DANIÈLE BUCCHIONI

# Mesures vectorielles et partitions continues de l'unité

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1975, tome 12, fascicule 3
, p. 51-90
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1975__12_3_51_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1975 t.12-3

# MESURES VECTORIELLES ET PARTITIONS CONTINUES DE L'UNITE

par Danièle BUCCHIONI

Dans cet article, on se propose d'étudier divers espaces de mesures vectorielles définies sur un espace complètement régulier, en mettant pour cela l'accent sur le rôle joué par les partitions continues de l'unité (en abrégé p.c.u.).

Le premier paragraphe a surtout pour objet l'introduction des principales notions utilisées par la suite ; en particulier, pour un espace complètement régulier T et un espace localement convexe (en abrégé elc.) E quelconque, on définit l'espace $M_\beta(T,E)$ des mesures sur T à valeurs dans E.

Dans les deux paragraphes suivants, on étudie deux sous-espaces particuliers de $M_\beta(T,E)$ notés $M_\sigma(T,E)$ et $M^\infty(T,E)$, qui généralisent au cas vectoriel les espaces $M_\sigma(T)$ et $M^\infty(T)$ étudiés notamment dans [2], [12] et [17], et on montre que ces espaces ont des caractérisations analogues à celles du cas scalaire. On peut aussi munir ces deux espaces de topologies localement convexes qui sont complètes lorsque E est lui-même complet ; dans ce cas, on a alors :

$$M_\sigma(T,E) = M_\sigma(T) \hat{\otimes} E \quad \text{et} \quad M^\infty(T,E) = M^\infty(T) \hat{\otimes} E$$

Dans les deux derniers paragraphes enfin, on s'intéresse au rôle joué par les p.c.u. dans l'étude de ces mesures vectorielles. L'elc E étant désormais supposé quasi-complet on caractérise tout d'abord la mesure $\vec{\mu} : C^{\infty}(T) \to E$ pour que la famille $(\vec{\mu}(\phi_i))$, à priori sommable dans E" pour la topologie $\sigma(E'',E')$, soit en réalité sommable dans E pour toute p.c.u. $(\phi_i)$. On est ainsi amené à considérer un nouveau sous-espace de $M_\beta(T,E)$, noté $M_{\beta^*}(T,E)$, formé des mesures qui vérifient cette propriété. On montre que l'espace $M_{\beta^*}(T,E)$ contient à la fois $M_\sigma(T,E)$ et l'espace des mesures prolongeables au sens de [16] . On établit aussi que les seuls espaces T pour lesquels on a $M_\beta(T,E) = M_{\beta^*}(T,E)$, pour tout elc E, sont les espaces pseudocompacts, et que les seuls elc (quasi-complets) pour lesquels cette égalité est vérifiée pour tout espace T, sont les elc exhaustifs. On caractérise enfin les espaces $M_\sigma(T,E)$ et $M^{\infty}(T,E)$ par les propriétés de certaines fonctions additives d'ensembles (en abrégé fae) à valeurs dans E, définies à l'aide des p.c.u.. Ceci nous permet de donner dans le cas particulier où l'espace T est discret, des représentations intéressantes des divers espaces de mesures étudiés. On montre aussi, en utilisant des résultats classiques simples de la théorie des fae à valeurs vectorielles, que si $(\vec{\mu}_n)$ est une suite contenue dans l'un de ces espaces de mesures, et si pour toute $f \in C^{\infty}(T)$ la suite $(\vec{\mu}_n(f))$ converge dans E, et même dans $E_\sigma$ , vers un élément noté $\vec{\mu}(f)$, alors la limite $\vec{\mu}$ ainsi obtenue appartient à ce même espace de mesures. On retrouve ainsi, par des voies différentes de celles utilisées dans [2] et [12], le fait que les espaces $M_\sigma(T)$ et $M^{\infty}(T)$ sont faiblement semi-complets.

## 1. GENERALITES SUR LES MESURES VECTORIELLES DEFINIES SUR UN ESPACE COMPLETEMENT REGULIER.

Dans ce qui suit, T désigne un espace complètement régulier, $C^{\infty}(T)$ l'algèbre de Banach de ses fonctions réelles continues et bornées, munie de sa norme uniforme, et E un espace localement convexe qu'on supposera toujours séparé, sauf mention expresse du contraire.

(1.1) DEFINITION. - *On appelle mesure sur* T *à valeurs dans* E *toute application linéaire continue* $\vec{\mu} : C^{\infty}(T) \to E$ . *On désigne par* $M_{\beta}(T,E)$ *l'espace de toutes ces mesures. Si* $E = \mathbb{R}$ , *on note plus simplement* $M_{\beta}(T)$.

Lorsque l'espace T est compact, on retrouve ainsi la notion de mesure de Radon à valeurs vectorielles étudiée par exemple dans [13] et [16] Lorsque T est complètement régulier, on sait que $C^{\infty}(T)$ est isométriquement isomorphe à l'algèbre $C(\beta T)$ des fonctions réelles continues sur le compactifié de Stone-Čech $\beta T$ de T. On voit donc que dans ce cas, l'espace $M_{\beta}(T,E)$ n'est autre, en fait, que l'espace des mesures de Radon sur $\beta T$ à valeurs dans E.

Désignons par $\mathcal{B}_o(\beta T)$ la tribu borélienne de $\beta T$, engendrée par les ouverts. On sait, avec le théorème de Riesz-Alexandroff que les mesures scalaires $\mu \in M_\beta(T)$ s'identifient aux mesures signées sur la tribu $\mathcal{B}_o(\beta T)$ qui sont intérieurement régulières par rapport aux compacts de $\beta T$. Dans le cas où E est un elc quelconque, on introduit la notion de mesure *régulière* sur $\beta T$ en considérant les applications $\vec{m} : \mathcal{B}_o(\beta T) \to E$ qui sont des mesures (dénombrablement additives pour la topologie de E) intérieurement régulières par rapport aux compacts de $\beta T$, donc telles que, pour tout borélien A de $\beta T$, on ait

$$\vec{m}(A) = \lim_{K \uparrow A} \vec{m}(K)$$

lorsque K décrit le système filtrant croissant des compacts contenus dans A. En suivant [19] on introduit encore :

(1.2) DEFINITION. - *On dit qu'une mesure* $\vec{\mu} \in M_\beta(T,E)$ *est prolongeable lorsque l'application associée* $\vec{\mu} : C^\infty(T) \to \hat{E}$ *, considérée comme à valeurs dans le complété de* E*, est faiblement compacte.*

Dans [16] E. THOMAS montre alors que si l'elc E est quasi-complet, il existe une correspondance bijective entre les mesures $\vec{\mu} \in M_\beta(T,E)$ qui sont prolongeables et les mesures régulières $\vec{m} : \mathcal{B}_o(\beta T) \to E$.

Lorsqu'on fait la théorie des mesures ensemblistes vectorielles, le théorème classique d'Orlicz-Pettis assure qu'une fonction d'ensembles $\vec{m} : \Sigma \to E$, définie sur une tribu $\Sigma$, est une mesure pour la topologie de E si et seulement si c'est une mesure pour la topologie faible $\sigma(E,E')$ de E, autrement dit dès que $x' \circ \vec{m}$ est une mesure scalaire sur $\Sigma$ pour chaque $x' \in E'$. La fait que l'espace $C^\infty(T)$ soit espace de Banach, dont *a fortiori* espace de Mackey, fournit alors et de façon d'ailleurs triviale, l'équivalent suivant du théorème d'Orlicz-Pettis :

(1.3) PROPOSITION. - *Pour qu'une application linéaire* $\vec{\mu} : C^\infty(T) \to E$ *soit une mesure sur* T, *il faut et il suffit que l'on ait* $x' \circ \vec{\mu} \in M_\beta(T)$ *pour tout* $x' \in E'$. *Et dans ce cas* $\vec{\mu}$ *est une mesure pour la topologie de Mackey* $\tau(E,E')$.

Les paragraphes suivants vont maintenant être consacrés à l'étude de quelques sous-espaces particuliers de $M_\beta(T,E)$.

## 2. L'ESPACE $M_\sigma(T,E)$.

En suivant par exemple [17], rappelons que $M_\sigma(T)$ est l'espace des formes linéaires $\mu$ sur $C^\infty(T)$ qui sont $\sigma$-régulières, c'est-à-dire telles que pour toute suite (fn) de $C^\infty(T)$ décroissante et qui converge simplement vers zéro (en abrégé $f_n \downarrow o$), la suite $(\mu(fn))$ tende vers zéro. Pour le cas vectoriel, on introduit :

(2.1) DEFINITION. - *Une application linéaire* $\vec{\mu} : C^{\infty}(T) \to E$ *est dite* $\sigma$-*régulière si pour toute suite* $(f_n)$ *de* $C^{\infty}(T)$ *telle que* $f_n \downarrow 0$, *la suite* $(\vec{\mu}(f_n))$ *tend vers zéro dans* E.

*On désigne par* $M_{\sigma}(T,E)$ *l'espace des applications linéaires* $\sigma$-*régulières* $C^{\infty}(T) \to E$.

REMARQUE. - Notons tout de suite que grâce à la proposition (1.3), $M_{\sigma}(T,E)$ est un sous-espace vectoriel de $M_{\beta}(T,E)$.

Avant de donner différentes caractérisations de l'espace $M_{\sigma}(T,E)$ rappelons quelques faits bien connus dans le cas où E = R. On dit qu'une famille $(\mu_{\alpha})$ de formes linéaires sur $C^{\infty}(T)$ est uniformément $\sigma$-régulière [9], si pour toute suite $(f_n)$ de $C^{\infty}(T)$ telle que $f_n \downarrow 0$, la suite $(\mu_{\alpha}(f_n))$ tend vers zéro, uniformément par rapport à $\alpha$. Dans [9], on désigne par $\mathcal{T}_{\sigma}$ la topologie, sur $C^{\infty}(T)$, de la convergence uniformé sur les parties uniformément $\sigma$-régulières et on étudie l'elc ainsi obtenu noté $C^{\infty}_{\sigma}(T)$ dans ce qui suit. On montre en particulier que $M_{\sigma}(T)$ est le dual de $C^{\infty}_{\sigma}(T)$ [9] et que $\mathcal{T}_{\sigma}$ est la topologie de Mackey associée à la dualité $\langle C^{\infty}(T), M_{\sigma}(T)\rangle$ [9][17]. On montre aussi que $\mathcal{T}_{\sigma}$ est égale à la topologie stricte $\beta_1$ introduite par SENTILLES dans [15], et que $\mathcal{T}_{\sigma}$ est la plus fine topologie localement convexe $\mathcal{T}$ sur $C^{\infty}(T)$ telle que si $f_n \downarrow 0$ dans $C^{\infty}(T)$, la suite $(f_n)$ tend vers zéro pour la topologie $\mathcal{T}$[15].

Dans toute cette étude, on traite $C^{\infty}(T)$ en elc et $M_{\sigma}(T)$ apparaît comme un dual topologique ; plus récemment, dans [2] , BERRUYER et IVOL ont abordé le problème différemment en traitant $C^{\infty}(T)$ en espace compactologique et en faisant apparaître $M_{\sigma}(T)$ comme un dual compactologique. Pour cela, on considère sur $C^{\infty}(T)$ la compactologie, notée $\mathcal{K}_{o}^{\infty}(T)$, formée des parties $\bar{\Gamma}(f_n)$ de $C^{\infty}(T)$, où $(f_n)$ est une suite équicontinue, uniformément bornée qui converge simplement vers zéro. On note $C_{o}^{\infty}(T)$ l'espace compactologique $(C^{\infty}(T),\mathcal{K}_{o}^{\infty}(T))$ ainsi obtenu. La question est maintenant de savoir si dans le cas vectoriel, ces différents points de vue sont conciliables. Auparavant, il convient de fixer quelque peu les notations.

NOTATION. - Etant donnés un *espace vectoriel compactologique convexe* $\mathfrak{X}$ (en abrégé e.c.c.) et un e.l.c. E, rappelons qu'une application linéaire $\phi : \mathfrak{X} \to E$ est dite compactologique si la restriction de $\phi$ aux "compacts" de $\mathfrak{X}$ est continue. Dans ce qui suit, nous désignerons par $H(\mathfrak{X},E)$ l'espace des applications linéaires compactologiques $\mathfrak{X} \to E$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les "compacts" de $\mathfrak{X}$.

On a un exemple important d'un tel espace si on prend pour $\mathfrak{X}$ le dual F' d'un elc F que l'on munit de la compactologie, dite équicontinue, où les "compacts" sont les disques équicontinus faiblement fermés (donc faiblement compacts) de F. En particulier, si $E = \mathbb{R}$, il découle immédiatement du théorème de complétion de Grothendieck que $H(\mathscr{X},\mathbb{R}) = H(F',\mathbb{R})$ s'identifie au complété $\hat{F}$ de F. Soulignons encore que l'espace $H(F',E)$ est noté $F \varepsilon E$ dans [14] et que nous adoptons la notation $H(\mathscr{X},E)$ de préférence à la notation $L(\mathscr{X},E)$ utilisée dans [5] afin d'éviter tout risque de confusion, lorsque $\mathscr{X}$ est le dual d'un espace de Banach F, avec l'espace $L(F',E)$ des opérateurs continus de l'espace de Banach F' dans E. Notons enfin pour terminer que si E et F sont deux elc complets tels que E ou F vérifie la propriété d'approximation, alors [5] .

$$H(F',E) = F \hat{\otimes} E .$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner une première caractérisation de l'espace $M_\sigma(T,E)$.

(2.2) PROPOSITION. - *Pour une application linéaire* $\vec{\mu} : C^\infty(T) \to E$ *les assertions suivantes sont équivalentes :*

*a)* $\vec{\mu}$ *est* $\sigma$*-régulière ;*

*b)* $\vec{\mu}$ *est scalairement* $\sigma$*-régulière, c'est-à-dire* $x' \circ \vec{\mu}$ *appartient à* $M_\sigma(T)$ *pour tout* $x' \in E'$.

*c)* $\vec{\mu}$ *est continue de* $C^\infty_\sigma(T)$ *dans* E.

*d)* $\vec{\mu}$ *appartient à* $H(C^\infty_o(T),E)$.

**PREUVE.** -

a)$\Longrightarrow$b) est immédiat.

b)$\Longrightarrow$c) se déduit du fait que $C^{\infty}(T)$ est espace de Mackey.

c)$\Longrightarrow$d) : il suffit de remarquer que sur les "compacts" de $\mathscr{H}_{o}^{\infty}(T)$, la topologie $\mathscr{T}_{\sigma}$ coïncide avec la topologie de la convergence simple [2].

d)$\Longrightarrow$a) est immédiat compte tenu du fait que si $f_n \downarrow 0$ dans $C^{\infty}(T)$, la partie $H = \bar{\Gamma}(f_n)$ appartient à $\mathscr{H}_{o}^{\infty}(T)$.

On a déjà noté que $M_{\sigma}(T)$ peut s'obtenir comme dual compactologique de l'ecc $C_{o}^{\infty}(T)$; ce qui permet de munir cet espace de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts H de $\mathscr{H}_{o}^{\infty}(T)$. L'elc $M_{\sigma}(T) = H(C_{o}^{\infty}(T),\mathbb{R})$ ainsi obtenu est complet et de plus, son dual avec sa compactologie équicontinue est précisément l'ecc $C_{o}^{\infty}(T)$ [5] . Si de la même façon, on place sur l'espace $M_{\sigma}(T,E)$ la topologie de la convergence uniforme sur les parties H de $\mathscr{H}_{o}^{\infty}(T)$, de la proposition (2.2) on déduit alors :

$$M_{\sigma}(T,E) = H(C_{o}^{\infty}(T),E) = H[M_{\sigma}(T)',E]$$

Comme l'elc $M_{\sigma}(T)$ vérifie la propriété d'approximation [2] , on a grâce aux remarques précédentes :

(2.3) COROLLAIRE. - *Pour tout elc complet* E, *on a*

$$M_{\sigma}(T,E) = M_{\sigma}(T) \hat{\hat{\otimes}} E.$$

Puisque l'espace $M_\sigma(T)$ est une bande dans l'espace de Riesz $M_\beta(T)$ [2], on vérifie aisément, lorsque E est un espace normé et $\vec{\mu} : C^\infty(T) \to E$ une mesure dominée, que $\vec{\mu}$ appartient à $M_\sigma(T,E)$ si et seulement si sa variation $\mathrm{var}\vec{\mu}$ appartient à $M_\sigma(T)$. Pour terminer, étudions, dans le cas où E est un espace de Banach, les relations qui existent entre les éléments de $M_\sigma(T,E)$ et les mesures ensemblistes. Pour cela, rappelons que si $\vec{m} : \Sigma \to E$ est une mesure (ensembliste) sur la tribu $\Sigma$, on peut définir la semi-variation $|\vec{m}|$ de $\vec{m}$ en posant

$$|\vec{m}|(A) = \mathrm{Sup}\,||\Sigma\alpha_i\,\vec{m}\,(A_i)||$$

pour tout $A \in \Sigma$, où la borne supérieure est prise lorsque $(A_i)$ décrit l'ensemble des familles finies disjointes d'éléments $A_i$ de $\Sigma$ contenus dans A et où $|\alpha_i| \leqslant 1$. On a alors, de manière évidente :

$$(*)\quad |\vec{m}|(A) = \sup_{||x'||\leqslant 1} |x'\circ\vec{m}|(A).$$

Grâce à cette remarque et à la proposition (2.2) , on montre facilement que, comme dans le cas scalaire [1] [17] , on a :

(2.4) PROPOSITION. - *Soit* E *un espace de Banach. Il existe une correspondance bijective entre :*

*a) les mesures prolongeables* $\vec{\mu} : C^\infty(T) \to E$ *qui sont* $\sigma$*-régulières.*

*b) les mesures régulières* $\vec{m} : \mathcal{B}_\circ(\beta T) \to E$ *qui vérifient* $|\vec{m}|(Z) = 0$ *pour tout noyau* Z *de* $\beta T$ *disjoint de* T

Soit $\mathcal{B}a(T)$ la tribu de Baire de T, c'est-à-dire la tribu engendrée par les noyaux de T. On sait que $M_\sigma(T)$ s'identifie aussi à l'espace $ca[\mathcal{B}a(T)]$ des mesures sur $\mathcal{B}a(T)$ [17] . De même, dans le cas vectoriel :

(2.5) PROPOSITION. - *Soit* E *un espace de Banach. Il existe une correspondance bijective entre :*

*a) les mesures prolongeables* $\vec{\mu}$ *appartenant à* $M_\sigma(T,E)$.

*b) les mesures* $\vec{m} : \mathcal{B}a(T) \to E$.

**PREUVE.** - Si $\vec{\mu}$ est un élément de $M_\sigma(T,E)$, pour tout $x' \in E'$, la mesure scalaire $x' \circ \vec{\mu}$ appartient à $M_\sigma(T)$, donc est associée à une mesure $m_{x'}$ sur $\mathcal{B}a(T)$. On définit alors $\vec{m} : \mathcal{B}a(T) \to (E')^*$ en posant

$$\langle \vec{m}(A), x' \rangle = m_{x'}(A) = \int 1_A \; d(x' \circ \vec{\mu})$$

pour tout $x' \in E'$ et tout $A \in \mathcal{B}a(T)$. Montrons qu'en fait $\vec{m}(A)$ appartient à E c'est-à-dire, puisque E est espace de Banach, que la restriction de $\vec{m}(A)$ à la boule unité B' de E' est continue pour la topologie $\sigma(E',E)$. Or, si $x'_i \to 0$ dans $B'_\sigma$ , la suite généralisée $(x'_i \circ \vec{\mu})$ tend vers zéro dans $M_\beta(T)$ pour la topologie étroite $\sigma(M_\beta(T), C^\infty(T))$. Comme la mesure $\vec{\mu}$ est prolongeable la famille $K = \{x'_i \circ \vec{\mu}\}_i$, qui est contenue dans $M_\sigma(T)$, est faiblement relativement compacte dans l'espace de Banach $M_\beta(T) = C^\infty(T)'$ ; elle est donc aussi faiblement compacte dans l'espace de Banach $M_\sigma(T)$, topologisé par la norme de $M_\beta(T)$.

Ainsi sur K la topologie étroite $\sigma(M_\sigma(T), C^\infty(T))$ coïncide avec la topologie faible de l'espace de Banach $M_\sigma(T)$, donc la suite généralisée $(x'_i \circ \vec{\mu})_i$ tend faiblement vers zéro dans l'espace de Banach $M_\sigma(T)$. On en déduit en particulier que, pour tout $A \mathscr{B}a(T)$ on a :

$$<\vec{m}(A), x'_i> = \int 1_A d(x'_i \circ \vec{\mu}) \to 0 \quad .$$

L'application $\vec{m} : \mathscr{B}a(T) \to E$ ainsi construite est additive ; de plus, pour tout $x' \in E'$, $x' \circ \vec{m}$ est une mesure ; $\vec{m}$ est donc une mesure d'après le théorème d'Orlicz-Pettis. Réciproquement, considérons une mesure $\vec{m} : \mathscr{B}a(T) \to E$ et désignons par $B_a^\infty(T)$ l'espace de Banach des fonctions Baire-mesurables et bornées sur T. Par intégration, $\vec{m}$ définit un opérateur $u : B_a^\infty(T) \to E$ et la restriction $\vec{\mu}$ de u à $C^\infty(T)$ est un élément de $M_\beta(T,E)$. De plus, comme $\vec{m}$ est une mesure, la famille $K = \{x' \circ \vec{m}\}_{x' \in B'}$ est faiblement relativement compacte dans $ca[\mathscr{B}a(T)]$, donc, en identifiant les espaces de Banach $ca[\mathscr{B}a(T)]$ et $M_\sigma(T)$, la famille $\{x' \circ \vec{\mu}\}_{x' \in B'}$ est faiblement relativement compacte dans l'espace de Banach $M_\sigma(T)$ et a fortiori dans l'espace de Banach $M_\beta(T)$. Il en résulte que la mesure $\vec{\mu}$ est prolongeable. Pour terminer, il suffit de remarquer que pour tout $x' \in E'$, $x' \circ \vec{\mu}$ appartient à $M_\sigma(T)$ et de conclure avec (2.2).

## 3. L'ESPACE $M^{\infty}(T,E)$

Dans ce paragraphe, nous allons généraliser au cas vectoriel l'étude de l'espace $M^{\infty}(T)$ développée par ROME dans [12]. Pour cela, on place sur $C^{\infty}(T)$ la compactologie, notée $\mathcal{H}^{\infty}(T)$ ou $\mathcal{H}^{\infty}$, formée des parties H de $C^{\infty}(T)$ équicontinues et uniformément bornées, chacune de ces parties étant munie de la topologie de la convergence simple sur T. On notera encore $C^{\infty}(T)$ l'espace compactologique convexe $(C^{\infty}(T), \mathcal{H}^{\infty}(T))$ ainsi obtenu. Rappelons que $M^{\infty}(T)$ est le dual compactologique de $C^{\infty}(T)$ [12]. Pour un elc E quelconque, on a :

(3.1) DEFINITION. - *On désigne par* $M^{\infty}(T,E)$ *l'ensemble des applications linéaires* $\vec{\mu} : C^{\infty}(T) \to E$ *dont les restrictions aux parties* $H \in \mathcal{H}^{\infty}(T)$ *sont continues.*

REMARQUE. - Puisque l'on a trivialement $\mathcal{H}^{\infty}_{o}(T) \subset \mathcal{H}^{\infty}(T)$,, il est clair que $M^{\infty}(T,E)$ est un sous-espace vectoriel de $M_{\sigma}(T,E)$.

Rappelons encore [12] qu'on munit habituellement l'espace $M^{\infty}(T)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les parties $H \in \mathcal{H}^{\infty}(T)$ ; on obtient ainsi un elc complet dont le dual, avec sa compactologie équicontinue, est l'ecc $C^{\infty}(T)$ et dont le dual fort $M^{\infty}(T)'_{\beta}$ est l'espace de Banach $C^{\infty}(T)$.

De la même façon, plaçons sur $M^{\infty}(T,E)$ la topologie de la convergence uniforme sur les parties $H \in \mathcal{H}^{\infty}(T)$ ; avec les notations du paragraphe 2 on a alors les égalités :

$$M^{\infty}(T,E) = H(C^{\infty}(T),E) = H(M^{\infty}(T)',E)$$

Comme l'elc $M^{\infty}(T)$ vérifie la propriété d'approximation [12], on en déduit comme en (2.3) :

(3.2) PROPOSITION. - *Pour tout elc complet* E, *on a :*

$$M^{\infty}(T,E) = M^{\infty}(T) \hat{\otimes} E$$

Rappelons qu'à tout ecc régulier $\mathcal{X}$, on peut associer, de façon canonique, un elc (séparé) noté $\bar{c}\mathcal{X}$ , en plaçant sur $\mathcal{X}$ la topologie localement convexe la plus fine rendant continues les injections $K \to \mathcal{X}$ lorsque K décrit la famille des "compacts" de $\mathcal{X}$ [6]. De plus, le dual de l'elc $\bar{c}\mathcal{X}$ ainsi obtenu est égal au dual compactologique $\mathcal{X}^*$ de $\mathcal{X}$ et les parties équicontinues K de $(\bar{c}\mathcal{X})'$ sont exactement les parties K relativement compactes dans $\mathcal{X}^* = H(\mathcal{X},\mathbb{R})$. En particulier, la topologie de $\bar{c}C^{\infty}(T)$ est la topologie de la convergence uniforme sur les parties (ou sur les disques) relativement compactes de $M^{\infty}(T)$. Comme dans l'elc $M^{\infty}(T)$, toute partie faiblement relativement compacte est relativement compacte [12], la topologie de $C^{\infty}(T)$ coïncide en fait avec la topologie de la convergence uniforme sur les disques faiblement relativement compacts de $M^{\infty}(T)$, c'est-à-dire avec la topologie de Mackey $\tau(C^\infty(T),M^\infty(T))$. On en déduit, comme en (2.2), un résultat qui fait le lien entre les mesures vectorielles appartenant à $M^\infty(T,E)$, et les mesures scalaires.

(3.3) PROPOSITION. - *Pour une application linéaire* $\vec{\mu} : C^\infty(T) \to E$, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

*a)* $\vec{\mu}$ *appartient à* $M^\infty(T,E)$.

*b) Pour tout* $x' \in E'$, $x' \circ \vec{\mu}$ *appartient à* $M^\infty(T)$.

*c)* $\vec{\mu}$ *est continue de* $\bar{\tau}C^\infty(T)$ *dans* E.

(3.4) COROLLAIRE. - *Pour qu'une application linéaire linéaire* $\vec{\mu} : C^\infty(T) \to E$ *appartienne à* $M^\infty(T,E)$ *il faut et il suffit que pour tout suite généralisée* $(f_i)$ *de* $C^\infty(T)$ *équicontinue et telle que* $f_i \downarrow 0$, *la suite généralisée* $(\vec{\mu}(f_i))$ *tende vers zéro dans* E.

PREUVE. - La condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante grâce à la proposition (3.3) et au fait que cette condition caractérise les éléments de $M^\infty(T)$ [2].

Notons enfin pour terminer que l'espace $M^\infty(T)$ étant une bande dans l'espace de Riesz $M_\beta(T)$ [12], on voit facilement que, lorsque E est un espace normé et $\vec{\mu} : C^\infty(T) \to E$ une mesure dominée, $\vec{\mu}$ appartient à $M^\infty(T,E)$ si et seulement si sa variation var $\vec{\mu}$ appartient à $M^\infty(T)$.

## 4. LE ROLE DES PARTITIONS CONTINUES DE L'UNITE.

Rappelons qu'on appelle partition continue de *l'unité* (en abrégé p.c.u.) sur T, toute famille $\phi = (\phi_i)_{i\in I}$ d'éléments de $C^\infty(T)$ telle que $0\leqslant\phi_i\leqslant 1$, $\sum_{i\in I}\phi_i = 1$ et telle que la famille (Supp $\phi_i$) des supports des $\phi_i$ soit localement finie dans T. Notons que si $\nu$ est élément de $M_\beta(T)$, la famille $(\nu(\phi_i))$ appartient à $\ell^1(I)$, car on a, pour toute partie finie J de I :

$$\sum_{i\in J}|\nu(\phi_i)| \leqslant \sum_{i\in J}|\nu|(\phi_i) = |\nu|(\sum_{i\in J}\phi_i) \leqslant |\nu|(1)$$

Considérons maintenant une mesure $\vec{\mu} : C^\infty(T) \to E$ à valeurs dans un elc quelconque E. Pour toute p.c.u. $(\phi_i)$, il est clair que la famille $(\vec{\mu}(\phi_i))$ est scalairement sommable dans E. Un problème se pose alors, qui est de savoir si cette famille est sommable dans E, ou ce qui revient au même d'après le théorème d'Orlicz-Pettis, si elle est faiblement sommable dans E. On montrera dans ce qui suit que ce n'est pas le cas en général ; toutefois on a :

(4.1) PROPOSITION. - *Soit* $\vec{\mu} : C^\infty(T)\longrightarrow E$ *une mesure. Pour toute p.c.u.* $(\phi_i)$, *la famille* $(\vec{\mu}(\phi_i))$ *est sommable dans* E", *pour la topologie faible* $\sigma(E'',E')$. *De plus, si* $\Delta$ *désigne la boule unité de* $C^\infty(T)$, *on a*

$$\sum_{i\in I}\vec{\mu}(\phi_i) \in \overline{\vec{\mu}(\Delta)} ,$$

*où l'adhérence est prise dans* E" *pour la topologie* $\sigma(E'',E')$.

**PREUVE.** - Fixons la p.c.u. $\phi = (\phi_i)_{i\in I}$ et désignons par $X_\phi$ l'application de E' dans R définie par :

$$X_\phi(x') = \sum_{i\in I} \langle\vec{\mu}(\phi_i),x'\rangle ,$$

ce qui a un sens d'après la remarque précédente. L'application $X_\phi$ est linéaire, de plus :

$$X_\phi(x') = \lim_J \sum_{i\in J} \langle\vec{\mu}(\phi_i),x'\rangle$$

où la limite est prise lorsque J décrit le système filtrant croissant des parties finies de I. On a donc :

$$|X_\phi(x')| = \lim_J \Big|\sum_{i\in J} \langle\vec{\mu}(\phi_i),x'\rangle\Big| = \lim_J \Big|\langle\vec{\mu}\Big(\sum_{i\in J}\phi_i\Big),x'\rangle\Big| .$$

Or la partie $B = \vec{\mu}(\Delta)$ est un disque borné complétant de E et comme $\sum_{i\in J}\phi_i \leq 1$, on en déduit :

$$|X_\phi(x')| \leq ||x'||_B = \sup_{x\in B}|\langle x,x'\rangle| .$$

Ceci prouve que la forme linéaire $X_\phi$ est continue lorsqu'on place sur E' la topologie de la convergence uniforme sur les disques bornés complétants de E ; a fortiori, $X_\phi$ est continue sur le dual fort $E'_\beta$ de E, donc $X_\phi$ est un élément de E" qui est égal à la somme (pour la topologie $\sigma(E'',E')$) de la famille $(\vec{\mu}(\phi_i))$. Enfin, la deuxième assertion provient du fait que pour la topologie $\sigma(E'',E')$, on a :

$$X_\phi = \lim_J \sum_{i\in J} \vec{\mu}(\phi_i) = \lim_J \vec{\mu}\Big(\sum_{i\in J}\phi_i\Big)$$

et que, pour chaque partie J, $\sum_{i\in J}\phi_i$ appartient à $\Delta$.

REMARQUE. - Un raisonnement analogue montre que si $\vec{\mu}$ appartient à $M_\beta(T,E)$, pour toute p.c.u. $(\phi_i)_{i\in I}$ et tout élément $\bar{\eta} = (\eta_i)$ de $\ell^\infty(I)$, la famille $(\eta_i\, \vec{\mu}(\phi_i))$ est sommable dans E" pour la topologie $\sigma(E'',E')$. De même, si $||\bar{\eta}|| \leqslant 1$, on a encore :

$$\sum_{i\in I} \eta_i\, \vec{\mu}(\phi_i) \in \overline{\vec{\mu}(\Delta)}\ ,$$

où l'adhérence est prise pour la topologie $\sigma(E'',E')$. Pour chaque p.c.u. $\phi = (\phi_i)$, on peut donc définir une application $T_\phi : \ell^\infty(I) \to E''$ en posant :

$$T_\phi(\bar{\eta}) = \sum_{i\in I} \eta_i\, \vec{\mu}(\phi_i)$$

et il est clair que cette application est continue pour les topologies $\sigma(\ell^\infty,\ell^1)$ et $\sigma(E'',E')$. Par ailleurs, on peut associer à la p.c.u. $\phi = (\phi_i)$ une autre application $S_\phi : \ell^\infty(I) \to E$ en posant :

$$S_\phi(\bar{\eta}) = \vec{\mu}(\sum_{i\in I} \eta_i\, \phi_i).$$

On obtient là un opérateur continu de l'espace de Banach $\ell^\infty(I)$ dans E. On peut noter que les applications $T_\phi$ et $S_\phi$ coïncident sur le sous-espace vectoriel formé des familles à support fini.

La donnée de la p.c.u. $\phi = (\phi_i)$ détermine également deux *fonctions additives d'ensembles* (en abrégé fae) sur la tribu $\mathcal{P}(I)$ des parties de I, d'une part, la fae $m_\phi : \mathcal{P}(I) \to E''$ définie par :

$$m_\phi(L) = \sum_{i\in L} \vec{\mu}(\phi_i)\ ,$$

qui est une fae bornée dans $E''_\sigma$ , et d'autre part, la fae $\theta_\phi : \mathscr{P}(I) \to E$ définie par :

$$\theta_\phi(L) = \vec{\mu}(\sum_{i \in L} \phi_i),$$

qui est une fae bornée dans E.

On vérifie aisément, de plus, que pour tout elc F, il existe un isomorphisme entre l'espace $L(\ell^\infty(I),F)$ des opérateurs continus $u : \ell^\infty(I) \to F$ et l'espace des fae $\vec{m} : \mathscr{P}(I) \to F$ à valeurs dans un disque borné complétant de F. A une telle fae $\vec{m}$, on associe l'opérateur u tel que $u(1_L) = \vec{m}(L)$ pour toute partie L de I. On peut noter que la fae $\theta_\phi$ (resp. $m_\phi$) que nous venons de définir sur la tribu $\mathscr{P}(I)$, est à valeurs dans la partie $\vec{\mu}(\Delta)$ (resp. $\overline{\vec{\mu}(\Delta)}$), qui est un disque borné complétant de E (resp. de $E''_\sigma$). La fae $\theta_\phi$ (resp. $m_\phi$) s'identifie donc à un opérateur continu $\ell^\infty(I) \to E$ (resp. $\ell^\infty(I) \to E''_\sigma$), et il est facile de voir que cet opérateur n'est autre que $S_\phi$ (resp. $T_\phi$).

On suppose maintenant que l'elc E est quasi-complet. Dans ce qui suit, on se propose de caractériser la mesure $\vec{\mu} : C^\infty(T) \to E$ pour que la famille $(\vec{\mu}(\phi_i))$ soit sommable dans E, pour toute p.c.u. $\phi = (\phi_i)$. Avec les remarques précédentes on voit que cela revient en fait à caractériser la mesure $\vec{\mu}$ pour que, pour toute p.c.u. $\phi$, la fae bornée $m_\phi$ (ou l'opérateur $T_\phi$) soit à valeurs dans E, plutôt que dans E".

NOTATIONS. - Soit $\phi = (\phi_i)$ une p.c.u. Pour toute partie $L \subset I$ et tout élément $\vec{\eta} = (\eta_i) \in \ell^\infty(I)$, on pose :

$$\psi_L = \sum_{i \in L} \phi_i \quad \text{et} \quad \psi_L^\eta = \sum_{i \in L} \eta_i \, \phi_i$$

qui sont évidemment des fonctions éléments de $C^\infty(T)$.

Rappelons enfin qu'une fae $\theta$ définie sur un anneau $\mathscr{A}$ de **parties** d'un ensemble $\Omega$, à valeurs dans un elc E, est dite *exhaustive* [11] **si** pour toute suite disjointe $(A_n)$ d'éléments de $\mathscr{A}$, la suite $(\theta(A_n))$ **tend vers** zéro dans E.

Cela étant, on a maintenant le théorème suivant :

(4.2) THEOREME. - *Soit* E *un elc quasi-complet. Pour toute mesure* $\vec{\mu} : C^{\bullet}(T) \to$ *les assertions suivantes sont équivalentes :*

*a) Pour toute p.c.u.* $(\phi_i)$, *la famille* $(\vec{\mu}(\phi_i))$ *est sommable dans* E.

*b) Pour toute p.c.u.* $(\phi_i)$, *la suite généralisée* $(\vec{\mu}(\phi_i))$ *tend vers* $\mathbf{z}$

*c) Pour toute p.c.u. dénombrable* $(\phi_n)$ *, la suite* $(\vec{\mu}(\phi_n))$ *tend vers* $\mathbf{z}$

*d) Pour toute p.c.u.* $(\phi_i)$, *la famille* $(\vec{\mu}(\psi_J))_{J \text{ finie}}$ *est relativement compacte dans* E.

*d') Pour toute p.c.u.* $(\phi_i)$, *la famille* $(\vec{\mu}(\psi_J))_{J \text{ finie}}$, *est faiblement relativement compacte dans* E.

*e) Pour toute p.c.u.* $\phi = (\phi_i)$ , $T_\phi$ *est un opérateur compact de* $\ell^\infty(I)$ *dans* E.

*e') Pour toute p.c.u.* $\phi = (\phi_i)$, $T_\phi$ *est un opérateur faiblement compact de* $\ell^\infty(I)$ *dans* E.

*f) Pour toute p.c.u.* $\phi = (\phi_i)$, *la fae* $\theta_\phi$ *est exhaustive sur la tribu* $\mathscr{P}(I)$.

*f') Pour toute p.c.u.* $\phi = (\phi_i)$ , *la fae* $\theta_\phi$ *est exhaustive sur l'ens.* $\mathscr{F}(I)$ *des parties finies de* I.

**PREUVE.** - Elle s'obtient selon le schéma :

$$\begin{tikzcd}
 & & b \arrow[r, Rightarrow] & c \arrow[d, Rightarrow] \\
d \arrow[d, Rightarrow] & a \arrow[l, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & f' \arrow[l, Rightarrow] & f \arrow[l, Rightarrow] \\
d' \arrow[ur, Rightarrow] & e' \arrow[l, Rightarrow] & e \arrow[l, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

**a)**$\Longrightarrow$**d).** Fixons la p.c.u. $\phi = (\phi_i)$. Pour tout voisinage de zéro V dans E, il existe une partie finie P de I, telle que, pour toute partie finie J de I disjointe de P, on ait

$$\sum_{i\in J} \vec{\mu}(\phi_i) \in V ,$$

c'est-à-dire, avec les notations utilisées,

$$\vec{\mu}(\psi_J) \in V.$$

En particulier, si J est une partie finie quelconque de I, on a :

$$\vec{\mu}(\psi_J) \in \vec{\mu}(\psi_{J\cap P}) + V .$$

On en déduit l'existence d'une partie finie M de E telle que :

$$\vec{\mu}(\psi_J) \in M + V$$

pour toute partie finie J de I. Il en résulte que la famille $\{\vec{\mu}(\psi_J)\}_{J \text{ finie}}$ est précompacte dans E, donc relativement compacte puisque E est quasi-complet.

**d)**$\Longrightarrow$ d') est immédiat.

**d')**$\Longrightarrow$ a) Il suffit de montrer que la somme de la famille $(\vec{\mu}(\phi_i))$, qui existe dans E" pour la topologie $\sigma(E'',E')$, est en fait un élément de E.

Or on a :

$$\sum_{i\in I} \vec{\mu}(\phi_i) = \lim_{J \text{ finie}} \sum_{i\in J} \vec{\mu}(\phi_i) = \lim_{J \text{ finie}} \vec{\mu}(\psi_J),$$

où la limite est prise pour la topologie $\sigma(E'',E')$. Comme la suite **généralisée** $(\vec{\mu}(\psi_J))_{J \text{ finie}}$ est faiblement relativement compacte dans E, elle a une valeur d'adhérence faible dans E qui est nécessairement sa limite faible $\sum_{i\in I} \vec{\mu}(\phi_i)$. Donc, $\sum_{i\in I} \vec{\mu}(\phi_i)$ appartient à E, ce qui suffit.

a)$\Longrightarrow$e) Comme la famille $(\vec{\mu}(\phi_i))$ est sommable dans E, l'application $T_\phi : (\eta_i) \mapsto \sum_{i\in I} \eta_i \vec{\mu}(\phi_i)$ est à valeurs dans E et est continue pour les topologies $\sigma(\ell^\infty,\ell^1)$ et $\sigma(E,E')$. Soit $\overline{\eta}$ est un élément de $\ell^\infty(I)$ tel que $|\eta_i| = 1$ pour tout i ; pour toute partie finie J de I désignons par $J_1$ (resp. $J_2$) l'ensemble des indices $i\in J$ tels que $\eta_i = +1$ (resp. $\eta_i = -1$). Alors on a

$$\sum_{i\in J} \eta_i \vec{\mu}(\phi_i) = \vec{\mu}(\psi_{J_1}) - \vec{\mu}(\psi_{J_2}).$$

Donc

$$\sum_{i\in J} \eta_i \vec{\mu}(\phi_i) \in 2\, \Gamma(\{\vec{\mu}(\psi_J)\}_{J \text{ finie}}).$$

En passant à la limite, on obtient

$$T_\phi(\overline{\eta}) \in 2\, \overline{\Gamma}\{(\vec{\mu}(\psi_J))_{J \text{ finie}}\} .$$

Or la boule unité $A^\infty$ de $\ell^\infty(I)$ est l'enveloppe disquée fermée pour la topologie $\sigma(\ell^\infty,\ell^1)$ des points $\overline{\eta}$ tels que $|\eta_i| = 1$. Il en résulte que la partie $T_\phi(A^\infty)$ est contenue dans $2\, \overline{\Gamma}\{(\vec{\mu}(\psi_J))_J\}$. Comme on a déjà prouvé a)$\Rightarrow$ d), et comme E est quasi-complet, cette enveloppe disquée est une partie compacte de E, donc $T_\phi$ est un opérateur compact.

(4.3) **LEMME** [10]. - *Soient* E *un espace de Banach et* B *sa boule unité. Si une partie* H *de* E *est telle que pour tout* $\varepsilon > 0$ , *il existe une partie* K *faiblement compacte dans* E *telle que* H *soit contenue dans* $K + \varepsilon B$, *alors* H *est faiblement relativement compacte.*

On est maintenant en mesure d'établir :

(4.4) **THEOREME**. - *Soit* E *un elc quasi-complet et soit* $\vec{\mu}$ *une mesure* $C^{\infty}(T) \to E$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*a) la mesure* $\vec{\mu}$ *vérifie l'une des conditions équivalentes du théorème (4.2),*

*b) pour toute p.c.u.* $(\phi_i)$ *l'opérateur* $S_{\phi} : \ell^{\infty}(I) \to E$ *est faiblement compact,*

*c) la mesure* $\vec{\mu}$ *transforme les parties* $H \in \mathscr{H}^{\infty}(T)$ *en parties faiblement relativement compactes de* E.

*d) pour toute p.c.u.* $(\phi_i)$, *la famille* $(\vec{\mu}(\psi_L))_{L \in \mathscr{P}(I)}$ *est faiblement relativement compacte.*

**PREUVE**. - a)$\Longrightarrow$b) s'obtient en utilisant la condition f) du théorème (4.2) et la remarque précédant l'énoncé du lemme (4.3).

b)$\Longrightarrow$c) soit $H_1$ un élément de $\mathscr{H}^{\infty}(T)$ que l'on peut supposer disqué et contenu dans le boule unité $\Delta$ de $C^{\infty}(T)$. Grâce à [12] , on sait que pour tout $\varepsilon > o$, il existe une p.c.u. $\phi = (\phi_i)$ et des points $t_i \in T$ tels que l'on ait :

$$||f - \sum_{i \in I} f(t_i)\phi_i|| \leqslant \varepsilon$$

pour toute $f \in H_1$ . Désignons par H la partie $\vec{\mu}(H_1)$. Comme la famille $(f(t_i))_{i \in I}$ est contenue dans la boule unité de $\ell^\infty(I)$, pour toute $f \in H_1$ , il existe d'après b) une partie K faiblement compacte dans E telle que :

$$H \subset K + \varepsilon\vec{\mu}(\Delta).$$

En définitive, comme la partie $\vec{\mu}(\Delta)$ est bornée dans E, pour tout $\varepsilon > o$ et tout voisinage disqué de zéro V dans E, il existe une partie faiblement compacte K de E telle que l'on ait :

$$H \subset K + \varepsilon V.$$

Si on désigne par $E_V$ l'espace vectoriel engendré par V muni de la semi-norme jauge de V et par $\widehat{E_V}$ l'espace de Banach associé, grâce au lemme (4.3) on voit que pour chaque V, la projection $\widehat{H_V}$ de H dans l'espace $\widehat{E_V}$ est faiblement relativement compacte. Comme le complété $\hat{E}$ de E est la limite projective des $\widehat{E_V}$, on en déduit que l'adhérence $\hat{H}$ de H dans $\hat{E}$ est faiblement compacte. Mais, comme H est bornée, la partie $\hat{H}$ est en fait contenue dans E puisque cet espace est quasi-complet, donc H est faiblement relativement compacte dans

c) $\Longrightarrow$ d) $\Longrightarrow$ a) est immédiat grâce à (4.2.d').

Désignons par $M_\beta^*(T,E)$ le sous-espace vectoriel de $M_\beta(T,E)$ formé des mesures $\vec{\mu}$ qui vérifient les conditions équivalentes de (4.2) et (4.4).

On obtient là un nouvel espace de mesures qui est fermé dans $M_\beta(T,E)$, pour la topologie de la convergence uniforme sur $\Delta$. Le résultat qui suit permet de mieux situer cet espace $M_{\beta^*}(T,E)$ parmi les espaces de mesures déjà étudiés :

(4.5) COROLLAIRE. - *a)* $M_\sigma(T,E)$ *est un sous-espace vectoriel de* $M_{\beta^*}(T,E)$.

*b) Toute mesure prolongeable* $\vec{\mu} : C^\infty(T) \to E$ *appartient à* $M_{\beta^*}(T,E)$.

PREUVE. - a) soit $\vec{\mu} : C^\infty(T) \twoheadrightarrow E$ une mesure $\sigma$-régulière ; montrons que la condition c) de (4.2) est satisfaite : si $(\phi_n)$ est une p.c.u. et si on pose $f_n = \sum_{k \geq n} \phi_k$, alors $(f_n)$ est une suite décroissante de $C^\infty(T)$ qui converge simplement vers zéro. La suite $(\vec{\mu}(f_n))$ tend donc vers zéro et on déduit aisément de là que la suite $(\vec{\mu}(\phi_n))$ converge aussi vers zéro.

b) Si la mesure $\vec{\mu}$ est prolongeable, l'application $\vec{\mu} : C^\infty(T) \to E$ est faiblement compacte et la condition d') de (4.2) est alors satisfaite.

L'étude qui suit a pour but d'établir sous quelles conditions les deux espaces $M_\beta(T,E)$ et $M_{\beta^*}(T,E)$ coïncident. D'une façon plus précise, on résout les deux problèmes suivants :

1) caractériser les espaces complètement réguliers T pour lesquels on a $M_\beta(T,E) = M_{\beta^*}(T,E)$ pour tout elc quasi-complet E,

2) caractériser les elc quasi-complets E pour lesquels on a $M_\beta(T,E) = M_{\beta^*}(T,E)$ pour tout espace complètement régulier T.

(4.6) PROPOSITION. - *Pour un espace* T *complètement régulier, les assertions suivantes sont équivalentes :*

*a) l'espace* T *est pseudocompact,*

*b) pour tout elc quasi-complet* E , *toute mesure* $\vec{\mu} : C^\infty(T) \to E$ *appartient à* $M_{\beta^*}(T,E)$,

*c) pour tout espace de Banach E, toute mesure* $\vec{\mu} : C^\infty(T) \to E$ *appartient à* $M_{\beta^*}(T,E)$.

PREUVE. - a)$\Longrightarrow$b) : soit T un espace pseudocompact ; toute p.c.u. sur T est nécessairement finie donc les conditions de (4.2) sont satisfaites par toute mesure $\vec{\mu}$.

b)$\Longrightarrow$c) est immédiat.

c)$\Longrightarrow$a) : Prenons en particulier pour E l'espace de Banach $C^\infty(T)$ et pour $\vec{\mu}$ l'identité. Montrons que T est pseudocompact. Sinon il existe une suite localement finie d'ouverts disjoints non vides $(U_n)_{n\geq 1}$. Fixons $x_n \in U_n$ et, pour chaque n, soit $\phi_n$ une fonction continue telle que $0\leq\phi_n\leq 1$, $\phi_n(x_n)=1$ et Supp $\phi_n \subset U_n$. La fonction $\psi_\infty = \sum_{n\geq 1} \phi_n$ est continue et telle que $0\leq\psi_\infty\leq 1$, de sorte qu'en posant $\phi_0 = 1-\psi_\infty$ on obtient une p.c.u. dénombrable $(\phi_n)_{n\geq 0}$ mettant en défaut la condition (4.2.c).

En suivant [16], rappelons qu'un elc E est dit *faiblement $\Sigma$-complet* si toute mesure à valeurs dans E est prolongeable. Grâce au corollaire (4.5), on voit que, si l'elc quasi-complet E est faiblement $\Sigma$-complet, on a l'égalité $M_\beta(T,E) = M_{\beta^*}(T,E)$ pour tout espace complètement régulier T. Toutefois, la réciproque est fausse en général. Pour le voir, on introduit encore :

(4.7) DEFINITION. - *Un elc* E *est dit exhaustif si pour tout espace mesurable* $(\Omega,\Sigma)$, *où* $\Sigma$ *est une tribu, toute fae bornée* $\vec{m} : \Sigma \to E$ *est exhaustive*

On peut donner une définition équivalente des elc exhaustifs sous la forme suivante :

"L'elc est dit exhaustif si pour toute fae bornée $\vec{m} : \mathcal{P}(N) \to E$, la suite $(\vec{m}(\{n\}))$ tend vers zéro dans E."

En effet, si l'elc E est exhaustif en ce sens, et si $\vec{m} : \Sigma \to E$ est une fae bornée sur une tribu $\Sigma$ , pour toute suite disjointe $(A_n)$ de $\Sigma$ on peut définir une fae bornée $\vec{m}_1 : \mathcal{P}(N) \to E$ en posant :

$$\vec{m}_1(\Delta) = \vec{m}({}_n\Sigma_\Delta A_n).$$

Alors $\vec{m}(A_n) = \vec{m}_1(\{n\})$, ce qui suffit.

Pour une étude plus approfondie des elc exhaustifs, on peut par exemple se référer à [7] et [8] . Notons simplement qu'on peut montrer, en utilisant un résultat de ROSENTHAL [13] , qu'un espace de Banach E est exhaustif si et seulement si E ne contient aucun sous-espace isomorphe à $\ell^\infty$.

De plus, si un elc quasi-complet E est faiblement $\Sigma$-complet, il est **exhaustif** ; toutefois l'espace de Banach $c_o$ est exhaustif, mais il n'est évidemment pas faiblement $\Sigma$-complet. On a alors :

(4.8) PROPOSITION. - *Pour qun elc quasi-complet* E, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

*a)* E *est exhaustif.*

*b) Toute mesure* $\vec{\mu} : C^{\infty}(T) \to E$ *appartient à* $M_{\beta*}(T,E)$.

*c) Pour tout ensemble* I, *tout opérateur continu de* $\ell^{\infty}(I)$ *dans* E *est faiblement compact.*

*d) Tout opérateur continu de* $\ell^{\infty}(N)$ *dans* E *est faiblement compact.*

PREUVE. - a)$\Longrightarrow$b) est évident avec la condition (4.2f) et la définition (4.7)
b)$\Longrightarrow$c) Pour l'espace discret I on a $\ell^{\infty}(I) = C^{\infty}(I)$, et la boule unité de $\ell^{\infty}(I)$ appartient à $\mathscr{H}^{\infty}(I)$ il suffit donc d'utiliser (4.4.c).

c)$\Longrightarrow$d) est évident.

d)$\Longrightarrow$a) soit $\vec{m} : \mathscr{P}(N) \twoheadrightarrow E$ une fae bornée : il lui correspond un opérateur continu $u : \ell^{\infty}(N) \to E$ donc une mesure $\vec{\mu} : C^{\infty}(N) \to E$. Cette mesure $\vec{\mu}$ est prolongeable d'après d), donc appartient à $M_{\beta*}(T,E)$. Or la suite $\phi_n = 1_{\{n\}}$ est une p.c.u. dénombrable sur l'espace discret $\mathbb{N}$, de sorte que $\vec{m}(\{n\}) = \vec{\mu}(\phi_n) \to o$ d'après (4.2.c).

**REMARQUE.** - On peut noter, d'après d), qu'un elc quasi-complet et exhaustif ne contient pas de sous-espace isomorphe à $\ell^\infty(N)$.

On a déjà noté que toute mesure $\sigma$-régulière $\vec{\mu} : C^\infty(T) \to E$, et a fortiori tout élément de $M^\infty(T,E)$, vérifie les conditions équivalentes du théorème (4.2). L'étude qui précède montre de plus que les espaces $M_\sigma(T,E)$ et $M^\infty(T,E)$ sont en général strictement plus petits que l'espace $M_{\beta*}(T,E)$ ; il suffit par exemple de considérer, pour un espace T non pseudo compact et un elc E exhaustif, une mesure $\vec{\mu} : C^\infty(T) \to E$ qui ne soit pas $\sigma$-régulière. Dans ce qui suit, on se propose donc de caractériser, à l'aide des p.c.u., les mesures $\vec{\mu}$ appartenant soit à $M_\sigma(T,E)$ soit à $M^\infty(T,E)$.

**(4.9) THEOREME.** - *Soit* E *un elc quasi-complet. Pour toute mesure* $\vec{\mu} : C^\infty(T) \to E$ *les assertions suivantes sont équivalentes :*

*a)* $\vec{\mu}$ *appartient à* $M_\sigma(T,E)$.

*b) pour toute p.c.u. dénombrable* $(\phi_n)$, *on a* $\vec{\mu}(1) = \Sigma\vec{\mu}(\phi_n)$.

*c) pour toute p.c.u.* $\phi = (\phi_i)$, *la fae* $\theta_\phi : L \to \vec{\mu}(\sum_{i\in L} \phi_i)$ *est une mesure sur la tribu* $\mathcal{P}(I)$.

*d) pour toute p.c.u. dénombrable* $(\phi_n)$ *les opérateurs* $T_\phi$ *et* $S_\phi$ *coïncident sur* $\ell^\infty(N)$.

**PREUVE.** - a)$\Longrightarrow$b) En posant $f_n = \sum_0^n \phi_k$, on obtient une suite $(f_n)$ de $C^\infty(T)$, telle que $f_n \uparrow 1$ ; comme la mesure $\vec{\mu}$ est $\sigma$-régulière, on a :

$$\vec{\mu}(1) = \lim_n \vec{\mu}(f_n) = \sum_0^\infty \vec{\mu}(\phi_k).$$

b)$\Longrightarrow$c) Soit $(L_n)_{n\geq 1}$ une suite de parties de I deux à deux disjointes.
Posons $L_0 = I \setminus \bigcup_{n\geq 1} L_n$, puis $\psi_n = \psi_{L_n}$, pour $n \geq 0$. Alors $(\psi_n)_{n\geq 0}$ est une p.c.u. dénombrable, d'où avec b) :

$$\vec{\mu}(1) = \sum_{n\geq 0} \vec{\mu}(\psi_n) = \sum_{n\geq 0} \theta_\phi (L_n).$$

Comme on a $\vec{\mu}(1) = \theta_\phi(I) = \theta_\phi(L_0) + \theta_\phi( \bigcup_{n\geq 1} L_n)$,

On en déduit aisément l'égalité :

$$\theta_\phi(\bigcup_{n\geq 1} L_n) = \sum_{n\geq 1} \theta_\phi(L_n).$$

ce qui suffit.

c)$\Longrightarrow$d) Avec c), les opérateurs $S_\phi$ et $T_\phi$ coïncident sur les fonctions $1_L \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ ; de plus la mesure $\vec{\mu}$ est déjà un élément de $M_{\beta *}(T,E)$, donc $T_\phi$ est un opérateur continu de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ dans E. Comme l'opérateur $S_\phi$ est lui aussi continu de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ dans E, pour conclure il suffit d'utiliser le fait que la famille $(1_L)_{L\in \mathcal{P}(\mathbb{N})}$ est totale dans l'espace de Banach $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

d)$\Longrightarrow$b) est immédiat.

b)$\Longrightarrow$a) soit $(f_n)$ une suite de $C^\infty(T)$ telle que $f_n \downarrow 0$. On peut aisément supposer $f_1 = 1$. Fixons $\varepsilon>0$ et posons $g_n = f_n \vee \varepsilon$ et $h_n = g_n - \varepsilon$. Pour tout point $x\in T$, il existe un entier N telle que $f_N(x) < \frac{\varepsilon}{2}$ ; donc aussi, par continuité, un voisinage V de x tel que $f_N(t)<\varepsilon$, pour tout $t\in V$. On a alors, $h_n(t) = 0$ pour tout $t \in V$ et tout $n \geq N$, donc la suite $(\mathrm{Supp}\,h_n)$ des supports des $h_n$ est localement finie. On a, de plus, $h_n \downarrow 0$ et $h_1 = 1-\varepsilon$. Alors la suite $\phi_n = \frac{1}{1-\varepsilon}(h_n - h_{n+1})$ est une p.c.u. de sorte que :

$$\vec{\mu}(1) = \frac{1}{1-\varepsilon} \sum_{1}^{\infty} \vec{\mu}(h_n - h_{n+1})$$

$$= \frac{1}{1-\varepsilon} \lim_{n \to \infty} [\vec{\mu}(h_1) - \vec{\mu}(h_n)]$$

$$= \vec{\mu}(1) - \frac{1}{1-\varepsilon} \lim_{n \to \infty} \vec{\mu}(h_n) .$$

On en déduit que la suite $(\vec{\mu}(h_n))$ tend vers zéro dans E. Or, on a $0 \leq f_n - h_n < \varepsilon$, de sorte que, pour tout n, $\vec{\mu}(f_n) - \vec{\mu}(h_n)$ appartient à $\varepsilon\vec{\mu}(\Delta)$. Il est facile de voir alors que la suite $(\vec{\mu}(f_n))$ converge aussi vers zéro, ce qui suffit.

(4.10) THEOREME. - *Soit* E *un elc quasi-complet. Pour une mesure* $\vec{\mu}$: $C^{\infty}(T) \to E$, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

*a)* $\vec{\mu}$ *appartient à* $M^{\infty}(T,E)$.

*b) Pour toute p.c.u.* $((\phi_i)_i$ , *on a* $\vec{\mu}(1) = \sum_i \vec{\mu}(\phi_i)$.

*c) Pour toute p.c.u.* $\phi = (\phi_i)_{i\in I}$ , *les opérateurs* $S_\phi$ *et* $T_\phi$ *coïncident sur* $\ell^{\infty}(I)$.

*d) Pour toute p.c.u.* $\phi = (\phi_i)$, *la fac* $\theta_\phi : L \to \vec{\mu}(\sum_{i\in L} \phi_i)$ *est une mesure atomique sur la tribu* $\mathcal{P}(I)$.

PREUVE. - a)$\Longrightarrow$b) est immédiat, puisque la famille $\{\sum_{i\in J} \phi_i\}_J$ finie appartient à $\mathcal{K}^{\infty}(T)$.

b)$\Longrightarrow$d). Fixons une partie L de I et posons $\bar{L} = L \cup \{\infty\}$. On définit une **p.c.u.** $\phi' = (\phi'_i)_{i\in I}$ en posant $\phi'_i = \phi_i$, si $i \in L$, et $\phi'_\infty = \psi_{I\setminus L} = \sum_{i \notin L} \phi_i$.

On a alors $\vec{\mu}(1) = \theta_\phi(I\setminus L) + \theta_\phi(L)$ et, avec b), on a aussi

$\vec{\mu}(1) = \theta_\phi(I\setminus L) + \sum_{i\in L} \vec{\mu}(\phi_i) = \theta_\phi(I\setminus L) + \sum_{i\in L} \theta_\phi(\{i\})$.

On en déduit $\theta_\phi(L) = \sum_{i\in L} \theta_\phi(\{i\})$ . C.Q.F.D.

L'assertion d)$\Longrightarrow$c) se déduit, comme dans la preuve de (4.9), du **fait que** $S_\phi$ et $T_\phi$ sont des opérateurs continus de $\ell^\infty(I)$ dans E et coïncident **sur la** famille $(1_L)_{L\in\mathscr{P}(I)}$ qui est totale dans l'espace de Banach $\ell^\infty(I)$.

Montrons enfin que c)$\Longrightarrow$a). Fixons une partie $H \in \mathscr{H}^\infty(T)$, disquée et **contenue** dans la boule unité $\Delta$ de $C^\infty(T)$. D'après [12], pour tout $\varepsilon > o$ , il **existe une** p.c.u. $\phi = (\phi_i)$, et des points $ti \in T$ tels que :

$$||f - \sum_{i\in I} f(ti)\, \phi_i|| < \varepsilon$$

pour toute $f \in H$. Soit $(f_\alpha)$ une suite généralisée contenue dans H qui **converge** simplement vers zéro ; on pose alors $\bar{\eta}_\alpha = (f_\alpha(ti))_{i\in I}$ et on a

$$\vec{\mu}(f_\alpha) - S_\phi(\bar{\eta}_\alpha) \in \varepsilon\vec{\mu}(\Delta) \;,$$

c'est-à-dire, avec c) :

$$\vec{\mu}(f_\alpha) - T_\phi(\bar{\eta}_\alpha) \in \varepsilon\, \vec{\mu}(\Delta).$$

Or la famille $(\bar{\eta}_\alpha)$ converge simplement vers zéro dans $\ell^\infty(I)$ ; comme **elle** est bornée, donc équicontinue dans $\ell^\infty(I)$, elle converge en fait vers O **pour**

pour la topologie $\sigma(\ell^{\infty}(I),\ell^{1}(I))$, donc la suite généralisée $(T_{\phi}(\bar{\eta}_{\alpha}))_{\alpha}$ tend vers 0 dans E pour la topologie $\sigma(E,E')$. Mais, avec c) la mesure $\vec{\mu}$ vérifie la condition (4.2.a) ; donc l'opérateur $T_{\phi}$ est compact. Comme on a $\|\bar{\eta}_{\alpha}\| \leqslant 1$, la famille $(T_{\phi}(\bar{\eta}_{\alpha}))$ est relativement compacte dans E ; elle converge donc en fait vers 0 pour la topologie de E. On déduit aisément de là que la suite généralisée $(\vec{\mu}(f_{\alpha}))$ converge aussi vers zéro dans E, puisque la partie $\vec{\mu}(\Delta)$ est bornée dans E.

**EXEMPLE.** - ETUDE DU CAS PARTICULIER OU T = I EST DISCRET.

Lorsque I est un espace discret, il existe sur I une p.c.u. particulièrement intéressante qui est la famille $(1_{\{i\}})_{i\in I}$ ; dans ce qui suit, nous la désignerons par $\phi_o$ . De plus, l'espace $C^{\infty}(I)$ est l'espace de Banach $\ell^{\infty}(I)$ ; donc toute mesure $\vec{\mu} : C^{\infty}(I) \to E$ s'identifie à un opérateur $\ell^{\infty}(I) \to E$ et il est facile de voir que cet opérateur est l'opérateur $S_{\phi_o}$ associé à la p.c.u. $\phi_o$ . En définitive, l'isomorphisme entre les espaces $M_{\beta}(I,E)$, $L(\ell^{\infty}(I),E)$ et $ba(\mathscr{P}(I),E)$ consiste à identifier la mesure $\vec{\mu}$ , l'opérateur $S_{\phi_o}$ et la fae bornée $\theta_{\phi_o}$ . Le résultat qui suit a pour but d'étudier cet isomorphisme lorsqu'on le restreint à divers sous-espaces de $M_{\beta}(I,E)$.

**NOTATIONS.** - Soient E et F des elc ; on désigne par $K_{\sigma}(E,F)$ l'espace des opérateurs faiblement compacts de E dans F; et pour une tribu $\Sigma$, on note $ex(\Sigma,E)$ (resp. $ca(\Sigma,E)$) l'espace des fae exhaustives (resp. des mesures) de $\Sigma$ dans E.

(4.11) PROPOSITION. - *a) Soit* E *un elc quasi-complet. A un isomorphisme près on a les égalités :*

$$M_\beta^*(I,E) = K_\sigma(\ell^\infty(I),E) = ex[\mathcal{P}(I),E]$$

*b) L'espace* $M_\sigma(I,E)$ *s'identifie à l'espace* $ca[\mathcal{P}(I),E]$ *ou encore à l'espace des opérateurs* $u : \ell^\infty(I) \to E$ *dont la restriction à la boule unité de* $\ell^\infty(I)$ *est faiblement (ou simplement) continue pour les suites.*

*c) L'espace* $M^\infty(I,E) = H(\ell^\infty(I),E)$ *s'identifie à l'espace des mesures atomiques* $\mathcal{P}(I) \to E$.

PREUVE. - a) est une conséquence immédiate des remarques précédentes et des théorèmes (4.2) et (4.4). Notons en particulier que, dans ce cas, $M_\beta^*(I,E)$ est aussi l'espace des mesures prolongeables $C^\infty(I) \to E$.

b) Il suffit de prouver que si, la mesure $\vec{\mu} : C^\infty(I) \to E$ est telle que la fae $\theta_{\phi_o}$ associée soit une mesure sur $\mathcal{P}(I)$, alors $\vec{\mu}$ appartient à $M_\sigma(I,E)$. Soit $(\bar{\eta}^n)_n$ une suite décroissante qui converge simplement vers 0 dans $\ell^\infty(I)$. Pour chaque n, la fonction $\bar{\eta}^n$ est représentée par la famille $(\eta^n{}_i)_{i\in I}$ et on peut supposer que pour tout n et pour tout i, on a $\eta_i^n < 1$. Fixons un voisinage de zéro V dans E ; si $\Delta$ désigne la boule unité de $\ell^\infty(I)$, comme $\vec{\mu}(\Delta)$ est un borné de E, il existe $\varepsilon > o$ tel que la partie $\varepsilon\vec{\mu}(\Delta)$ soit contenue dans V. On désigne alors par $I_n$ l'ensemble des indices $i \in I$ tels que $\eta_i^n < \varepsilon$ et on construit, par récurrence, la suite $(L_n)$ en posant $L_1 = I_1$ et $L_n = I_n \setminus \bigcup_1^{n-1} L_k$.

Il est clair que l'on obtient ainsi une partition de I et on a, pour chaque n,

$$\overline{\eta^n} \leqslant \varepsilon + \sum_{k\geqslant n+1} 1_{L_k}$$

On a donc $\overline{\eta^n} = \varepsilon g_n + \sum_{k\geqslant n+1} 1_{L_k}$,

où $g_n \in \Delta$, et, de plus, $\vec{\mu}(\sum_{k\geqslant n+1} 1_{L_k}) = \theta_{\phi_o}(\bigcup_{k\geqslant n+1} L_k) = \sum_{k\geqslant n+1} \theta_{\phi_o}(L_k)$

puisque, par hypothèse, $\theta_{\phi_o}$ est une mesure. Comme la famille $(\theta_{\phi_o}(L_k))_k$ est sommable dans E, il existe un entier $n_o$ tel que, pour tout $n \geq n_o$ on ait

$$\vec{\mu}(\overline{\eta^n}) = \varepsilon\vec{\mu}(g_n) + \sum_{k\geqslant n+1} \theta_{\phi_o}(L_k) \in V + V ,$$

ce qui entraine le résultat.

c) Il suffit là aussi de prouver que si la fac $\theta_{\phi_o}$ associée à $\vec{\mu}$ est une mesure atomique sur $\mathscr{P}(I)$, alors $\vec{\mu}$ appartient à $M^\infty(I,E)$. Mais, $\theta_{\phi_o}$ s'identifie à la famille $(\theta_{\phi_o}(\{i\})) = (\vec{\mu}(1_{\{i\}}))$ qui est sommable dans E. Il en résulte que chaque famille $(\eta_i\vec{\mu}(\{i\}))$, $\bar{\eta} \in \ell^\infty(I)$, est sommable dans E. L'opérateur $T_{\phi_o}$ est donc à valeurs dans E et coïncide avec $S_{\phi_o}$ puisqu'il coïncide avec $S_{\phi_o}$ sur les fonctions $1_L \in \ell^\infty(I)$. Alors $S_{\phi_o}$ , donc $\vec{\mu}$ , est $\sigma(\ell^\infty,\ell^1)$-continue sur la boule unité de $\ell^\infty(I)$, c'est-à-dire que $\vec{\mu}$ est bien élément de $M^\infty(I,E)$.

## 5. APPLICATIONS A DES THEOREMES DE CONVERGENCE SIMPLE.

Considérons une suite $(\vec{\mu}_n)$ dans $M_\beta(T,E)$ telle que, pour toute $f \in C^\infty(T)$, la suite $(\vec{\mu}_n(f))$ converge dans E ; si pour toute f, on pose $\vec{\mu}(f) = \lim_n \vec{\mu}_n(f)$, on déduit immédiatement du théorème de Banach-Steinhaus que l'**application** $\vec{\mu} : C^{\infty}(T) \to E$ ainsi construite est encore un élément de $M_{\beta}(T,E)$. On **peut** se demander si on a des résultats analogues lorsqu'on remplace $M_{\beta}(T,E)$ **par** les divers sous-espaces introduits précédemment. La réponse est **positive et** elle est liée à des questions de convergence simple de suites de **fae bornées** à valeurs vectorielles. On a, en effet :

(5.1) PROPOSITION. - *Soit* E *un elc quasi-complet et soit* $(\vec{\mu}n)$ *une suite de* $M_{\beta^*}(T,E)$ *( resp.* $M_{\sigma}(T,E)$ ; $M^{\infty}(T,E)$*) telle que, pour toute* $f \in C^{\infty}(T)$*) la suite* $(\vec{\mu}n(f))$ *converge dans* E. *(et même seulement dans* $E_{\sigma}$*) vers un élément noté* $\vec{\mu}(f)$. *Alors* $\vec{\mu}$ *appartient à* $M_{\beta^*}(T,E)$ *(resp.* $M_{\sigma}(T,E)$; $M^{\infty}(T,E)$*).*

PREUVE. - L'assertion concernant l'espace $M_{\beta^*}(T,E)$ se déduit immédiatement de la caractérisation de cet espace donnée dans (4.2.f) et du théorème de Brooks-Jewett sur les limites simples de suites de fae exhaustives [4] . Pour l'espace $M_{\sigma}(T,E)$, on procède de même en utilisant (4.9) et le théorème de Nikodym-. Supposons maintenant que la suite $(\vec{\mu}n)$ soit dans $M^{\infty}(T,E)$ et fixons $x' \in E'$. Pour toute p.c.u. $\phi = (\phi_i)$, désignons par $\theta_{\phi}^{n}$ (resp. $\theta_{\phi}$) la fae $\mathscr{P}(I) \to \mathbb{R}$ associée à la mesure $x' \circ \vec{\mu}_n$ (resp. $x' \circ \vec{\mu}$). Pour toute partie L de I, on a alors $\theta_{\phi}(L) = \lim_{n} \theta_{\phi}^{n}(L)$ ; donc, avec le théorème de Nikodym, $\theta_{\phi}$ est déjà une mesure scalaire sur $\mathscr{P}(I)$. De plus, chaque $\theta_{\phi}^{n}$ étant une mesure atomique, il existe une partie dénombrable N de I telle que $\theta_\phi^n(\{i\}) = o$ pour tout $i \notin N$ et pour tout entier n. On en déduit que $\theta_\phi(M) = o$ pour toute partie M de I disjointe de N.

Pour toute partie L de I, on a donc

$$\theta_\phi(L) = \theta_\phi(L \cap N) = \sum_{i \in L \cap N} \theta_\phi(\{i\}) = \sum_{i \in L} \theta_\phi(\{i\}) ,$$

puisque la partie $L \cap N$ est dénombrable. La mesure $\theta_\phi$ est atomique sur $\mathcal{P}(I)$. En appliquant (4.10), on en déduit que la mesure scalaire $x' \circ \vec{\mu}$ appartient à $M^\infty(T)$. Pour conclure, il suffit d'appliquer (3.3).

Ce résultat permet de retrouver les propriétés des espaces $M_\sigma(T)$ et $M^\infty(T)$ relatives à la semi-complétude faible, qui sont établies dans [2] et [12] par des techniques différentes :

(5.2) COROLLAIRE. - *Les espaces $M_\sigma(T)$ et $M^\infty(T)$ sont faiblement semi-complets.*

En fait la proposition (5.1) permet de montrer beaucoup plus ; on a le résultat suivant :

(5.3) THEOREME. - *Pour tout elc quasi-complet et faiblement semi-complet les elc $M^\infty(T,E)$ et $M_\sigma(T,E)$ sont faiblement semi-complets.*

PREUVE. - Faisons la pour $M^{\infty}(T,E)$ en remarquant qu'elle est identique pour $M_{\sigma}(T,E)$ en remplaçant la compactologie $\mathscr{H}^{\infty}$ par la compactologie $\mathscr{H}^{\infty}_{o}$. L'espace $M^{\infty}(T,E)$ est déjà un sous-elc dense dans l'espace complet $M^{\infty}(T,\hat{E}) = M^{\infty}(T) \hat{\otimes} \hat{E}$, puisque l'on a $M^{\infty}(T) \otimes E \subset M^{\infty}(T,E)$. Ainsi le dual $M^{\infty}(T,E)'$ s'identifie à l'espace des applications intégrales de $M^{\infty}(T)$ dans $E' = (\hat{E})'$, de sorte que, pour tout élément $Z \in M^{\infty}(T,E)'$, il existe une partie $H \in \mathscr{H}^{\infty}(T)$, une partie K équicontinue faiblement compacte dans $E'$ et une probabilité $\lambda$ sur le compact $H \times K$, telles que

$$(*) \qquad Z = \iint_{H \times K} f \otimes x' \; d\lambda(f,x') .$$

Soit alors une suite de Cauchy faible $(\vec{\mu}n)$ dans l'espace $M^{\infty}(T,E)$. Pour chaque $f \in C^{\infty}(T)$, la suite $(\vec{\mu}n(f))$ est faiblement de Cauchy dans E. Elle est donc faiblement convergente d'après l'hypothèse sur E. D'après (5.1) il existe donc un élément $\vec{\mu} \in M^{\infty}(T,E)$ tel que $\vec{\mu}n(f) \to \vec{\mu}(f)$ faiblement dans E, pour toute $f \in C^{\infty}(T)$. Il s'agit d'en déduire que l'on a aussi $\langle\vec{\mu}_n,Z\rangle \to \langle\vec{\mu},Z\rangle$ pour tout $Z \in M^{\infty}(T,E)'$. En remplaçant la suite $(\vec{\mu}_n)$ par la suite $(\vec{\mu}_n-\vec{\mu})$, on se ramène à supposer $\vec{\mu} = 0$. Mais la représentation (*) permet d'écrire

$$\langle\vec{\mu}_n,Z\rangle = \iint_{H \times K} \langle\vec{\mu}_n(f),x'\rangle \; d\lambda(f,x')$$

et l'on a maintenant $\langle\vec{\mu}_n(f),x'\rangle \to 0$ pour tout couple $(f,x') \in H \times K$. Si l'on remarque que la suite $(\vec{\mu}_n)$ est nécessairement bornée dans l'espace $M^{\infty}(T,E)$, on voit qu'il existe une constante $M \geqslant 0$ telle que $|\langle\vec{\mu}_n(f),x'\rangle| \leqslant M$ pour tout n et tout couple $(f,x') \in H \times K$.

Alors le résultat cherché, à savoir $\langle\vec{\mu}_n, Z\rangle \to 0$, s'obtient par application du théorème de convergence dominée de Legesgue.

## BIBLIOGRAPHIE.


[1] A. BADRIKIAN, Séminaire sur les fonctions aléatoires et les mesures cylindriques, *Lecture Notes*, Springer Verlag, 1970.

[2] J. BERRUYER et B. IVOL, Espaces de mesures et compactologies, *Publ. Dep. Math.* Lyon, 9-1, 1972, p. 1-35.

[3] BOURBAKI, Intégration, Ch. VI, Hermann.

[4] J.K. BROOKS et R.S. JEWETT, On finitely additive vector measures, *Proc. Nat. Acad. Sci.* U.S.A., 67, 1970, p. 1294-1298.

[5] H. BUCHWALTER, Topologies, bornologies et compactologies. *Thèse Fac. Sci. Lyon,* 1968, p. 1-44.

[6] H. BUCHWALTER, Topologies et compactologies. *Publ. Dep. Math.* Lyon, 6-2, 1969, p. 1-74.

[7] J. DIESTEL, Applications of weak compactness and bases to vector measures and vectorial integration, *Revue Roum. Math. Pures et appl.* XVIII, 2, 1973, p. 211-224.

[8] J. DIESTEL et B. FAIRES, On vector measures. *Trans Amer. Math. Soc.* 198, (1974), p. 253-271.

[9] D.H. FREMLIN, D.J.H. GARLING et R.G. HAYDON, Bounded measures on topological spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.,* XXV, (1972), 3, p. 115-136.

[10] A. GROTHENDIECK, Espaces vectoriels topologiques, Sao-Paulo, (1954).

[11] I. LABUDA, Sur quelques généralisations des théorèmes de Nikodym et de Vitali-Hahn-Saks, *Bull. Acad. Pol. Sci.,* 20 (1972), p. 37-60.

[12] M. ROME, L'espace $M^{\infty}(T)$. *Publ. Dep. Math.* (Lyon), 9-1 (1972), p. 37-60.

[13] H.P. ROSENTHAL, On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach space theory. *Studia Math.* 37, (1970), p. 13-36.

[14] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions à valeurs vectorielles, *Ann. Inst. Fourier,* VII et VIII (1959).

[15] D. SENTILLES, Bounded continuous functions on a completely regular space. *Trans. Amer. Math. Soc.* 168 (1972), p. 311-336.

[16] E. THOMAS, Intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle, *Ann. Inst. Fourier,* 20)2 (1970) p. 55-191.

[17] VARADARAJAN , Measures on topological spaces, *A.M.S. Translations,* 48 (1965), p. 161-228.

Danièle BUCCHIONI
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, boulevard du 11 novembre 1918
69621 - VILLEURBANNE