PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

SAMUEL D. EKONG

Sur les groupes algébriques affines algébriquement complets

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1975, tome 12, fascicule 2
, p. 71-81
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1975__12_2_71_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1975 t. 12-2

SUR LES GROUPES ALGEBRIQUES AFFINES ALGEBRIQUEMENT COMPLETS

par Samuel D. EKONG

Le point de vue adopté est celui de [1], le corps de base étant algébriquement clos.

Rappellons que, d'après [2], on dit qu'un groupe algébrique affine G est algébriquement complet s'il possède les deux propriétés suivantes :

i) Le centre de G *est trivial ;*

ii) tous les automorphismes algébriques de G *sont intérieurs.*

PROPOSITION 1.1. - *Le produit (direct)* $G = K \times H$ *de deux groupes algébriques affines algébriquement complets est un groupe algébrique affine algébriquement complet si et seulement si* K *(ou* H*) est un sous-groupe caractéristique de* G.

PROPOSITION 1.2. - *Soit* Γ *un groupe algébrique affine algébriquement complet ; si* Γ *est un sous-groupe normal fermé d'un groupe algébrique affine* G, *alors :*

a) Γ *est un facteur direct;*

b) G *est connexe et algébriquement complet si et seulement si*

i) Γ *et le centralisateur* $Z_G(\Gamma)$ *de* Γ *dans* G *sont des sous-groupes caractéristiques connexes de* G;

ii) $Z_G(\Gamma)$ *est algébriquement complet.*

PREUVE. - a) est un fait bien connu dans le cas des groupes abstraits la démonstration ne subit aucune modification $\forall x \in G$. Considérons l'automorphismes intérieur $F_x : g \quad x g x^{-1}$ de G ; Γ étant un sous-groupe

normal de G, la restriction de F_x à Γ , est un automorphisme de Γ; puisque Γ est algébriquement complet, il existe un unique élément α de Γ tel que $x\gamma x^{-1} = \alpha\gamma\alpha^{-1}$, $\forall \gamma \in \Gamma$. Parconséquent $\alpha^{-1}x \in Z_G(\Gamma) = Z$; d'où

$$G = \Gamma.Z.$$

Comme $\Gamma \cap Z = Z(\Gamma)$ est le centre de Γ, on en déduit que

$\Gamma \cap Z = \{1\}$, où 1 est l'élément neutre de G . Donc G est le produit direct

$$G = \Gamma \times Z.$$

b) est une conséquence de a) et de la proposition 1.1.

COROLLAIRE 1.3. - *Toute extension* G *d'un groupe algébrique affine algébriquement complet par un groupe algébrique affine , est triviale (i.e. toute suite exacte* $1 \to G \to E \to H \to 1$ *est fissible). Ceci est aussi une conséquence du fait que* Aut(G)/Int(G) *est trivial.*

COROLLAIRE 1.4. - *Tout groupe quotient d'un groupe affine algébriquement complet par un sous-groupe caractéristique ayant la même propriété possède cette propriété.*

COROLLAIRE 1.5. - *Soit* G *un groupe algébrique affine ; si* $G°$ *, composante connexe de l'élément neutre de* G*, est un groupe algébriquement complet alors* G *est égal au produit direct* $G = G° \times F$ *, où* F *est un sous-groupe fini de* G.

C'est clair, car $G°$ est un sous-groupe normal, fermé et d'indice fini de G.

THEOREME 1.6. - *Soit G un groupe algébrique affine connexe sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0 ; alors G est algébriquement complet si et seulement si G possède un sous-groupe de Borel algébriquement complet.*

PREUVE. - On sait [4] que, sous ces hypothèses, Aut(G) est un groupe algébrique affine ; par conséquent l'holomorphe H de G, i.e. le produit semi-direct $H = G \times Aut(G)$, où Aut(G) désigne le groupe des automorphismes de G, est un groupe algébrique affine.

Si un sous-groupe de Borel de G est algébriquement complet, on sait d'après [2] , qu'il en est de même de tous les sous-groupes de Borel de G et que le centre de G est trivial ; il en résulte la trivialité du centre de H.

$\forall F \in Aut(G)$, $\exists$ $h \in H$ tel que $F = F_h/G$, où F_h est l'automorphisme intérieur $x \quad hxh^{-1}$ de H et F_h/G sa restriction à G. D'après le

théorème de Steinberg [7], F laisse invariant un sous-groupe de Borel B de G ; donc $F(B) = h \ B \ h^{-1} = B$.
La restriction de F à B est alors un automorphisme de B, donc
$\exists$ $b \in B$ tel que

$$h \beta h^{-1} = b \beta b^{-1} \ , \ \forall \beta \in B \quad \text{donc } b^{-1}h \in Z_H(B), \text{ où}$$

$Z_H(B)$ est le centralisateur dans H de B. La restriction à G de l'automorphisme intérieur $F_{b^{-1}h}$ de H est un automorphisme de G qui laisse invariant tous les éléments du sous-groupe de Borel B . G étant connexe, on en déduit que $F_{b^{-1}h}/G = 1_G$; donc, pour tout q G, on a $hqh^{-1}=bqb^{-1}$, c'est-à-dire $F_h/G=F_h$; donc $F=F_h$. Par conséquent G est algébriquement complet.

Pour montrer que la condition est nécessaire nous avons deux théorèmes suivants que nous utiliserons comme lemmes.

LEMME 1.7 (Niesnevič). - *Le produit libre de groupes linéaires de degré* n *est un groupe linéaire de degré* n+1.

On pourra trouver une démonstration de ce théorème dans [8].

LEMME 1.8 (G. Higman, B.H. Neumann, Hanna Neumann). - *Soient* G *un groupe,* A *et* B *des sous-groupes de* G *et* ϕ *un isomorphisme de* A *sur* B. *Alors il existe un groupe* H *et un élément* h *de* G *tels que*

1) G *est contenu dans* H.

2) $\phi(a) = h\, a\, h^{-1}$, $\forall a \in A$.

La preuve de la réciproque du théorème énoncé est basée sur la construction de l'élément h du lemme 2 ; nous utiliserons par conséquent le procédé employé pour la démonstration de ce lemme , démonstration que l'on peut aussi trouver dans [5] (tome 2, page 17).

Soit G un groupe algébrique affine connexe. Il existe une représentation immersive de G dans $GL_n(K)$, où $GL_n(K)$ désigne le groupe des matrices carrées inversibles d'ordre n à coefficients dans le corps de base K, algébriquement clos, de caractéristique 0. Si $G = GL_n(K)$, alors l'application $\rho : GL_n(K) \longrightarrow GL_{n+1}(K)$ qui à g fait correspondre $\rho(g) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, est une représentation immersive de G dans $GL_{n+1}(K)$; on peut par conséquent supposer que G est un sous-groupe fermé propre de $GL_n(K)$.

G étant connexe et distinct de $GL_n(K)$, on en déduit que $GL_n(K)/G$ n'est pas fini et qu'il existe un élément u de $GL_n(K)$ qui n'appartient pas à G ; on peut supposer que l'élément u est unipotent car, si l'ensemble U_n des éléments unipotents de $GL_n(K)$ est contenu dans G, alors le plongement ρ de G dans $GL_{n-1}(K)$, défini ci-dessus, prouve que $\rho(U_n)$ est strictement contenu dans l'ensemble des éléments unipotents de $GL_{n+1}(K)$; par conséquent on peut trouver un élément unipotent u qui n'appartient pas à G. La caractéristique du corps de base K étant 0, on en déduit que u est d'ordre infini.

Considérons le produit libre $K = G\ (u)$, où (u) est le groupe cyclique libre infini engendré par u.

Soit ω un élément non trivial de G ; posons $v^{-1} = \omega u$.

Les produits libres $L = G*(v)$, $K = G*(u)$ $U = G*u^{-1}\,B\,u$, $v = G*v\,B\,v^{-1}$, où B est le sous-groupe de Borel de G qui contient ω , l'automorphisme F de B et l'isomorphisme ψ de U sur V défini par

(i) $\psi(g) = g$ pour tout $g \in G$,

(ii) $\psi(u^{-1}\,b\,u) = v\,F(b)\,v^{-1}$ pour tout $b \in B$, forment l'ensemble des éléments de la construction désirée; on a alors $h = \omega$; donc $F = F_\omega$ est un automorphisme intérieur de B ; le centre de B, étant identique au centre de G, est trivial; par conséquent B est algébriquement complet.

COROLLAIRE 1.9. - *Soit Γ un groupe algébrique affine ayant un sous-groupe de Borel algébriquement complet ; si Γ est un sous-groupe normal fermé d'un groupe algébrique affine G alors, Γ° la composante connexe de l'élément neutre de Γ est un facteur direct de G. En particulier Γ est égal au produit direct $\Gamma = \Gamma^\circ \times S$ où S est un sous-groupe fini de Γ.*

PREUVE. - Ceci découle du fait que Γ° est un sous-groupe caractéristique de Γ ; donc, si Γ est un sous-groupe normal fermé de G, il en est de même de Γ° ; les sous-groupes de Borel de Γ étant les sous-groupes de Borel de Γ° , on en déduit, d'après [2], que Γ° est algébriquement complet. Donc $G = \Gamma^\circ \times Z_G(\Gamma^\circ)$ d'après la proposition 1.2 et $\Gamma = \Gamma^\circ \times S$ d'après le corollaire 1.5 de la proposition 1.2.

PROPOSITION 1.10. - *Soient G un groupe algébrique affine sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, $\mathrm{Aut}(G)$ (resp. $\mathrm{Int}(G)$) le groupe des automorphismes (resp. groupe des automorphismes intérieurs) de G. Si G possède un sous-groupe de Borel algébriquement complet, alors :*

a) $\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe algébrique affine;

b) $\mathrm{Aut}(G^\circ) = \mathrm{Int}(G)^\circ$ est algébriquement complet.

PREUVE. - On vient de voir que, sous ces hypothèses, G° est un groupe algébriquement complet et que $G = G^\circ \times S$ est un produit direct, où S est fini. S, on l'a également vu, est le centralisateur de G° dans G ; puisqu'on est en caractéristique 0, S est formé d'éléments semi-simples. La finitude de S implique, d'après [4], que Aut(G) est un groupe algébrique affine ce qui démontre a).

On a donc $\quad \mathrm{Aut}(G) = \mathrm{Aut}(G^\circ) \times \mathrm{Aut}(S)$.

S étant fini, Aut(S) = H l'est aussi ; puisque G° est algébriquement complet, on a $\quad \mathrm{Aut}(G^\circ) = \mathrm{Int}(G^\circ)$.

L'application $\chi : \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G) \\ x \longrightarrow F_x \end{array}$, qui associe à tout élément x de G l'automorphisme intérieur F_x, étant un morphisme de groupes algébriques [4], on en déduit que

$$\chi(G) = \mathrm{Int}(G) \Rightarrow \mathrm{Int}(G)^\circ = \chi(G^\circ) = \mathrm{Int}(G^\circ).$$

Donc $\quad \mathrm{Aut}(G^\circ) = \mathrm{Int}(G^\circ)$;

D'où $\quad \mathrm{Aut}(G) = \mathrm{Int}(G)^\circ \times H$.

$\mathrm{Int}(G)^\circ$ est par conséquent un sous-groupe fermé d'indice fini de Aut(G) ; il contient donc $\mathrm{Aut}(G)^\circ$. d'où

Par suite $\mathrm{Aut}(G)^\circ = \mathrm{Int}(G)^\circ = \mathrm{Int}(G^\circ)$ donc est algébriquement complet d'après [2] .

PROPOSITION 1.11. - *Soit* G *un groupe algébrique affine sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle ; si le centralisateur* $Z_G(G^\circ)$ *dans* G *de* G° *est trivial, et si* Int(G) *est un sous-groupe caractéristique de* Aut(G), *alors* Aut(G) *est un groupe algébrique affine algébriquement complet.*

PREUVE. - Le centralisateur de G° dans G étant trivial, il en est de même du centre de G° ; puisqu'on est en caractéristique o, on en déduit que Aut(G) est un groupe algébrique affine . Le reste de la proposition est un fait bien connu dans le cas des groupes abstraits ; or, si un groupe algébrique Γ, considéré comme groupe abstrait, est complet, il est naturellement algébriquement complet. D'où la proposition.

2. GROUPES ALGEBRIQUES AFFINES ALGEBRIQUEMENT COMPLETS SEMI-SIMPLES DE RANG 1.

PROPOSITION 2.1. - *Soit* G *un groupe algébrique affine algébriquement complet.*

1°) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) G *est semi-simple ;*

ii) G *est réductif.*

2°) G *est "adjoint" (i.e. isomorphe à son adjoint* $\overline{G}$*).*

3°) Si G *est semi-simple, le recouvrement central universel* $\tilde{G}$ *de* G *est semi-simple.*

PREUVE. -

1°) est immédiat, compte tenu de la trivialité du centre de G.

2°) Soit $\pi : G \longrightarrow H$ une isogénie centrale. La trivialité du centre de G implique la trivialité du centre de H et π est un morphisme bijectif ; par conséquent, si ρ est une représentation fidèle de G dans $\mathbf{GL}_n(K)$, $\rho' = \rho \circ \pi^{-1}$ est une représentation fidèle de H dans $\mathbf{GL}_n(K)$. On en déduit donc qu'il existe un isomorphisme du corps des fonctions rationnelles de G sur le corps des fonctions rationnelles de H; donc, d'après ([6] exposé 18), G et H sont isomorphes.

3°) Si G est semi-simple, soient $\pi : H \longrightarrow G$ une isogénie centrale et R(H) le radical de H. π étant surjectif on a

$$\pi(R(H)) = R(G) = \{1\}$$

Donc $\ker\pi$, qui par hypothèse est fini, contient R(H) ; R(H) étant connexe on en déduit que $R(H) = \{1\}$. Par conséquent H est semi-simple ; il en est donc de même du recouvrement central universel $\tilde{G}$ de G.

THEOREME 2.2. - *Tout groupe algébrique affine connexe algébriquement complet semi-simple de rang 1 est isomorphe à* $\mathbf{PGL}_2 = \mathbf{GL}_2/Z(\mathbf{GL}_2)$

PREUVE. - On sait que si G est un tel groupe, il existe un morphisme surjectif de G sur PGL_2 dont le noyau est l'intersection de tous les sous-groupes de Borel de G et que cette intersection est précisement le centre de G ([1] page 310).

Le centre de G étant trivial, on en déduit qu'il existe un isomorphisme de G sur PGL_2.

COROLLAIRE 2.3. - *Tout groupe algébrique affine connexe réductif de rang 1 isomorphe à* PGL_2 *est algébriquement complet et a tous ses sous-groupes de Borel algébriquement complets.*

PREUVE. - Cela résulte du fait que, si un groupe algébrique affine connexe a tous ses sous-groupes de Borel algébriquement complets, alors G est algébriquement complet. Théorème 2 de [2] et si ce groupe est semi-simple tet de rang 1, alors d'après le théorème 2 ci-dessus il est isomorphe à PGL_2.

PROPOSITION 2.4. - *Soit* G *un groupe algébrique qffine connexe, réductif algébriquement complet et de rang 1 . Si la caractéristique du corps de base est distincte de 2, alors tout automorphisme de* G *qui laisse invariant un tore maximal de* G *est semi-simple (au sens de [7]).*

PREUVE. - Soient F un automorphisme de G et T un tore maximal de G, F-invariant G étant algébriquement complet, il existe un unique élément x de G tel que $F = F_x$. Désignons par $\mathcal{B}^T$ l'ensemble des sous-groupes de Borel de G qui contiennent T ; on a

$$\mathcal{B}^T = \{B,B'\} \text{ avec } B \cap B' = T \text{ et}$$

$F(T) = T \Rightarrow xTx^{-1} = xBx^{-1} \cap xB'x^{-1} = T$. Il en résulte que F induit une bijection de l'ensemble $\mathcal{B}^T$ sur lui-même. Donc

$$xBx^{-1} = B \text{ (et alors } xB'x^{-1} = B')$$

ou $\quad xBx^{-1} = B'$ et alors $xB'x^{-1} = B$.

a) si $xBx^{-1} = B$, alors F_x est quasi-semi-simple, donc semi-simple [2].

b) si $xBx^{-1} = B'$, alors $xB'x^{-1} = B$, d'où

$x^2Bx^{-2} = xB'x^{-1} = B$; donc $x^2 \in B \cap N_G(T)$, où $N_G(T)$ est le normalisateur dans G de T ; on en déduit alors que $x^2 \in T$ et par conséquent que $F^2 = F_{x^2}$ est semi-simple.

En fait x est semi-simple, car si $x = x_u x_s$ est la décomposition de Jordan de x, où x_u est unipotent et x_s semi-simple, $x^2 = x_u^2 x_s^2$ étant semi-simple, on en déduit que x_u^2 est semi-simple donc $x_u^2 = 1$, ce qui implique $x_u = 1$ puisque la caractéristique du corps de base est distincte de 2. Donc $x = x_s$ est semi-simple.

3. CENTRALISATEUR D'UN ELEMENT SEMI-SIMPLE.

Dans cette partie, nous nous proposons de montrer que si G est un groupe algébrique affine, connexe, réductif algébriquement complet et de rang 1 et si la caractéristique du corps de base est distincte de 2, alors le centralisateur d'un élément x semi-simple, distinct de l'élément neutre de G, est un sous-groupe réductif formé d'éléments semi-simples et, de plus, x est régulier.

THEOREME 3.1. - *Soit G un groupe algébrique affine connexe algébriquement complet, réductif et de rang 1 ; alors, tout élément semi-simple x de G, distinct de l'élément neutre 1, est régulier et son centralisateur $Z_G(x)$ est un sous-groupe réductif de G formé d'éléments semi-simples.*

PREUVE. - Soit x un élément semi-simple non trivial de G. Il existe un tore maximal T de G tel que x soit un élément de T. Soient B et B' les sous-groupes de Borel opposés de G qui contiennent T ; on a :

$$\begin{cases} \mathcal{B}^T = \{B, B'\}, \\ B \cap B' = T. \end{cases}$$

Désignons par $Z_G(x)$ le centralisateur de x dans G ; T est abélien donc on a $T \subset Z_G(x)$.

D'autre part, G est isomorphe à PGL_2 (Théorème 2.2); donc la dimension d'un sous-groupe de Borel de G est 2 ; un sous-groupe de Borel de $Z_G(x)$ est par conséquent de dimension au plus égale à 2 et la dimension d'un tore maximal de $Z_G(x)$ est égale à 1.

Posons : $Z_B(x) = Z_G(x) \cap B$; x étant semi-simple $Z_B(x)$ est un sous-groupe résoluble et connexe de $Z_G(x)$ et ce sous-groupe contient T ; par conséquent

$$\dim Z_B(x) = \begin{cases} 1 \\ \text{ou} \\ 2 \end{cases}$$

Il en est alors de même de $Z_{B'}(x) = Z_G(x) \cap B'$

a) Supposons $\dim Z_B(x) = 2$ ou $\dim Z_{B'}(x) = 2$ alors $Z_B(x) = B$ donc

$$x \in Z(B) = Z(G) = \{1\} \text{ d'où } x = 1 \text{ dans les deux cas envisagés}$$

b) Supposons $x \neq 1$; on a alors nécessairement

$$\dim Z_B(x) = \dim Z_{B'}(x) = 1 ;$$

d'où
$$Z_B(x) = Z_{B'}(x) = T .$$

T est alors un sous-groupe de Borel de $Z_G(x)$; par conséquent $Z_G(x)$ est réductif. T étant un sous-groupe de Borel de $Z_G(x)$, on en déduit que le centralisateur connexe $Z_G(x)^\circ$ est un tore ; puisque $Z_G(x)^\circ$ contient T, on en déduit que $Z_G(x)^\circ = T$ et, par conséquent, x est régulier.

Il résulte alors de l'égalité $Z_G(x)^\circ = T$ que $Z_G(x)$ est un sous-groupe du normalisateur $N_G(T)$ de T dans G. Posons $Z_G(x)/T = H$; puisque $Z_G(x)/T$ est un sous-groupe de $N_G(T)/T = W(T,G)$, le groupe de Weyl de G et que, sous les hypothèses considérées, W(T,G) est un groupe à deux éléments, on en déduit que le groupe H à au plus deux éléments. Posons alors $H = \{\bar{1},\bar{y}\}$. L'élément $\bar{y}$ est involutif donc y^2 est un élément de T ; si on suppose la caractéristique du corps de base nulle ou plus généralement distincte de 2, alors y est semi-simple (comme dans la proposition 2.2) et il en est de même de tout élément z de $\bar{y}$.

En conclusion, $Z_G(x)$ est formé d'éléments semi-simples.

COROLLAIRE. - *Si l'on conserve les hypothèses du théorème 3 et si* x *et* y *sont des éléments non triviaux de* G *tels que* x *commute à* y*, alors, si l'un des deux éléments est semi-simple, il en est de même de l'autre.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BOREL, *Linear algebraic groups*, W.A. Benjamin; Inc. 1969.

[2] S.D. EKONG, *Sur les automorphismes de certains groupes algébriques affines semi-simple*, Publ. Dép. Math. Fac. Sc. LYON (1975).

[3] G. HIGMAN, B.H. NEUMANN, HANNA NEUMANN; *Embedding theorems for groups* London Math. Society, 24 (1949), p.247-254.

[4] G. HOCHSCHILF and G. MOSTOW, *Automorphisms of affine algebraic groups*, Journal of algebra 13 (1969), p535-543.

[5] A.G. KUROSH, *Theory of groups (tome 2.)*, Chelsea Publisching Company New-York.

[6] SEMINAIRE C. CHEVALLEY, *Classification des groupes de Lie algébriques* E.N.S. Paris (2. Vol.).

[7] R. STEINBERG, *Endomorphisms of linear algebraic Groups*, Memoirs of the A.M.S., n° 80 (1968).

[8] B.A.F. WEHRFRITZ, *Infinite linear groups*, Springer-Verlag (1973).

S.D. EKONG
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 - VILLEURBANNE