \in I}$ est la famille de tous les noyaux maximaux de L.

4.3. Un filtre F d'un treillis distributif L ayant 0 et 1 est dit *stonien* [15 , p. 152] si pour tout $x \in F$ il existe un $b \in F \cap B(L)$ tel que $b \leq x$, où $B(L)$ est l'algèbre de Boole des éléments complémentés de L.

Dans une algèbre de Lukasiewicz n-valente pour qu'un filtre F soit stonien il faut et il suffit que si $x \in F$ alors $S_1 x \in F$ et les filtres stoniens et premiers coïncident avec les filtres premiers minimaux de L. Rappelons de plus que, dans un algèbre de Lukasiewicz n-valente L, si P est un filtre premier de L il existe un ultrafiltre $P^* = P \cap B(L)$ de $B(L)$ tel que :

$$P = P_i^* = \{x \in L : S_i x \in P^*\}, \text{ où } P_1^* \subseteq P_2^* \subseteq \ldots \subseteq P_{n-1}^*, \text{ (voir [3])}.$$

Autrement dit, tout filtre premier de L peut être caractérisé par l'égalité précédente. La famille Π des filtres premiers d'une algèbre de Lukasiewicz n-valente, ordonnée par inclusion, est la somme cardinale de chaînes, ayant chacune au maximum n-1 éléments.

Nous nous proposons de déterminer les $S_1\alpha$-filtres maximaux d'une algèbre de Lukasiewicz n-valente symétrique (L,α) au moyen des filtres premiers minimaux de L.

Si P est un filtre premier de L soit $\alpha P = \{\alpha p : p \in P\}$. αP est un filtre premier de L. En effet, supposons que $x \vee y \in \alpha P$, c'est-à-dire $x \vee y = \alpha p$, $p \in P$, donc $\alpha x \vee \alpha y = \alpha(x \vee y) = \alpha\alpha p = p \in P$; P étant premier, $\alpha x \in P$ ou $\alpha y \in P$, c'est-à-dire $\alpha\alpha x = x \in \alpha P$ ou $\alpha\alpha y = y \in \alpha P$ et αP est premier.

4.4. Si P est stonien alors αP l'est aussi, d'après les équivalences : si $x \in \alpha P \Leftrightarrow \alpha x \in P \Leftrightarrow S_1 \alpha x = \alpha S_1 x \in P$ et $S_1 x \in \alpha P$.

4.5. Si P est un filtre premier contenant un $S_1\alpha$-filtre D alors $D \subseteq \alpha P$.

En effet, soit $x \in D$ alors $S_1 \alpha x \in D \subseteq P$ et du fait que $S_1 \alpha x \leqslant \alpha x$ on déduit $\alpha x \in P$, autrement dit $x \in \alpha P$.

Un filtre stonien n'est pas en général un $S_1\alpha$-filtre. Il suffit de regarder dans l'algèbre S_9 , le filtre engendré par l'élément (1,0) par exemple. Les caractéristiques de cet exemple nous suggèrent le résultat suivant :

4.6. Si P est un filtre *stonien* alors $P \cap \alpha P$ est un $S_1\alpha$-filtre.

En effet, $P \cap \alpha P$ est un filtre car il est l'intersection de deux filtres. De plus, si $x \in P \cap \alpha P$ alors $x \in P$, $x \in \alpha P$, donc $\alpha x \in \alpha P$ et $\alpha x \in P$, d'où $\alpha x \in P \cap \alpha P$. En outre, si $x \in P \cap \alpha P$ alors $x \in P$ et $x \in \alpha P$ donc P étant stonien $S_1 x \in P$ et $S_1 x \in \alpha P$, d'où $S_1 x \in P \cap \alpha P$.

4.7. Un $S_1\alpha$-filtre S est dit *simple* s'il existe un filtre premier stonien P tel que $S = P \cap \alpha P$.

4.8. Dans un algèbre de Lukasiewicz n-valente symétrique L tout $S_1\alpha$-filtre propre D est contenu dans un $S_1\alpha$-filtre simple.

En effet, soit D un $S_1\alpha$-filtre propre et $d \in D$, alors $\sim d \notin D$. L étant un treillis distributif et D un filtre propre il existe un filtre premier P tel que $D \subseteq P$ et $\sim d \notin P$. D'après la propriété de caractérisation des filtres premiers dans une algèbre de Lukasiewicz n-valente que nous avons rappelée tout à l'heure, il existe un indice $1 \leqslant i \leqslant n-1$ tel que $P = P_i^*$ où $P^* = P \cap B(L)$. Montrons que $D \subseteq P_1^* = \{x : S_1 x \in P^*\}$. En effet, soit $d \in D$ alors $S_1 d \in D \subseteq P$ mais $S_1 d \in B(L)$ donc $S_1 d \in P^*$ et $d \in P_1^*$. Le filtre P_1^* est premier et minimal, c'est-à-dire il est premier et stonien. De $D \subseteq P_1^*$ d'après le résultat 4.5 on déduit $D \subseteq P_1^* \cap \alpha P_1$, ce qui montre le résultat 4.8.

Le résultat qui suit donne une caractérisation des noyaux maximaux au moyen de la notion de filtres premiers minimaux.

4.9. Pour qu'un $S_1\alpha$-filtre M soit *maximal* il faut et il suffit que M soit simple.

En effet, soit M un $S_1\alpha$-filtre maximal. M étant propre il est contenu dans un $S_1\alpha$-filtre simple S. Du fait que M est maximal on déduit $M = S$ et M est simple.

Inversement, soit S un $S_1\alpha$-filtre simple, c'est-à-dire $S = P \cap \alpha P$, où P est un filtre premier stonien. Si S n'est pas maximal il existerait un $S_1\alpha$-filtre propre M tel que $S \subset M$. D'après un résultat précédent il existe un filtre premier stonien Q tel que $M \subseteq Q \cap \alpha Q$, c'est-à-dire

$$S = P \cap \alpha P \subset M \subseteq Q \cap \alpha Q.$$

On a donc :

(1) $P \cap \alpha P \subset Q$

(2) $P \cap \alpha P \subset \alpha Q$

Du fait que Q et αQ sont des filtres premiers minimaux on déduit

(3) $P = Q$ ou (4) $\alpha P = Q$

et (5) $P = \alpha Q$ ou (6) $\alpha P = \alpha Q$

Montrons que tous les cas possibles conduisent à une contradiction.

Dans le cas (3) et (5) on a : $M \subsetneq P \cap P = P$ d'où $M \subsetneq \alpha P$ et $M \subsetneq P \cap \alpha P = S$ ce qui est impossible.

Dans les cas (4) et (6) on déduit : $M \subsetneq \alpha P \cap \alpha P = \alpha P$ d'où $M \subsetneq P$ et $M \subsetneq S$ ce qui est une contradiction.

Dans les cas (4) et (5) ou (3) et (6) on conclut $M = S$, ce qui est aussi impossible.

La caractérisation que nous venons de donner et le théorème de représentation 4.2 nous conduisent à déterminer les algèbres quotients A/S , où S est un $S_1\alpha$-filtre simple.

Ainsi, étant donné un noyau maximal il est de la forme $P \cap \alpha P$ où $P = P_1^* \subsetneq P_2^* \subsetneq \dots \subsetneq P_{n-1}^*$ et $P^* = P \cap B(L)$. Posons $P_n^* = L$, $P_o^* = \emptyset$, $S_o x \equiv 0$ et $S_n x \equiv 1$.

Nous pouvons alors montrer que :

4.10. Etant donné un noyau maximal M il existe un unique homomorphisme h de L dans L_n^2 tel que le noyau de h soit M et h est donné par la formule :

4.11. $h(x) = \left(\frac{n-j}{n-1} , \frac{n-k}{n-1} \right)$ si et seulement si $x \in (P_j^* - P_{j-1}^*) \cap (\alpha P_k^* - \alpha P_{k-1}^*)$.

La démonstration du fait que la formule 4.11 définit un homomorphisme est calculatoire. Inversement, si h est un homomorphisme de L dans L_n^2 de noyau M on déduit du fait que {1} est un $S_1\alpha$-filtre maximal de L_n^2 que $h^{-1}(\{1\}) = M$ est un $S_1\alpha$-filtre maximal de L. Il existe donc une chaîne de filtres premiers P_j^* dans des conditions précises. De plus, si $x \in P_j^*$ alors $S_j x \equiv 1 \pmod{M}$ et si $x \notin P_j^*$ alors $S_j x \equiv 0 \pmod{M}$. D'après la définition des opérateurs S_i dans L_n^2 on peut conclure que h doit s'exprimer au moyen de la formule 4.11.

Etant donnée l'algèbre L_n^2 soit $\mathfrak{A}$ la famille formée par l'algèbre L_n^2 elle-même, l'algèbre L_n , les sous-algèbres S_k de L_n et les produits S_k^2 de telles sous-algèbres.

On peut ainsi conclure que :

4.12. Si M est un noyau maximal d'une algèbre de Lukasiewicz n-valente symétrique L, alors L/M est isomorphe à une algèbre de la famille $\mathfrak{A}$.

4.13. Une algèbre de Lukasiewicz n-valente symétrique L, non triviale, est dite *simple* si les seules images homomorphes de L sont L et l'algèbre triviale.

On peut montrer que :

4.14. Les algèbres de Lukasiewicz n-valentes symétriques simples sont les algèbres appartenant à la famille $\mathfrak{A}$.

En effet, les algèbres appartenant à la famille $\mathfrak{A}$ sont simples. Inversement soit L simple. Comme elle n'est pas triviale il existe un noyau maximal M. Donc l'algèbre quotient L' = L/M est isomorphe à une algèbre de la famille $\mathfrak{A}$. Dans tous les cas L' contient plus d'un élément, donc L doit être isomorphe à une des algèbres appartenant à $\mathfrak{A}$.

En vertu des résultats 4.2. , 4.12 et 4.14 on peut énoncer le théorème de représentation suivant :

4.15. Toute algèbre de Lukasiewicz n-valente symétrique L, non triviale, est isomorphe à un sous-produit direct d'algèbres de la famille $\mathfrak{A}$, autrement dit, d'algèbres simples.

4.16. Une algèbre L est dite *sous-directement irréductible* si pour toute famille non vide $\{L_i\}_{i \in I}$ d'algèbres telles que L est isomorphe à un sous-produit direct L' des $\{L_i\}$, il existe un indice $i \in I$ tel que la projection $\Pi_i : L' \to L_i$ est un isomorphisme.

D'après 4.15 nous pouvons conclure que :

4.17. Les uniques algèbres de Lukasiewicz symétriques n-valentes sous-directement irréductibles sont les algèbres simples.

BIBLIOGRAPHIE. -

[1] BIALYNICKI-BIRULA A. et RASIOWA H., On the representation of Quasi-Boolean algebras, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, Cl. III, 5 (1957), p. 259-261.

[2] BIRKHOFF G., Lattice Theory, *Amer. Math. Soc.*, Coll. Publ. 25, 3e ed. 1967, MR 37 # 2638.

[3] CIGNOLI R., Moisil Algebras, *Notas de Lógica Matemática*, n° 27, Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 1970, MR 49 # 10614. Zbl 212, 317.

[4] EPSTEIN G. et HORN A., P-algebras, an abstraction from Post algebras, Alg. Univ. 4 (1974) 195-206. Zbl 294. 06010.

[5] ITURRIOZ L., Axiomas para el cálculo proposicional trivalente de Lukasiewicz, Reunión anual Unión Mat. Argentina (10-12 octubre 1964), *Rev. Unión Mat. Argentina,* 22 (1965), 150.

[6] ITURRIOZ L., Sur une classe particulière d'algèbres de Moisil, *C.R. Acad. Sc. Paris,* 267 (1968) 585-588. MR 38 # 3134, Zbl.182. 8.

[7] ITURRIOZ L., Algèbres de Heyting trivalentes involutives, *Notas de Lógica Matemática* n° 31, Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 1974.

[8] ITURRIOZ L. , Lukasiewicz and symmetrical Heyting algebras, (à paraître).

[9] MOISIL Gr. Notes sur les logiques non-chrysippiennes, *Annals Sc. Univ. Jassy,* 27 (1941) 86-98. MR 8, 307.

[10] MOISIL Gr., Logique Modale, *Disquis. Math. Phys.* 2 (1942) 3-98.

[11] MOISIL Gr., Algebra schemelor cu elemente ventil, *Rev. Univ. C.I. Parhon si a Polit. Bucuresti,* 4,5 (1954), 9-41.

[12] MOISIL Gr., Sur la logique à trois valeurs de Lukasiewicz, *Analele Univ. Bucuresti,* Seria Acta Logica, 5 (1962), 103-117.

[13] MOISIL Gr., Les logiques non-chrysippiennes et leurs applications, *Acta Phil. Fennica,* 16 (1963), 137-152. MR 28 # 2969.

[14] MOISIL Gr., Le algebra di Lukasiewicz, *Analele Univ. Bucuresti,* Seria Acta Logica, 6 (1963), 97-135. MR 30 # 3810. Zbl. 241. 02007.

[15] MONTEIRO A., L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques, *Segundo Symp. Lationamericano de Mat.,* Centro de Coop. Científica Unesco, Montevideo (1954), 129-162. Voir aussi *Notas de Lógica Mat.* n° 29-30, Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 1974 . MR 17, 649.

[16] MONTEIRO A., Algebras de Lukasiewicz trivalentes, cours donné à l'Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 1963.

[17] MONTEIRO A., Algebras de Boole involutivas, *Rev.Unión Mat. Argentina,* 23 (1966) 39.

[18] MONTEIRO A., Algebras de Boole involutivas, cours donné à l'Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 1969.

[19] MONTEIRO A., La semi-simplicité des algèbres de Boole topologiques et les systèmes déductifs, *Rev. Union Mat. Argentina*, 25 (1971) 419-448.

[20] MONTEIRO L., Les algèbres de Heyting et de Lukasiewicz trivalentes, *Notre Dame Jour. Formal Logic*, 11 (1970) 453-466.

[21] MONTEIRO L., Algèbre du calcul propositionnel trivalent de Heyting, *Fund. Math.* 74 (1972) 99-109. MR 45# 4957, Zbl 248, 02070.

[22] RASIOWA H., An algebraic approach to non-classical logics, *Studies in Logic n° 78, North-Holland*, 1974.

[23] ROUSSEAU G., Post algebras and pseudo-Post algebras, *Fund. Math.* 67 (1970) 133-145.

[24] SICOE C., Note asupra algebrelor Lukasiewiczienne polivalent, *St. Cerc. Mat.* 19 (1967) 1203-1207.

[25] VARLET J., Algèbres de Lukasiewicz trivalentes, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, 36 (1968) 399-408. MR 38# 5676, Zbl 175, 266.

L. ITURRIOZ
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE