PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

ANDRÉ ROUX

Catégories, complexes et homotopie

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1975, tome 12, fascicule 1
, p. 13-24
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1975__12_1_13_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1975 t.12-1

CATEGORIES, COMPLEXES ET HOMOTOPIE

par André ROUX

0. INTRODUCTION.

L'objet de cet article est une démonstration simple du résultat suivant dû à D. Quillen (cf. [2] , ch. 6, § 3) : *$\mathcal{E}$ étant la catégorie des espaces topologiques, soient* H *la classe des équivalences faibles d'homotopie et* $\mathcal{H} = \mathcal{E}[H^{-1}]$ *la catégorie "homotopique" ;* $B = T\Delta : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{E}$ *étant le foncteur classifiant (au sens de G. Segal* [3] *) de la catégorie* $\mathcal{C}$ *des petites catégories dans* $\mathcal{E}$, *soit* Σ *la classe des foncteurs* f *tels que* $Bf \in H$ *; alors* B *induit une équivalence de catégories de* $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ *dans* $\mathcal{H}$ *dont l'équivalence inverse est induite par* ES : $\mathcal{E} \rightsquigarrow \mathcal{C}$, *où* S *est le foncteur complexe singulier et* E *le foncteur explosion (pour les définitions, voir le § 1).*

En fait, $\mathcal{S}$ étant la catégorie des complexes (semi simpliciaux), soit Θ la classe des morphismes de complexes tels que $Tf \in H$ (où T est le foncteur réalisation géométrique) ; T et S sont en adjonction et on voit facilement que T induit une équivalence de $\mathcal{S}[\Theta^{-1}]$ dans $\mathcal{H}$ dont l'équivalence inverse est induite par S. Il suffit donc de montrer que le foncteur injection canonique $\Delta : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{S}$ induit une équivalence de $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ dans $\mathcal{S}[\Theta^{-1}]$ dont l'équivalence inverse est induite par E ; dans ce but, on établit l'existence de morphismes fonctoriels $j : E\Delta \to 1_{\mathcal{C}}$ et $k : \Delta E \to 1_{\mathcal{S}}$ qui, par passage aux catégories de fractions, donnent l'équivalence cherchée.

Le plan de cet article est le suivant : on donne (§1) les rappels des définitions des foncteurs Δ et E et on construit le morphisme j ; on montre (§2) comment étendre à $\mathcal{S}$ un foncteur de O dans $\mathcal{S}$ (où O est la catégorie des ensembles finis totalement ordonnés) ; on en déduit (§3) que ΔE est l'extension de $\Delta E \Delta$ ce qui permet de construire le morphisme k et de montrer que $k\Delta = \Delta j$; on rappelle alors (§4) l'adjonction entre les foncteurs S et T et on établit l'équivalence entre $\mathcal{S}[\Theta^{-1}]$ et $\mathcal{H}$; on montre (§5) que, pour un complexe K, $Tk_K : BEK \to TK$ est une équivalence d'homotopie et que, par suite, k et j induisent l'équivalence cherchée entre $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ et $\mathcal{S}[\Theta^{-1}]$.

On notera qu'aucun appel n'est fait aux notions d'homotopie simpliciale et de complexe de Kan.

1. Pour une petite catégorie A, soit ΔA le complexe $[n] \mapsto \mathcal{C}([n],A)$, où $[n]$ est la catégorie définie par l'ensemble ordonné $\{0 < 1 < \ldots < n\}$. On définit ainsi un foncteur $\Delta : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{S}$ pleinement fidèle dont l'image consiste en les complexes qui transforment les sommes fibrées de O en produits fibrés dans $\mathbf{Ens}$.

Δ admet un adjoint à gauche $G : \mathcal{S} \rightsquigarrow \mathcal{C}$ tel que $G\Delta = 1_{\mathcal{C}}$ et on note $\varepsilon : 1_{\mathcal{S}} \to \Delta G$ l'autre morphisme d'adjonction. Explicitement, pour un complexe K, l'ensemble $(GK)_o$ des objets de GK est K_o et l'ensemble $(GK)_1$ des morphismes de GK est l'ensemble des suites finies $(x_1,\dots,x_p)$ d'éléments de K_1 tels que $\delta_1 x_i = \delta_o x_{i-1}$ passé au quotient par la relation d'équivalence engendrée par $\delta_1 y = (\delta_2 y, \delta_o y)$ pour tout $y \in K_2$.

Pour un complexe K, l'explosion de K est la catégorie EK dont l'ensemble des objets est $(EK)_o = \sqcup_m K_m = \{([m],x) \;/\; x \in K_m,\ m \in N\}$ et dont l'ensemble $(EK)_1$ des morphismes est $\bigsqcup\limits_{m,n} \mathcal{O}([m],[n]) \times K_n = \{\theta : ([m],x) \to ([n],y) / \theta \in \mathcal{O}([m],[n])$ avec $\theta^* y = x\}$. On définit ainsi un foncteur fidèle $E : \mathcal{S} \rightsquigarrow \mathcal{C}$. Par exemple, $E\Delta[n]$ est la catégorie dont les morphismes de $[m] \xrightarrow{\alpha} [n]$ dans $[p] \xrightarrow{\beta} [n]$ sont les applications croissantes $\theta : [m] \to [p]$ vérifiant $\beta\theta = \alpha$; en particulier, $E\Delta[n]$ admet l'identité $1_n : [n] \to [n]$ comme objet final. E admet un adjoint à droite $D : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{S}$ et on note $\phi : 1_{\mathcal{S}} \to DE$ et $\psi : ED \to 1_{\mathcal{C}}$ les morphismes d'adjonction.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit θ un morphisme dans $E\Delta[n]$ de $[m] \xrightarrow{\alpha} [n]$ dans $[p] \xrightarrow{\beta} [n]$ on a $\alpha(m) = \beta\,\theta(m) \leq \beta(p)$, donc $j_{[n]} : \alpha \mapsto \alpha(m)$ est un foncteur de $E\Delta[n]$ dans $[n]$; de plus, pour $\gamma \in \theta([n],[n'])$, on a le diagramme commutatif ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} E\Delta[n] & \xrightarrow{j_{[n]}} & [n] \\ {\scriptstyle E\Delta\gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ E\Delta[n'] & \xrightarrow{j_{[n']}} & [n'] \end{array}$$;

donc $j_{[n]}$ est fonctoriel en $[n]$ de O. Pour une petite catégorie A, soit

$$i_n(A) = \mathcal{C}(j_{[n]},A):(\Delta A)_n = \mathcal{C}([n],A) \to \mathcal{C}(E\Delta[n],A) \approx \mathcal{S}(\Delta[n],DA) = (DA)_n \ ;$$

les $(i_n(A))_n$ définissent un morphisme de complexes $i_A:\Delta A \to DA$ qui est fonctoriel en A ; d'où un morphisme fonctoriel $i : \Delta \to D$. Par adjonction, il en résulte un morphisme fonctoriel $j : E\Delta \to 1_{\mathcal{C}}$; explicitement, pour $g \in (\Delta A)_p = \mathcal{C}([p],A)$ considéré comme un objet de $E\Delta A$, on a $j_A(g) = g(p)$ et, pour $\theta \in O([m],[p])$ considéré comme un morphisme dans $E\Delta A$ de $([m],f=g\theta)$ dans $([p],g)$, on a $j_A(\theta) = g(\theta(m) \leq p):f(m)=j_A(f) \to j_A(g)=g(p)$. On peut aussi construire des morphismes $p:E \to G$ et $q:1_{\mathcal{S}} \to DG$ (se correspondant par adjonction) tels que $p\Delta = j$ et $q\Delta = i$. Les morphismes i,j,p et q se déduisent de l'un quelconque d'entre eux.

2. Pour un complexe K, soit $\pi_K:([m],x) \rightsquigarrow [m]$ le foncteur projection de EK dans O. Pour un foncteur F de O dans $\mathcal{S}$, on définit le complexe $\underline{F}K$ comme la limite à droite dans $\mathcal{S}$ du foncteur $F\pi_K$ de EK dans $\mathcal{S}$:

$$\underline{F}K = \varinjlim_{EK} F\pi_K .$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a donc $(\underline{F}K)_n = \bigsqcup_p (F[p])_n \times K_p /\sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par $(a, \theta^* y)=((F\theta)a,y)$, pour tous $a \in F[p]_m$, $y \in K_q$ et $\theta \in O([p],[q])$. Il est évident que, si $f:K \to L$ est un morphisme de complexes f induit canoniquement un morphisme de complexes $\underline{F}f:\underline{F}K \to \underline{F}L$. Donc $\underline{F}$ est un foncteur de $\mathcal{S}$ dans elle-même.

Par exemple, il est bien connu que, pour $\Delta : O \rightsquigarrow \mathcal{S}$, on a $\varinjlim_{EK} \Delta\pi_K = K$, donc $\underline{\Delta} = 1_{\mathcal{S}}$. D'autre part, on voit facilement que $\underline{F}\Delta[m] = F[m]$; donc $\underline{F}\Delta = F$ (mais, F étant donné, cette égalité ne détermine pas entièrement $\underline{F}$). Enfin, $\underline{F}$ est fonctoriel en F au sens suivant : un morphisme ρ entre deux foncteurs F et F' de O dans $\mathcal{S}$, se prolonge canoniquement en un morphisme $\underline{\rho}$ entre les foncteurs $\underline{F}$ et $\underline{F'}$.

Pour un foncteur G de $\mathcal{S}$ dans elle-même, on a un morphisme canonique de $\underline{G\Delta}$ dans G, mais ce morphisme n'est pas nécessairement un isomorphisme (pour un exemple voir §3). Soit K un complexe, on a $EK = E(\varinjlim_{EK} \Delta\pi_K) = \varinjlim_{EK} E\Delta\pi_K$ car $E : \mathcal{S} \rightsquigarrow \mathcal{C}$ préserve les limites droites. Pour une petite catégorie A, on a une application canonique ρ de $\varinjlim_{EK} \mathcal{C}(A, E\Delta\pi_K)$ dans $\mathcal{C}(A, \varinjlim_{EK} E\Delta\pi_K) = \mathcal{C}(A, EK)$. De façon précise, on a $\varinjlim_{EK} \mathcal{C}(A, E\Delta\pi_K) = \coprod_n \mathcal{C}(A, E\Delta[n]) \times K_n / \sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par $(\phi, \theta^* y) = ((E\Delta\theta)\phi, y)$ pour tous $\phi \in \mathcal{C}(A, E\Delta[m]), y \in K_p$ et $\theta \in O([m],[p])$. Soit $(\phi, x) \in \mathcal{C}(A, E\Delta[m]) \times K_m$; pour un objet a de A, on a $\phi(a) \in O([n_a],[m])$ et pour un morphisme $f : a \to b$ de A, $\phi(f) \in O([n_a],[n_b])$ vérifie $\phi(b)\phi(f) = \phi(a)$; donc, $\phi(a)^* x = \phi(f)^* \phi(b)^* x$, c'est-à-dire que $\phi(f)$ est un morphisme dans EK de $([n_a], \phi(a)^* x)$ dans $([n_b], \phi(b)^* x)$. Par suite, $(a \mapsto ([n_a], \phi(a)^* x), f \mapsto \phi(f))$ est un foncteur ϕ_x de A dans EK et il est facile de voir que ϕ_x ne dépend que de la classe d'équivalence de (ϕ, x) ; par passage au quotient, $(\phi, x) \mapsto \phi_x$ définit l'application canonique ρ de $\varinjlim_{EK} \mathcal{C}(A, E\Delta\pi_K)$ dans $\mathcal{C}(A, EK)$.

On suppose maintenant que A a un objet final $*$, et on note $\check{a} : a \to *$ la projection canonique. Pour $\psi \in \mathcal{C}(A, EK)$, on pose $\psi(a) = ([n_a], x_a)$; pour $f : a \to b$

dans A, $\psi(f) \in O([n_a],[n_b])$ vérifie $\psi(f)^* x_b = x_a$ et, comme $\tilde{b}f = \tilde{a}$, on a $\psi(\tilde{b})\psi(f) = \psi(\tilde{a}) \in O([n_a],[n_*])$; il en résulte que $(a \mapsto \psi(\hat{a}), f \mapsto \psi(f))$ est un foncteur $\tilde{\psi}$ de A dans $E\Delta[n_*]$. Soit $\lambda\psi$ la classe de $(\tilde{\psi}, x_*)$ dans $\varinjlim_{EK} \mathscr{C}(A, E\Delta\pi_K)$; on a $\tilde{\psi}_x\,(a) = ([n_a], \psi(\tilde{a})^* x_* = x_a)$, donc, $\rho\lambda$ est l'application identique de $\mathscr{C}(A,EK)$. Pour $(\phi,x) \in \mathscr{C}(A,E\Delta[m]) \times K_m$, $a \mapsto \phi(\tilde{a})$ est un foncteur $\tilde{\phi}$ de A dans $E\Delta[n_*]$, et pour $\theta = \phi(*) \in O([n_*],[m])$, on a $(E\Delta\theta)\tilde{\phi} = \phi$, d'où $(\phi,x) \sim (\tilde{\phi}, \theta^* x) = \lambda(\phi_x) = \lambda\rho(\phi,x)$, c'est-à-dire que $\lambda\phi$ est l'application identique de $\varinjlim_{EK} \mathscr{C}(A,E\Delta\pi_K)$. On a démontré ceci : *si* A *est une petite catégorie possédant un objet final,* ρ *est une bijection de* $\varinjlim_{EK} \mathscr{C}(A,E\Delta\pi_K)$ *sur* $\mathscr{C}(A,EK)$; par la suite on *identifie* ces deux ensembles à l'aide de cette bijection.

3. La petite catégorie $[m]$ possède m comme objet final ; donc, pour un complexe K, on a $(\Delta EK)_m = \mathscr{S}(\Delta[m],\Delta EK) = \mathscr{C}([m],EK) = \varinjlim_{EK} \mathscr{C}([m],E\Delta\pi_K) =$

$$= \coprod_n \mathscr{C}([m],E\Delta[n]) \times K_n/\sim$$

$$= \coprod_n (\Delta E\Delta[n])_m \times K_n \;/\sim\; = (\coprod_n \Delta E\Delta[n] \times K_n/\sim)_m = (\underline{\Delta E\Delta}\ K)_m .$$

Il en résulte que le morphisme canonique de $\underline{\Delta E\Delta}$ dans ΔE est un isomorphisme ; par la suite, on *identifie* $\underline{\Delta E\Delta}$ et ΔE à l'aide de cet isomorphisme.

On a vu (§1) que l'on avait un morphisme $j : E\Delta \to 1_{\mathscr{C}}$, d'où un morphisme Δj de $\Delta E\Delta$ dans Δ ; par restriction à la catégorie O puis extension, on en déduit un morphisme $k = \underline{\Delta j} : \Delta E = \underline{\Delta E\Delta} \to \underline{\Delta} = 1_{\mathscr{S}}$. Explicitement, soit $(\phi,x) \in \mathscr{C}([m],E\Delta[n]) \times K_n$ un représentant d'un élément $s \in (\Delta EK)_m$, alors $(j_{[n]}\phi, x) \in \mathscr{C}([m],[n]) \times K_n$ est un représentant de $kz \in K_m$.

$G:\mathcal{S}\rightsquigarrow\mathcal{C}$ étant l'adjoint à gauche de Δ, il est facile de voir que le morphisme d'adjonction $\varepsilon : 1_{\mathcal{S}} \to \Delta G$ s'identifie au morphisme canonique de $1_{\mathcal{S}} = \underline{\Delta} = \underline{\Delta G \Delta}$ dans ΔG. Il en résulte que le diagramme ci-dessous est commutatif ;

$$\begin{tikzcd}
1_{\mathcal{S}} = \underline{\Delta G \Delta} \arrow[rr, "\varepsilon"] & & \Delta G \\
& \Delta E = \underline{\Delta E \Delta} \arrow[ul, dotted, "k = \underline{\Delta j} = \underline{\Delta p \Delta}"] \arrow[ur, "\Delta p"'] &
\end{tikzcd}$$

d'où $\varepsilon k = \Delta p$. On en déduit : $k\Delta = (\varepsilon\Delta)(k\Delta) = (\varepsilon k)\Delta = \Delta p \Delta = \Delta j$. On a de même : $p = G\Delta p = G(\varepsilon k) = (G\varepsilon)(Gk) = Gk$. k détermine les morphismes i,j,p,q, mais ceux-ci ne déterminent pas (directement) k qui apparaît comme un morphisme fondamental.

On notera que les morphismes Ek et jE de $E\Delta E$ dans E sont distincts (et de même, $\phi k \neq iE : \Delta E \to DE$).

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $B[n] = \{t = (t_1,\dots,t_n) \in I^n / 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1\}$. Pour $\theta \in O([m],[n])$, on définit $\theta_* : B[m] \to B[n]$ par

$$\theta_*(s_1,\dots,s_m) = (t_1,\dots,t_n), \text{ où } t_j = s_{i_j} \text{ avec } i_j = \min(i / \theta(i) \geq j).$$

On obtient ainsi un foncteur B de O dans $\mathcal{T}$. $t = (t_1,\dots,t_n)$ est intérieur à $B[n]$ (en abrégé $t \in B^o[n]$) si et seulement si $0 < t_1 < \dots < t_n < 1$. Les résultats suivants sont faciles à vérifier :

(i) *pour* $t \in B[n]$, *il existe* $\alpha \in O([m],[n])$ *injectif et* $s \in B^o[m]$ *uniques tels que* $t = \alpha_* s$;

(ii) *pour* $t \in B^o[n]$ *et* $\beta \in O([n],[m])$ *surjectif, on a* $\beta_* t \in B^o[m]$;

(iii) *pour* $s \in B^o[m]$, $\theta \longmapsto \theta_* s$ *est injectif de* $O([m],[n])$ *dans* $B[n]$;

(iv) *pour* s *et* s', *il existe* t *et* β, β' *surjectifs et tels que* $s = \beta_* t$ *et* $s' = \beta'_* t$; *de plus, si* s *et* s' *sont intérieurs, on peut choisir* t *intérieur.*

(Pour démontrer (iv), on range les éléments de s et s' dans l'ordre croissant).

La réalisation géométrique d'un complexe K est l'espace topologique $TK = \varinjlim_{EK} B\pi_K$, c'est-à-dire $TK = \bigcup_n B[n] \times K_n/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par $(t, \theta^* x) = (\theta_* t, x)$ pour toux $t \in B[p]$, $x \in K_m$ et $\theta \in O([p],[m])$. On dit que $(s,x) \in B[m] \times K_m$ est *non dégénérée* si s est intérieur et x non dégénéré (dans K) ; d'après le lemme d'Eilenberg-Zilber et les propriétés de B rappelées ci-dessus, chaque élément de $\bigcup_n B[n] \times K_n$ est équivalent à un unique élément non dégénéré. Ceci montre que TK est naturellement muni d'une structure de CW-complexe (on notera qu'un polyèdre géométrique P s'identifie à la réalisation géométrique du complexe ordonné associé au schéma simplicial définissant P, avec un ordre total sur les sommets de P).

Pour un morphisme de complexes $f: K \to L$, on note $Tf: TK \to TL$ l'application (cellulaire) induite par $(s,x) \mapsto (s, fx)$. T est alors un foncteur de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{E}$.

On montre facilement (voir [1]) :

1) T *transforme les injections (resp. surjections) en monomorphismes (resp. épimorphismes stricts).*

2) T *préserve les limites gauches finies,*

3) T *préserve les limites droites.*

En particulier, T admet un adjoint à droite $S : \mathcal{E} \rightsquigarrow \mathcal{S}$ appelé le *foncteur (complexe) singulier* ; explicitement, pour un espace topologique X, $SX = \mathcal{E}(B[\cdot], X)$. On note $\mu : 1_{\mathcal{S}} \to ST$ et $\nu : TS \to 1_{\mathcal{E}}$ les morphismes définissant cette adjonction.

Soit H la classe des équivalences faibles d'homotopie et soit $\mathcal{H} = \mathcal{E}[H^{-1}]$ la catégorie homotopique. On rappelle le résultat classique de J.H.C. Whitehead [4] ; pour tout *espace topologique* X, $\nu_X : TSX \to X$ *est une équivalence faible d'homotopie.*

Soit Θ la classe des morphismes de complexes f tels que $Tf \in H$. Alors, T induit un foncteur $\overline{T}$ de $\mathcal{S}[\Theta^{-1}]$ dans $\mathcal{H}$. D'autre part, pour une application continue $f : X \to Y$, on a le diagramme commutatif ci-dessous ; donc $f \in H$ est équivalent à $Sf \in \Theta$.

$$\begin{tikzcd}
TSX \arrow[r, "Tsf"] \arrow[d, "\nu_X"'] & TSY \arrow[d, "\nu_Y"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

En particulier, S induit un foncteur $\overline{S}$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{S}[\Theta^{-1}]$ et ν induit un isomorphisme de $\overline{TS}$ dans $1_{\mathcal{H}}$. De plus, pour un complexe K, $\nu_{TK} T\mu_K = 1_{TK}$ donc $T\mu_K \in H$ et par suite $\mu_K \in \Theta$. Il en résulte que μ induit un isomorphisme de $1_{\mathcal{S}[\Theta^{-1}]}$ dans $\overline{ST}$. Donc $(\overline{T}, \overline{S}, \overline{\nu}, \overline{\mu})$ *définit une équivalence entre les catégories* $\mathcal{H}$ *et* $\mathcal{S}[\Theta^{-1}]$.

5. Pour $n\in\mathbb{N}$, on a $T\Delta[n]=B[n]$. Plus généralement, pour une petite catégorie A, $T\Delta A$ est appelé le *classifiant* de A et noté BA. $B=T\Delta$ est un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{J}$ qui préserve les produits finis ; en particulier, $B(A\times[1])=BA\times B[1]=(BA)\times I$. En interprétant un morphisme fonctoriel h entre deux foncteurs f et $g:A\rightrightarrows C$ comme un foncteur de $A\times[1]$ dans C, on en déduit que $Bh:(BA)\times I\to BC$ est une homotopie entre Bf et $Bg:BA\rightrightarrows BC$. Par exemple, pour des foncteurs en adjonction $f:A\to C$ et $g:C\to A$, Bf et Bg sont des équivalences d'homotopie inverses l'une de l'autre ; en particulier, si A a un objet final ou initial, BA a le type d'homotopie de $B[0]=pt$; donc BA est contractible.

Pour un complexe K, on a $BEK=T\Delta EK=\coprod_m B[m]\times(\Delta EK)_m/\sim_m$; or, d'après le §3, on a $(\Delta EK)_m=\coprod_p(\Delta E\Delta[p])_m\times K_p/\sim_p$; d'où $BEK=\coprod_p(\coprod_m B[m]\times(\Delta E\Delta[p])_m/\sim_m)\times K_p/\sim_p=$

$$\coprod_p T\Delta E\Delta[p]\times K_p/\sim_p=\coprod_p BE\Delta[p]\times K_p/\sim_p=\varinjlim_{EK}(BE\Delta)\pi_K.$$

Alors, l'application $Tk_K:BEK\to TK=\coprod_p B[p]\times K_p/\sim_p$ est induite par les $Tk_{\Delta[p]}=Bj_{[p]}$ de $BE\Delta[p]$ dans $B[p]$ qui sont des équivalences d'homotopie puisque $E\Delta[p]$ et $[p]$ ont des objets finaux ; par fonctorialité de ces équivalence d'homotopie, $Tk_K:BEK\to TK$ reste une équivalence d'homotopie. On a donc montré :

Pour tout complexe K, $k_K:\Delta EK\to K$ *appartient à* Θ.

Soit Σ la classe des foncteurs f tels que $\Delta f\in\Theta$ (c'est-à-dire $Bf\in H$). Alors, Δ induit un foncteur $\bar{\Delta}$ de $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ dans $\mathcal{J}[\Theta^{-1}]$. D'autre part, pour un morphisme de complexes $f:K\to L$, on a le diagramme commutatif ci-dessous

$$\begin{tikzcd} \Delta EK \arrow[r, "\Delta Ef"] \arrow[d, "k_K"'] & \Delta EL \arrow[d, "k_L"] \\ K \arrow[r, "f"] & L \end{tikzcd}$$

et, puisque k_K et k_L appartiennent à Θ, $\Delta Ef \in \Theta$ est équivalent à $f \in \Theta$. En particulier, E induit un foncteur $\bar{E}$ de $\mathcal{S}[\Theta^{-1}]$ dans $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ et k induit un isomorphisme de $\bar{\Delta}\,\bar{E}$ dans $1_{\mathcal{S}[\Theta^{-1}]}$. De plus, pour une petite catégorie A, $\Delta j_A = k_{\Delta A} \in \Theta$ donc $j_A \in \Sigma$ et par suite, j induit un isomorphisme de $\bar{E}\,\bar{\Delta}$ dans $1_{\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]}$. Par suite, $(\bar{\Delta}, \bar{E}, \bar{k}, (\bar{j})^{-1})$ définit une équivalence entre les catégories 2 $\mathcal{S}[\Theta^{-1}]$ et $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$.

REMARQUE. - On notera que, si la première équivalence entre $\mathcal{S}[\Theta^{-1}]$ et $\mathcal{H}o$ est induite par des foncteurs en adjonction entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$, l'équivalence entre $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ et $\mathcal{S}[\Theta^{-1}]$ est induite par des foncteurs entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$ qui ne sont pas en adjonction (bien que chacun d'eux admette un adjoint) ; la seule difficulté est, en fait, la construction et les propriétés des morphismes fonctoriels j et k. Le foncteur composé GS est bien connu : c'est le foncteur groupoîde fondamental ; par contre, les foncteurs D et TD n'apparaissent pas dans la littérature.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] P. GABRIEL et M. ZISMAN, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Erg. Dep. Math. Band 35, Berlin (Springer), 1967).

[2] L. **ILLUSIE** , *Complexe cotangent et déformations*, II, Lect. Notes in Math., n° 283, Berlin (Springer), 1972.

[3] G. SEGAL, *Classifying spaces and spectral sequences*, Publ. Math. de l'HI.H.E.S., n° 34 (1968), p. 105-112.

[4] J.H.C. WHITEHEAD, *Simplicial spaces, nuclei and m-groups*, Proc. London Math. Soc., (2) 45 (1939) , p. 243-327.

Manuscrit remis le 25 septembre 1974

André ROUX
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard - Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69621 - VILLEURBANNE