PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

DENIS RICHARD

Mesure de Haar en analyse non-standard

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1976, tome 13, fascicule 1
, p. 15-21
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1976__13_1_15_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1976 t. 13-1

MESURE DE HAAR EN ANALYSE NON-STANDARD

par Denis RICHARD

L'existence de la mesure de Haar sur un groupe localement compact G résulte, selon M. Ha sner [7], de celle d'une fonction "content" λ (au sens de P.R. Halm s) qui, à tout compact K, associe $\lambda(K) = {}^{\circ}(\frac{K:I}{K_{\circ}:I})$, où $K_{\circ}$ est un compact fixé et I un voisinage infinitésimal de l'élément neutre e de G. Ce "content" est exactement celui défini par A. Parikh [6] et il est donné par ${}^{\circ}(\frac{\ell(K)}{\ell(K_{\circ})})$, où $\ell(K)$ est la borne inférieure du nombre des xI permett nt de recouvrir K . L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne permet pas aisément l'intégration, puisque la mesure de Haar n'est pas comm dement définie à partir de λ lorsqu'on ne sait pas si λ est régulier. Nous procédons autrement en reprenant les notations de [9] et de [10] et en construisant une forme linéaire positive sur l'espace vectoriel $C_c(G)$ des fonctions réelles, à support compact et continues dans G, invariante par les translations à gauche. Nous en déduisons un "content" et la mesure de Haar sur G.

1. EXISTENCE DE L'INTÉGRALE DE HAAR SUR UN GROUPE LOCALEMENT COMPACT.

A - Soit G un groupe topologique localement compact.

Soit $C_c(G)$ l'espace des fonctions réelles, à support compact et continues dans G. Soit L^+ l'ensemble des fonctions positives de $C_c(G)$. Soit B^+ l'ensemble des fonctions positives, bornées et à support compact, définies sur G et non nulles. En reprenant les idées et les notations de A. Weil([1] p.34) nous savons que, pour deux fonctions f et $g(g \neq o)$ de B^+, il existe un entier positif n, n nombres réels strictement positifs c_i et n éléments $s_i \in G$ tels que, pour tout x de G, $f(x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i(g)(s_i x)$. Si (f:g) désigne la borne inférieure de l'ensemble des $\sum_i c_i$, où chaque somme est prise pour des c_i vérifiant la dernière relation écrite, on rappelle (cf. par exemple, [2] p. 357) que lorsque f, f_1, f_2 et $g \neq o$ sont éléments de B^+, on a

$(f_1+f_2:g) \leqslant (f_1:g) + (f_2:g)$;

pour $c \geqslant o$, $(cf:g) = c(f:g)$;

si $f_1 \leqq f_2$, alors $(f_1:g) \leqq (f_2:g)$;

$(f:g) \leqslant (f:h)(h:g)$ et $(f:g) \geqslant \sup f / \sup g$;

enfin, si $f_a(x) = f(a^{-1}x)$ pour $a \in G$ fixé et pour tout $x \in G$, on a l'égalité $(f_a:g) = (f:g)$ ici fondamentale. On rappelle enfin (cf. [1] p. 35) que, si $f_\circ \in B^+$, on a $\dfrac{1}{(f_\circ:f)} \leqslant \dfrac{(f:g)}{(f_\circ:g)} \leqslant (f:f_\circ)$.

B - Soit ϕ une fonction de B^{+*}, à support infinitésimal I. Soit $h_\circ$ une fonction de B^+, à partir de maintenant fixée.

Pour toute $f \in L^+$, on a $\left(\frac{(f:\phi)^*}{(h_\circ:\phi)^*}\right) \leqslant (f:h_\circ)$, et on peut ainsi définir une fonctionnelle F_ϕ de L^+ dans $\mathbb{R}^*$ par $F_\phi(f) = {}^\circ\left(\frac{(f:\phi)^*}{(h_\circ:\phi)^*}\right)$. Le résultat fondamental est alors le suivant :

THEOREME. - *La fonctionnelle F_ϕ définit une intégrale de Haar.*

DEMONSTRATION. Vérifions successivement que

a) $\forall f \in L^+ - \{o\}$, $F_\phi(f) > 0$;

b) $\forall a \in G$, $F_\phi(f_a) = F_\phi(f)$;

c) $\forall c \in \mathbb{R}$, $F_\phi(cf) = cF_\phi(f)$;

d) $\forall f_1 \in L^+$, $\forall f_2 \in L^+$, $F_\phi(f_1+f_2) = F_\phi(f_1)+F_\phi(f_2)$.

Les assertions a), b) et c) sont de simples conséquences des réinterprétations des propriétés suivantes rappelées en 1 :

$$\frac{1}{(f_\circ:f)} \leqslant \frac{(f:g)}{(f_\circ:g)} \leqslant (f:f_\circ) \text{ pour a),}$$

$(f_a:g) = (f:g)$ pour b) et $(cf:g) = c(f:g)$ pour c).

Démontrons d). Notons supp(f) le support de chaque fonction f de L^+. Considérons la fonction h de L^+ dont la restriction à $\mathrm{supp}(f_1+f_2)$ est égale à 1.

Soit $f = f_1+f_2$. Si $f = o$, nous poserons $h_1 = h_2 = 0$ et sinon $h_1 = f_1/f$, $h_2 = f_2/f$. Il existe $\omega \in \mathbb{N}^*$, des $c_i \in \mathbb{R}^*$ et des $s_i \in I^*$ pour $i \in \{1,2,\dots,\omega\}$ tels que l'on ait, pour tout $x \in G$:

$$f_1(x) = f(x)h_1(x) \leq \sum_{i=1}^{\omega} c_i\phi(s_i x)h_1(x).$$

Mais si $f(x) \neq o$ et $x \in K^*$, il existe $x_o \in K$ pour lequel $\mu(x) = \mu(x_o)$. De plus, il existe s_i tel que $s_i x \in I^*$, donc $\mu(x) = \mu(s_i^{-1}) = \mu(x_o)$ et h_1 étant continue, $h_1(x) = h_1(s_i^{-1}) + \eta_x$ où η_x est infinitésimal.

Par suite, du fait de l'existence de la borne supérieure η_i de $\{\eta_x | x \in s_i^{-1} I^*\}$, on a, pour tout $x \in s_i^{-1} I^*$, $h_1(x) \leqq h_1(s_i^{-1}) + \eta_i$.
Posons alors $\eta_1' = \mathrm{Sup}\{\eta_i | i \in [1,\omega]\}$.
Comme η_i est infinitésimal (car $\eta_x < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$, implique $\eta_i \leqslant \varepsilon$ pour tout $\varepsilon \in R$), η_1' l'est aussi. De ce fait

$$(f_1:\phi)^* \leqslant \sum_{i=1}^{\omega} c_i[h_1(s_i^{-1}) + \eta_1']$$

et de même

$$(f_2:\phi)^* \leqslant \sum_{i=1}^{\omega} c_i[h_a(s_i^{-1}) + \eta_2'] .$$

Mais $h_1 + h_2 \leqq 1$. Donc

$$(f_1:\phi)^* + (f_2:\phi)^* \leq \sum_{i=1}^{\omega} c_i[1+\eta_1'+\eta_2'] .$$

Divisons maintenant par $(h_o:\phi)^*$ et prenons les parties standards des réels finis obtenus ; il vient

$$F_\phi(f_1) + F_\phi(f_2) \leqslant F_\phi(f) = F_\phi(f_1+f_2).$$

L'inégalité dans l'autre sens s'obtient sans difficulté.

REMARQUE 1. - La preuve donnée par A. Weil de l'existence de l'intégrale de Haar utilise le théorème de Tychonoff auquel il n'est pas ici directement fait appel.

REMARQUE 2. - La fonctionnelle ainsi définie sur L^+ se prolonge à l'ensemble des fonctions à valeurs réelles et à support compact de G, comme en [6].

3. MESURE DE HAAR.

Pour ramener, comme le fait Hausner en [2], l'existence de la mesure à celle d'un "content" au sens de Halmos, nous considérons χ_I et $\chi_{K_\circ}$ respectivement les fonctions caractéristiques du voisinage infinitésimal I et du compact d'intérieur non vide $K_\circ$. Soit K un compact quelconque de fonction caractéristique χ_I. Considérons $\dfrac{(\chi_K:\chi_I)^*}{(\chi_{K_\circ}:\chi_I)^*} = \lambda'(K)$. Comme $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} k_i K_\circ$ pour $n \in \mathbb{N}$, pour des $k_i \in K$, on observe que :

$$(\chi_K:\chi_I)^* \leq \sum_{i=1}^{n} (\chi_{k_i K_\circ} : \chi_I)^* = n(\chi_{K_\circ}:\chi_I)^* .$$

Par suite $\lambda'(K)$ est fini. Soit $\lambda(K) = {}^\circ\lambda'(K)$ sa partie standard.

THEOREME. - *L'application de l'ensemble des compacts de G dans $\mathbb{R}$ qui à un compact K associe ${}^\circ\lambda'(K)$ est finie, non négative, monotone, additive et sous-additive et invariante par les translations de G.*

Considérons maintenant un ouvert V de G ; si $f \prec V$ indique que $f \in C_c^+(G)$ et que $f \leqq \chi_V$, nous savons qu'il existe sur G une mesure de Haar m tel que : $m(V) = \sup\{F_\phi(f) \mid f \prec V\}$.

Mais le lemme 9.4.6 de [9] p. 76, prouve que $\chi_V = \sup\{f \mid f \prec V\}$ et nous allons montrer la :

PROPOSITION. - *Pour tout* V *ouvert et relativement compact, on a* $M(V) = {}^{\circ}\lambda'(V)$.

Il est évident que $\sup(f:\chi_I)^* \leq (\chi_V:\chi_I)^*$, donc que $m(V) \leq {}^{\circ}\lambda'(V)$. Réciproquement il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, il existe $f \prec V$ telle que $(\chi_V:\chi_I)^* < (f:\chi_I)^* + \varepsilon$. Considérons $\omega \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\overline{V}^* \subset \bigcup_{i=1}^{\omega} s_i I^* ,$$

et soit $\varepsilon' = \varepsilon/\omega$, une application à support contenu dans V. On sait qu'il existe $f \prec V$ telle que $\chi_V < f + \varepsilon'$. D'où

$$(\chi_V:\chi_I)^* < ((f+\varepsilon'):\chi_I)^* \leq (f:\chi_I)^* + (\varepsilon/\omega:\chi_I)^*.$$

Mais pour toute famille $\{c_i\}_{i \in [1,\omega]}$ telle que

$$\varepsilon/\omega(x) < \sum_{i=1}^{\omega} c_i \chi_I(s_i x) \leq \sum_{i=1}^{\omega} c_i ,$$

on a $\quad (\varepsilon/\omega:\chi_I)^* \leq \sum_{i=1}^{\omega} c_i$.

Pour $\omega = \omega'$, il vient $(\varepsilon/\omega:\chi_I)^* \leq \omega\, \varepsilon/\omega = \varepsilon$. C.Q.F.D.

REFERENCES . -

[1] WEIL A., Intégration dans les groupes topologiques, Hermann, Paris 1941.

[2] LANG S. , Analysis II, Addison Wesley, Princeton 1969.

[3] HALMOS P.R., Measure theory, D. Van Nostrand, Princeton 1950.

[4] LOOMIS L.H., Abstract Harmonic Analysis, D. Van Nostrand, Princeton 1953.

[5] LUXEMBOURG W.A.J., A general theory of Monads - Applications of model theory to Algebra, Analysis and probability, Holt Rinehart and Winston, 1969, 18-86.

[6] PARIKH R., A non standard theory of topological group in ouvrage cité en 5 .

[7] HAUSNER M., On a non-standard construction of Haar Measure, Communications on pure and applied mathematics, Vol. XXV, 403-405.

[8] KIRK R.B., The Haar Integral via non standard Analysis, *Pacific Journal of mathematics*, vol. 58, n° 2, 1975, 517-527.

[9] MACHOVER M. and HIRSCHEFELD, Lectures on Non-standard Analysis Springer-Verlag, Berlin 1969.

[10] ROBINSON A., Non-standard Analysis. North-Holland, Amsterdam 1966.

Denis RICHARD
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE