PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

ALAIN VILLENEUVE

Sur un résultat de P. Revesz et un résultat de A. Renyi

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1975, tome 12, fascicule 3
, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1975__12_3_1_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1975 t.12-3

SUR UN RESULTAT DE P. REVESZ ET UN RESULTAT DE A. RENYI

par Alain VILLENEUVE

0 - INTRODUCTION.

Dans un premier article [5] , P. REVESZ, utilisant un résultat de A.N. KOLMOGOROV sur les mesures parfaites, prouve le théorème suivant.

THEOREME 1. - *Soit* $(\xi_n)_{n \geq 1}$ *une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{S}, P)$. *Désignons la fonction de répartition conjointe de* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *par*

1) $F_n(x_1, \ldots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

En outre, soit $(\xi_n^*)_{n \geq 1}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes telles que*

2) $P(\xi_i^* < x) = P(\xi_i < x) = F^{(i)}(x) (i=1,2,\ldots)$.

Nous supposons que les conditions suivantes sont vérifiées.

A) Il existe deux suites de nombres réels $(A_n)_{n \geq 1}$ *et* $(B_n)_{n \geq 1}$ $(\lim_{n \to +\infty} B_n = +\infty)$ *et une fonction de répartition* $F(x)$ *telles que*

3) $\lim_{n \longrightarrow +\infty} P\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{B_n} - A_n < x\right) = F(x)$

en chaque point de continuité de la fonction de répartition $F(x)$.

B) Pour chaque $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tel que, si* $[x_1^{(i)}, y_1^{(i)}), \ldots, [x_n^{(i)}, y_n^{(i)}) (i=1,2,\ldots,r)$ *est un système quelconque d'intervalles et si*

$$\sum_{i=1}^{r} P\,(x_1^{(i)} \leqslant \xi_1 < y_1^{(i)}) \ldots P(x_n^{(i)} \leqslant \xi_n < y_n^{(i)}) < \delta,$$

alors

$$\sum_{i=1}^{r} P(x_1^{(i)} \leqslant \xi_1 < y_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)} \leqslant \xi_n < y_n^{(i)}) < \varepsilon.$$

Sous ces conditions, on a

4) $\lim\limits_{n \to +\infty} P(\dfrac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{B_n} - A_n < x) = F(x)$ *en chaque point de continuité de la fonction de répartition* $F(x)$.

Dans un deuxième article [6], P. REVESZ donne un autre théorème dont la conclusion, identique à celle du théorème 1, se déduit d'une hypothèse plus faible grâce à un important résultat de A. RENYI ([4] p. 222).

THEOREME 2. - *Les hypothèses étant identiques à celles du théorème 1 nous supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :*

A') identique à la condition A du théorème 1.

B') Il existe une suite de nombres réels δ_n *tels que pour un système quelconque d'intervalles* $[a_1, b_1), \ldots [a_n, b_n)$*, les relations*

$$|P(a_1 \leqslant \xi_1 < b_1, \ldots, a_n \leqslant \xi_n < b_n) - P(a_1 \leqslant \xi_1 < b_1, \ldots, a_{n-1} \leqslant \xi_{n-1} < b_{n-1}) \cdot P(a_n < \xi_n \; b_n)|$$

$$\leqslant \delta_n P(a_1 \leqslant \xi_1 < b_1, \ldots, a_{n-1} \leqslant \xi_{n-1} < b_{n-1}) P(a_n \leqslant \xi_n \; b_n)$$

sont vérifiées avec $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n^2 < +\infty$.

Sous ces conditions, on a encore

$$\lim_{n \to +\infty} P(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{B_n} - A_n < x) = F(x),$$

en chaque point de continuité de la fonction de répartition $F(x)$.

Nous nous proposons ici de montrer que la méthode utilisée par P. REVESZ pour la preuve du théorème 2 s'applique dans le cadre du théorème 1 (et uniquement dans le cadre du théorème 1) quand la condition B est remplacée par la condition suivante B^* de [5] p. 139

Condition B^*.-: *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que, pour tout système d'intervalles* $[x_1, y_1), \ldots, [x_n, y_n)$, *on ait*

$$P(x_1 \leq \xi_1 < y_1, \ldots, x_n \leq \xi_n < y_n) \leq C\, P(x_1 \leq \xi_1 < y_1) \ldots P(x_n \leq \xi_n < y_n).$$

En conclusion, nous donnons du théorème 1 (et du théorème 2) un corollaire qui généralise un résultat de A. Renyi ([4] p. 224) sur l'absence de convergence en probabilité dans certains cas de convergence en loi.

1 - REMARQUE SUR LE THEOREME 1.

Donnons d'abord une forme plus générale du lemme 1 proposé par P. REVESZ dans [5] p. 137.

LEMME . - *Soient* $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ *un espace mesuré et* $\mathcal{R}$ *un anneau contenu dans* $\mathcal{S}$. *On suppose que la mesure* μ *est finie et que la* σ*-algèbre* $\mathcal{S}$ *coïncide avec le plus petit* σ*-anneau contenant* $\mathcal{R}$. *Soit* $(\nu_n)_{n\geq 1}$ *une suite de mesures finies sur* $(\Omega, \mathcal{S})$ *ayant la propriété suivante : pour chaque* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta = \delta(\varepsilon)$ *tel que, si* $R \in \mathcal{R}$ *et* $\mu(R) < \delta$, *alors* $\nu_n(R) \leq \varepsilon$ *pour tout* $n \geq 1$. *Alors les mesures* $\nu_n (n = 1, 2, \ldots)$ *sont uniformément absolument continues par rapport à* μ, *avec le même module de continuité* $\delta(\varepsilon)$.

PREUVE. - Il suffit d'adapter la preuve de P. REVESZ en montrant que, pour tout $\varepsilon > 0$, la classe $\mathcal{M}$ des sous-ensembles A de Ω qui vérifient $\mu(A) \geq \delta$ ou $\mu(A) < \delta$ et $\nu_n(A) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$, est une classe monotone contenant l'anneau $\mathcal{R}$, donc coïncide avec $\mathcal{S}$.

Reprenons ensuite les notations utilisées pour le théorème 2 par P. REVESZ ([6] p. 126) en introduisant l'espace de représentation

$(\Omega', \mathcal{S}', \mu)$, où $\Omega' = \mathbb{R}^\infty = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ est l'ensemble produit tel que $X_i = \mathbb{R}$ $(i=1,2,\ldots)$, $\mathcal{S}' = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^\infty} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{S}_i$ la σ-algèbre produit telle que $\mathcal{S}_i = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ soit la tribu des ensembles boréliens de $\mathbb{R}$ pour $i = 1,2,\ldots$ et $\mu = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mu_i$ est la mesure produit telle que $\mu_i(A) = \int_A dF^{(i)}(x)$ pour tout $A \in \mathcal{S}$ et pour tout $i=1,2,\ldots$.

La suite $(\xi'_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes correspondant à la suite $(\xi_i^*)_{i\geq 1}$ est définie par

$\xi'_i(x_1,x_2,\ldots) = x_i$ $(i=1,2,\ldots)$ et, comme on a bien $\mu(\xi'_i<x)=F^{(i)}(x)$, les deux processus $(\xi_i^*)_{i\geq 1}$ et $(\xi'_i)_{i\geq 1}$ définis respectivement sur $(\Omega,\mathcal{S},P)$ et $(\Omega',\mathcal{S}',\mu)$ ont la même distribution.

Si $(\nu_n)_{n\geq 1}$ est la suite des mesures définies sur $(\Omega', \mathcal{S}')$ par :

$\nu_1 = \mu$.

$\nu_2 = \nu^{(2)} \otimes (\bigotimes_{i=3}^{\infty} \mu_i)$ où $\nu^{(2)}(A) = \iint_A d\,F_2(x_1,x_2)$ pour $A \in \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$.

$\nu_n = \nu^{(n)} \otimes (\bigotimes_{i=n+1}^{\infty} \mu_i)$ où $\nu^{(n)}(A) = \int\ldots\int_A dF_n(x_1,\ldots,x_n)$ pour

$A \in \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{S}_i$. En posant $\nu(C) = \nu_n(C)$ pour tout cylindre C d'ordre n de $\mathcal{S}'$, par extension nous définissons sur $(\Omega', \mathcal{S}')$ la mesure ν correspondant à la distribution du processus $(\xi_i)_{i\geq 1}$, c'est-à-dire que le processus $(\xi'_i)_{i\geq 1}$ considéré comme défini sur $(\Omega',\mathcal{S}',\nu)$ a la même distribution que le processus $(\xi_i)_{i\geq 1}$ défini sur $(\Omega,\mathcal{S},P)$. En outre, si $\mathcal{R}$ est l'anneau des unions finies de cylindres deux à deux disjoints de $\mathcal{S}'$, $\lim_{n\to+\infty} \nu_n(R) = \nu(R)$ pour tout $R \in \mathcal{R}$, car pour tout cylindre C d'ordre n de $\mathcal{S}'$, on a :

$$\nu(C) = \nu_n(C) = \nu_{n+1}(C) = \ldots$$

Nous montrons maintenant que, pour tout élément S de $\mathcal{S}'$, la suite $(\nu_n(S))_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $R \in \mathcal{R}$ on a :

$$|\nu_n(S) - \nu_m(S)| \leq |\nu_n(S)-\nu_n(R)| + |\nu_n(R)-\nu_m(R)| + |\nu_m(R)-\nu_m(S)|$$

quels que soient n = 1,2,... et m = 1,2,... . Puisque l'anneau $\mathcal{R}$ engendre la σ-algèbre $\mathcal{S}'$, il est dense dans $\mathcal{S}'$ (cf. HALMOS [2] p. 56) pour la mesure μ, et, pour un $\varepsilon>0$ donné, il existe $R_\varepsilon \in \mathcal{R}$ tel que

$$\mu(S\Delta R_\varepsilon) < \delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \frac{\varepsilon}{3C}$$

Il résulte alors de la condition B^* du théorème 1 et du lemme que $\nu_k(S\Delta R_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3}$ et, en particulier, que $|\nu_k(S)-\nu_k(R_\varepsilon)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout $k \geq 1$. Puisque

$\lim\limits_{n\to+\infty} \nu_n(R_\varepsilon) = \nu(R_\varepsilon)$ existe, il existe un entier $n_o \geq 1$ tel que, si $n \geq n_o$ et $m \geq n_o$, $|\nu_n(R_\varepsilon) - \nu_m(R_\varepsilon)| < \frac{\varepsilon}{3}$ et, par suite, $|\nu_n(S)-\nu_m(S)| \leq \varepsilon$. D'où le résultat, puisque $\mathbb{R}$ est complet.

Alors, si on pose $\bar{\nu}(S) = \lim \nu_n(S)$ pour tout $S \in \mathcal{S}'$, il résulte du théorème de VITALI-HAHN-SAKS ([3] p. 298) que $\bar{\nu}$ est une mesure sur $(\Omega', \mathcal{S}')$ absolument continue par rapport à μ, car chaque ν_n est absolument continue par rapport à μ (condition B du lemme 1).

En outre, puisque ν et $\bar{\nu}$ coïncident sur l'anneau $\mathcal{R}$, elles coïncident sur $\mathcal{S}'$. En particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} \nu_n(S) = \nu(S)$ pour tout $S \in \mathcal{S}'$ et ν est absolument continue par rapport à μ. Le résultat du théorème 1 est alors conséquence du théorème de A. RENYI ([4] p. 222) que P. REVESZ utilise pour la preuve du théorème 2 [6].

REMARQUE. - La preuve précédente permet d'obtenir l'absolue continuité de ν par rapport à μ en considérant ν comme limite simple d'une suite de mesures absolument continues par rapport à μ. Ce n'est pas la façon la plus brève bien sûr, car un simple lemme de prolongement (voir [5] p. 137) suffit pour l'obtenir à partir de la condition B.
Mais cela met en évidence les limites de cette méthode que P. REVESZ essaye d'utiliser dans le cadre du théorème 2 (voir ci-dessous).

2 - REMARQUE SUR LE THEOREME 2.

Les notations étant les mêmes que précédemment, P. REVESZ ([6] p. 127) montre, pour établir le théorème 2, que

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{A\in\mathcal{S}'} |\nu_n(A) - \nu(A)| = 0$;on a donc en particulier

$\lim\limits_{n\to+\infty} \nu_n(A) = \nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{S}'$. Or la condition B' du théorème 2 implique que chaque ν_n est absolument continue par rapport à μ. Il résulte donc de nouveau du théorème de VITALI-HAHN-SAKS ([3] p. 298) que la suite $(\frac{d\nu_n}{d\mu})_{n\geq 1}$ des densités des ν_n par rapport à μ est équicontinue, c'est-à-dire que les mesures $\nu_n (n=1,2,\ldots)$ sont uniformément absolument continues par rapport à μ. Et, en particulier, la condition B du théorème 1 apparaît comme une conséquence des hypothèses du théorème 2.

Ou alors l'assertion (5) est inexacte, ce qui confirmerait la remarque de J.H. ABBOTT et R.J. BLUM [1] prétendant que, sous les hypothèses du théorème 2, ν n'est pas en général absolument continue par rapport à μ.

3 - SUR UN THEOREME DE A. RENYI.

Dans [4] p. 224, A. RENYI obtient le résultat suivant comme conséquence d'une étude sur les suites mélangeantes : si la distribution $F(x)$ n'est pas dégénérée, la suite

$\left(\frac{\xi_1^*+\ldots+\xi_n^*}{B_n} - A_n\right)_{n\geq 1}$ ne converge pas en probabilité (stochastiquement). Nous montrons ci-dessous ce résultat pour la suite $\left(\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{B_n} - A_n\right)_{n\geq 1}$, à l'aide d'une preuve élémentaire qui n'utilise pas directement l'étude des suites mélangeantes.

THEOREME. - *Sous les hypothèses du théorème 1, si la distribution* F(x) *n'est pas dégénérée, la suite* $\left(\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{B_n} - A_n\right)_{n\geq 1}$ *ne converge pas en probabilité.*

Pour la preuve, nous avons besoin du lemme suivant sur la convergence presque sûre.

LEMME. - *Si* (η_k) *et* (η'_k) *sont deux processus, respectivement sur* $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ *et* $(\Omega', \mathcal{S}', P')$, *ayant la même distribution et, si* $\eta_k \xrightarrow{P-p.s} \eta$, *alors il existe une variable aléatoire* η *sur* $(\Omega', \mathcal{S}', P')$ *telle que* $\eta'_k \xrightarrow{P'-p.s.} \eta'$.

La preuve du lemme est immédiate à partir de la condition nécessaire et suffisante suivante : pour qu'une suite de variables aléatoires converge presque sûrement il faut et il suffit qu'elle soit presque sûrement de Cauchy.

PREUVE DU THEOREME (ab absurdo) . - ζ_n désignant pour tout $n\geq 1$ la variable aléatoire $\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{B_n} - A_n$, si la suite $(\zeta_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire ζ définie sur $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, il existe une sous-suite $(\zeta_{n_k})_{k\geq 1}$ de la suite $(\zeta_n)_{n\geq 1}$ convergeant P-presque sûrement vers ζ .

Puisque les processus $(\xi_n)_{n\geq 1}$ et $(\xi'_n)_{n\geq 1}$ ont la même distribution, donc aussi les processus $(\zeta_{n_k})_{k\geq 1}$ et $(\zeta'_{n_k})_{k\geq 1}$ où

$\zeta'_{n_k} = \frac{\xi'_1+\ldots+\xi'_{n_k}}{B_{n_k}} - A_{n_k}$ $(k=1,2,\ldots)$, il résulte du lemme que la suite $(\zeta'_{n_k}))_{k\geq 1}$ converge ν-presque sûrement vers une variable aléatoire ζ' définie sur $(\Omega', \mathcal{S}', \nu)$.

La distribution de ζ' a pour fonction de répartition $F(x)$, car la convergence presque sûre implique la convergence en loi.

En outre, si $\mathcal{S}'_\infty$ désigne la tribu queue de la suite $(\xi'_n)_{n\geq 1}$, ζ' est $\mathcal{S}'_\infty$ -mesurable car, $(B_{n_k})_{k\geq 1}$ tendant vers $+\infty (\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = +\infty)$ pour tout entier $m\geq 1$, la suite

$$\left(\frac{\xi'_m + \xi'_{m+1} +\ldots+ \xi'_{n_k}}{B_{n_k}} - A_{n_k}\right)_{k\geq k_m}$$

converge ν-presque sûrement vers ζ' (en fait ζ' est $\mathcal{S}''_\infty$-mesurable, avec $\mathcal{S}''_\infty$ tribu trace de $\mathcal{S}'_\infty$ sur un événement ν-presque certain de $\mathcal{S}'$, mais cela ne change rien pour la fin de la démonstration).

Puisque les variables aléatoires $\xi'_n (n\geq 1)$ sont mutuellement indépendantes pour la probabilité μ, il résulte de la loi du tout ou rien de Kolmogorov que la tribu $\mathcal{S}'_\infty$ est μ-(0-1), c'est-à-dire équivalente à la tribu $\{\emptyset,\Omega'\}$ pour la mesure μ. Alors, puisque ν est absolument continue par rapport à μ(voir la preuve du théorème 1 au paragraphe 1), la tribu $\mathcal{S}'_\infty$ est ν-(0-1) (donc aussi $\mathcal{S}''_\infty$) et, ζ' étant $\mathcal{S}'_\infty$ -mesurable (ou $\mathcal{S}''_\infty$ -mesurable), la mesure image de ν par ζ' est dégénérée et la contradiction puisque la fonction de répartition de cette mesure est $F(x)$.

REMARQUE 1. - Le théorème précédent serait encore valide sous des hypothèses assurant seulement l'absolue continuité de ν_∞ par rapport à μ_∞, c'est-à-dire assurant l'égalité $\nu_\infty = \mu_\infty$, où ν_∞ et μ_∞ sont les restrictions respectives de ν et μ à $\mathcal{S}_\infty$.
Suivant la remarque de J.H. ABBOTT et RJ. BLUM [1] p. 260, c'est le cas sous les hypothèses du théorème 2 énoncé en introduction.

REMARQUE 2. - La conclusion pour la suite $\left(\frac{\xi_1^*+\ldots+\xi_n^*}{B_n} - A_n\right)_{n\geq 1}$ (ce qui constitue le résultat de A. RENYI [4] p. 224) est incluse dans le théorème précédent. Toutefois une nouvelle preuve de ce seul résultat peut être obtenue en simplifiant la preuve ci-dessus, car alors l'espace de représentation $(\Omega', \mathcal{S}', \nu)$ et le lemme ne sont plus nécessaires.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.H. ABBOTT and R.J. BLUM, *On a theorem of Renyi concerning mixing sequences of sets*, Ann. Math. Statist., 32 (1961), p. 257-260.

[2] P. HALMOS, *Measure theory*, New-York (1950).

[3] P.L. HENNEQUIN et A. TORTRAT, *Théorie des probabilités et quelques applications*, Paris (Masson) 1965.

[4] A. RENYI, *On mixing sequences of sets*, Acta. Math. Acad. Sc. Hungaria (1958), p. 215-228.

[5] P. REVESZ, *On the limit distributions of sums of dependent random variables*, Ann. Univ. Sc. Budapest, Sec. Math. 1 (1958), p. 135-142.

[6] P. REVESZ, *A limit distribution theorem for sums of dependent random variables*, Acta. Math. Acad. Sc. Hungaria, 10 (1959), p. 125-131.

Alain VILLENEUVE
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
69621 - VILLEURBANNE