Publications du Département de mathématiques de Lyon

Sami Alame

Extensions uniformes des opérateurs positifs

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1976, tome 13, fascicule 1 , p. 23-61
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1976__13_1_23_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1976 t.13-1

EXTENSIONS UNIFORMES DES OPERATEURS POSITIFS

par Sami ALAME

INTRODUCTION.

En se basant sur les propriétés des extensions uniformes (P.E.U.) des formes linéaires positives continues d'un sous-espace fermé M d'un espace de Banach ordonné V à l'espace V tout entier, introduites par H. FAKHOURY dans [5] , et sur la théorie de dualité des espaces de Banach ordonnés [6] , nous étendons l'extension uniforme aux espaces de *Fréchet ordonnés* et à la dualité de l'ordre à l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ *des opérateurs entre espaces de Fréchet ordonnés* ; nous étudions aussi l'extension uniforme des *opérateurs positifs continus* (resp. *compacts*) de M, à valeurs dans un espace de Banach ordonné W, à l'espace V tout entier.

1. NOTATIONS - ADAPTATION DE L'EXTENSION UNIFORME AU CAS DES ESPACES DE FRECHET ORDONNES.

Soit E un espace localement convexe (e.l.c.) ordonné par un cône convexe, saillant et fermé E^+ (dans tout ce travail, les cônes des éléments positifs seront supposés convexes, saillants et fermés). Le dual E' de E sera ordonné par le cône E'^+ polaire du cône E^+. Autrement dit, E'^+ est le cône des formes linéaires continues sur E et positives sur E^+.

(1.1) THEOREME. - *Soit* E *un espace de Fréchet ordonné, positivement engendré par un cône* E^+. *Alors toute forme linéaire positive sur* E *est continue et, par suite, le cône* E'^+ *est faiblement complet (pour* $\sigma(E',E)$*).*

DEMONSTRATION. - La première partie de ce théorème se trouve dans [15 ; p. 228] . Soit $\mathscr{F}$ un filtre $\sigma(E',E)$-Cauchy dans E'^+. La forme linéaire $\ell : x \mapsto \lim_{\mathscr{F}} f(x)$ est positive sur E^+, donc continue, Donc $\mathscr{F}$ converge vers $\ell \in E'^+$ pour $\sigma(E',E)$).

(1.2) PROPOSITION. - *Soient* E *un espace de Fréchet ordonné,* $(p_n)_n$ *une suite fondamentale de semi-normes sur* E, M *un sous-espace fermé de* E *et* f *une forme linéaire sur* M. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) La forme linéaire f *se prolonge en une forme linéaire positive continue* $\tilde{f}$ *sur* E *telle qu'il existe* $n_o \in N$ *avec* $p'_{n_o}(\tilde{f}) = \operatorname{Sup}\{|\tilde{f}(x)| ;$ $p_{n_o}(x) = 1\} = 1$ [2, *prop. 23.14, page 78*].

(b) Il existe $n_o \in N$ *tel que* f *soit majorée par 1 sur le convexe* $(B_{n_o}(E)-E^+) \cap M$ *, où* $B_{n_o}(E)$ *est la* P_{n_o} *-boule unité fermée de* E.

DEMONSTRATION. - C'est une conséquence immédiate du théorème de Namioka [13] , en prenant $S = B_{n_o}(E)$.

DEFINITION. - *Soit* M *un sous-espace fermé d'un espace de Fréchet ordonné* E. *On dira que le couple* (M,E) *possède la propriété de l'extension uniforme (P.E.U.) si et seulement si toute forme linéaire positive continue* f *sur* M *se prolonge en une forme linéaire positive continue* $\tilde{f}$ *sur* E *vérifiant la propriété suivante : pour tout* $n_o \in N$ *, il existe* $1 \leqslant a_{n_o} < \infty$ *tel que* $f \in (B_{n_o}(M))^\circ$ *implique* $\tilde{f} \in a_{n_o}(B_{n_o}(E))^\circ$; *Les polaires étant pris respectivement dans* M' *et* E'.

De cette définition découle le corollaire suivant :

(1.4) COROLLAIRE. - *Si le couple* (M,E) *possède la P.E.U. avec le coefficient* a_{n_o}*, alors tout compact faible (pour* $\sigma(M',M)$*) de* M'^+ *est l'image d'un compact faible (pour* $\sigma(E',E)$*) de* E'^+.

DEMONSTRATION. - Soit K un compact faible de M'^+. L'application de restriction $R : E'^+ \longrightarrow M'^+$ étant faiblement continue, alors $\tilde{K} = \{\tilde{f} \in E'^+ ; f \in K\}$ est faiblement fermé. D'autre part, il existe $n_o \in N$ tel que $K^\circ \supset B_{n_o}(M)$. Pour toute $\tilde{f} \in \tilde{K}$, $R(\tilde{f}) = f \in K$, donc $f \in (B_{n_o}(M))^\circ$; et par suite $\tilde{f} \in a_{n_o}(B_{n_o}(E))^\circ$. Donc les $\tilde{f} \in \tilde{K}$ sont uniformément bornées sur $B_{n_o}(E)$. et par suite $\tilde{K}$ est faiblement relativement compact, ce qui suffit.

(1.5) THEOREME. - *Avec les notations précédentes, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) Le couple (M,E) *possède la P.E.U.*

(b) Pour tout $n_o \in N$, *il existe* $1 \leq A_{n_o} < \infty$ *tels que :*
$(B_{n_o}(E)-E^+) \cap M \subset a_{n_o}(B_{n_o}(M)-M^+)$.

DEMONSTRATION. -

(b)$\Longrightarrow$(a) : soit f une forme linéaire positive continue sur M. Pour tout $x \in M \cap (B_{n_o}(E)-E^+)$ il existe alors $y \in B_{n_o}(M)$ tel que $x \leq a_{n_o} y$, et comme f est linéaire positive, il vient que $f(x) \leq a_{n_o}(f(y) \leq a_{n_o} p'_{n_o}(f)$; et d'après le théorème (1.11) et la proposition (1.18), f admet alors une extension linéaire positive $\tilde{f}$ majorée par $a_{n_o} p'_{n_o}(f)$ sur $B_{n_o}(E)$, ce qui suffit.

(a)$\Longrightarrow$(b) : si le couple (M,E) possède la P.E.U. , pour tout $n_o \in N$, il existe $1 \leq a_{n_o} < \infty$ tel que toute forme linéaire f dans M'^+ telle que $p'_{n_o}(f) = 1$ soit majorée par a_{n_o} sur le convexe $(B_{n_o}(E)-E^+) \cap M$.

Un raisonnement analogue à celui de Fakhoury ([5] , 2.3) implique que :

$$B_{n_o}(M'^{+}) \subset -a_{n_o}\left[M \quad (B_{n_o}(E)-E^{+})\right]^{\circ} .$$

En prenant les polaires des deux membres, nous avons l'inclusion :

$$\overline{(B_{n_o}(E)-E^{+}) \cap M} \subset - a_{n_o}\left[B_{n_o}(M'^{+})\right]^{\circ} = - a_{n_o}\overline{(B_{n_o}(M)+M^{+})}$$

(Théorème des bipolaires).

Nous avons finalement :

$$(B_{n_o}(E)-E^{+}) \cap M \subset a_{n_o}\overline{(B_{n_o}(M)-M^{+})} \text{ pour}$$

Il reste à démontrer que $\overline{B_{n_o}(M)-M^{+}} \subset \alpha(B_{n_o}(M)-M^{+})$ pour tout $\alpha > 1$.

Nous démontrons alors le lemme suivant :

(1.6) LEMME. - *Soit* M *un espace de Fréchet ordonné par un cône fermé* M^{+} *; avec les notations précédentes, les assertions suivantes sont vérifiées :*

(a) $\overline{B_{n_o}(M)-M^{+}} \subset \alpha(B_{n_o}(M)-M^{+})$ *pour tout* $\alpha > 1$.

(b) Si M *est positivement engendré, on a :*

$$\overline{B_{n_o}(M^{+})-M^{+}} \subset \alpha(B_{n_o}(M^{+})-M^{+}) \textit{ pour tout } \alpha > 1.$$

DEMONSTRATION. - En fait ce lemme a été démontré par Fakhoury dans le cadre des espaces de Banach M, nous l'adaptons maintenant au cas de Fréchet.

Soient $\alpha>1$ et x un point de $\overline{B_{n_o}(M)-M^+}$. Il suffit de trouver $y\in M$, $z\in M^+$ tels que $x = y-z$ avec $p_{n_o}(y)\leqslant \alpha$. Posons $\alpha = 1+\varepsilon$. Il existe $y_1 \in B_{n_o}(M)$, $z_1\in M^+$ et $t_1\in M$ tels que $x = y_1-z_1+t_1$ avec $p_{n_o}(t_1) \leqslant \varepsilon/2$. D'où, en décomposant $t_1/p_{n_o}(t_1)$ à son tour et en répétant cette décomposition on obtient trois suites (y_n), (z_n) et (t_n) telles que : $t_n = t_{n-1} - (y_n-z_n)$ et $x = \sum_{i=1}^{n} (y_i-z_i) + t_n$; avec $y_n \in \varepsilon/2^{n-1}\ B_{n_o}(M)$; $z_n \in \varepsilon/2^{n-1}\ M^+$ et $p_{n_o}(t_n) \leqslant \varepsilon/2^n$.

Puisque M est complet et M^+ est fermé, la série de terme général y_n converge vers y dans M et la série de terme général z_n converge vers dans M^+. Comme $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on a :

$$x = \sum_{i=1}^{n} (y_i-z_i) + t_n = y-z.$$

Il reste à vérifier que $p_{n_o}(y) \leqslant \alpha$. Or $p_{n_o}(y) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} p_{n_o}(y_n)$

$$\leqslant 1 + \sum_{n\geqslant 2}^{\infty} \varepsilon/2^{n-1} = 1+\varepsilon = \alpha.$$

La deuxième partie de ce lemme s'obtient par les mêmes techniques.

(1.7) COROLLAIRE. - *Si* M *et* E *sont positivement engendrés, le couple* (M,E) *possède la P.E.U. si et seulement s'il existe* $n_o \in \mathbb{N}$, *tels que* : $(B_{n_o}(E^+)-E^+)\cap M \subset a_{n_o}(B_{n_o}(M^+)-M^+)$.

DEMONSTRATION. - C'est une conséquence du théorème 1.5 et du lemme 1.6.

On va maintenant caractériser la P.E.U. à l'aide des opérateurs compacts positifs à valeurs dans $C_0(N)$ en utilisant le théorème suivant de Terzioglu :

(1.8) THEOREME. - *Pour que l'opérateur faiblement continu* $T : M \to W$ *(*M *espace localement convexe,* W *espace de Banach) soit compact (l'image d'un voisinage de 0 est relativement compacte), il faut et il suffit qu'il existe une suite* (f_n) *dans* M' *bornologiquement convergente vers zéro (pour la bornologie équicontinue) vérifiant :* $||T(x)|| \leq \operatorname{Sup}_n |f_n(x)|$ *pour tout* x *dans* M.

Pour ce théorème on peut se reporter à [16], [17]. Si p est une semi-norme continue sur M, la "p-norme" de T sera définie par $||T||_p = \operatorname{Sup}\{||T(x)|| \; ; \; p(x) = 1\}$.

(1.9) THEOREME. - *Soit* M *un sous-espace fermé d'un espace de Fréchet ordonné* E. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) le couple (M,E) *possède la P.E.U. (resp. avec un coefficient* a_{n_0} *pour chaque* n_0*).*

(b) Tout opérateur compact positif T *de* M *dans* $C_0(N)$ *se prolonge en un opérateur compact positif* $\tilde{T}$ *de* E *dans* $C_0(N)$ *(resp. avec* $||\tilde{T}||_{p_{n_0}} \leq a_{n_0} ||T||_{p_{n_0}}$ *).*

(c) Tout opérateur compact positif T *de* M *dans* $C_o(N)$ *se prolonge en un opérateur continu positif* $\tilde{T}$ *de* E *dans* $C_o(N)$ *(resp. avec* $||\tilde{T}||_{p_{n_o}} \leqslant a_{n_o}||T||_{p_{n_o}}$ *).*

DEMONSTRATION. - La démonstration repose sur la représentation d'un opérateur compact positif T de M dans $C_o(N)$ (resp. de E dans C_o) comme une suite (f_n) M'^+ (resp. E'^+) qui converge fortement vers zéro avec $||T(x)|| \leqslant \operatorname{Sup}_n |f_n(x)|$ pour tout x dans M (resp. E). En effet, en utilisant le raisonnement de FAKHOURY ([5], 2.7), on trouve que, si T' est le transposé de T et si $(\delta_n)_n$ est l'ensemble des points extrémaux positifs de la boule unité de l'espace $\ell^1(N)$ muni de la topologie $\sigma(\ell^1, C_o)$, f_n est alors la suite $(T'(\delta_n))_n$ qui converge fortement vers zéro dans M'^+.

(a) $\Longrightarrow$ (b) : soit (f_n) une suite de E'^+ qui relève la suite $(T'(\delta_n))_n$. l'hypothèse implique que $p'_{n_o}(f_n) \leqslant a_{n_o} p'_{n_o}(T'(\delta_n))$ donc (f_n) converge fortement vers zéro dans E'^+ , et T est alors l'opérateur $x \mapsto (f_n(x))_n$ de E dans $C_o(N)$.

b) $\Longrightarrow$ (c) : Triviale.

(c) $\Longrightarrow$ (a) : Supposons que (M,E) ne possède pas la P.E.U., il existe alors une suite $(f_n) \subset M'^+$ et $n_o \in N$ tels que $p'_{n_o}(f_n) \leqslant 1/2^n$, alors que toute suite qui relève la suite (f_n) est non fortement bornée.

La suite (f_n) converge fortement vers zéro, et est alors canoniquement associée à un opérateur compact positif T de M dans C_0. Soit $\tilde{T}$ une extension linéaire positive continue de T. Si t_n est l'application de C_0 dans R telle que $t_n[(\alpha_n)] = \alpha_n$, alors $\tilde{f}_n = t_n \circ \tilde{T}$ est une suite de E'^+ qui relève la suite (f_n) et qui est faiblement convergente vers zéro ; et comme E est tonnelé, le théorème de Banach-Steinhauss assure que $(\tilde{f}_n)$ est fortement bornée, d'où la contradiction.

2. ESPACE DES OPERATEURS LINEAIRES CONTINUS ENTRE DEUX ESPACES DE FRECHET ORDONNES.

Soient E et F deux espaces de Fréchet ordonnés. Nous allons étendre certaines propriétés de la dualité des espaces de Fréchet ordonnés [15 ; ch. V, § 3] à l'espace $\mathscr{L}(E,F)$ des opérateurs continus de E dans F. En particulier, nous allons voir les conditions d'ordre sur E et F pour que $\mathscr{L}(E,F)$ soit normal, positivement engendré, possède la propriété de décomposition de Riesz, (α,n)-additif, (α,n)-filtrant...

Un opérateur T de E dans F est positif si $T(E^+) \subset F^+$.

(2.1) PROPOSITION. - *Soient* E *un espace de Fréchet positivement engendré par un cône convexe fermé* E^+ *et* F *un espace de Fréchet normal* [*15 ch. V, § 3*] . *Alors tout opérateur positif* T *de* E *dans* F *est continu.*

DEMONSTRATION. - Il suffit de démontrer que pour toute f dans F', la forme linéaire $f \circ T$ est continue (p. 158, de [15]). Mais F est normal, donc F' est positivement engendré d'après [15 ; ch. V, § 3], et l'on peut écrire $f = f_1 - f_2$ avec f_1, f_2 dans F'^{+}. Alors les formes linéaires $f_1 \circ T$ et $f_2 \circ T$ sur E sont positives, donc continues d'après [15 ; ch. V, § 3] et par suite $f \circ T = f_1 \circ T - f_2 \circ T$ est continue.

(2.2) THEOREME. - *Sous les hypothèses de la proposition précédente, le cône des opérateurs positifs* $\mathcal{L}^{+}(E,F)$ *est simplement fermé, et l'espace* $\mathcal{L}_s(E,F)$ *ordonné par ce cône est simplement normal.*

DEMONSTRATION. - Pour tout x dans E, la fonction $f_x : T \mapsto T(x)$ est simplement continue, donc $f_x^{-1}(F^{+})$ est simplement fermé, d'où $\mathcal{L}^{+}(E,F) = \bigcap_{x \in E^{+}} f_x^{-1}(F^{+})$ est simplement fermé. D'autre part, pour toute partie finie A de E, il existe une partie finie A_0 dans E^{+} telle que $A \subset A_0 - A_0$ car E est positivement engendré. Donc les ensembles $\{A \cap E^{+} - A \cap E^{+}\}$, où A décrit l'ensemble des parties finies de E, forment une sous-famille fondamentale de parties finies de E. Comme F est normal, il existe une f famille fondamentale $(p_\alpha)_{\alpha \in I}$ de semi-normes sur F croissantes sur le cône positif [15 ; 3.1 page 215]. Alors les applications :

$$T \mapsto \operatorname{Sup} \{p_\alpha(T(x)) \ ; \ x \in A \cap E^{+}, \ \alpha \in I\}$$

forment une famille fondamentale de semi-normes sur $\mathcal{L}_s(E,F)$ croissantes sur $\mathcal{L}^{+}(E,F)$, et on applique à nouveau [15 ; 3.1 page 215].

La réciproque est aussi vraie :

(2.3) THEOREME. - *Soient* E *et* F *deux espaces de Fréchet tels que l'espace* $\mathcal{L}(E,F)$ *soit simplement normal, alors* E *est positivement engendré et* F *est* $\sigma(F,F')$*-normal.*

DEMONSTRATION. - Puisque $\mathcal{L}(E,F)$ est simplement normal, on vérifie facilement que E' est $\sigma(E',E)$-normal (c'est le cas où F = R) et d'après [15 ; ch. V, §3] E est positivement engendré.

D'autre part, soient $x_o \neq 0$ dans E^+ et y dans F. Comme E^+ est saillant et fermé, il existe $f \in E'^+$ telle que $f(x_o) = 1$ (théorème de séparation de Hahn-Banach). Alors l'opérateur $T : x \mapsto f(x).y$ de E dans F appartient à $\mathcal{L}(E,F)$, et comme ce dernier est simplement normal et que $y = T(x_o)$, alors F est faiblement normal pour $\sigma(F,F')$.

Pour établir la normalité de l'espace $\mathcal{L}_\beta(E,F)$, muni de la topologie de la convergence bornée, nous avons besoin du lemme suivant :

(2.4) LEMME. - *Soient* E *un elc réticulé tel que l'application* $x \mapsto x^+ = \mathrm{Sup}(x,0)$ *soit continue à l'origine, et* $\mathcal{B}$ *l'ensemble des parties bornées de* E. *Alors les ensembles* $\{B \cap E^+ - B \cap E^+ \ ; \ B \in \mathcal{B}\}$ *forment une sous-famille fondamentale de* $\mathcal{B}$.

DEMONSTRATION. - Soient $B \in \mathscr{B}$ et U un voisinage de zéro dans E ; il existe un voisinage V de zéro tel que pour tout $x \in V$, on ait x^+ et x^- appartiennent à U. D'autre part, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda B \subset V$. On a alors : $\lambda B^+ = \lambda\{x^+ \ ; \ x \in B\} \subset U$; donc B^+ et B^- sont bornées et $B \subset B^+ - B^+$, ce qui suffit.

(2.5) THEOREME. - *Soient* E *un espace de Fréchet réticulé tel que* $x \mapsto x^+$ *soit continue à l'origine, et* F *un espace de Fréchet normal. Alors l'espace* $\mathscr{L}_\beta(E,F)$ *est normal.*

DEMONSTRATION. - Si $(p_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une famille fondamentale de semi-normes sur F croissantes sur F^+, alors le lemme précédent assure que les applications :

$$T \mapsto \operatorname{Sup} \{p_\alpha(T(x)) \ ; \ x \in B \quad E^+ \ ; \ \alpha \in I\}$$

forment une famille fondamentale de semi)normes sur $\mathscr{L}_\beta(E,F)$, croissantes sur le cône positif $\mathscr{L}^+(E,F)$.

(2.6) THEOREME. - *Soient* V *et* W *deux espaces de Banach ordonnés. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) L'espace $\mathscr{L}(V,W)$ *est* (α,n)*-additif.* [*6; 2.13*].

(b) V *est approximativement* (β,n)*-filtrant* ;[*6; 2.12*] *et* W *est* (γ,n)*-additif.*

DEMONSTRATION. -

(a) $\Longrightarrow$ (b) : L'espace V' est alors (α,n)-additif (c'est le cas de W=R), donc V est approximativement (α,n)-filtrant d'après [6;2.13].

Pour démontrer la deuxième partie de (b), on considère une suite $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ dans W^+. Soit $x_\circ \neq 0$ dans V^+. Comme V^+ est saillant et fermé, il existe $f_\circ \in V'^+$ telle que $f_\circ(x_\circ) = 1$ (théorème de séparation de Hahn-Banach). La suite des opérateurs $T_i : x \mapsto f_\circ(x).y_i$ pour $i = 1,\dots,n$ appartient à $\mathscr{L}^+(V,W)$, et comme ce dernier est (α,n)-additif il vient que : $\sum_{i=1}^{n} ||T_i|| \leqslant \alpha||\sum_{i=1}^{n} T_i||$. Mais $||T_i|| = ||f_\circ||.||y_i||$, d'où :

$$\sum_{i=1}^{n} |||y_i|| \leqslant \alpha \; ||\sum_{i=1}^{n} y_i|| \; ;$$

et l'espace W est (α,n)-additif.

(b) $\Longrightarrow$ (a) : Soit $(T_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une suite d'opérateurs dans $\mathscr{L}^+(V,W)$. Soit $\varepsilon > o$. Pour $i=1,\dots,n$, il existe $x_i \in B(V)$ tels que $||T_i|| < ||T_i(x_i)|| + \varepsilon$ Puisque V est approximativement (β,n)-filtrant, il existe alors $y \in V$ tel que $y \geqslant x_i (i=1,\dots,n)$ et $||y|| \leqslant \beta+\varepsilon$. Soit $y'_i \in V$ tel que $x_i = y-y'_i$, alors $y'_i \geqslant 0$ et $||y'_i|| \leqslant \beta+1+\varepsilon$. On a :

$$||T_i(x_i)|| \leqslant ||T_i(y)|| + ||T_i(y'_i)|| \text{ ; d'où}$$

$$\sum_{i=1}^{n} ||T_i(x_i)|| \leqslant \sum_{i=1}^{n} ||T_i(y)|| + \sum_{i=1}^{n} ||T_i(y'_i)||$$

$$\leqslant \gamma \; | \; ||\sum_{i=1}^{n} T_i(y)|| + ||\sum_{i=1}^{n} T_i(y'_i)|| \; |$$

$$\leqslant \gamma\left[\|(\sum_{i=1}^{n} T_i)(y)\| + \|(\sum_{i=1}^{n} T_i)(y'_i)\| \right].$$

$$\leqslant \gamma \left[\| \sum_{i=1}^{n} T_i\| \ (\beta+\varepsilon) + \| \sum_{i=1}^{n} T_i\| \ (\beta+1+\varepsilon)\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} \|T_i(x_i)\| \leqslant \gamma(2\beta+1+2\varepsilon) \ \| \sum_{i=1}^{n} T_i\|$$

or $\sum_{i=1}^{n} \|T_i\| < \sum_{i=1}^{n} \|T_i(x_i)\| + n\varepsilon$; d'où :

$$\sum_{i=1}^{n} \|T_i\| \leqslant \gamma(2\beta+1+2\varepsilon) \ \| \sum_{i=1}^{n} T_i\| + n\varepsilon$$

et comme $\varepsilon>o$ est arbitraire, on a :

$\sum_{i=1}^{n} \|T_i\| \leqslant \gamma(2\beta+1) \ \| \sum_{i=1}^{n} T_i\|$ et par suite l'espace $\mathscr{L}(V,W)$ est α-additif avec $\alpha = \gamma(2\beta+1)$.

(2.7) THEOREME. - *Soient* E *et* F *deux espaces de Fréchet tels que* $\mathscr{L}(E,F)$ *soit positivement engendré, alors* E *est normal et* F *est positivement engendré.*

DEMONSTRATION. - Pour démontrer que E est normal il suffit de démontrer que E' est positivement engendré [15 ; ch. 5n §3] . Si $f \in E'$ et $y_o \neq 0$ dans F^+, l'opérateur $T : x \mapsto f(x).y_o$ appartient à $\mathscr{L}(E,F)$; il existe alors un opérateur $T_1 \geqslant T,0$ dans $\mathscr{L}^+(E,F)$. Comme F^+ est saillant et fermé, il existe $f_1 \in F'^+$ telle que $f_1(y_o) = 1$. AOn a alors $f_1 \circ T_1 \geqslant F,0$ dans E'^+.

Démontrens que F est positivement engendré. Soit $y \in F$ et soit $x_0 \neq 0$ dans E^+ ; il existe alors $f_0 \in E'^+$ telle que $f_0(x_0) = 1$. L'opérateur $T : x \mapsto f_0(x).y$ appartient à $\mathscr{L}(E,F)$; il existe donc $T_1 \geqslant T,0$ dans $\mathscr{L}(E,F)$. On a alors $T_1(x_0) \geqslant T(x_0) = f_0(x_0).y = y$, donc $T_1(x_0) \geqslant y,0$ dans F.

Pour démontrer la réciproque, on a besoin du lemme suivant :

(2.8) LEMME. - *Soit* F *un espace vectoriel de dimension finie* (dim F = n) *positivement engendré par un cône convexe fermé* F^+. *Alors il existe un cône convexe fermé* $F_1^+ \subset F^+$ *qui engendre* F *et tel que* $F = F_1^+ - F_1^+$ *soit réticulé.*

DEMONSTRATION. - Puisque dim F = n < ∞ et F^+ est fermé, ce cône admet une base compacte B qui contient (n+1) points affinement indépendants. L'enveloppe convexe de ces (n+1) points est un simplexe B_1 et F_1^+ est alors le cône de base B_1.

(2.9) THEOREME. - *Si* E *est normal et* F *est positivement engendré, de dimension finie* n, *alors* $\mathscr{L}(E,F)$ *est positivement engendré.*

DEMONSTRATION. - D'après le lemme précédent, l'espace F ordonné par le cône F_1^+ est réticulé. Soit $T \in \mathscr{L}(E,F)$. Pour tout x dans E, on a T(x) $T(x) = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ et $f_i(x) = \alpha_i$, $i=1,\dots,n$, sont les n composantes de $T(x)$. Alors $f_i \in E'$ pour $i=1,\dots,n$. Mais E est normal, donc E' est positivement engendré [15. ch. V, § 3], il existe donc $g_i \geq f_i, 0$ dans E' pour $i=1,\dots,n$. Alors l'opérateur $T_1 : x \mapsto (g_1(x),\dots,g_n(x))$ appartient à $\mathscr{L}(E,F)$ et l'on a aussi $T_1 \geq T,0$ pour l'ordre de F_1^+ ; et comme $F_1^+ \subset F^+$, on a $T_1 \geq T,0$ pour l'ordre de F^+.

(2.10) DEFINITION. - *Si* E *et* F *sont deux espaces topologiques, une application multivoque* Θ *de* E *dans* $\mathscr{P}(F) \setminus \{\emptyset\}$ *est dite semi-continue inférieurement (s.c.i.) si pour tout ouvert* ω *de* F*, l'ensemble* $U = \{x \in E \ ; \ \underline{\theta}(x) \cap \omega \neq \emptyset\}$ *est lui-même ouvert dans* E.

Si K *est un convexe d'un e.v.t.* E*, alors l'application* $\theta : K \to \mathscr{P}(F) \setminus \{\emptyset\}$ *est affine si pour tout* $0 \leq \lambda \leq 1$; x_1, x_2 *dans* K *on a :* $\lambda\theta(x_1)+(1-\lambda)\theta(x_2) \subset \theta[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]$.

(2.11) LEMME. - *Soit* V *un espace de Banach ordonné tel que* $V = V^+-V^+$. *Alors il existe* $\alpha \geq 1$ *tel que pour tout* $\varepsilon>o$ *il existe une application* $T_\varepsilon : V \to V^+$ *qui vérifie :*

(1) $T_\varepsilon(x) = x$ *pour tout* $x \in V^+$;

(2) $T_\varepsilon(\lambda x) = \lambda T_\varepsilon(x)$ *pour tout* $\lambda>o$, $x \in V$;

(3) $T_\varepsilon(x) \geq x,0$, *et il existe* $\alpha>o$ *tel que* $||T_\varepsilon(x)|| \leq (\alpha+\varepsilon)||x||$.

DEMONSTRATION. - Puisque V est positivement engendré, il existe $\alpha \geqslant 1$ tel que V soit α-engendré [6 ; 2.1]. Soit θ l'application de V dans V^+ définie par : $\theta(x) = \{y \geqslant x,0 \; ; \; ||y|| < (\alpha+\varepsilon)||x||\}$ avec $\theta(x) = \{x\}$ pour $x \in V^+$. Puisque V est α-engendré, il vient que $\theta(x) \neq \{\emptyset\}$. On vérifie que $\theta(x)$ est un convexe, non vide, et θ est s.c.i. ; donc $\bar{\theta} \; : x \mapsto \overline{\theta(x)}$ est s.c.i. [12 ; 2.3] et d'après le théorème de MICHAEL [12], θ admet une sélection continue $T_\varepsilon : V \to V^+$ qui vérifie alors (1), (2), et (3).

(2.12) THEOREME. - *Soient* V *un Banach ordonné,* α*-normal, et* X *un espace compact. L'espace* $\mathcal{L}_c(V,C(X))$ *des opérateurs compacts de* V *dans* $C(X)$ *est positivement engendré.*

DEMONSTRATION. - Soit $T \in \mathcal{L}_c(V,C(X))$. Il existe [4] une application $\phi : X \to V'$ continue pour la norme et telle que $||T|| = \mathrm{Sup}\{||\phi(x)|| ; x \in X\}$. Puisque V est α-normal, l'espace V' est α-engendré. Pour tout $\varepsilon > o$, il existe $T' : V' \to V'^+$ continue pour la norme, qui coïncide avec l'identité sur V'^+ et telle que $T'_\varepsilon(f) \geqslant f,0$ (lemme 2.11). On pose $\psi = T'_\varepsilon \circ \phi : X \to V'^+$. Alors l'opérateur T_1 de V dans $C(X)$ associé à l'application positive

par $\begin{cases} T_1(v)(x) = \psi(x)(v) \; ; \; v \in V \; , \; x \in X \text{ et} \\ ||T_1|| = \mathrm{Sup}\{||\psi(x)|| \; ; \; x \in X\} \; . \end{cases}$

est compact positif [4]. D'autre part, pour tout $v \in V^+$, $x \in X$, on a :

$$T_1(v)(x) = \psi(x)(v) = T'_\varepsilon(\phi(x))(v) ;$$

mais $T'_\varepsilon(\phi(x)) \geqslant \phi(x)$ (lemme 2.11, (3)), d'où :
$T_1(v)(x) \geqslant \phi(x)(v) = T(v)(x)$ d'où $T_1 \geqslant T,0$ ce qui achève la démonstration.

(2.13) COROLLAIRE. - *Soient* S *un compact stonien et* W *une bande fermée de* C(S). *Alors pour tout espace de Banach normal* V, *l'espace* $\mathscr{L}_c(V,W)$ *des opérateurs compacts de* V *dans* W *est positivement engendré.*

DEMONSTRATION. - Puisque W est une bande (fermée) de C(S), alors $C(S) = V \oplus W^\perp$ est une somme directe ordonnée [15]. Le projecteur P sur W est linéaire, positif et continu. Soit $T \in \mathscr{L}_c(v,W)$. On peut regarder T comme un élément de $\mathscr{L}_c(V,C(S))$, et il existe alors $T_1 \in \mathscr{L}_c(V,C(s))$ tel que $tT_1 \geqslant T,0$ (théorème précédent) . Soit $T_2 = P \circ T_1$.

Pour tout $x \geqslant 0$ dans V, $T_2(x) = P \circ T_1(x) \geqslant 0$ d'après la somme directe ordonnée. Donc $T_2 \geqslant 0$. D'autre part, $T_2(x) = P(T_1(x)) \geqslant P(T(x)) = T(x)$; donc il existe $T_2 \in \mathscr{L}_c(V,W)$ tel que $T_2 \geqslant T,0$ ce qui achève la démonstration.

Dans le cas où l'espace V *est* α*-additif, on a une démonstration très différente :* Soit $T \in \mathscr{L}_c(V,C(X))$, alors $T[B(V)]$ est relativement compacte dans C(X). D'après le théorème d'Ascoli, $T[B(V)]$ est équicontinue et simplement bornée dans C(X), et par suite $f_\circ = \mathrm{Sup}\,\{f \,;\, f \in T[B(V)]\}$ existe dans C(X) et on applique alors le théorème 1 de [18] .

(2.14) THEOREME. - *Soient* V *et* W *deux espaces de Banach ordonnés tels que l'espace* $\mathscr{L}(V,W)$ *soit* (α,n)*-filtrant ; alors* V *est* (α,n)*-additif et* W *est* (α,n)*-filtrant.*

DEMONSTRATION. - Soient $f_1,\ldots,f_n \in B(V')$. Soit $y_\circ \in W^+$ tel que $||y_\circ|| = 1$. Alors les opérateurs T_i $(i=1,\ldots,n)$ de V dans W définis par : $T_i(x) = f_i(x).y_\circ$ appartiennent à $B(\mathscr{L}(V,W))$; il existe donc $T \geqslant T_i$ $(i=1,\ldots,n)$ tel que $||T|| \leqslant \alpha$. D'autre part, il existe $g \in W'^+$ telle que $g(y_\circ) = 1$ (théorème de Hahn-Banach) ; alors l'application $f : x \mapsto g(T(x))$ est une forme linéaire continue sur V telle que $f \geqslant f_i$ $(i=1,\ldots,n)$ et $||f|| \leqslant \alpha$. Donc V' est (α,n)-filtrant et d'après (1.10) V est (α,n)-additif. Soient $(y_i)_{i=1}^n \subset B(W)$ et $x_\circ \in V^+$ tel que $||x_\circ|| = 1$. Soit $f_\circ \in V'^+$ telle que $f_\circ(x_\circ) = 1$. Les opérateurs $(T_i)_{i=1}^n$ définis par : $T_i(x) = f_\circ(x).y_i$ appartiennent à $B(\mathscr{L}(V,W))$; il existe donc $T \in \mathscr{L}(V,W)$ tel que $T \geqslant T_i (i=1,\ldots,n)$ et $||T|| \leqslant \alpha$. Alors $z = T(x_\circ) \geqslant T_i(x_\circ)$ pour $i=1,\ldots,n$. Mais $T_i(x_\circ) = y_i$, donc $z \geqslant y_i$ pour $i=1,\ldots,n$ et on a $||z|| \leqslant ||T|| \leqslant \alpha$. Donc W est (α,n)-filtrant.

(2.15) THEOREME. - *Si* V *est* (α,n)*-additif et* W *est positivement engendré, de dimension finie* n*, alors l'espace* $\mathscr{L}(V,W)$ *est* (β,n)*-filtrant.*

DEMONSTRATION. - On ordonne l'espace W par le cône W_1^+ du lemme (2.8) et qui est réticulé. Soit $T_1,\dots,T_n \in B(\mathcal{L}(V,W))$ pour tout x dans V on pose :

$$T_i(x) = (\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_n}) \in \mathbb{R}^n, i = 1,\dots,n.$$

On pose $f_{ij}(x) = \alpha_{ij}$, $j=1,\dots,n$; $i = 1,\dots,n$. Alors $f_{ij} \in B(V')$. Puisque V est (α,n)-additif l'espace V' est (α,n)-filtrant ; il existe donc $(g_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ dans V' telle que $g_i \geqslant f_{ij}$ pour $j=1,\dots,n$, et telle que $||g_i|| \leqslant \alpha$ pour $i=1,\dots,n$. On pose alors $S(x) = (g_1(x),\dots,g_n(X))$. Il est clair que, pour l'ordre de W_1^+, $S \geqslant T_i$ pour $i=1,\dots,n$ et que $||S|| \leqslant \beta(\alpha)$; et comme $W_1^+ \subset W^+$ il vient que $S \geqslant T_i$ pour l'ordre de W^+.

(2.16) THEOREME. - *Soient* E *un espace de Fréchet positivement engendré, normal, et* F *un espace de Fréchet normal qui est complètement réticulé. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $\mathcal{L}(E,F)$ *possède la P.D.R.*

(b) E *possède la P.D.R.* [*6 ; 1.2 , 1.3*] .

DEMONSTRATION. - (b) $\Longrightarrow$ (a) : Soient $T_1,T_2 \leqslant G_1,G_2$ dans $\mathcal{L}(E,F)$. Pour tout x dans E^+, on a : $T_1(x)$, $T_2(x) \leqslant G_1(x)$, $G_2(x)$, et comme F est complètement réticulé, $\mathrm{Sup}\{T_1(x),T_2(x)\}$ existe pour tout x dans E^+. On définit alors sur E^+ un opérateur $T : x \mapsto \mathrm{Xup}\{T_1(x), T_2(x)\}$. Alors T est positivement homogène sur E^+, et comme E possède la P.D.R. , T est additif sur E^+.

Mais $E = E^+ - E^+$ donc T se prolonge d'une manière unique en un opérateur $\tilde{T}$ de E dans F, et il est clair que $\tilde{T} = T_1 \vee T_2$. Montrons que T est continu. Comme F est normal, on peut se limiter à T_1 et T_2 positifs. Alors $\tilde{T} = T_1 \vee T_2 \geqslant 0$ donc continu, d'après (2.1). On a finalement $T_1, T_2 \leqslant T \leqslant G_1, G_2$, donc $\mathscr{L}(E,F)$ possède la P.D.R.

(a) $\Longrightarrow$ (b) : Soient $f_1, f_2 \leqslant g_1, g_2$ dans E' et $y_\circ \neq 0$ dans F^+. Les opérateurs $T_1(x) = f_1(x).y_\circ$, $T_2(x) = f_2(x).y_\circ, G_1(x) = g_1(x).y_\circ$, et $G_2(x) = g_2(x).y_\circ$ appartiennent à $\mathscr{L}(E,F)$ et vérifient $T_1, T_2 \leqslant G_1, G_2$, et comme $\mathscr{L}(E,F)$ possède la P.D.R., il existe $T \in \mathscr{L}(E,F)$ tel que $T_1, T_2 \leqslant T \leqslant G_1, G_2$. Comme F^+ est saillant et fermé, il existe $f_\circ \in F'^+$ telle que $f_\circ(y_\circ) = 1$. Alors la forme linéaire $f_\circ \circ T \in E'$ et vérifie $f_1, f_2 \leqslant f_\circ \circ T \leqslant g_1, g_2$, donc E' possède la P.D.R., et d'après le théorème de GOULLET DE RUGY [9] E possède la P.D.R.

3. EXTENSIONS UNIFORMES DES OPERATEURS POSITIFS ENTRE ESPACES DE BANACH ORDONNES;

Dans ce chapitre, on généralise la notion de la P.E.U. sur les formes linéaires positives continues introduite par FAKHOURY dans [5], en considérant le cas des opérateurs (linéaires) positifs entre deux espaces de Banach ordonnés.

Soient V et W deux espaces de Banach ordonnés et M un sous-espace fermé de V. Il s'agit de regarder des propriétés sur les espaces M, V et W pour qu'il existe $1 \leqslant a < \infty$ tel que tout opérateur positif continu T de M dans W se prolonge en un opérateur positif continu $\tilde{T}$ de V dans W vérifiant : $||\tilde{T}|| \leqslant a||T||$. On dira alors que (M,V ; W) possède la P.E.U. Le problème est alors évident s'il existe une projection (linéaire) positive P de E sur M telle que $||P|| \leqslant a$; il suffit de prendre $\tilde{T} = T \circ P$.

(3.1) PROPOSITION. - *Soit* V *un espace de Banach ordonné et soit* M *un sous-espace fermé de* V. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) Il existe $1 \leqslant a < \infty$, *tel que pour tout espace dual* W *et tout opérateur positif continu* T *de* M *dans* W *il existe un prolongement linéaire positif continu* $\tilde{T}$ *de* V *dans* W *vérifiant* $||\tilde{T}|| \leqslant a||T||$;

(b) Il existe $1 \leqslant a < \infty$, *il existe un opérateur positif continue* $\tilde{j}_M$ *de* V *dans* M" *qui prolonge l'injection canonique* $j_M :: M \hookrightarrow M''$ *et vérifiant* $||\tilde{j}_M|| \leqslant a$.

DEMONSTRATION. - (a) $\Longrightarrow$ (b) : Evidente en prenant W = M".

(b) $\Longrightarrow$ (a) : Soient W = F', et $j_{F'}$ l'injection canonique de F' dans F'''. Si j_F^* est le transposé de l'injection canonique j_F de F dans F", et T^{**} le bitransposé de T, alors l'opérateur $\tilde{T} = j_F^* \circ T^{**} \circ \tilde{j}_M$ est positif, continu, prolonge T à l'espace entier V et vérifie :

$$||\tilde{T}|| \leqslant ||\tilde{j}_M|| \cdot ||T^{**}|| \leqslant a||T|| \ ;$$

(3.2) DEFINITION . - *Soient* V *un espace vectoriel réel et* W *un espace vectoriel réel ordonné. Une application* P *définie sur* V, *à valeurs dans* W *sera dite sous-linéaire si elle vérifie les conditions suivantes :*

(a) $P(\lambda x) = P(x)$ *pour tous* $x \in V$; $\lambda > 0$;

(b) $P(x+y) \leqslant P(x) + P(y)$ *pour tous* $x, y \in V$.

Ceci nous permet d'établir le théorème suivant, sur lequel est basée l'extension uniforme des opérateurs positifs :

(3.3) THEOREME. - *Soient* M *un sous-espace d'un espace vectoriel ordonné* V, *et* W *un espace complètement réticulé ayant une unité d'ordre* e. *Si* T *est un opérateur de* M *dans* W, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) L'opérateur T *se prolonge en un opérateur positif* $\tilde{T}$ *de* V *dans* W.

(b) Il existe un convexe absorbant S *dans* V *tel que* T *soit majoré par* e *sur le convexe* $M \cap (S-V^+)$.

DEMONSTRATION. - (a) $\Longrightarrow$ (b) : Il suffit de prendre : $S = \{x \in V \ ; \ \tilde{T}(x) \leqslant e\}$.
(b) $\Longrightarrow$ (a) : Soient p la jauge de $S-V^+$, et P l'application de V dans W définie par $P(x) = p(x).e$; on vérifie que P est sous-linéaire sur V et majore T sur M. Le théorème de Hahn-Banach généralisé assure l'existence

d'un opérateur $\tilde{T}$ de V dans W qui prolonge T à V et tel que l'on ait : $\tilde{T}(x) \leqslant P(x)$ pour tout x dans V.

D'autre part, pour tout x dans $-V^+$ on a : $p(x) \leqslant 1$, et par suite $P(x) \leqslant e$, d'où $\tilde{T}(x) \leqslant P(x) \leqslant e$. T est alors majoré sur $-V^+$, il est donc positif.

(3.4) COROLLAIRE. - *Soient* V *un espace vectoriel ordonné et* W *un espace complètement réticulé (avec une unité d'ordre* e*). Si* M *est un sous-espace cofinal dans* V*, c'est-à-dire* $V = M-V^+$*, alors tout opérateur positif* T *de* M *dans* W *se prolonge en un opérateur positif* $\tilde{T}$ *de* V *dans* W.

(3.5) COROLLAIRE. - *Soient* M *un sous-espace fermé d'un espace de Banach ordonné* V*, et* W *un espace complètement réticulé ayant une unité d'ordre* e. *Si* T *est un opérateur continu de* M *dans* W*, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) T *se prolonge en un opérateur positif continu de norme 1.*

(b) T *est majoré par* e *sur le convexe* $M\cap(B(V)-V^+)$.

DEMONSTRATION. - (a) $\Longrightarrow$ (b) : Soit x dans $M\cap(B(V)-V^+)$; il existe alors y dans B(V) tel que $x \leqslant y$. La norme canonique sur W, associé à l'unité d'ordre e étant : $||z|| = \inf\{\lambda>0\ ;\ -\lambda e \leqslant z \leqslant \lambda e\}$, on a alors :

$$T(x) = \tilde{T}(x) \leqslant \tilde{T}(y) \leqslant ||\tilde{T}(y)||\ .\ e \leqslant e \text{ car } ||\tilde{T}|| = 1 \text{ et } ||y|| \leqslant 1.$$

(b)$\Longrightarrow$(a) : D'après le théorème (3.5), il existe un opérateur $\tilde{T}$ de V dans W qui prolonge T et qui est majoré par e sur B(V), ce qui suffit.

(3.6) THEOREME DE L'EXTENSION UNIFORME. - *Soient* V *un espace de Banach ordonné,* M *un sous-espace fermé de* V, *et* W *un espace complètement réticulé ayant une unité d'ordre* e. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) (M,V ; W) *possède la P.E.U.*

(b) Il existe $1 \leqslant a < \infty$, *tel que* : $M \cap B(V) - V^+) \subset a(B(M) - M^+)$.

Autrement dit, (M,V ; W) *possède la P.E.U. si et seulement si le couple* (M,V) *possède la P.E.U. au sens de FAKHOURY.*

DEMONSTRATION. - (a)$\Longrightarrow$(b) : Il suffit de démontrer que le couple (M,V) possède la P.E.U. [5]. Soit $f \in M'^+$; l'opérateur $T : x \mapsto f(x).e$, $(x \in M)$, est positif et continu de M dans W ; il existe alors $1 \leqslant a < \infty$ tel que tout opérateur $\tilde{T}$ positif, continu, qui prolonge T à V est tel que :

$$||\tilde{T}|| \leqslant a||T||.$$

Soit $\tilde{T}$ un tel prolongement.

Puisque W^+ est saillant et fermé, le théorème de séparation de Hahn-Banach assure l'existence d'une forme linéaire positive continue g sur W tel que $g(e) = 1$ et $||g|| = 1$ puisque $||e|| = 1$. Alors l'application $\tilde{f} : x \mapsto g(\tilde{T}(x))$, $(x \in V)$, est une forme linéaire positive continue qui prolonge f à V, et l'on a :

$$||\tilde{f}|| = \text{Sup}\ \{|g(\tilde{T}(x))|\ ;\ ||x|| \leqslant 1\} \leqslant ||g||\,||\tilde{T}||,$$

d'où : $||\tilde{f}|| \leqslant ||\tilde{T}|| \leqslant a||T||$; mais $||T|| = ||f||$, donc $||\tilde{f}|| \leqslant a||f||$ et le couple (M,V) possède alors la P.E.U., ce qui suffit.

(b) $\Longrightarrow$ (a) : Il suffit de démontrer, d'après le corollaire (3.5), que tout opérateur T de M dans W est majoré par $a||T||.e$ sur le convexe $M \cap (B(V)-V^+)$. Soit donc x dans $M \cap (B(V)-V^+)$; il existe alors y dans B(M) tel que $x \leqslant ay$ par hypothèse. D'où :

$$T(x) \leqslant a||T(y)|| \leqslant a||T(y)||.e\ ;$$

W étant muni de la norme canonique associée à l'unité d'ordre e. Et comme $y \in B(M)$, il vient que $T(x) \leqslant a||T||.e$ et le corollaire (3.5) implique l'existence d'un prolongement linéaire positif $\tilde{T}$ qui vérifie $||\tilde{T}|| \leqslant a||T||$.

4. EXTENSIONS UNIFORMES DES OPERATEURS COMPACTS POSITIFS ENTRE ESPACES DE BANACH ORDONNES.

Dans cette partie, on va étudier des propriétés portant sur un couple d'espaces de Banach ordonnés $V \supset M$, (resp. sur W), pour qu'il existe $1 \leqslant a < \infty$ tel que tout opérateur compact positif T de M dans W se prolonge en un opérateur compact positif $\tilde{T}$ de V dans W vérifiant $||\tilde{T}|| \leqslant a||T||$. On rappelle que T est compact si et seulement si $T[B(M)]$ est relativement compacte dans W.

Il est à remarquer que s'il existe une projection linéaire positive P de V sur M telle que $||P|| \leq a$. alors tout opérateur compact positif T de M dans W se prolonge en un opérateur compact positif $\tilde{T}$ de V dans W avec $||\tilde{T}|| \leq a||T||$; il suffit de poser $\tilde{T} = T \circ P$.

Un premier résultat est le suivant :

(4.1) PROPOSITION. - *Soient* V *un espace de Banach ordonné, positivement engendré,* M *un sous-espace complètement réticulé pour son ordre propre et qui est cofinal dans* V, *et* W *un espace de Banach ordonné. Alors tout opérateur compact positif* T *de* M *dans* W *se prolonge en un opérateur compact positif* $\tilde{T}$ *de* V *dans* W *tel que* $||\tilde{T}|| \leq a||T||$.

DEMONSTRATION. - Le corollaire (3.4) implique que l'identité I_M sur M se prolonge en un opérateur $\tilde{I}_M$ positif de V dans M, et la proposition (2.1) assure la continuité de $\tilde{I}_M$. Alors $\tilde{T} = T \circ \tilde{I}_M$.

(4.2) PROPOSITION. - *S'il existe un opérateur positif continu* $\tilde{j}_M$ *de* V *dans* M'' *qui prolonge l'injection canonique* $j_M : M \to M''$ *et tel que* $||\tilde{j}_M|| \leq a$, *alors tout opérateur compact positif* T *de* M *dans* W *se prolonge en un opérateur compact positif* $\tilde{T}$ *de* V *dans* W *tel que* $||\tilde{T}|| \leq a||T||$.

DEMONSTRATION. - Puisque $T : M \to W$ est compact, son bitransposé T^{**} est compact de M'' dans W, et l'on a alors $\tilde{T} = T^{**} \circ \tilde{j}_M$.

(4.3) COROLLAIRE. - *Les espaces* (M,V ; W) *vérifient l'extension uniforme des opérateurs compacts dès que les espaces* (M,V ; M'') *possède la P.E.U.*

(4.4) THEOREME. - *Soit* M *un espace simplicial* [6] *tel que le couple* (M,V) *possède la P.E.U. avec le coefficient* a. *Alors tout opérateur compact positif* T *de* M *dans* W *se prolonge en un opérateur compact positif* $\tilde{T}$ *de* V *dans* W *vérifiant* $||\tilde{T}|| \leqslant a||T||$.

DEMONSTRATION. - D'après le théorème de KAKUTANI ([6], 3.10), M' est alors un L-espace [6] , et par suite M'' est un M-espace [6] avec unité qui est compl§tement réticulé. Alors (M,V) possède la P.E.U. si et seulement si (M,V ; M'') possède la P.E.U. (Théorème 3.6) et on applique ce qui précède.

(4.5) THEOREME. - *Soient* M *un espace simplicial, et* V *un espace de Banach ordonné contenant* M. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) Le couple (M,V) *possède la P.E.U. avec le coefficient* a.

(b) Tout opérateur compact positif T *de* M *dans* $\ell^1(\mathbb{N})$ *se prolonge en un opérateur compact positif* $\tilde{T}$ *de* V *dans* $\ell^1(\mathbb{N})$ *tel que* $||\tilde{T}|| \leqslant a||T||$.

(c) Tout opérateur compact positif T *de* M *dans* $\ell^1(\mathbb{N})$ *se prolonge en un opérateur continu positif* $\tilde{T}$ *de* V *dans* $\ell^1(\mathbb{N})$ *tel que* $||\tilde{T}|| \leqslant a||T||$

DEMONSTRATION. - (a)$\Longrightarrow$(b) : Puisque M est simplicial, on applique le théorème (4.4).

(b)$\Longrightarrow$(c) : Triviale.

(c)$\Longrightarrow$(a) : Si le couple (M,V) ne possède pas la P.E.U., il existerait une suite (f_n) dans M'^+ telle que $||f_n|| \leqslant \frac{1}{2^n}$, alors que toute suite de V'^+ qui relève (f_n) est non bornée. Soit $T : M \to \ell^1$ l'opérateur défini par $T(x) = \sum_n f_n(x)e_n$ où (e_n) est le vecteur unité de base de ℓ^1. Alors en posant

$$T_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)e_i \text{ , on peut écrire :}$$

$$T(x) = \underset{n \to \infty}{\text{limite}} \; T_n(x) \text{ pour tout } x \text{ dans } M.$$

Pour tout $||x|| \leqslant 1$, on a :

$$||(T-T_n)(x)|| = ||\sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(x)e_i|| \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} ||f_i|| \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}.$$

Donc $||T-T_n|| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, et T est alors limite uniforme d'opérateurs T_n de rang fini, et par suite T est compact. Soit $\tilde{T}$ un prolongement linéaire positif continu de T à V tel que $||\tilde{T}|| \leqslant a||T||$. Soit δ_n l'application de ℓ^1 dans $\mathbb{R}$ définies par $\delta_n((\alpha_n)) = \alpha_n$ pour toute suite $(\alpha_n)_n \in \ell^1$. Alors $(\tilde{f}_n)_n = (\delta_n \circ \tilde{T})_n$ est une suite de V'^+ qui relève la suite (f_n) et qui est bornée, ce qui n'est pas.

(4.6) DEFINITIONS. - *On dira qu'une série* (x_n) *dans un espace de Banach* V *converge si la suite* $(\sum_{i=1}^{n} x_i)$ *des sommes partielles converge. Une Série* (x_n) *est inconditionnellement convergente (ou commutativement convergente) si pour tout suite positive bornée* (a_n) *dans* ℓ^∞, *la série* $(a_n x_n)$ *converge.*

Une série (f_n) *dans* V' *est faiblement inconditionnellement convergente pour* $\sigma(V',V)$ *si* $\Sigma|f_n(x)| < \infty$ *pour tout* x *dans* V.

On a alors le lemme suivant :

(4.7) LEMME. - *Un opérateur* T *de* V *dans* $\ell^1(N)$ *est compact positif si et seulement s'il existe une suite* (λ_n) *positive dans* $C_0(N)$ *et une série* (f_n) *dans* V'^+ *normiquement inconditionnellement convergente telles que pour tout* x *dans* V *on ait :* $T(x) = \sum_n \lambda_n f_n(x) e_n$, *où* (e_n) *est le vecteur unité de base de* ℓ^1.

DEMONSTRATION. - Soit $T : V \to \ell^1$ un opérateur compact positif. Son transposé $T' : \ell^\infty \to V'$ est aussi compact positif et sa restriction à C_0 est compacte positive. D'après la proposition 2 de [14] il existe une suite $\lambda = (\lambda_n)$ dans C_0 et une série (f_n) dans V' normiquement inconditionnellement convergente telles que pour toute $\mu = (\mu_n)$ dans C_0 on ait : $T'(\mu) = \sum_n \lambda_n \mu_n f_n$, et pour tout x dans V on ait :

$$\mu(T(x)) = T'(\mu)(x)$$

$$= \sum_n \lambda_n \mu_n f_n(x)$$

$$= \mu(\sum_n \lambda_n f_n(x) e_n).$$

D'où : $T(x) = \sum_n \lambda_n f_n(x) e_n$.

D'autre part, l'opérateur T est positif si et seulement si pour tout x dans V^+, toutes les coordonnées $\lambda_n f_n(x)$ de la série $\{\lambda_n f_n(x)\}_n$ sont positives. Si $\lambda_n \geqslant 0$, alors $f_n(x) \geqslant 0$ pour tout x dans V^+, donc $f_n \in V'^+$. Si $\lambda_n < 0$, alors $f_n(x)$ 0 pour tout x dans V^+ et l'on prend alors $\lambda'_n = -\lambda_n$ et $f'_n = -f_n$, ce qui achève la démonstration.

Réciproquement, si sous les hypothèses précédentes T se représente sous la forme $T(x) = \sum_n \lambda_n f_n(x) e_n$ pour otout x dans V, alors il est clair que T est positif. Démontrons qu'il est compact. Soient $P : V \to \ell^1$ défini par $P(x) = \{f_n(x)\}_n$ et $Q : \ell^1 \to \ell^1$ défini par $Q[(\alpha_n)] = \sum_n \lambda_n {}_n e_n$. Alors $T = Q \circ P$ et $P(x) = \lim_{n \to \infty} P_n(x)$ pour tout x dans V avec $p_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$.
Donc P est continu (théorème de Banach-Steinhauss). D'autre part, pour toute suite $\alpha = (\alpha_n)$ dans ℓ^1 on a $Q(\alpha) = \lim_{n \to \infty} Q_n(\alpha)$ avec $Q_n(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i e_i$.
Donc Q est continu, et pour tout $||\alpha|| \leqslant 1$, $||(Q-Q_n)(\alpha)|| \leqslant \sup_{k \geqslant n+1} \lambda_k$ qui converge alors vers 0 quand $n \to \infty$. Donc Q est limite uniforme d'opérateurs de rang fini, il est donc compact, et par suite $T = Q \circ O$ est compact.

Ce lemme nous permet alors d'établir le théorème suivant :

(4.8) THEOREME. - *Soit* M *un sous-espace fermé 1-approximativement filtrant (1.8.d) d'un espace de Banach ordonné* V. *Si le couple* (M,V) *possède la P.E.U., alors tout opérateur compact positif* T *de* M *dans* ℓ^1 *se prolonge en un opérateur compact positif* $\tilde{T}$ *de* V *dans* ℓ^1.

DEMONSTRATION. - Soit $T : M \to \ell^1$ un opérateur compact positif. D'après le lemme précédent, on a pour tout x dans M

$$T(x) = \sum_n \lambda_n f_n(x) e_n.$$

La série (f_n) se relève alors en une série $(\tilde{f}_n)$ dans V'^+ telle que $||\tilde{f}_n|| \leqslant a||f_n||$ pour tout n.

Pour tout x dans V on pose $\tilde{T}(x) = \sum_n \lambda_n \tilde{f}_n(x) e_n$. Alors l'opérateur $\tilde{T} : V \to \ell^1$ est positif et prolonge T à V. Pour démontrer que $\tilde{T}$ est compact il suffit de démontrer que la série $(\tilde{f}_n)$ est normiquement inconditionnellement convergente.

Comme M est 1-approximativement filtrant, la norme duale est alors additive sur le cône positif M'^+ [6 ; 2.13] , et l'on a pour toute suite positive (a_{n_q}) dans ℓ^∞:

$$\left|\left| \sum_p^q a_n \tilde{f}_n \right|\right| < a \sum_p^q ||a_n f_n|| = a \left|\left| \sum_p^q a_n f_n \right|\right|$$

et comme (f_n) est inconditionnellement convergente, il en est de même de $(\tilde{f}_n)$ qui converge alors par sous-séries.

(4.9) COROLLAIRE. - *Soit* M *un sous-espace fermé 1-approximativement filtrant d'un espace de Banach 1-normal* V. *Alors tout opérateur compact positif de* M *dans* ℓ^1 *se prolonge en un opérateur compact positif de* V *dans* ℓ^1.

DEMONSTRATION. - D'après la proposition 4.13 de [6], le couple (M,V) possède alors la P.E.U. avec le coefficient 1.

(4.10) COROLLAIRE. - *Si toute série* (f_n) *inconditionnellement convergente dans* M'^+ *se relève en une série* $(\tilde{f}_n)$ *inconditionnellement convergente dans* V'^+, *alors tout opérateur compact positif* T *de* M *dans* ℓ^1 *se prolonge en un opérateur compact positif* $\tilde{T}$ *de* V *dans* ℓ^1.

Connaissant maintenant l'extension uniforme des opérateurs compacts positifs de M dans $C_0(N)$, [5] , [resp. dans $\ell^1(N)$, (4.8)] à l'espace entier V, on peut alors étudier l'extension uniforme des opérateurs compacts positifs de M dans un espace de Banach ordonné W en utilisant une factorisation compacte de l'opérateur $T : M \to W$ à travers l'espace C_0 (resp. ℓ^1), c'est-à-dire l'existence de deux opérateurs compacts positifs $T : M \to C_0$ (resp. ℓ^1) et $Q : C_0$ (resp. ℓ^1) $\to W$ tels que $T = Q_\circ P$.

(4.11) THEOREME. - *Soient* V *et* W *deux espaces de Banach ordonnés, et* M *un sous-espace fermé de* V. *Si le couple* (M,V) *possède la P.E.U., alors tout opérateur compact de* M *dans* W *de la forme* $T(x) = \sum_n \lambda_n f_n(x) y_n$, *où* (λ_n) *est une suite positive de* $C_\circ$, (f_n) *une suite équicontinue de* M'^{+}, *et* (y_n) *une suite inconditionnellement sommable de* W^{+}, *se prolonge en un opérateur compact positif* $\tilde{T}$ *de* V *dans* W.

D MONSTRATION. - L'opérateur $P : M \to C_\circ$ défini par $P(x) = \{\lambda_n f_n(x)\}$ est compact ([8], 2,3, p. 85) positif, et l'opérateur $Q : C_\circ \to W$ défini par $Q(\mu) = \sum_n \mu_n y_n$ est positif continu et $T = Q \circ P$.

Puisque (M,V) possède la P.E.U. (avec le coefficient a), le théorème 2.7 de [5] assure l'existence d'un opérateur compact positif P de V dans $C_\circ$ qui prolonge P à V et tel que $||\tilde{P}|| \leq a||P||$. Alors $\tilde{T} = Q \circ \tilde{P}$ est une extension compacte positive de T.

(4.12) THEOREME. - *Soit* M *un sous-espace fermé d'un espace de Banach ordonné* V. *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) Le couple (M,V) *possède la P.E.U.*

(b) Tout opérateur compact positif T *de* M *dans* ℓ^1 *se prolonge en un opérateur compact positif* $\tilde{T}$ *de* V *dans* ℓ^1.

DEMONSTRATION. - (a) $\Longrightarrow$ (b) : c'est une conséquence de 4.7 et 4.11.

Pour (b) $\Longrightarrow$ (a) on reprend la démonstration du (c) $\Longrightarrow$ (a) du théorème (4.5).

(4.13) LEMME. - *Soit* T *un opérateur compact de* M *dans* $L^1(\mu)$. *Il existe une suite* (λ_n) *dans* C_0, *une suite* (f_n) *inconditionnellement convergente dans* M', *et une suite* (h_n) *bornée dans* $L^1(\mu)$ *telles que pour tout* x *dans* M *on ait* : $T(x) = \sum_n \lambda_n f_n(x) h_n$.

DEMONSTRATION. - La démonstration est due en partie à W.B. JOHNSON. Il suffit de la vérifier pour un opérateur de rang fini n puisque T est limite uniforme d'opérateurs de rang fini. Soit ϕ un isomorphisme de T(M) dans l'espace $\mathrm{Lin}(e_i)_{i=1}^n$ engendré par les n premiers vecteurs $(e_i)_{i=1}^n$ de la base usuelle de ℓ^1. Soit P la projection naturelle de ℓ^1 sur $\mathrm{lin}(e_i)_{i=1}^n$. Alors $T = S \circ R$ avec $R = \phi \circ T$ et $S = \phi^{-1} \circ P$. D'après le lemme (4.7) il existe une suite (λ_n) dans C_0, et une série (f_n) inconditionnellement convergente dans M' telles que pour tout x dans M on ait : $R(x) = \sum_n \lambda_n f_n(x) e_n$. Alors $T(x) = \sum_n \lambda_n f_n(x) S(e_n)$; on pose $h_n = S(e_n)$.

(4.14) THEOREME. - *Si le couple* (M,V) *possède la P.E.U., alors tout opérateur compact positif* T *de* M *dans* $L^1(\mu)$, *tel que* $\lambda_n \geqslant 0$, $f_n \geqslant 0$, *et* $h_n \geqslant 0$ *pour tout* n *(du lemme précédent), se prolonge* *en un opérateur compact positif de* V *dans* $L^1(\mu)$ *avec la même représentation.*

DEMONSTRATION. - L'opérateur R : $X \mapsto \sum_n \sqrt{\lambda_n} f_n(x) e_n$ est alors compact positif de M dans ℓ^1. D'après le théorème (4.12), l'opérateur R se prolonge en un opérateur compact positif R de V dans ℓ^1. Si S est l'opérateur de ℓ^1 dans $L^1(\mu)$ défini par $S[(\alpha_n)] = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \alpha_n h_n$, alors S est compact positif et l'opérateur $\tilde{T} = S \circ \tilde{R}$ est une extension positive de T à V. D'autre part, on peut écrire : $\tilde{R}(x) = \sum_n \mu_n g_n(x) e_n$ (lemme 4.7), et par suite $\tilde{T}(x) = \sum_n \mu_n g_n(x) S(e_n)$.

Pour un espace de Banach ordonné W on a le lemme suivant :

(4.15) LEMME. - *Soit* T *un opérateur positif entre deux espaces de Banach ordonnés* M *et* W, T : M → W. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) Il existe une suite positive (λ_n) *dans* $C_\circ$, *une série* (f_n) *inconditionnellement convergente dans* M'^+ , *et une suite* (y_n) *bornée de* W^+, *tels que pour tout* x *dans* M *on ait :* $T(x) = \sum_n \lambda_n f_n(x) y_n$.

(b) Comme dans (a) mais (f_n) *est faiblement inconditionnellement convergente.*

(c) Il existe deux opérateurs compacts positifs $R : M \to \ell^1$ *et* $S : \ell^1 \to W$ *tels que* $T = S \circ R$.

(d) La même chose que dans (c) mais S *est seulement continu.*

DEMONSTRATION. - (a) $\Longrightarrow$ (b) : Triviale.

(b) $\Longrightarrow$ (c) : Les opérateurs $R : M \to \ell^1$ et $S : \ell^1 \to W$ définis par $R(x) = \{\sqrt{\lambda_n} f_n(x)$ et $S(\alpha) = \Sigma \sqrt{\lambda_n} \alpha_n y_n$ sont compacts positifs et $T = S \circ R$.

(c) $\Longrightarrow$ (d) : Il n'y a rien à démontrer.

(c) $\Longrightarrow$ (a) : L'opérateur $R : M \longrightarrow \ell^1$ étant compact positif, il s'écrit alors $R(x) = \Sigma\, \lambda_n f_n(x) e_n$ (lemme 4.7), et $T(x) = \sum\limits_n \lambda_n f_n(x) S(e_n)$; on pose $y_n = S(e_n)$.

(4.16) THEOREME. - *Si le couple* (M,V) *possède la P.E.U., alors tout opérateur compact positif* T *de* M *dans* W, *qui a une représentation de la forme* $T(x) = \Sigma \lambda_n f_n(x) y_n$ *du lemme précédent, avec* $\lambda_n \geqslant 0$, $f_n \geqslant 0$, *et* $y_n \geqslant 0$, *se prolonge en un opérateur compact positif* $\tilde{T}$ *de* V *dans* W *et de la même forme.*

DEMONSTRATION. - On procède comme dans le théorème (4.14).

BIBLIOGRAPHIE. -

[1] ANDO T., On fundamental properties of a Banach space with a cone, *Pacific J. Math.*, 12 (1962), p. 1163-1169.

[2] CHOQUET G., Lectures on Analysis, volume II.

[3] DAY M.M., Normed linear spaces , Springer, Berlin (1968) (2ème ed. 1962).

[4] DUNFORD N. and SCHWARTZ J.T. Linear operators I, General theory, *(Intersciences)*, New-York, 1958.

[5] FAKHOURY H., Extensions uniformes des formes linéaires positives, *Ann. Inst. Fourier*, 23, 1 (1973), p. 75-94.

[6] FAKHOURY H., Espaces de Banach ordonnés, Ecole d'été d'Analyse fonctionnelle (20 août - 8 septembre 1973), organisée sous le patronage du C.N.R.S. Libanais - Université Libanaise, Faculté des Sciences, HADATH-BEYROUTH.

[7] FREMLIN D.H. , A characterization of L-spaces, *Indagationes Mathematicae*, 36, Fasc. 3 (1974) p. 270-275.

[8] GOLDBERG S., Unbounded linear operators : theory and applications, *Mc Graw-Hill*, New-York, 1966, MR 34 # 580.

[9] GOULET DE RUGY A., Un théorème du genre "Ando-Edwards" pour les Fréchet normaux, *Pacific J. Math.*, 46, 1, 1973, p. 155-166.

[10] KOTHE G., Topologische lineare raume, Berlin, Springer, 1960.

[11] LAZAR A.J., Spaces of affine continuous functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 134, (1968), p. 503-525.

[12] MICHAEL E., Continuous Selections I, *Ann. of Math.*, 63 (1956), p. 361-382.

[13] NAMIOKA L., Partially ordered linear topological spaces, *Mem. Amer. Math. Soc.* 24, 1957.

[14] RANDTKE D.J., Representation theorems for compact operators, *Proc. A.M.S.*, 37, p. 481-485 (1973).

[15] SCHAEFER H., Topological vector spaces, Macmillan series in advanced mathematics and theoretical physics (1966).

[16] TERZIOGLU T., A characterization of compact linear mappings, *Arch. Math.* , 22 (1971), p. 76-78.

[17] TERZIOGLU T., On compact and infinite-nuclear mappings, *Bull. Math. Soc. Sc. Math. R.S. Roumanie*, 14 (62), (1970), p. 93-99.

[18] WICKSTEAD A.W., Compact Subsets of partially ordered Banach spaces, *Math. Ann.*, 212 (1975), p. 271-284.

S. ALAME
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE