Michel Crétin

Invariance homotopique en K-théorie hermitienne

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1975, tome 12, fascicule 1
, p. 39-59
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1975__12_1_39_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1975 t. 12. 1

INVARIANCE HOMOTOPIQUE EN K-THEORIE HERMITIENNE

par Michel CRETIN

Soit A un anneau (unitaire). On désigne par $\mathbb{P}(A)$ la catégorie des A-modules projectifs de type fini et par $\mathbb{N}il(A)$ la catégorie des couples (E, ν) où E est projectif de type fini et ν un endomorphisme nilpotent de E. Ces catégories sont exactes ; on peut donc considérer les K-groupes $K_i(A)$ de $\mathbb{P}(A)$ et $N_i(A)$ de $\mathbb{N}il(A)$. Le foncteur d'oubli, défini par $(E, \nu) \mapsto E$, fournit une décomposition en somme directe $N_i(A) = K_i(A) \oplus \tilde{N}_i(A)$. On montre alors que pour tout entier $n \geqslant 2$, inversible dans A, le groupe $\tilde{N}_i(A)$ est n-divisible et sans n-torsion. Pour cela, on fait apparaître $\tilde{N}_i(A)$ comme facteur direct dans le groupe $K_i(\Omega(A))$ d'une catégorie $\Omega(A)$ formée de modules projectifs de type fini munis de "polynômes de Laurent inversibles".

On suppose de plus l'anneau A *hermitien*. On a alors sur $\mathbb{P}(A)$ un foncteur de dualité $E \mapsto {}^tE$; ceci permet de faire agir le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $K_i(A)$; On obtient ainsi des groupes de cohomologie de Tate $k_i(A)$ et $k'_i(A)$.

Rappelons d'autre part (cf. [3], problème 3 "théorème fondamental de la K-théorie algébrique") que l'on conjecture que $K_i(A[t]) = K_i(A) \oplus \tilde{N}_{i-1}(A)$. Dans le cas où i=1, c'est un théorème classique de H. Bass. Il en résulte que les foncteurs k_i et k'_i sont des invariants homotopiques sur la catégorie des anneaux hermitiens dans lesquels 2 est inversible.

Enfin, les groupes ${}_\varepsilon W_i$ et ${}_\varepsilon W'_i$ de la K-théorie hermitienne sont reliés aux groupes k_i et k'_i par la suite exacte de périodicité [6] . Il en résulte donc aussi l'invariance homotopique des groupes hermitiens.

C. RAPPELS SUR LA K-THEORIE ALGEBRIQUE.

Dans ce paragraphe, on rappelle brièvement la construction de la K-théorie algébrique d'une catégorie exacte, ainsi que quelques propriétés dont nous aurons à faire un usage fréquent par la suite. Nous suivrons [8] auquel nous renvoyons pour un exposé détaillé.

(0.1) Catégories exactes.

DEFINITION. - *Une catégorie exacte* $\mathbb{E}$ *est une sous-catégorie pleine d'une catégorie abélienne* $\mathbb{A}$, *stable par extensions et contenant l'objet nul* 0 *de* $\mathbb{A}$. *Une suite de* $\mathbb{E}$, *de la forme* $0 \to E' \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} E'' \to 0$ *,est exacte si elle est exacte dans* $\mathbb{A}$.

REMARQUE. - On peut caractériser axiomatiquement les catégories exactes. Soit $\mathbb{E}$ une catégorie exacte. Une flèche $E' \xrightarrow{i} E$ (resp. $E \xrightarrow{j} E''$) de $\mathbb{E}$ figurant dans une suite exacte de $\mathbb{E}$ de la forme précédente est appelée un

monomorphisme (resp. épimorphisme) *admissible* et est notée $E' \overset{i}{\rightarrowtail} E$ **(resp.** $E \overset{j}{\twoheadrightarrow} E''$).

Exemple. - Soit A un anneau (unitaire) ; la catégorie $\mathbb{P}(A)$ des A-modules à **droite,** projectifs de type fini est exacte.

(0.2) La construction de Quillen.

A toute catégorie exacte $\mathbb{E}$, on associe une catégorie $Q(\mathbb{E})$ de la façon **suivante** : les objets de $Q(\mathbb{E})$ sont identiques aux objets de $\mathbb{E}$ mais les **flèches** de E vers E' sont les classes, à isomorphisme près, de diagrammes de **la forme** :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, two heads, "j"'] & E' \\ E & \end{tikzcd} .$$

Pour qu'un tel diagramme soit équivalent à

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[r, tail, "i'"] \arrow[d, two heads, "J'"'] & E' \\ E & \end{tikzcd} ,$$

il faut et il suffit qu'il existe un isomorphisme $h : F \longrightarrow F'$ tel que

$$\begin{tikzcd}
& F \arrow[dl, two heads, "j"'] \arrow[dr, tail, "i"] \arrow[dd, "h"] & \\
E & & E' \\
& F' \arrow[ul, two heads, "j'"] \arrow[ur, tail, "i'"'] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

La composition des flèches dans $Q(\mathbb{E})$ est définie à l'aide du diagramme

$$\begin{tikzcd}
F \times_{E'} F' \arrow[r] \arrow[d, dashed] & F' \arrow[r, tail, "i'"] \arrow[d, two heads, "j'"] & E'' \\
F \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, dashed, two heads, "j"'] & E' & \\
E & &
\end{tikzcd}$$

.

(0.3) Définition des K-groupes.

Le nerf de la catégorie $Q(\mathbb{E})$ est l'ensemble simplicial $[n] \mapsto \mathrm{Mor}([n], \mathbf{Q}(\mathbb{E}))$. L'espace classifiant $BQ(\mathbb{E})$ de $Q(\mathbb{E})$ est la réalisation géométrique de cet ensemble simplicial. L'objet nul 0 de $\mathbb{E}$ définit un point-base de l'espace $BQ(\mathbb{E})$.

Les K-groupes de $\mathbb{E}$ sont alors définis comme les groupes d'homotopie de l'espace pointé $BQ(\mathbb{E})$. Plus précisément, on a :

$$K_i(\mathbb{E}) = \pi_{i+1}(BQ(\mathbb{E})) \quad \text{pour} \quad i \geq 0.$$

On vérifie que ces groupes sont compatibles avec les produits finis et les limites inductives filtrantes : si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ sont deux catégories exactes on a

$$K_i(\mathbb{E}\times\mathbb{E}') \simeq K_i(\mathbb{E}) \oplus K_i(\mathbb{E}')$$

et, si $j \mapsto \mathbb{E}_j$ est un système inductif filtrant de catégories exactes, on a

$$K_i(\varinjlim_j \mathbb{E}_j) \simeq \varinjlim_j K_i(\mathbb{E}_j).$$

On montre (cf. [8] th.1) que $K_o(\mathbb{E})$ est canoniquement isomorphe au groupe de Grothendieck de la catégorie exacte $\mathbb{E}$.

Enfin, on définit les K-groupes d'un anneau unitaire A par

$$K_i(A) = K_i(\mathbb{P}(A)).$$

(0.4) Foncteurs exacts.

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ deux catégories exactes. Un foncteur $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ est exact s'il est additif et transforme les suites exactes de $\mathbb{E}$ en suites exactes de $\mathbb{E}'$. On obtient alors un foncteur $Q(f) : Q(\mathbb{E}) \to Q(\mathbb{E}')$ et des homomorphismes de groupes $K_i(f) : K_i(\mathbb{E}) \to K_i(\mathbb{E}')$. De cette façon K_i devient un foncteur des catégories exactes et des foncteurs exacts, à valeurs dans les groupes abéliens.

DEFINITION. - *On dit qu'une suite* $0 \to f' \to f \to f'' \to 0$ *de foncteurs exacts de* $\mathbb{E}$ *vers* $\mathbb{E}'$ *est exacte, si, pour tout objet* E *de* $\mathbb{E}$, *la suite* $0 \to f'(E) \to f(E) \to f''(E) \to 0$ *est exacte dans* $\mathbb{E}'$.

Nous utiliserons souvent la proposition suivante :

PROPOSITION. - *Soit* $0 \to f' \to f \to f'' \to 0$ *une suite exacte de foncteurs exacts entre* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{E}'$. *On a la relation :*

$$K_i(f) = K_i(f') + K_i(f'') : K_i(\mathbb{E}) \longrightarrow K_i(E'') \text{ pour } i \geqslant 0.$$

Indiquons la méthode de démonstration : soit $Ex(\mathbb{E})$ la catégorie des suites exactes de $\mathbb{E}$. C'est une catégorie exacte dont on note les objets σ par $0 \to s\sigma \to t\sigma \to q\sigma \to 0$, définissant ainsi trois foncteurs exacts s,t et q : $Ex(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{E}$. Il suffit alors de prouver que :

$$K_i(t) = K_i(s) + K_i(q) : K_i(Ex(\mathbb{E})) \longrightarrow K_i(\mathbb{E}).$$

Pour cela, considérons le foncteur exact α : $\mathbb{E}\times\mathbb{E} \to Ex(\mathbb{E})$ tel que $td = (s\oplus q)d$, $sd = pr_1$ et $qd = pr_2$.

D'où

$$K_i(t)K_i(d)=(K_i(s)+K_i(q))K_i(d) : K_i(\mathbb{E})\oplus K_i(\mathbb{E}) \to K_i(\mathbb{E})$$

Mais, d'après [8] th. 2,

$(K_i(s),K_i(q) : K_i(Ex(\mathbb{E})) \to K_i(\mathbb{E})\oplus K_i(\mathbb{E})$ est un isomorphisme. Puisque $(s,q)d = id$, $K_i(d)$ est un isomorphisme et l'on obtient la relation cherchée.

1. LES GROUPES $N_i(A)$.

Dans la première partie de ce paragraphe, on donne la définition des groupes $\tilde{N}_i(A)$ pour un anneau unitaire A et on énonce le théorème de divisibilité. Les autres parties de ce paragraphe sont consacrées à la démonstration de ce théorème. Pour cela, on fait apparaître les groupes $\tilde{N}_i(A)$ comme facteurs directs de K-groupes $K_i(\Omega(A))$ d'une catégorie exacte $\Omega(A)$, introduite dans la seconde partie de ce paragraphe ; une filtration sur $\Omega(A)$ permet d'établir ce dernier point.

(1.1) Les groupes $\tilde{N}_i(A)$.

Soit $\mathbb{E}$ une catégorie exacte. On désigne par $\mathbb{N}\mathrm{il}(\mathbb{E})$ la catégorie dont les objets sont les couples (E,ν) où E est un objet de $\mathbb{E}$ et ν un endomorphisme nilpotent de E ; un flèche $f : (E,\nu) \longrightarrow (F,\mu)$ est une flèche $f : E \to F$ telle que $\mu \circ f = f \circ \nu$ et une suite

$0 \to (E',\nu') \to (E,\nu) \longrightarrow (E'',\nu'') \to 0$ est exacte s'il en est ainsi de la suite sous-jacente d'objets de $\mathbb{E}$.

De plus, pour tout entier $r \geq 0$, on désigne par $\mathbb{N}\mathrm{il}^r(\mathbb{E})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{N}\mathrm{il}(\mathbb{E})$ dont les objets sont les couples (E,ν) tels que $\nu^{r+1} = 0$.

LEMME. - *Les catégories* $\mathbb{N}\mathrm{il}(\mathbb{E})$ et $\mathbb{N}\mathrm{il}^r(\mathbb{E})$ $(r \geq 0)$ *sont exactes et l'on a*

$$\mathbb{N}\mathrm{il}(\mathbb{E}) = \varinjlim_r \mathbb{N}\mathrm{il}^r(\mathbb{E}).$$

En effet, on peut considérer $\mathbb{E}$ comme sous-catégorie exacte d'une catégorie abélienne $\mathbb{A}$. Alors $\mathbb{N}\mathrm{il}(\mathbb{E})$ (resp. $\mathbb{N}\mathrm{il}^r(\mathbb{E})$) est une sous-catégorie exacte de la catégorie abélienne $\mathbb{N}\mathrm{il}(\mathbb{A})$ (resp. $\mathbb{N}\mathrm{il}^r(\mathbb{A})$).

COROLLAIRE. - *On définit les groupes* $N_i(\mathbb{E}) = K_i(\mathbb{N}il(\mathbb{E}))$ *et pour tout* $r \geq 0$, $N_i^r(\mathbb{E}) = K_i(\mathbb{N}il^r(\mathbb{E}))$. *On a alors* $N_i(\mathbb{E}) = \varinjlim_r N_i^r(\mathbb{E})$.

En particulier, pour un anneau unitaire A, on notera

$$N_i(A) = N_i(\mathbb{P}(A)) \text{ et } N_i^r(A) = N_i^r(\mathbb{P}(A)).$$

De plus, le foncteur $E \mapsto (E,0)$ de $\mathbb{E}$ à valeurs dans $\mathbb{N}il(\mathbb{E})$ (resp. dans $\mathbb{N}il^r(\mathbb{E})$) admet pour rétraction le foncteur d'oubli $(E,\nu) \mapsto E$. On définit alors les groupes $\widetilde{N}_i(\mathbb{E})$ et $\widetilde{N}_i^r(\mathbb{E})$ à l'aide des suites naturellement scindées :

$$0 \longrightarrow K_i(\mathbb{E}) \longrightarrow N_i(\mathbb{E}) \xrightarrow{\Pi_i} \widetilde{N}_i(\mathbb{E}) \longrightarrow 0 \ ,$$

$$0 \longrightarrow K_i(\mathbb{E}) \longrightarrow N_i^r(\mathbb{E}) \xrightarrow{\Pi_i^r} \widetilde{N}_i^r(\mathbb{E}) \longrightarrow 0 \ .$$

Le corollaire précédent montre que $\widetilde{N}_i(\mathbb{E}) = \varinjlim_n \widetilde{N}_i^r(\mathbb{E})$ et pour un anneau unitaire A, on a les groupes $\widetilde{N}_i(A) = \widetilde{N}_i(\mathbb{P}(A))$ et $\widetilde{N}_i^r(A) = \widetilde{N}_i^r(\mathbb{P}(A))$.

La suite de ce paragraphe est consacrée à la démonstration du théorème suivant :

THEOREME. - *Soit* A *un anneau unitaire. Pour tout entier* $n \geq 2$ *inversible dans* A, *les groupes* $\widetilde{N}_i(A)$ *sont n-divisibles et sans n-torsion.*

(1.2) La catégorie $\Omega(A)$.

Soit $\mathbb{E}$ une catégorie exacte. D'après [4] on considère la catégorie $\mathbb{E}[t,t^{-1}]$ dont les objets sont les objets de $\mathbb{E}$, les flèches de E dans F sont les sommes formelles à support fini (polynômes de Laurent) $\gamma = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n t^n$, où les γ_n sont des flèches de E dans F dans $\mathbb{E}$. La loi de composition est le "produit des polynômes de Laurent".

On définit alors une catégorie $\Omega(\mathbb{E})$ de la façon suivante : les objets de $\Omega(\mathbb{E})$ sont les couples (E,γ) où E est un objet de $\mathbb{E}$ et γ un automorphisme de E dans $\mathbb{E}[t,t^{-1}]$; les flèches $f : (E,\gamma) \to (F,\delta)$ sont les flèches $f : E \to F$ de $\mathbb{E}$ telles que $\delta\circ f = f\circ\gamma$ dans $\mathbb{E}[t,t^{-1}]$; enfin une suite $0\to (E',\gamma') \to (E,\gamma) \to (E'',\gamma'') \to 0$ est exacte, si la suite sous-jacente de $\mathbb{E}$ est exacte.

De plus, pour tout entier $r \geq 0$, on désigne par $\Omega^r(E)$ la sous-catégorie pleine de $\Omega(E)$ dont les objets sont les couples (E,γ) tels que l'ordre de γ soit supérieur ou égal à r (i.e. $\gamma_{-n}=0$ pour $n>r$).

LEMME. - *Les catégories* $\Omega(\mathbb{E})$ *et* $\Omega^r(\mathbb{E})$ *pour tout* $r \geq 0$ *sont exactes et* $\Omega(\mathbb{E}) = \varinjlim_r \Omega^r(\mathbb{E})$. *Par suite* $K_i(\Omega(\mathbb{E})) = \varinjlim_r K_i(\Omega^r(\mathbb{E}))$.

En effet, $\mathbb{E}$ est une sous-catégorie exacte d'une catégorie abélienne $\mathbb{A}$, alors $\Omega(\mathbb{E})$ (resp. $\Omega^r(\mathbb{E})$) est une sous-catégorie exacte de la catégorie abélienne $\Omega(\mathbb{A})$ (resp. $\Omega^r(\mathbb{A})$).

Lorsque A est un anneau unitaire, on note $\Omega(A) = \Omega(\mathbb{P}(A))$ et $\Omega^r(A) = \Omega^r(\mathbb{P}(A))$ $r \geq 0$.

(1.3) Les homomorphisme $\rho_i : K_i(\Omega(A)) \longrightarrow \widetilde{N}_i(A)$.

Tout d'abord, nous construisons un foncteur exact $\rho^o : \Omega^\circ(A) \to \mathbb{N}\mathrm{il}(A)$ Pour cela, en suivant l'exemple de [9] (démonstration du théorème 16.4) on établit la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - *i) Soit* (E,α) *un objet de* $\Omega^\circ(A)$. *Désignons par* u_α *l'endomorphisme de* $E \otimes_A A[t]$ *induit par* α. *Alors* $E_\alpha = \mathrm{Coker}(u_\alpha)$ *est un* A-*module projectif de type fini et la multiplication par* t *induit sur* E_α *un endomorphisme nilpotent* ν_α.

ii) L'application $(E,\alpha) \mapsto (E_\alpha,\nu_\alpha)$ *définit un foncteur exact* $\rho^o : \Omega^\circ(A) \longrightarrow \mathbb{N}\mathrm{il}(A)$.

iii) Soient (E,α) *et* (E,β) *deux objets de* $\Omega^\circ(A)$ *ayant le même module sous-jacent, alors la suite*

$$0 \longrightarrow (E_\beta,\nu_\beta) \longrightarrow (E_{\alpha\beta},\nu_{\alpha\beta}) \longrightarrow (E_\alpha,\nu_\alpha) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Considérons donc un objet (E,α) de $\Omega^\circ(A)$. L'inclusion $i : E \otimes_A A[t] \longrightarrow E \otimes_A A[t,t^{-1}]$ admet une rétraction A-linéaire j, de sorte que $v_\alpha = j \circ u'_{\alpha^{-1}} \circ i$ est une rétraction A-linéaire de u_α, où $u'_{\alpha^{-1}}$ désigne l'endomorphisme de $E \otimes_A A[t,t^{-1}]$ induit par α^{-1}. Il résulte de ceci une suite scindée de A-modules

$$0 \longrightarrow E \otimes_A A[t] \xrightarrow{u_\alpha} E \otimes_A A[t] \longrightarrow E_\alpha \longrightarrow 0 \quad ;$$

donc E_α est un A-module projectif et on note ν_α l'endomorphisme de E_α induit **par** t. De plus, la suite exacte $E \otimes_A A[t] / t^s E \otimes_A A[t] \longrightarrow E_\alpha \longrightarrow 0$, où s est **l'ordre** de α^{-1}, montre que E_α est de type fini et ν_α nilpotent. On obtient **ainsi** un foncteur $\rho^\circ : (E,\alpha) \longmapsto (E_\alpha, \nu_\alpha)$ dont l'exactitude résulte du lemme du **serpent**.

Enfin soient (E,α) et (E,β) deux objets de $\Omega^\circ(A)$ ayant le même module **sous-jacent**. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}u_\alpha \,/\, \mathrm{Im}u_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathrm{Coker}(u_{\alpha\beta}) \longrightarrow \mathrm{Coker}(u_\alpha) \longrightarrow 0$$

et le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E \otimes_A A[t] \arrow[r, "u_\beta"] \arrow[d, "u_{\alpha\beta}"', "\wr"] & E \otimes_A A[t] \arrow[d, "u_\alpha", "\wr"'] \\
\mathrm{Im}\, u_{\alpha\beta} \arrow[r] & \mathrm{Im}\, u_\alpha
\end{tikzcd}$$

montre que $\mathrm{Im}\, u_\alpha / \mathrm{Im}\, u_{\alpha\beta}$ s'identifie à $\mathrm{Coker}(u_\beta)$; d'où la suite exacte :

$0 \longrightarrow E_\beta \longrightarrow E_{\alpha\beta} \longrightarrow E_\alpha \longrightarrow 0$, ce qui achève la démonstration de la proposition 1.

COROLLAIRE. - *Pour tout entier* $r \geq 0$, *on a un foncteur exact*

$\rho^r : \Omega^r(A) \longrightarrow \mathrm{Nil}(A)$ *défini par* $(E,\gamma) \longmapsto (E_{t^r\gamma}, \nu_{t^r\gamma})$.

On considère alors les homomorphismes composés : $\rho_i^r = \pi_i^r \circ K_i(\rho^r)$: $K_i(\Omega^r(A)) \longrightarrow \tilde{N}_i(A)$.

PROPOSITION 2. - *Pour tout entier* $r \geq 0$ *le diagramme*

$$\begin{tikzcd} K_i(\Omega^r(A)) \arrow[d] \arrow[dr, "\rho_i^r"] & \\ K_i(\Omega^{r+1}(A)) \arrow[r, "\rho_i^{r+1}"'] & \widetilde{N}_i(A) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

En effet, soit $i_r : \Omega^r(A) \longrightarrow \Omega^{r+1}(A)$ le foncteur d'inclusion et $\delta_r : \Omega^r(A) \longrightarrow \mathrm{Nil}(A)$ le foncteur défini par $(E,\gamma) \longmapsto (E,0)$.

D'après la proposition 1, iii) on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow (E_t,\nu_t) \longrightarrow (E_{t^{r+1}\gamma},\nu_{t^{r+1}\gamma}) \longrightarrow (E_{t^r\gamma},\nu_{t^r\gamma}) \longrightarrow 0$$

et, par définition de ρ°, on a $(E_t,\nu_t) = (E,o)$. Il en résulte que la suite de foncteurs de $\Omega^r(A)$ dans $\mathrm{Nil}(A)$.

$$0 \longrightarrow \delta_r \longrightarrow \rho^{r+1} \circ i_r \longrightarrow \rho^r \longrightarrow 0$$

est exacte. D'après la proposition (0.4), on a la relation.

$$K_i(\rho^{r+1} \circ i_r) = K_i(\rho^r) + K_i(\delta_r) : K_i(\Omega^r(A)) \longrightarrow N_i(A).$$

En composant par $\Pi_i : N_i(A) \longrightarrow \widetilde{N}_i(A)$ on obtient la relation $\rho_i^{r+1} \circ K_i(i_r) = \rho_i^r$, d'où la proposition.

COROLLAIRE. - *Pour tout* $i \geq 0$, *il existe un unique homomorphisme* $\rho_i : K_i(\Omega(A)) \longrightarrow \tilde{N}_i(A)$ *tel que, pour tout* $r \geq 0$, *le diagramme*

$$\begin{tikzcd} K_i(\Omega^r(A)) \arrow[d] \arrow[r, "\rho_i^r"] & \tilde{N}_i(A) \\ K_i(\Omega(A)) \arrow[ur, "\rho_i"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Nous allons montrer que l'homomorphisme ρ_i a une section, ce qui établira que le groupe $\tilde{N}_i(A)$ est facteur direct dans $K_i(\Omega(A))$ comme annoncé au début de ce paragraphe.

Pour cela, on définit un foncteur exact $\Delta^1 : \mathrm{Nil}(A) \longrightarrow \Omega^1(A)$ par $(E,\nu) \longmapsto (E, 1-\nu t^{-1})$ et on note

$$\Delta_i : \tilde{N}_i(A) \longrightarrow N_i(A) \xrightarrow{K_i(\Delta^1)} K_i(\Omega^1(A)) \rightarrow K_i(\Omega(A))$$

l'homomorphisme composé. On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 3. - *Pour tout* $i \geq 0$, Δ_i *est une section de* ρ_i *i.e.* $\rho_i \circ \Delta_i = \mathrm{id}_{\tilde{N}_i(A)}$.

Avec les notations précédentes, on a $\rho^1 \circ \Delta^1(E,\nu) = \rho^\circ(E, t-\nu)$.
Mais on a une suite exacte de $A[t]$-modules (la suite exacte caractéristique de ν , [1], p. 630)

$$0 \longrightarrow E \otimes_A A[t] \xrightarrow{t-\nu} E \otimes_A A[t] \longrightarrow E_\nu \longrightarrow 0,$$

où E_ν est le $A[t]$-module dont le groupe sous-jacent est E et où $x.(\sum_k a_k t^k) = \sum_k \nu^k(x).a_k$, pour $x \in E$ et $\sum_k a_k t^k \in A[t]$; par suite on a $\rho^\circ(E,t-\nu) = (E,\nu)$ et $\rho^1 \circ \Delta^1 = id_{Nil(A)}$. Si l'on désigne par $\Delta_i^1 : \tilde{N}_i(A) \longrightarrow N_i(A) \xrightarrow{K_i(\Delta^1)} K_i(\Omega^1(A))$ l'homomorphisme composé, on a $\rho_i^1 \circ \Delta_i^1 = id_{\tilde{N}_i(A)} = \rho_i \circ \Delta_i$, ce qui établit la proposition.

(1.4) Le théorème de divisibilité.

LEMME. - *Soit* $n \geq 2$ *un entier. Les coefficients de la série formelle* $\sqrt[n]{1+t} \in \mathbb{Q}[[t]]$ *sont dans le sous-anneau* $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ *de* $\mathbb{Q}$.

On procède par récurrence sur le degré de cette série. On a $\sqrt[n]{1+t} = 1 + \frac{1}{n} t + o(t)$. Supposons que $\sqrt[n]{1+t} = 1+p(t)+a_{k+1}t^{k+1}+o(t^{k+1})$, où P(t) est un polynôme dans $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$, à coefficients, sans terme constant et de degré k. On a alors $1+t = 1+na_{k+1}t^{k+1} + Q(t) + o(t^{k+1})$ où Q(t) est un polynôme de degré k+1 à coefficients dans $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$; il en résulte que $a_{k+1} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$.

Le théorème (1.1) résulte alors de la proposition suivante.

PROPOSITION. - *Soient* A *un anneau (unitaire) et un entier inversible dans* A.

i) Le foncteur $\theta^n : \mathbb{N}\mathrm{il}(A) \longrightarrow \Omega(A)$ *défini par* $(E,\nu) \longmapsto (E, \sqrt[n]{1-\nu t^{-1}})$ *est exact.*

Désignons par $\theta_i^n : \tilde{N}_i(A) \longrightarrow N_i(A) \longrightarrow K_i(\Omega(A))$ *l'homomorphisme composé*

ii) L'endomorphisme $\rho_i \circ \theta_i^n$ *de* $\tilde{N}_i(A)$ *est bijectif. L'automorphisme réciproque est induit par la multiplication par n.*

Le foncteur θ^n est bien défini grâce au lemme précédent.

Pour $1 \leq k \leq n$, on considère les foncteurs exacts $g_k : \mathbb{N}\mathrm{il}^r(A) \to \mathbb{N}\mathrm{il}(A)$ définis par $(E,\nu) \mapsto (E_\alpha{}^k, \nu_\alpha{}^k)$, où $\alpha = t^r\ (\sqrt[n]{1-\nu t^{-1}})$.

La proposition (1.3.1,iii) montre que l'on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow g_1 \longrightarrow g_{k+1} \longrightarrow g_k \longrightarrow 0 \ ;$$

d'où $K_i(g_{k+1}) = K_i(g_1) + K_i(g_k) : N_i{}^r(A) \longrightarrow N_i(A)$

et, par suite, $K_i(g_n) = n\ K_i(g_1)$.

Soit $j_i{}^r : \tilde{N}_i{}^r(A) \longrightarrow \tilde{N}_i(A)$. Grâce au corollaire de la proposition (1.3.2) on vérifie que

$$\rho_i \circ \Delta_i \circ j_i^r = n\ \rho_i \circ \theta_i^n \circ j_i^r \quad \tilde{N}_i^r(A) \longrightarrow \tilde{N}_i(A).$$

Par passage à la limite inductive, on obtient

$$\rho_i \circ \Delta_i = n\ \rho_i \circ \theta_i^n \quad \tilde{N}_i(A) \longrightarrow \tilde{N}_i(A)$$

d'où $n\ \rho_i \circ \theta_i^n = \mathrm{id}_{\tilde{N}_i(A)}$.

COROLLAIRE. - *Si* A *est une* $\mathbb{Q}$*-algèbre,* $\tilde{N}_i(A)$ *est un* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel pour tout* $i \geq 0$.

2. SUR L'INVARIANCE HOMOTOPIQUE DE LA K-THEORIE HERMITIENNE.

(2.1) Les groupes $k_i(A)$ et $k'_i(A)$.

Soit A un anneau hermitien (i.e. un anneau unitaire A, muni d'un anti-automorphisme involutif $a \mapsto \bar{a}$). Si E est un A-module projectif de type fini, ${}^tE$ désigne l'ensemble des $f : E \longrightarrow A$, $\mathbb{Z}$-linéaires tels que $f(x.a)=\bar{a}f(x)$ pour $x \in E$ et $a \in A$. Alors ${}^tE$ est un A-module projectif de type fini et l'application $E \longmapsto {}^tE$ définit un foncteur $\mathbb{P}(A) \longrightarrow \mathbb{P}(A)^\circ$, tel que ${}^t({}^tE) \simeq E$ pour tout E. Il résulte de ceci, que le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ opère sur les $K_i(A)$.

On peut donc considérer les groupes de cohomologie de Tate $k_i(A) = \hat{H}^{pair}$ $\hat{H}^{pair}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K_i(A))$ et $k'_i(A) = \hat{H}^{imp}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K_i(A))$.

De même, le foncteur $Nil(A) \longrightarrow Nil(A)^\circ$, défini par $(E,\nu) \longmapsto ({}^tE, {}^t\nu)$, induit une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur les $N_i(A)$, d'où des groupes $n_i(A)$ et $n'_i(A)$. De plus, on a une suite scindée de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-modules :

$$0 \longrightarrow K_i(A) \longrightarrow N_i(A) \longrightarrow \tilde{N}_i(A) \longrightarrow 0$$

permettant de définir les groupes $\tilde{n}_i(A)$ et $\tilde{n}_i'(A)$.

PROPOSITION 1. - *Soit* A *un anneau hermitien dans lequel 2 est inversible. On a alors* $\tilde{n}_i(A) = \tilde{n}'_i(A) = 0$ *pour tout* $i \geq 0$.

En effet, si $M = \tilde{N}_i(A)$, on a

$$\tilde{n}_i(A) = \{x \in M / x = \bar{x}\} \;/\; \{x \in M / \exists\, y \in M \;\; x = y+\bar{y}\} \quad \text{et}$$

$$\tilde{n}'_i(A) = \{x \in M / x = -\bar{x}\} \;/\; \{x \in M / \exists\, y \in M \;\; x = y-\bar{y}\}.$$

Soit $x \in M$ tel que $x = \varepsilon\bar{x}$ ($\varepsilon=+1$ ou $\varepsilon=-1$). Or $2\mathrm{id}_M$ est un isomorphisme ; donc, si $y = \frac{1}{2}x$, on a $\varepsilon\bar{y} = \frac{1}{2}\varepsilon\bar{x} = \frac{1}{2}x$ d'où $x = y+\varepsilon\bar{y}$.

On peut généraliser de la façon suivante la proposition 1.

PROPOSITION 2. - *Soient* A *un anneau et* G *un groupe fini tel que les* $\tilde{n}_i(A)$ *soient des* G-*modules. Alors, si* $n = \mathrm{Card}(G)$ *est inversible dans* A, *on a* $\hat{H}^j(G, \tilde{n}_i(A)) = 0$.

Il suffit, pour cela, de démontrer le lemme suivant.

LEMME. - *Soient* G *un groupe fini,* $n = \mathrm{Card}(G)$ *et* M *un* $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ *-module sur lequel* G *opère. On a* $\hat{H}^j(G,M) = 0$ *pour tout* j.

On pose $\Lambda = \mathbb{Z}[G]$ et $\Lambda' = \Lambda[\frac{1}{n}]$. Il suffit, par exemple, de montrer que

(i) le foncteur d'inclusion $\mathrm{Mod}_{\Lambda'} \hookrightarrow \mathrm{Mod}_\Lambda$, qui est exact, préserve les objets injectifs, et que (ii) le foncteur composé $\mathrm{Mod}_{\Lambda'} \to \mathrm{Mod}_\Lambda \to \mathcal{A}b$, $M \longmapsto M^G$ est exact.

(i) Soit $0 \to M \to N$ une suite exacte de Mod_Λ et $f : M \to I$ un homomorphisme, où I est injectif dans $\mathrm{Mod}_{\Lambda'}$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right] \arrow[r] \arrow[dr] & N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right] \arrow[d, dashed] \\
 & & I
\end{tikzcd}$$

montre que f se prolonge en un homomorphisme $N \to I$.

(ii) il suffit de montrer que si $M \xrightarrow{\pi} P \to 0$ est exacte dans Mod_A, la suite $M^G \to P^G \to 0$ est exacte dans $\mathcal{A}b$.

Soit $y \in P^G$, il existe $x \in M$ tel que $y = \pi(x)$. Mais $x' = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g.x \in M^G$ et $\pi(x') = y$.

On peut interpréter les propositions 1 et 2 comme des résultats d'invariance homotopique.

COROLLAIRE. - *Soit A un anneau hermitien dans lequel 2 est inversible. Alors* $k_0(A) \simeq k_0(A[t])$ *et* $k_1(A) \simeq k_1(A[t])$.

En effet, d'après [1] (p. 663 th. (a)) et [2] th.4, on a la relation $K_1(A[t]) \simeq K_1(A) \oplus \widetilde{N}_0(A)$, il résulte alors de la proposition 1 que $k_1(A[t]) \simeq k_1(A$
En utilisant l'isomorphisme de suspension $K_1(SA) \simeq K_0(A)$, on obtient $k_0(A) \simeq k_0(A[t])$.

Pour les plus hautes dimensions, l'analogue de la formule de Bass est encore à l'état de conjecture ([3], p. 63, théorème fondamental de la K-théorie algébrique (1)).

CONJECTURE. - *Soit* A *un anneau unitaire. Pour tout* $i \geq 2$, *on a*

$K_i(A[t]) \simeq K_i(A) \oplus \tilde{N}_{i-1}(A)$.

Cette conjecture implique donc que $k_i(A) \simeq k_i(A[t])$ et $k'_i(A) \simeq k'_i(A[t])$ pour tout i, donc que les foncteurs k_i et k'_i sont des invariants homotopiques sur la catégorie des anneaux hermitiens dans lesquels 2 est inversible.

REMARQUE 1.- D'après Quillen ([8] cor. du th. 7), on sait que l'on a $K_i(A) \simeq K_i(A[t])$, pour tout anneau noethérien régulier.

REMARQUE 2. - Les résultats précédents permettent de montrer que $N_i(SA)$ est facteur direct dans Coker($K_i(A)$ $K_i(A\ t$) où SA désigne la suspension de l'anneau A.

(2.2) Invariance homotopique en K-théorie hermitienne.

Rappelons tout d'abord, d'après [5], la définition des groupes ${}_{\varepsilon}W'_i(A)$ et ${}_{\varepsilon}W_i(A)$ de la K-théorie hermitienne.

On désigne par A un anneau hermitien, dans lequel 2 *est inversible*. Si E est un A-module projectif de type fini, on note H(E) le module ε-hyperbolique associé : c'est $E \oplus {}^tE$ muni de la forme ε-hermitienne $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$. On pose ${}_{\varepsilon}O_{n,n}(A) = \mathrm{Aut}(H(A^n))$ et ${}_{\varepsilon}O(A) = \varinjlim_n {}_{\varepsilon}O_{n,n}(A)$.

Par définition on a ${}_{\varepsilon}L_i(A) = \pi_i(B_{\varepsilon}O(A)^+)$ $i \geq 0$, tandis que ${}_{\varepsilon}L_0(A)$ est le groupe de Grothendieck de la catégorie des modules ε-quadratiques. D'autre part, d'après [2] th. 4, on a $K_i(A) = \pi_i(B\,Gl(A)^+)$ $i \geq 1$ où $Gl(A) = \varinjlim_A Gl_n(A)$ avec $Gl_n(A) = \mathrm{Aut}(A^n)$. Le foncteur d'oubli des structures quadratiques définit un homomorphisme ${}_{\varepsilon}L_i(A) \to K_i(A)$ $i \geq 0$, dont le noyau est, par définition, le groupe ${}_{\varepsilon}W'_i(A)$. De même, le foncteur hyperbolique défini un homomorphisme $K_i(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_i(A)$ dont le conoyau est le groupe ${}_{\varepsilon}W_i(A)$.

PROPOSITION. - *Soit* A *un anneau hermitien dans lequel 2 est inversible. On a alors* ${}_\varepsilon W_i(A) \xrightarrow{\simeq} {}_\varepsilon W_i(A[t])$ *si* $0 \leq i \leq 2$ *et* ${}_\varepsilon W'_i(A) \xrightarrow{\simeq} {}_\varepsilon W'_i(A[t])$ *si* $0 \leq i \leq 1$. *De plus, la conjecture implique que* ${}_\varepsilon W_i$ et ${}_\varepsilon W'_i$ *sont des invariants homotopiques pour tout* $i \geq 0$.

Tout d'abord, d'après [5] (I. th. 1.1), on a ${}_\varepsilon W'_o(A) \simeq {}_\varepsilon W'_o(A[t])$. On vérifie alors aisément que l'on a une suite exacte ${}_\varepsilon W'_0(A) \to {}_\varepsilon W'_0(A) \to k_o(A)$; d'où il résulte que ${}_\varepsilon W_o(A) \simeq {}_\varepsilon W_o(A[t])$.

D'après le théorème de périodicité de la K-théorie hermitienne [6], on a la suite exacte :

$$\begin{tikzcd}
{}_\varepsilon W'_n(A) \arrow[r] & {}_\varepsilon W_n(A) \arrow[r] & k_n(A) \arrow[r] & -{}_\varepsilon W_{n+1}(A) \arrow[r] & {}_\varepsilon W'_{n-1}(A) \arrow[d] \\
k'_n(A) \arrow[u] & & & & k'_n(A) \arrow[d] \\
{}_\varepsilon W'_{n-1}(A) \arrow[u] & {}_\varepsilon W_{n+1}(A) \arrow[l] & k_n(A) \arrow[l] & {}_\varepsilon W_n(A) \arrow[l] & {}_\varepsilon W'_n(A) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Le corollaire (2.1) et ce qui précède montrent alors que ${}_\varepsilon W_2(A) \xrightarrow{\simeq} {}_\varepsilon W_2(A[t])$. Par l'isomorphisme de suspension, on a ${}_\varepsilon W_1(A) \xrightarrow{\simeq} {}_\varepsilon W_1(A[t])$ et, enfin, la suite exacte montre que ${}_\varepsilon W'_i(A) \xrightarrow{\simeq} {}_\varepsilon W'_i(A[t])$.

Plus généralement, l'invariance homotopique des ${}_\varepsilon W_i$ et ${}_\varepsilon W'_i$ est équivalente à celle des k_i et k'_i. Donc, si la conjecture est véfifiée, les groupes hermitiens sont des invariants homotopiques.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] H. BASS, *lgebraic K-theory* (Benjamin), 1968.

[2] L. BREEN, *Un théorème de finitude en K-théorie*, Séminaire Bourbaki, n° 438 (1973).

[3] S.M. GERSTEN, *Problems about higher K-functions, in Algebraic K-theory I*, Lecture notes in Math. n° 341 (Springer), 1973.

[4] M. KAROUBI, *La périodicité de Botten en K-théorie générale*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 4e série t. 4, p. 63-95, (1971).

[5] M. KAROUBI, *Périodicité de la K-théorie hermitienne in Algebraic K-theory III*, Lect. Notes in Math, n° 343 (Springer), 1973.

[6] M. KAROUBI, *Théorie de Quillen et homologie du groupe ortogonal*, (à paraître).

[7] M. KAROUBI, *Some problems and conjectures in Algebraic K-theory in Algebraic K-theory III*. Lect. Notes in Math. n° 343 (Springer), 1973).

[8] D. QUILLEN, *Higher algebraic K-theory, in Algebraic K-theory I*. Lect. notes in Math, n° 341 (Springer), 1973.

[9] R.G. SWAN, *Algebraic K-theory*, Lect Notes in Math. n° 76 (Springer) 1968.

Michel CRETIN
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 - VILLEURBANNE