PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

CHRISTINE CHARRETTON
DENIS RICHARD

Théorème d'Ascoli et application aux groupes topologiques localement compacts en analyse non standard

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1975, tome 12, fascicule 2 , p. 47-55
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1975__12_2_47_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1975 t. 12-2

THEOREME D'ASCOLI ET APPLICATION AUX GROUPES TOPOLOGIQUES LOCALEMENT COMPACTS EN ANALYSE NON STANDARD

par Christine CHARRETTON et Denis RICHARD

Deux démonstrations du théorème d'Ascoli figurent dans [2], lorsque les espaces E et F sont compacts et en [3] pour le cas métrique. Nous en donnerons ici une généralisation par une preuve non standard lorsque E est localement compact et F uniforme quelconque. Nous utiliserons ce résultat pour prouver que le dual d'un groupe localement compact l'est aussi. Les fondements logiques et les notations sont ceux de [1], [2], [4].

1. DEFINITIONS.

Soient E un espace topologique et F un espace uniforme, dont $\mathfrak{B}$ est le filtre des entourages. On note $W(A,V)[g]$ (ou encore $W_{A,V}[g]$) l'ensemble des applications f de E dans F telles que pour tout $x \in A \subset E$, $(f(x),g(x)) \in V$ avec $V \in \mathfrak{B}$. L'uniformité $\mathfrak{B}$ est définie par la relation d'équivalence $\mu = \mathrm{Nuc}(\mathfrak{B})$ sur $F^* \times F^*$ (cf. [1]). On définit par leurs monades différentes structures uniformes sur $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E,F)$:

i) *La structure uniforme de la convergence simple*

$\mu_s = \{(f,g) \in (\mathcal{F} \times \mathcal{F})^* \ : \ \forall x \in E \ (f(x),g(x)) \in \mu\}$

ii) *la structure uniforme de la convergence uniforme*

$\mu_u = \{(f,g) \in (\mathcal{F} \times \mathcal{F})^* \ : \ \forall x \in E^* (f(x),g(x)) \in \mu\}$

iii) *la structure uniforme de la convergence compacte*

$\mu_c = \{(f,g) \in (\mathcal{F} \times \mathcal{F})^* \ : \ \forall x \in \bigcup K^*$, K *compacte de* E, $(f(x),g(x)) \in \mu\}$

REMARQUES.

1.1) Si E est localement compact $\bigcup K^* = qs(E)$.

1.2) Si E est compact, $\mu_u = \mu_c$.

1.3) Dans tous les cas, il est évident que $\mu_u \subset \mu_c \subset \mu_s$, relation qui classifie les uniformités correspondantes.

2. PROPRIETES DE $\mathcal{C}(E,F)$.

Soit $\mathcal{C}(E,F)$ l'espace des fonctions continues de l'espace topologique E vers l'espace uniforme $(F,\mathfrak{B})$.

LEMME 2.1 (N.St).-*Soit* $g \in \mathcal{F}$. *Si* $f \in \mu_u(g)$ *alors* $g \in \mathcal{C}(E,F)$ *si et seulement si* ${}^\circ f = g$.

PREUVE. - La définition de ${}^\circ f$ [cf [2], p. 115] suppose que $f(\mu(x)) \subset \mu(f(x))$, avec des notations évidentes. Soit $x' \in \mu(x)$; comme $(f,g) \in \mu_u$, $(f(x),g(x))$ et $(f(x'),g(x'))$ sont dans μ. Par suite $(g(x),g(x')) \in \mu$ (resp. $(f(x),f(x')) \in \mu$)

implique $(f(x),f(x')) \in \mu$, (resp. $(g(x),g(x') \in \mu)$. c.q.f.d.

LEMME 2.2 (N.St). - *Si* $f \in \mu_u(g) \cap \mathscr{C}^*(E,F)$ *pour un* $g \in \mathscr{F}(E,F)$, *alors* $f(\mu(x)) \subset \mu(f(x))$ *(i.e.* $^\circ f$ *existe).*

PREUVE. - Montrons que $g(\mu(x)) \subset \mu(g(x))$ pour tout x de E. Soit B un entourage quelconque de F, et $V = V^{-1} \in \mathfrak{B}$, tel que $V^3 \subset B$. L'hypothèse $f \in \mu_u(g) \cap \mathscr{C}^*(E,F)$ implique qu'il existe $h \in \mathscr{C}(E,F) \cap W(E,V)$ $[g]$. Donc $(h(x),g(x)) \in V^*$ pour tout $x \in E^*$. Comme $(f(x),h(x')) \in \mu$ pour tout $x' \in \mu(x)$, on a $(g(x),g(x')) \in V^*_\circ \mu_\circ V^* \subset V^{3*} \subset B^*$. Finalement $g(\mu(x)) \subset \mu(g(x))$ et $f(\mu(x)) \subset \mu(f(x))$.

REMARQUE. - On note au passage que $\mathscr{C}(E,F)$ est fermé dans $\mathscr{F}$ muni de l'uniformité définie par μ_u.

COROLLAIRE 2.3 (N.St). - *Si* E *est localement compact,* $f \in \mu_c(g) \cap \mathscr{C}^*(E,F)$ *pour un* $g \in \mathscr{F}$, *alors* $f(\mu(x)) \subset \mu(f(x))$ (i.e. $^\circ f$ *existe).*

PREUVE. - Pour tout $x_\circ \in E$, considérons K, voisinage compact de $x_\circ$. On a

$$\mu_u(g) \cap \mathscr{F}^*(K,F) = \mu_c(g) \cap \mathscr{F}^*(K,F)$$

d'après une remarque faite en 1.2.

Par suite (lemme 2.2), $f|_{K^*}(\mu(x) \cap K^*) \subset \mu(f(x))$. Or $\mu(x_\circ) \cap K^* = \mu(x_\circ)$, d'où le résultat.

REMARQUE. - L'interprétation standard de ce résultat est que $\mathscr{C}(E,F)$ est fermé dans $\mathscr{F}$ muni de l'uniformité définie par μ_c, lorsque E est localement compact.

3. EQUICONTINUITE ET RESULTATS LA CONCERNANT.

Soit H un sous-ensemble de $\mathcal{F}$; la concurrence au sens de Robinson (cf. [2]) de la relation :

"Pour un $V \in \mathcal{B}$, il existe $U \in \mathcal{V}_{x_0}$ tel que, pour tout f de H, $(f(x_0), f(U)) \subset V$ " (où V_{x_0} désigne le filtre des voisinages du point x_0 de E), qui exprime *l'équicontinuité de* H *en* x_0 , permet d'en donner une définition non standard :

$(\mathcal{E})$ $\exists u\ u \in \mathcal{V}^*_{x_0}$ $(\forall f \in H^*\ (f(x_0), f(u^*)) \subset \mu)$.

LEMME 3.1.- *Soit* H *une partie équicontinue en* x_0 *de* $\mathcal{C}(E,F)$ *et* g *une fonction standard. Si* $\mu_s(g) \cap H^* \neq \phi$ *, alors* $H \cup \{g\}$ *est équicontinue en* x_0.

PREUVE.-Soit U^* le voisinage de la condition d'équicontinuité $(\mathcal{E})$ satisfaite en x_0 par H.

Puisque $\mu_s(g) \cap H^* \neq \phi$, tout voisinage interne de g pour la topologie de la convergence simple rencontre H^* . Il en est ainsi de $W_{x,I^*}[g] \cap W_{x_0,I^*}[g]$ où $x \in I^*$, I^* un entourage infinitésimal de $\mathcal{B}^*$. Il existe

$h \in H^* \cap W_{x,I^*}[g] \cap W_{x_0,I^*}[g]$ et, par suite, $(g(x), g(x_0)) \in I^* \circ \mu \circ I^* \subset \mu$;

$H^* \cup \{g\}$ vérifie donc la condition $(\mathcal{E})$ en x_0.

REMARQUE.-Si $\mu_s(g) \cap H \neq \phi$, g est continue.

LEMME 3.2 (St). - *Soit* H *un ensemble équicontinu de* $\mathcal{C}(E,F)$ *alors*

$\mu_c \cap (H\times H)^* = \mu_s \cap (H\times H)^*$. *i.e. Les structures uniformes de la convergence uniforme coïncident sur* H.

PREUVE. - On a déjà vu que $\mu_c \subset \mu_s$. Reste à montrer que $\mu_s \cap H^* \times H^* \subset \mu_c \cap H^* \times H^*$.

Soit V quelconque de $\mathfrak{B}$. Puisque H est équicontinu sur E :

$\forall x \in K$ (compact de E) $\exists U_x \in \mathcal{V}_x \mid \forall y \in U_x \ \forall f \in H \ (f(y), f(x)) \in V$

On peut donc recouvrir K par des U_x , donc par des U_{x_i} en nombre fini et

$$K^* = \bigcup_{i=1}^{n \in \mathbb{N}} U^*_{x_i}.$$

Soit $y \in K^*$; il existe $i \in [1,n]$ tel que $y \in U^*_{x_i}$ et, par suite, pour tout (h,h') de $\mu_s \cap (H\times H)^*$, on a :

$$\begin{cases} (h(y),h(x_i)) \text{ et } (h'(y),h'(x_i)) \text{ sont dans } V^* , \\ (h(x_i),h'(x_i)) \in \mu \text{ puisque } (h,h') \in \mu_s \ ; \end{cases}$$

donc $(h(y),h'(y)) \in V^* \times \mu \times V^* \subset (V^3)^*$.

Cela étant vrai pour tout V de $\mathfrak{B}$, on a $(h(y),h'(y)) \in \mu$ - C.Q.F.D.

LEMME 3.3. - *Si* E *est localement compact, et si* H *est une partie de* $\mathcal{C}$(E,F) *satisfaisant* ($\mathcal{E}$) *en* x_0 *, on a l'égalité* $\mu_s(g) \cap H^* = \mu_c(g) \cap H^*$, *pour tout* $g \in \mathcal{G}$.

PREUVE. - Si $\mu_s(g) \cap H^* = \phi$, l'égalité est vraie puisque $\mu_c(g) \subset \mu_s(g)$.
Si $\mu_s(g) \cap H^* \neq \phi$, $H' = H \cup \{g\}$ est équicontinue d'après le lemme 3.1 et, par suite, $\mu_c(g) \cap H'^* = \mu_s(g) \cap H'^*$; d'où $\mu_c(g) \cap H^* = \mu_s(g) \cap H^*$.

COROLLAIRE 3.4. - *Un ensemble équicontinu a même fermeture dans* $\mathfrak{F}$, *qu'il soit muni de l'uniformité définie par* μ_c *ou de celle définie par* μ_s .

3.5 THEOREME D'ASCOLI. - *Soit* E *un espace localement compact et* F *un espace uniforme séparé et* H *un ensemble équicontinu. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1) si $h \in H^*$ *alors il existe* ${}^{o}h$ *pour la topologie engendrée par* μ_c *sur* $\mathfrak{F}$;

2) H^* *vérifie la condition* $(\mathcal{E})$ *et* $\{h(x) : h \in H^*\} \subset qs(F)$ *pour tout* $x \in E$.

PREUVE. - $1 \Longrightarrow 2$.

Soit $h \in H^*$, puisque ${}^{o}h$ existe $h(\mu(x_o)) \subset \mu(h(x_o))$ pour tout x_o standard et par suite $h(I^*) \subset \mu(h(x_o))$. Si I^* est un voisinage infinitésimal de x_o H^* vérifie bien la condition $(\mathcal{E})$ en x_o. Pour tout $x_o \in E$ $h(x_o) \in \mu({}^{o}h(x_o))$, ce qui démontre la deuxième partie de 2).

$2 \Longrightarrow 1$.

Pour $h \in H^*$, on peut définir $f \in \mathfrak{F}$: $\forall x_o \in E \quad f(x_o) = p_o$ avec $h(x_o) \in \mu(p_o)$. On a donc $(h,f) \in \mu_s$, donc $\mu_s(f) \cap H^* \neq \phi$; d'où l'on tire que f est continue d'après la remarque de 3.1 et d'après 3.3 que $\mu_s(f) \cap H^* = \mu_c(f) \cap H^*$, ce qui permet d'écrire $h(\mu(x_o)) \subset \mu(h(x_o))$, ceci prouve l'existence de ${}^{o}h$ [cf. [2] p. 115].

4. APPLICATIONS AUX GROUPES TOPOLOGIQUES.

Soient G un groupe localement compact et soit $\hat{G} = \mathrm{Hom}(G,\mathbb{T})$ le groupe topologique des morphismes continus dans le tore T. Pour démontrer que $\hat{G}$ est localement compact sans utiliser la mesure, nous utiliserons la forme particulière prise par le théorème d'Ascoli dans les hypothèses présentes :

4.1. THEOREME. - *Pour* $H \subset \hat{G}$, *les propositions suivantes sont équivalentes :*

1) H^* *vérifie* (ξ);

2) pour tout h *de* H^* , $^\circ h$ *existe;*

3) H *est relativement compact dans* $\hat{G}$ *pour la topologie engendrée par l'uniformité définie par* μ_c.

PREUVE. - 1) et 2) sont équivalentes d'après 3.5.

$2 \Longrightarrow 3$: l'existence de ^{o}h pour tout $h \in H^*$ et le fait que $^{o}h \in \hat{G}$ permettent de déduire que h est quasi standard.

$3 \Longrightarrow 2$: on montre que $h \in \mu_c(h_o)$ et $h_o = {}^{o}h$ avec $h_o \in \hat{G}$.

4.2. THEOREME. - $\hat{G}$ *est localement compact.*

PREUVE (1). -

Soit $H(K,V) = \{\gamma \in \hat{G} : \gamma(K) \subset V\}$ pour un voisinage compact de 0 dans G

---

(1) Nous remercions Monsieur Braconnier d'avoir bien voulu nous communiquer une démonstration standard de ce théorème sans utilisation de la mesure.

et un voisinage compact V de 1 dans $\mathbb{T}$ défini par

$$V = \{e^{i(\alpha+2k\pi)} : -\frac{\pi}{2} \leqslant -\alpha' < \alpha < \alpha' \leqslant \frac{\pi}{2}\}$$

Montrons que $H^*(K,V)$ vérifie $(\mathcal{E})$.

Soit $V_k = \{z \in T : z^k \in V\}$; $\mu(1)$ étant un groupe dans $\mathbb{T}^*$ et V étant compact, pour tout $k_o \in N$ et $x \in V_{k_o}^*$, il existe $\eta \in \mu(1)$ tel que $(x\eta)^{k_o} \in V$.
Par suite $x \in V_{k_o}\mu(1)$. Pour tout h de $H^*(K,V)$, $h(I^*) \subset h(K^*) \subset V^*$.

D'après les deux remarques précédentes, pour tout entier k, on a $h(I^*) \subset V_k^* \subset V_k\mu(1)$ d'où l'on tire $h(I^*) \subset \bigcap_{k\in N} V_k\mu(1) = \mu(1)$.

Par suite, $H^*(K,V)$ vérifie $(\mathcal{E})$, qui équivaut à H relativement compact d'après 4.1. Donc à $\hat{G}$ localement compact.

BIBLIOGRAPHIE. -

(Pour un exposé standard des questions abordées dans cet article, consulter, par exemple : M. Choquet, *Topologie et théorie des fonctions*, Centre de Documentation universitaire, 1965).

[1] M. MACHOVER et J. HIRSCHFELD, *Lectures on non standard Analysis*, Springer, 1969.

[2] A. ROBINSON, *Non standard Analysis*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1966.

[3] W.A.J. LUXEMBOURG, *A general theory of Monads, Applications of Model theory to Algebra, Analysis and Probability*, Holt, Rinekart and Winston, New York, 1969.

[4] C. CHARRETTON et D. RICHARD, *Elements d'une théorie non standard des groupes topologiques*, Pub. Dep. Math. Lyon, 1972, t. 9-2.

Manuscrit remis le 2 mai 1975.

C. CHARRETTON et D. RICHARD
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE