M. Mizony

Algèbres et noyaux de convolution sur le dual sphérique d'un groupe de Lie semi-simple, non compact et de rang 1

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1976, tome 13, fascicule 1
, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1976__13_1_1_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1976 t.13-1

ALGEBRES ET NOYAUX DE CONVOLUTION SUR LE DUAL SPHERIQUE D'UN GROUPE DE LIE SEMI-SIMPLE, NON COMPACT ET DE RANG 1.

par M. MIZONY

INTRODUCTION. - Dans un article précédent [7], nous avons vu que la transformation de Fourier sphérique, définie pour un couple de Gelfand (G,K), permet de munir d'une structure d'algèbre de convolution, d'une part l'espace $M^1(Z)$ des mesures bornées sur le dual sphérique $Z=Z(G,K)$ et, d'autre part, l'espace $L^1(Z,\mu)$ des fonctions intégrables dans Z pour la mesure de Plancherel μ.

Nous allons expliciter ce produit de convolution dans le cas où G est un groupe de Lie semi-simple, non compact et de rang 1 ayant pour décomposition d'Iwasava KAN. Pour cela, nous montrons que ce produit de convolution est défini par un noyau dont on calculera une expression lorsque G est $\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$ ou $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$. Nous terminerons en formulant une question à propos d'un "laplacien" sur Z.

1. NOTATIONS ET RAPPELS. Soit G un groupe de Lie semi-simple, connexe, non compact, de centre fini et de rang 1. On note $G = K A_+ K$ une *décomposition de Cartan* de G. Le sous-groupe compact K est maximal. On identifie $\mathbb{R}_+$ à A_+ au moyen d'une exponentielle. Pour une telle décomposition, une mesure de Haar sur G peut s'écrire $dg = dk\, \omega_{p,q}(x) dx dk'$, ou dk est la mesure de Haar normalisée de K et ou $\omega_{p,q}(x) = 2^{2\rho}(\mathrm{sh} x)^p (\mathrm{sh} 2x)^q$ avec $2\rho = p+2q$ (cf. [8] § 8.1.3).

Soit $\Delta_{p,q}$ la partie radiale de l'opérateur de Laplace-Beltrami défini sur G/K ; comme opérateur sur $\mathbb{R}_+$, on peut écrire

$$\Delta_{p,q} = \frac{1}{\omega_{p,q}(x)} \frac{d}{dx} \left(\omega_{p,q}(x) \frac{d}{dx}\right)$$
$$= \frac{d^2}{dx^2} + (p\coth x + 2q\coth 2x) \frac{d}{dx} \quad .$$

Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, soit $\phi_{p,q}(r,x)$ la solution de $\Delta_{p,q} f = -(r^2+\rho^2) f$ telle que $f(o) = 1$ et que f soit paire .
Alors $\phi_{p,q}(r,x) = {}_2F_1\left(\frac{\rho+ir}{2}, \frac{\rho-ir}{2}; \frac{p+q+1}{2}; -\mathrm{sh}^2 x\right)$, où ${}_2F_1(a,b;c;z)$ désigne la fonction hypergéométrique [4] . D'autre part, si $Z_{p,q}$ désigne l'ensemble des fonctions sphériques zonales de type positif qui sont associées à la première série principale des représentations de G, on a

$$Z_{p,q} = \{x \mapsto \phi_{p,q}(r,x) \mid r \in \mathbb{R}_+\}.$$

L'algèbre commutative $L^1(G)^{\natural}$ (formée des fonctions intégrables sur G et bi-invariantes par K) s'identifie à l'algèbre $L^1(\mathbb{R}_+,\omega_{p,q}(x)dx)$. Dans $L^1(\mathbb{R}_+,\omega_{p,q}(x)dx)$, le produit de convolution est donné par un noyau symétrique $K_{p,q}(x,y,z)$ qui exprime la formule d'addition des fonctions sphériques $\phi_{p,q}(r,.)$: $\phi_{p,q}(r,x)\phi_{p,q}(r,y) = \int_0^\infty K_{p,q}(x,y,z)\phi_{p,q}(r,z)\omega_{p,q}(z)dz$ (un calcul explicite de ce noyau se trouve dans [5]).

Dans toute la suite, nous omettrons l'indique p,q s'il n'en résulte aucune ambiguité.

Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}_+,\omega(x)dx)$, soit $\hat{f}$ sa transformée de Fourier sur Z, définie par $\hat{f}(\phi(r,.)) = \int_0^{+\infty} f(x)\phi(r,x)\omega(x)dx$; on notera $\hat{f}(\phi(r,.)) = \hat{f}(r)$, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$.

Sur Z, identifié à $\mathbb{R}_+$, nous avons une mesure de Plancherel μ telle que la transformation de Fourier se prolonge en un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R}_+,\omega(x)dx)$ sur $L^2(\mathbb{R}_+,d\mu(r))$. Cette mesure de Plancherel est définie par $d\mu(r) = \frac{1}{2\pi}|c(r)|^{-2}dr$, où $c(r) = c_{p,q}(r)$ est la fonction de Harish-Chandra

$$r \to c(r) = \frac{2^{\rho-ir}\Gamma(ir)\Gamma(\frac{p+q+1}{2})}{\Gamma(\frac{\rho+ir}{2})\Gamma(\frac{p}{4}+\frac{1}{2}+\frac{ir}{2})}$$

. On a alors la formule d'inversion, valable pour tout $f \in L^1(R_+,\omega(x)dx) \cap [L^2(R_+,\omega(x)dx)]^{*2}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \hat{f}(r)\ \phi(r,x)|c(r)|^{-2}dr.$$

2. L'ALGÈBRE DE CONVOLUTION $L^1(\mathbb{R}_+, |c(r)|^{-2}dr)$.

On sait ([7], 1.3) que $L^1(\mathbb{R}_+,|c(r)|^{-2}dr)$ est une algèbre de convolution isomorphe par la transformation inverse de Fourier à l'algèbre (pour le produit ordinaire des fonctions) des fonctions continues : $L^2(\mathbb{R}_+, \omega(x)dx) * L^2(\mathbb{R}_+,\omega(x)dx)$. Et ce produit est ainsi défini : pour $f,g \in L^1(\mathbb{R}_+,|c(r)|^{-2}dr)$, on a

$$f * g(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \delta_r * \delta_s(f)g(s)|c(s)|^{-2}ds, \text{ où } \delta_r * \delta_s$$

est la mesure bornée sur $\mathbb{R}_+$, transformée de Fourier de $\phi(r,.)\ \phi(s,.)$.

PROPOSITION. - *Pour tous nombres réels positifs* r *et* s, *la mesure* $\delta_r * \delta_s$ *est définie par une fonction intégrable pour la mesure de Plancherel, la fonction* $t \mapsto a(r,s,t)(= a_{p,q}(r,s,t))$, *où*

$$a(r,s,t) = \int_0^\infty \phi(r,x)\phi(s,x)\phi(t,x)\ \omega(x)dx, \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}_+.$$

Pour montrer que $\delta_r * \delta_s$ est défini par une fonction, il suffit de montrer que $x \mapsto \phi(r,x)\phi(s,x)$ est un élément de $[L^2(\mathbb{R}_+,\omega(x)dx)]^{*2}$; mais comme elle est de type positif, cela revient à montrer que $x \mapsto \phi(r,x)\phi(s,x)$ est de carré intégrable pour la mesure $\omega(x)dx$.

Or, quand x est grand, $|\phi(r,x)|$ est équivalent à $(\mathrm{sh}^2x)^{-\frac{\rho}{2}}$ d'après [9] (§2,3,2, (9)) et $|\omega(x)|$ est équivalent à $(\mathrm{sh}x)^{2\rho}$; ainsi $x \mapsto \phi(r,x)\phi(s,x)$ est de carré intégrable pour $\omega(x)dx$. Donc la mesure $\delta_r * \delta_s$ est définie par une fonction de $L^1(\mathbb{R}_+,|c(r)|^{-2}dr)$, soit $t \mapsto a(r,s,t)$.

D'autre part, comme $x \mapsto \phi(r,x)\phi(s,x)\phi(t,x)$ est intégrable pour la mesure $\omega(x)dx$, on a donc le résultat voulu.

REMARQUE. - Ce noyau $a(r,s,t)$ exprime simplement la décomposition du produit tensoriel de deux représentations irréductibles de la première série principale d'un tel groupe de Lie en intégrale de représentations de cette série principale. Plus précisément, il exprime une formule d'addition des fonctions sphériques zonales, considérées comme fonctions du paramètre , i.e, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{R}_+$, $s \in \mathbb{R}_+$,

$$\phi(r,x)\phi(s,x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty a(r,s,t)\phi(t,x)|c(t)|^{-2} dt.$$

3. CALCUL DU NOYAU $a(r,s,t)$ POUR LE GROUPE $G = SL(2,\mathbb{R})$.

Pour le groupe hyperbolique, nous avons $p=1$, $q=o$, donc $\rho = \frac{1}{2}$, $\omega(x) = 2\operatorname{sh}x$ et $\phi(r,x) = {}_2F_1(\frac{1}{4}+\frac{ir}{2}, \frac{1}{4}-\frac{ir}{2}; 1; -\operatorname{sh}^2 x)$, ce qui est une des expressions de la fonction de Legendre $P_{-\frac{1}{2}+ir}(\operatorname{ch}x)$ (cf. [9], p.127, formule (20)).

Enfin, on a $|c(r)|^{-2} = \pi r \operatorname{th} \pi r$.

PROPOSITION. - *Pour* $r,s,t \in \mathbb{R}_+$, *on a*

$$a(r,s,t) = \frac{8}{\pi^5} \operatorname{ch}\pi r \operatorname{ch}\pi s \operatorname{ch}\pi t \left|\Gamma(\tfrac{1}{4}+\tfrac{i}{2}(r+s+t))\right|^2 \left|\Gamma(\tfrac{1}{4}+\tfrac{i}{2}(-r+s+t))\right|^2 \times$$
$$\times \left|\Gamma(\tfrac{1}{4}+\tfrac{i}{2}(r-s+t))\right|^2 \left|\Gamma(\tfrac{1}{4}+\tfrac{i}{2}(r+s-t))\right|^2 .$$

Pour calculer $a(r,s,t)$, nous allons procéder suivant la méthode exposée par Ferreti et Verde [3], en décomposant $\phi(r,.)\phi(s,.)$ en intégrale sur $\mathbb{R}_+$ suivant $\phi(t,.)$.

Soit r et $s \in \mathbb{R}_+$, $r \neq s$, on a

$$\phi(r,x) = {}_2F_1(\tfrac{1}{2} + ir, \tfrac{1}{2} - ir ; 1 ; \tfrac{1-\mathrm{ch}x}{2})$$

$$= \frac{\Gamma(-2ir)}{\Gamma^2(\frac{1}{2} - ir)} \left(\frac{\mathrm{ch}x-1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-ir} {}_2F_1(\tfrac{1}{2} + ir, \tfrac{1}{2} + ir; 1+2ir; \tfrac{2}{1-\mathrm{ch}x})$$
$$+ \frac{\Gamma(2ir)}{\Gamma^2(\frac{1}{2}+ir)} \left(\frac{\mathrm{ch}x-1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+ir} {}_2F_1(\tfrac{1}{2} + ir, \tfrac{1}{2} - ir ; 1-2ir ; \tfrac{2}{1-\mathrm{ch}x}) .$$

En posant $a_r(z) = \dfrac{\Gamma(-2ir)}{\Gamma^2(\frac{1}{2} - ir)} \left(\dfrac{2}{z-1}\right)^{1/2+ir} {}_2F_1(\tfrac{1}{2} + ir , \tfrac{1}{2} + ir ; 1+2ir ; \tfrac{2}{1-z})$,

nous avons $\phi(r,x) = a_r(\mathrm{ch}x) + a_{-r}(\mathrm{ch}x)$.

D'après la formule de Burnchnall et Chaundy ([1]), on a

$$a_r(z)a_s(z) = \frac{\Gamma(-2ir)\Gamma(-2is)}{\Gamma^2(\frac{1}{2}- ir)\Gamma^2(\frac{1}{2}-is)} \left(\frac{2}{z-1}\right)^{1+i(r+s)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\dfrac{\Gamma^2(\frac{1}{2}+ir+n)\,\Gamma(1+2is+n)}{\Gamma^2(\frac{1}{2}+ir)\,\Gamma(1+2is)}}{n!\, \dfrac{\Gamma(1+2ir+n)\Gamma(1+2i(r+s)+2n)}{\Gamma(1+2ir)\Gamma(1+2i(r+s)+n)}}$$

$$\times \left[{}_3F_2\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+is,-2ir-n,-n \\ 1+2is,\frac{1}{2}-ir-n \end{pmatrix}\right]^{-2} \left(\frac{2}{1-z}\right)^n {}_2F_1(1+i(r+s)+n, 1+i(r+s)+n ; 2(1+i(r+s)+n); \tfrac{2}{1-z}) .$$

Or , d'après le théorème de Watson ([6], 4, 1,14), on a

$${}_3F_2\begin{pmatrix}\frac{1}{2} + is,-2ir-n,-n \\ 1+2is,\frac{1}{2}-ir-n\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2} - ir-n)\, \Gamma(1+is)\Gamma(1+i(r+s)+n)}{\Gamma(\frac{1}{2} -ir - \frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{n}{2})\Gamma(1+i(r+s) + \frac{n}{2})\Gamma(1+ \frac{n}{2} + is)}$$

Ainsi, si n est impair, on a ${}_3F_2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + is, -2ir-n \\ 1+2is, \frac{1}{2} -ir-n \end{pmatrix} = 0$.

En conséquence, $a_r(z)a_s(z) = \pi \dfrac{\Gamma(-2ir)\Gamma(-2is)\Gamma(1+2ir)\Gamma^2(1+is)}{\Gamma^2(\frac{1}{2} -ir)\Gamma^2(\frac{1}{2} -is)\Gamma^2(\frac{1}{2} +ir)\Gamma(1+2is)} \left(\frac{2}{z-1}\right)^{1+i(r+s)} \times$

$$\times \sum_{n=o}^{\infty} \frac{\Gamma^2(\frac{1}{2} +ir+2n)\Gamma(1+2is+2n)\Gamma(1+2i(r+s)+2n)\Gamma^2(\frac{1}{2} -ir-2n)\Gamma^2(1+i(r+s)+2n)}{(2n)!\Gamma^2(\frac{1}{2} -n)\Gamma(1+2ir+2n)\Gamma(1+2i(r+s)+4n)\Gamma^2(\frac{1}{2} -ir-n)\Gamma^2(1+i(r+s)+n)\Gamma^2(1+is+n)} \times$$

$$\times \left(\frac{2}{1-z}\right)^{2n} {}_2F_1\left(1+i(r+s)+2n, 1+i(r+s)+2n \,;\, 2(1+i(r+s)+2n) \,;\, \frac{2}{1-z}\right).$$

en tenant compte des faits que $\dfrac{\Gamma^2(\frac{1}{2} +ir+2n)\Gamma^2(\frac{1}{2} -ir-2n)}{\Gamma\ (1+2ir+2n)\Gamma^2(\frac{1}{2} -ir-n)} = \dfrac{\sqrt{\pi}\ \Gamma(\frac{1}{2} +ir+n)}{2^{2n+2ir}\Gamma(1+ir+n)}$

et que $\dfrac{\Gamma(1+2is+2n)}{\Gamma^2(1+is+n)} = \dfrac{2^{2is+2n}\Gamma(\frac{1}{2} + is+n)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(1+2is+n)}$, en tenant compte, d'autre part,

que $\dfrac{\Gamma(\ 2ir)\Gamma(1+2ir)}{\Gamma^2(\frac{1}{2} +ir)\Gamma^2(\frac{1}{2} -ir)} = \dfrac{2i}{\pi}\coth\pi r$ et que $\dfrac{\Gamma(-2is)\Gamma^2(1+is)}{\Gamma^2(\frac{1}{2} -is)\Gamma(1+2is)} = 2i\ 2^{-4is}\coth\pi s$,

nous avons : $a_r(z)\ a_s(z) = 4\coth\pi r\coth\pi s\ 2^{-2i(r+s)}\left(\frac{2}{z-1}\right)^{1+i(r+s)} \times$

$$\times \sum_{n=o}^{\infty} \frac{\Gamma^2(1+i(r+s)+2n)\Gamma(1+2i(r+s)+2n)\Gamma(\frac{1}{2} +is+n)\Gamma(\frac{1}{2} +ir+n)}{(2n)!\Gamma^2(\frac{1}{2} -n)\Gamma(1+2i(r+s)+4n)\Gamma^2(1+i(r+s)+n)\Gamma(1+is+n)\Gamma(1+ir+n)} \left(\frac{2}{1-z}\right)^{2n} \times$$

$$\times {}_2F_1\left(1+i(r+s)+2n, 1+i(r+s)+2n \,;\, 2(1+i(r+s)+2n) \,;\, \frac{2}{1-z}\right).$$

En posant, pour $n \in \mathbb{N}$, $it_n = \frac{1}{2} + i(r+s)+2n$, nous obtenons alors :

$$a_r(z)a_s(z) = -4\coth\pi r\ \coth\pi s\ 2^{-2i(r+s)} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{\Gamma^2(\frac{1}{2}+it_n)\Gamma^2(\frac{1}{2}-it_n)}{\Gamma(2it_n)\Gamma(-2it_n)} \times \frac{a_{t_n}(z)}{(2n)!\,\Gamma(\frac{1}{2}-n)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{i}{2}(-r+s+t_n))\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{i}{2}(r-s+t_n))\Gamma(\frac{1}{2}+i(r+s+t_n))}{\Gamma(\frac{3}{4}+\frac{i}{2}(-r+s+t_n))\ \Gamma(\frac{3}{4}+\frac{i}{2}(r-s+t_n))\ \Gamma^2(\frac{3}{4}+\frac{i}{2}(r+s+t_n))},$$

or on a $\dfrac{\Gamma(\frac{1}{2}+i(r+s+t_n))}{\Gamma^2(\frac{3}{4}+\frac{i}{2}(r+s+t_n))} = \dfrac{2^{i(t_n+r+s)}\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{i}{2}(r+s+t_n))}{\sqrt{2\pi}\ \Gamma(\frac{3}{4}+\frac{i}{2}(r+s+t_n))}$ et $\dfrac{\Gamma^2(\frac{1}{2}+it_n)\Gamma^2(\frac{1}{2}-it_n)}{\Gamma(2it_n)\Gamma(-2it_n)} = 4\pi t_n\ \mathrm{th}\pi t_n$.

En écrivant $\dfrac{1}{(2n)!} \times \dfrac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}-n)}$ sous la forme $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\ \dfrac{(-1)^n\ 2^{i(r+s-t_n)}}{\Gamma(\frac{1}{2}-n)\Gamma(n+1)}$ nous obtenons

$$a_r(z)a_s(z) = -8\coth\pi r\ \coth\pi s \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n\ a_{t_n}(z)}{\Gamma(\frac{1}{2}-n)\Gamma(n+1)}\ 2t_n\ \mathrm{th}\pi t_n \times$$

$$\times \frac{\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{i}{2}(-r+s+t_n))\ \Gamma(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}(r-s+t_n))\ \Gamma(\frac{1}{4}+\frac{i}{2}(r+s+t_n))}{\Gamma(\frac{3}{4}+\frac{i}{2}(-r+s+t_n))\ \Gamma(\frac{3}{4}+\frac{i}{2}(r-s+t_n))\ \Gamma(\frac{3}{4}+\frac{i}{2}(r+s+t_n))},$$

comme $\dfrac{\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{i}{2}\alpha)}{\Gamma(\frac{3}{4}+\frac{i}{2}\alpha)} = \dfrac{\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{i}{2}\alpha)\ \Gamma(\frac{1}{4}-\frac{i}{2}\alpha)}{\pi}\ \cos\pi\ (\frac{1}{4}+\frac{i}{2}\alpha)$, nous pouvons écrire

$$a_r(z)\ a_s(z) = \frac{8\ \mathrm{ch}\pi r\ \mathrm{ch}\pi s}{\pi^3} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{2t_n\ \mathrm{ch}\pi t_n\ \mathrm{th}\pi t_n}{\Gamma(\frac{1}{2}-n)\Gamma(n+1)}\ a_{t_n}(z) \times$$

$$\times\Gamma(\tfrac{1}{4}+\tfrac{i}{2}(-r+s+t_n))\,\Gamma(\tfrac{1}{4}-\tfrac{i}{2}(-r+s+t_n))\times\Gamma(\tfrac{1}{4}+\tfrac{i}{2}(r-s+t_n))\,\Gamma(\tfrac{1}{4}-\tfrac{i}{2}(r-s+t_n))\times$$

$$\times\Gamma(\tfrac{1}{4}+\tfrac{i}{2}(r+s+t_n))\,\Gamma(\tfrac{1}{4}-\tfrac{i}{2}(r+s+t_n)).$$

Considérons la fonction réelle à valeurs réelles positives

$$t \mapsto b(r,s,t)_n = \operatorname{ch}\pi r\,\operatorname{ch}\pi s\,\operatorname{ch}\pi t\,|\Gamma(\tfrac{1}{4}+\tfrac{i}{2}(r+s+t))|^2\,|\Gamma(\tfrac{1}{4}+\tfrac{i}{2}(-r+s+t))|^2\times$$

$$\times|\Gamma(\tfrac{1}{4}+\tfrac{i}{2}(r-s+t))|^2\,|\Gamma(\tfrac{1}{4}+\tfrac{i}{2}(r+s-t))|^2.$$

Soit $f(r,s,t)$ considérée comme fonction de la variable complexe t ; elle admet des pôles simples aux points suivants :

$t_n^1 = -(\frac{1}{2}+2n)i+r+s$; $t_n^2 = -(\frac{1}{2}+2n)i+s-r$, $t_n^3 = -(\frac{1}{2}+2n)i+r-s$ et

$t_n^4 = -(\frac{1}{2}+2n)i-r-s$.

Soit $C_n^j = \underset{t_n^j}{\operatorname{Rés}}(b(r,s,t))$ pour $n\in\mathbb{N}$ et $j=1,\dots,4$.

Alors
$$C_n^1 = 2i\,\operatorname{ch}\pi r\,\operatorname{ch}\pi s\,\operatorname{ch}\pi t_n^1\,\Gamma(\tfrac{1}{4}+\tfrac{i}{2}(r+s+t_n^1))\,\Gamma(\tfrac{1}{4}-\tfrac{i}{2}(r+s+t_n^1))\times$$
$$\times\Gamma(\tfrac{1}{4}+\tfrac{i}{2}(-r+s+t_n^1))\Gamma(\tfrac{1}{4}-\tfrac{i}{2}(-r+s+t_n^1))\Gamma(\tfrac{1}{4}+\tfrac{i}{2}(r-s+t_n^1))\Gamma(\tfrac{1}{4}-\tfrac{i}{2}(r-s+t_n^1))\,\frac{(-1)^n\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{\Gamma(n+1)}$$

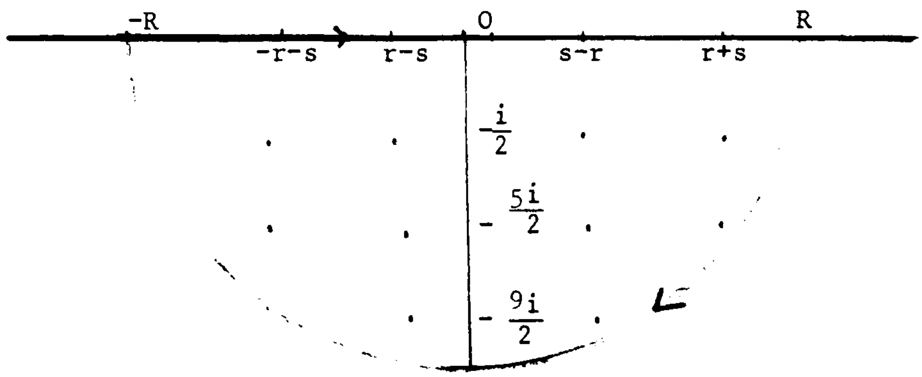
On a d'autres formules analogues pour C_n^2 , C_n^3 et C_n^4 .

Ainsi
$$a_r(z)\,a_s(z) = \frac{8}{\pi^4 i}\sum_{n=o}^{\infty} C_n^1\,t_n^1\,\operatorname{th}\pi t_n^1\,a_{t_n^1}(z)$$
$$= \frac{1}{i}\sum_{n=o}^{\infty}\underset{t_n^1}{\operatorname{Rés}}\left(\frac{8}{\pi^4}\,b(r,s,t)\,t\,\operatorname{th}\pi t\,a_t(z)\right).$$

On a des formules similaires pour $a_r(z)\,a_{-s}(z)$, $a_{-r}(z)\,a_s(z)$ et $a_{-r}(z)\,a_{-s}(z)$.

Soient $x\in\mathbb{R}$ et $z = \operatorname{ch}x$. Lorsque $|t|$ tend vers $+\infty$, avec $\operatorname{Im}(t)<o$ et $\operatorname{Re}(t)\neq o$, nous avons $|b(r,s,t)\,t\,\operatorname{th}\pi t\,a_t\,(\operatorname{ch}x)|^r \approx \dfrac{1}{|t|^{3/2}e^{|\operatorname{Re}(t)|-x\,\operatorname{Im}(t)}}$.

En remarquant que les pôles aux points $-\frac{in}{2}$ de $\mathrm{th}\,\pi t$ sont compensés par des zéros d'ordre supérieur de $a_t(\mathrm{ch}x)$, nous obtenons par le théorème des résidus appliqué au contour suivant quand R tend vers l'infini.



$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{8}{\pi^4}\, b(r,s,t)\; t\; \mathrm{th}\pi t\; a_t(\mathrm{ch}x)dt = -\sum_{\substack{j=1,\dots,4\\ n\in\mathbb{N}}} \mathrm{Rés}_{t_n^j}\Big(\frac{8}{\pi^4} b(r,s,t)\, t\; \mathrm{th}\pi t\; a_t(\mathrm{ch}x)\Big)$$

$$= -i\big(a_r(\mathrm{ch}x)a_s(\mathrm{ch}x)+a_{-r}(\mathrm{ch}x)a_s(\mathrm{ch}x)+a_{-s}(\mathrm{ch}x)a_r(\mathrm{ch}x)+a_{-r}(\mathrm{ch}x)a_{-s}(\mathrm{ch}x)\big)$$

$= -i\,\phi(r,x)\phi(s,x)$. Et comme $\phi(t,x) = a_t(\mathrm{ch}x) + a_{-t}(\mathrm{ch}x)$ nous avons

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{8}{\pi^5}\, b(r,s,t)\;\pi t\; \mathrm{th}\pi t\;\phi(t,x)dt = \phi(r,x)\phi(s,x)$, ce qui signifie que

$a(r,s,t) = \frac{8}{\pi^5}\, b(r,s,t)$. C.Q.F.D.

REMARQUE. - Pour $\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$, la transformation de Fourier sphérique est la transformation de Mehler. Rappelons que le noyau $K(x,y,z)$ définissant le produit de convolution sur $L^1(\mathbb{R}_+, 2\mathrm{sh}\, x\, dx)$ est égal à

$$K(x,y,z) = \begin{cases} o & \text{si} \quad z \notin [|x-y| \ , \ x+y], \\ \left[2\pi \, sh(\frac{x+y+z}{2}) sh(\frac{x+y-z}{2}) sh(\frac{x-y+z}{2}) sh(\frac{-x+y+z}{2})\right]^{-1} & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Ainsi la transformation de Mehler envoit bijectivement $L^1(\mathbb{R}_+, shxdx) \cap (L^2(\mathbb{R}_+, shxdx))^{*2}$ sur $L^1(\mathbb{R}_+, r\, th\pi r\, dr) \cap (L^2(\mathbb{R}_+, r\, tr\pi r\, dr))^{*2}$ "en échangeant produits ordinaires et produits de convolutions".

4. LA TRANSFORMATION DE FOURIER SPHÉRIQUE SUR $SL(2,\mathbb{C})$; SUR UN LAPLACIEN.

Pour $SL(2,\mathbb{C})$, on a $p=2$, $q=0$ et donc $\rho = 1$; ainsi on a $\omega(x) = 4\, sh^2 x$ et $\phi(r,x) = {}_2F_1(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \ , \ \frac{1}{2} - \frac{ir}{2} \ ; \ \frac{3}{2} \ ; \ -sh^2 x)$. En utilisant la formule (12) p. 101 de [9] , nous avons $\phi(r,x) = \frac{\sin rx}{r\, shx}$. Enfin $|c(r)|^{-2} = 2r^2$.

Le noyau $a(r,s,t)$ définissant le produit de convolution sur L^1 $L^1(R_+, r^2 dr)$ est donc égal à $a(r,s,t) = \frac{4}{rst} \int_o^\infty \frac{\sin rx \ \sin sx \ \sin tx}{shx} dx$,

c'est-à-dire $a(r,s,t) = \frac{\pi}{2rst} \left(th\frac{\pi}{2}(-r+s+t) + th\frac{\pi}{2}(r-s+t) + th\frac{\pi}{2}(r+s-t) - th\frac{\pi}{2}(r+s+t)\right)$.

D'autre part, d'après [7], (1.3.10), les applications $r \mapsto \phi(r,x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, définissent tous les caractères de l'algèbre de Banach commutative $L^1(\mathbb{R}_+, r^2 dr)$.

Considérons le Laplacien $\Box$ sur $\mathbb{R}_+$ associé à la mesure $r^2 dr$, $\Box = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}$; alors les fonctions $r \mapsto \phi(r,x)$ sont fonctions propre de cet opérateur : $\Box\phi(r,x) = -x^2\phi(r,x)$.

Ainsi pour le groupe $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$, les fonctions sphériques zonales, considérées comme fonctions des deux variables, possèdent des propriétés similaires par rapport à chacune de ses variables.

De manière plus générale, à partir de la mesure de Plancherel $|c(r)|^{-2}\,dr$ sur le dual d'un groupe de Lie semi-simple de rang 1 nous pouvons former un Laplacien $\square_{p,q} = \dfrac{1}{|c_{p,q}(r)|^{-2}} \dfrac{d}{dr}\left(|c_{p,q}(r)|^{-2} \dfrac{d}{dr}\right)$; ce qui nous conduit à poser le problème suivant résolu pour $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$.

Pour quels groupes de Lie semi-simples de rang 1, les applications $r \mapsto \phi_{p,q}(r,x)$ sont-elles fonctions propres de Laplacien

$$\square_{p,q} = |c_{p,q}(r)|^{2} \frac{d}{dr}\left(|c_{p,q}(r)|^{-2} \frac{d}{dr}\right) \ ?$$

REMARQUE 1. - Pour tout couple d'entiers positifs (p,q), l'application $r \mapsto |c_{p,q}(r)|^{-2}$ vérifie les hypothèses de régularité et de convexité qui sont exigées par H. Chebli (cf. [2]) qui, moyennant ces hypothèses, construit un produit qui donne une structure d'algèbre de convolution sur $L^{1}(\mathbb{R}_{+},|c(r)|^{-2}dr)$; Ce produit de convolution est défini par un noyau symétrique qui s'obtient à partir des fonctions propres de l'opérateur $\square_{p,q}$. Mais pour $\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$ et $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$, ce produit de convolution est différent de celui que nous avons obtenu ; en effet le noyau considéré comme fonction d'une de ses trois variables est à support compact. Par exemple, pour l'opérateur $\square_{p,q}$ associé à $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ i.e. pour $\dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{2}{r} \dfrac{d}{dr}$, le noyau $b(r,s,t)$ obtenu par Chebli est

$$b(r,s,t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < |r-s| \text{ ou } t > r+s , \\ \dfrac{(r+s+t)(r+s-t)(r-s+t)(-r+s+t)}{4\, r^3 s^3 t^3} \quad \text{pour } |r-s| \leqslant t \leqslant r+s. \end{cases}$$

Le problème demande l'étude des rapports entre les deux produits obtenus sur $L^1(\mathbb{R}_+, |c(r)|^{-2}dr)$.

REMARQUE 2. - Pour le groupe $G = \mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$, résoudre le problème précédent revient à savoir si les fonctions $r \mapsto P_{-\frac{1}{2}+ir}(\operatorname{ch} x)$ sont fonctions propres de l'opérateur $\dfrac{d^2}{dr^2} + \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2\pi}{\operatorname{sh} 2\pi r}\right)\dfrac{d}{dr}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, où $P_{\frac{1}{2}+ir}$ désigne la fonction de Legendre d'indice $-\frac{1}{2} + ir$.

BIBLIOGRAPHIE -

[1] J. BURCHNALL et T. CHAUNDY, *Proc. London Math. Soc.* 50,56 (1964).

[2] H. CHEBLI, Sur la positivité des opérateurs de translations généralisée associés à un opérateur de Sturm-Liouville sur $[0,\infty[$, *Cr. Acad. Sc.* Paris, 275 (1972), p. 601-604.

[3] I. FERRETTI et M. VERDE , On the Wigner coefficients of the three-dimensional Lorentz groups,Nuovo Cimento 55 A n° 1 (1968),p.110-124.

[4] M.FLENSTED- JENSEN , Paley-Wiener type theorem for a differential operator connected with symmetric spaces, *Arkiv för Matematik,* 10 (1972), p. 143-162.

[5] M. FLENSTED-JENSEN et T. KOORNWINDER, The convolution structure for Jacobi functions expansions, *Arkiv för Matematik,* 11 (1973), p. 245-262.

[6] MATHAI et SAXENA , Generalized hypergeometric functions, *Lectures notes in Mathematics*, n° 348.

[7] M. MIZONY, Contributions à l'analyse harmonique sphérique; (1975) p. 81-108.

[8] G. WARNER, Harmonic analysis on semi-simple Lie groups, 2, New-York, 1972.

[9] ERDELYI, Higher transcendental functions, *Bateman manuscript project*, Mc Graw-Hill, New-York (1963).

M. MIZONY
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE