PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

J. L. BESSON

Continuité des fonctions aléatoires sphériquement invariantes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1974, tome 11, fascicule 3
, p. 59-69

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1974__11_3_59_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1974 t. 11-3

CONTINUITE DES FONCTIONS ALEATOIRES SPHERIQUEMENT INVARIANTES.

par J. L. BESSON

La recherche de la classe des fonctions aléatoires du second ordre pour lesquelles la meilleure approximation au sens des moindres carrés est linéaire conduit à l'étude des fonctions aléatoires sphériquement invariantes ([1],[5],[10]). Celles-ci sont utilisées dans plusieurs domaines de la théorie du signal ([6],[7],[8]) et possèdent de nombreuses propriétés analogues à celles des fonctions aléatoires gaussiennes.

Ce travail a pour objet l'étude de la continuité des fonctions aléatoires sphériquement invariantes (continuité en probabilité, en moyenne d'ordre p, des trajectoires).

Nous rappelons dans une première partie les principales propriétés des fonctions aléatoires sphériquement invariantes ([5],[10]).Nous abordons ensuite l'étude de la continuité et montrons dans un premier temps l'équivalence entre la continuité en probabilité et celle en moyenne quadratique; nous établissons ensuite pour la continuité presquesûre des trajectoires un résultat analogue aux théorèmes classiques de X. FERNIQUE ([4]) et R.M. DUDLEY ([3]) dans le cas des fonctions aléatoires gaussiennes.

NOTATIONS. -

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilité, T un ensemble non vide, $\{X_t; t\in T\}$ une fonction aléatoire réelle du second ordre et centrée. H désigne le sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ engendré par $\{X_t; t\in T\}$. Etant donné un sous-espace vectoriel fermé V de H, on note Π^V le projecteur orthogonal de H sur V et $E^{\mathcal{B}(V)}$ l'espérance conditionnelle à la tribu $\mathcal{B}(V)$ engendrée par V.

Pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $P_X = P \circ X^{-1}$ désigne la loi de probabilité de X et $\phi_X(.)$ sa fonction caractéristique.

I. LES FONCTIONS ALEATOIRES REELLES SPHERIQUEMENT INVARIANTES.

DEFINITION. - *La fonction aléatoire réelle du second ordre et centrée* $\{X_t; t \in T\}$ *est sphériquement invariante si pour tout élément* X *de* H *et tout opérateur linéaire unitaire* U *de* H, X *et* U.X *ont même loi de probabilité.*

Autrement dit, une condition nécessaire et suffisante pour que $\{X_t; t\in T\}$ soit une fonction aléatoire sphériquement invariante est que pour tout couple (X,Y) d'éléments de H tels que $||X||_2 = ||Y||_2$, on ait

$P_X = P_Y$.

Toute fonction aléatoire réelle gaussienne centrée est sphériquement invariante.

On obtient aisément la caractérisation suivante des fonctions aléatoires sphériquement invariantes par leur loi temporelle :

PROPOSITION 1. - *Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction aléatoire réelle* $\{X_t ; t \in T\}$ *soit sphériquement invariante est qu'il existe une fonction* $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *telle que pour toute partie finie* $\{t_1,\dots,t_n\}$ *de* T *et tout* $(u_1,\dots,u_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *, on ait* $E\{\exp(i \sum_{j=1}^{n} u_j X_{t_j})\} = \phi(||\sum_{j=1}^{n} u_j X_{t_j}||_2)$. *On a alors pour tout élément* X *de* H *et tout réel* u : $\varnothing_X(u) = E\{\exp(i\, u\, X)\} = \phi(|u| . ||X||_2)$.

Nous énonçons maintenant la caractérisation que nous avons évoquée dans l'introduction ([1],[5]) :

PROPOSITION 2. - *Si l'espace vectoriel* H *est de dimension supérieure ou égale à* 2, *une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction aléatoire réelle* $\{X_t ; t \in T\}$ *soit sphériquement invariante est que pour tout sous-espace vectoriel fermé* V *de* H *on ait* $\Pi^V = E^{\mathcal{B}(V)}$.

REMARQUE 1. - Soit $u = (u_1,\dots,u_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$, $|u|$ sa norme euclidienne et $\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ un système orthonormé dans H.

$\phi(|u|) = E\{\exp(i \sum_{j=1}^{n} u_j \xi_j)\}$.

La fonction $\phi(|.|)$ est donc continue et de type positif sur $\mathbb{R}^n$; il s'en suit , d'après un théorème de SCHŒNBERG ([9]) *dans le cas où la dimension de* H *est infinie,* l'existence d'une probabilité de Radon μ sur $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\phi(u) = \int_{\mathbb{R}_+} \exp(-\frac{xu^2}{2})\, d\mu(x) \qquad , \quad u \in \mathbb{R}.$$

Le résultat qui suit indique que, lorsque la dimension de H est infinie, les fonctions aléatoires sphériquement invariantes sont "conditionnellement gaussiennes."
(Ce résultat est énoncé sans démonstration en [5]).

PROPOSITION 3. - *Si* H *est de dimension infinie, une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction aléatoire réelle* $\{X_t; t\in T\}$ *soit sphériquement invariante est qu'il existe une variable aléatoire positive* A, $\mathcal{B}$(H)*-mesurable et telle que, pour tout élément* X *de* H *de norme* 1 *et tout réel* u , *on ait* $E\{\exp(iuX)/A\} = \exp(-\frac{Au^2}{2})$ *presque-sûrement.*

Preuve. - La condition suffisante est immédiate; pour la condition nécessaire, il suffit de généraliser au cas non dénombrable les résultats classiques sur les familles de variables aléatoires en dépendance symétrique, puis d'utiliser un raisonnement fait en [2] p. 233. Nous ne donnons que les grandes lignes.
Soit $\{\xi_i; i \in I\}$ une base orthonormale de H ; elle est en dépendance

symétrique ; soit $\mathcal{A}$ la sous-tribu de $\mathcal{a}$ des évènements qui dépendent symétriquement des ξ_j ($\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$). Conditionnellement à $\mathcal{A}$, les variables aléatoires ξ_j sont équidistribuées et indépendantes et il existe une probabilité conditionnelle régulière de ξ_j par rapport à $\mathcal{A}$:
$P : \Omega \times \mathcal{B}_o(\mathbb{R}) \to [0,1]$.
Pour $\omega \in \Omega$ et $u \in \mathbb{R}$, soit $\phi(\omega,u) = \int_{\mathbb{R}} \exp(iux)P(\omega;dx)$. $\phi(\omega,.)$ est une fonction caractéristique et $\phi(.,u)$ est un représentant de $E^{\mathcal{A}}\{\exp(iu\xi_j)\}$.
On montre alors que $\phi(\omega,.)$ est réelle et paire puis que presque-sûrement $\phi(\omega,\sqrt{u+v}) = \phi(\omega,\sqrt{u}).\phi(\omega,\sqrt{v})$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}_+^2$. On en déduit alors, du fait de la continuité de $\phi(\omega,.)$, l'existence d'une variable aléatoire positive $A(.)$, $\mathcal{A}$-mesurable et telle que $\phi(\omega,u) = \exp(-\frac{A(\omega)u^2}{2})$, et pour toute partie finie J de I, on a $E\{\exp(i \sum_{j\in J} u_j\xi_j)/A\} \overset{P.s}{=}$

$$\prod_{j\in J} E\{\exp(i \quad u_j\xi_j)/A\} \overset{P.s}{=} \prod_{j\in J} \exp(-\frac{Au_j^2}{2}) = \exp(-\frac{A}{2}\sum_{j\in J} u_j^2).$$

On a alors le résultat en utilisant le fait que $\{\xi_i, i\in I\}$ est une base orthonormale de H.

REMARQUE 2. - En utilisant l'unicité de la transforméede Laplace d'une probabilité, on établit aisément que la loi de probabilité de A est la mesure μ donnée par le théorème de Schoenberg (Remarque 1).

Une condition nécessaire et suffisante pour que H soit contenu dans $L^p(\Omega, \mathcal{a},P)$ $(2\leq p<+\infty)$ est que $A \in L^{p/2}(\Omega, \mathcal{a},P)$; on a alors pour tout élément X de H :

$$||X||_p^p = C(p) \quad E(A^{p/2}) \; ||X||_2^p \quad \text{avec } C(p) = \frac{2^{p/2}}{\sqrt{\pi}} \; \Gamma(\tfrac{p+1}{2}).$$

En particulier $A \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $E(A) = 1$.

Remarquons que si $H \cap L^P(\Omega, \mathcal{A}, P) \neq \{0\}$ $(2 \leq p < +\infty)$, alors H est contenu dans $L^P(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

II. CONTINUITE DES FONCTIONS ALEATOIRES SPHERIQUEMENT INVARIANTES.

La fonction aléatoire $\{X_t ; t \in T\}$ est d'ordre p $(1 \leq p < +\infty)$ si pour tout t de T, $X_t \in L^P = L^P(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$L^\circ = L^\circ(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne l'espace vectoriel réel des classes de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, muni de la topologie de la convergence en probabilité ; L° est un e.v.t. métrisable et complet.

PROPOSITION 4. - *Si la fonction aléatoire sphériquement invariante* $\{X_t ; t \in T\}$ *est d'ordre* p $(2 \leq p < +\infty)$, H *est contenu dans* L^P *et les topologies induites sur* H *par* L° *et* L^P *sont équivalentes. En particulier* H *est fermé dans* L° *et* L^P.

Preuve. - Il suffit de montrer que toute suite d'éléments de H convergente en probabilité vers 0 est convergente en moyenne d'ordre p vers 0.

Si H est de dimension finie, le résultat est immédiat.

Si la dimension de H est infinie comme $X_t \in L^P$, d'après la remarque 2, on a $H \subset L^P$.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de H qui converge vers 0 en probabilité.

Pour tout réel u, $\lim\limits_{n \to +\infty} \phi_{X_n}(u) = 1$.

D'après la proposition 3 :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \exp\left(- \frac{a}{2} \, ||X_n||_2^2 \right) d\mu(a) = 1 \ ;$$

d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} ||X_n||_2 = 0$$ (sinon on aurait $\mu\{o\} = 1$ et donc $H = \{o\}$).

Ainsi les topologies induites sur H par L^0 et L^2 sont équivalentes.

Pour achever la démonstration, il suffit de remarquer que les topologies induites sur H par L^p et L^2 sont équivalentes puisque

$$\forall X \in H \ , \ ||X||_p = \left[C(p) \ E(A^{p/2})\right]^{1/p} \ ||X||_2 \ .$$

Si T est un espace topologique, en notant K la fonction covariance de $\{X_t ; t \in T\}$ ($K(s,t) = E[X_s . X_t]$), nous avons :

COROLLAIRE. - *Pour une fonction aléatoire réelle* $\{X_t ; t \in T\}$ *sphériquement invariante et d'ordre* p ($2 \leq p < +\infty$) , *les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) elle est continue en probabilité sur T *;*

(ii) elle est continue en moyenne d'ordre p *sur* T ;

(iii) la covariance K *est continue sur* $T \times T$;

(iv) la covariance K *est continue sur la diagonale de* $T \times T$.

Nous abordons maintenant l'étude de la continuité des trajectoires des fonctions aléatoires sphériquement invariantes. Les résultats et démonstrations sont très analogues à ceux du cas gaussien tels qu'on peut les trouver par exemple en [5].

d désigne l'écart défini sur $T \times T$ par $d(s,t) = ||X_s - X_t||_2$.

Pour $\varepsilon > 0$, $\mathcal{N}(\varepsilon)$ est le nombre minimum de d-boules de rayon ε nécessaire pour recouvrir T. $\mathcal{N}(.)$ est une fonction monotone décroissante de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. On note $\mathcal{H}(\varepsilon) = \operatorname{Log} \mathcal{N}(\varepsilon)$ (Entropie métrique).

PROPOSITION 5. - *Soit* $\{X_t ; t \in T\}$ *une fonction aléatoire sphériquement invariante qui vérifie l'hypothèse suivante :*
il existe $\delta > 0$ *tel que* $\int^{*}_{[0,\delta]} \sqrt{\mathcal{H}(x)}\, dx < +\infty$.
Alors on peut construire une fonction aléatoire sphériquement invariante $\{X'_t ; t \in T\}$ *équivalente à* $\{X_t ; t \in T\}$ *et à trajectoires uniformément continues sur l'espace semi-métrique* (T,d).

Preuve. - Si H est de dimension finie, le résultat est immédiat.

Supposons H de dimension infinie. Soient A une variable aléatoire donnée par la proposition 3 et $\Omega_0 = \{\omega \in \Omega ; A(\omega) > 0\}$. On note $\mathcal{A}_0$ la tribu trace sur Ω_0 de $\mathcal{A}$ et P_0 la probabilité définie sur $\mathcal{A}_0$ par

$P_0(B) = \frac{P(B)}{P(\Omega_0)}$ $(P(\Omega_0) > 0$, car sinon $H = \{0\}$.)

Soient $X \in H$ et X_0 sa restriction à Ω_0.

$$E_0(e^{iuX_0}/A_0) = \exp\left(-\frac{A_0 u^2 ||X||_2^2}{2}\right) \quad P_0\text{-p.s.}$$

Soit Y la variable aléatoire définie sur Ω_0 par $Y(\omega) = \dfrac{X_0(\omega)}{\sqrt{A(\omega)}}$. On a

$$E_o(e^{iuY}) = \int_{\Omega_o} E_o\{e^{iuY} / A_o\}.dP_o = \int_{\Omega_o} \exp(-\frac{u^2||X||_2^2}{2})dP_o$$

$$= \exp(-\frac{u^2||X||_2^2}{2}).$$

Donc Y est une variable gaussienne centrée de variance $||X||_2^2$.

Ainsi, en notant $Y_t = \frac{X_t}{\sqrt{A}}$,

$\{Y_t ; t \in T\}$ est une fonction aléatoire gaussienne centrée et

$\forall (s,t) \in T^2$.

$$||X_t - X_p||_2^2 = \int_{\Omega_o} |Y_t - Y_s|^2 \, dP_o \ .$$

D'après l'hypothèse $\int_{[o,\delta]} \sqrt{\mathscr{H}(x)}\, dx < +\infty$ et les résultats sur les fonctions aléatoires gaussiennes [3],[5], il existe une fonction aléatoire gaussienne centrée définie sur $(\Omega_0, \mathcal{A}_o, P_o)$ $\{Y'_t ; t \in T\}$ équivalente à $\{Y_t ; t \in T\}$ et à trajectoires uniformément continues sur (T,d).

Soit $\{X'_t ; t \in T\}$ défini par :

$$\begin{cases} \text{Pour } \omega \in \Omega_o , & X'_t(\omega) = \sqrt{A(\omega)}\, Y'(t,\omega) , \\ \text{Pour } \omega \in \Omega \setminus \Omega_o, & X'(t,\omega) = 0. \end{cases}$$

Les trajectoires de X'_t sont uniformément continues sur (T,d).

D'autre part, pour tout $t \in T$, on a $X'_t . 1_{\Omega_o} = X_t . 1_{\Omega_o}$ P_op.s., donc P.p.s.

et, comme pour tout $X \in H$:

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_o} X^2 \, dP = \int_{\Omega\setminus\Omega_o} E[X^2/A] \, dP = \int_{\Omega\setminus\Omega_o} A \ ||X||_2^2 \, dP = 0 \ ,$$

on a, pour tout $t \in T$, $X'_t = 0 = X_t$ P.p.s. .

Dans le cas où T est une partie bornée de $\mathbb{R}^k$, on démontre de la même façon que dans le cas gaussien le résultat suivant .

PROPOSITION 6. - *Soit* $\{X_t ; t \in T\}$ *une fonction aléatoire sphériquement invariante (où* T *est une partie bornée de* $\mathbb{R}^k$*) et vérifiant la condition suivante :*

il existe une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *strictement croissante sur* $[0,\delta]$ *telle que*

(i) $\int_1^{+\infty} g(e^{-x^2})dx < +\infty$;

(ii) $\forall (s,t) \in T^2$: $|s-t| \leqslant \delta \Longrightarrow ||X_s - X_t||_2 \leqslant g(|s-t|)$.

Alors on peut construire une fonction aléatoire sphériquement invariante $\{X'_t ; t \in T\}$ *équivalente à* $\{X_t ; t \in T\}$ *et à trajectoire uniformément continues sur* $(T,|.|)$. *(*$|.|$ *désigne la norme euclidienne de* $\mathbb{R}^k$*).*

BIBLIOGRAPHIE.

[1] I.F. BLAKE and J.B. THOMAS, *On a class of processes arising in linear estimation theory,* I.E.E.E. Trans. Information Theory, vol. I,T. 14 n° 1 (1968), p. 12-16.

[2] J. BRETAGNOLLE, D. DACUNHA-CASTELLE, J.L. KRIVINE, *Lois stables et espaces* L^P, Ann. Inst. H. Poincaré, série B, vol. II (1966) n° 3, p. 231-259.

[3] R.M. DUDLEY, *Sample functions of Gaussian Processes,* Ann. of Probability, vol. 1 (1973), n° 1, p. 66-103.

[4] X. FERNIQUE, *Continuité des processus gaussiens,* C.R. Acad. Sci. Paris, t. 258 (1964), série A, p. 6058-6060.

[5] J. NEVEU, *Processus aléatoires gaussiens,* Cours de 3e cycle 1972-73 (Polycopié), Laboratoire de Calcul des Probabilités, Univ. de Paris VI.

[6] B. PICINBONO, *Spherically invariant and compound gaussian stochastic processes,* I.E.E.E. Trans. Information Theory, vol, I. T.16 (1970), p. 77-79.

[7] B. PICINBONO, C. BENDJABALLAH, J. POUGET, *Photoelectron shot noise,* J. Mathematical Phys., vol. 11 (1970), n° 7, p. 2166-2176.

[8] B. PICINBONO, G. VEZZOSI, *Détection d'un signal certain dans un bruit non stationnaire et non gaussien,* Ann. Télécommun. Vol. 25 (1970), n° 11-12, p. 433-439.

[9] I.J. SCHOENBERG, *Metric spaces and completely monotone functions,* Ann. of Math., vol. 39 (1938), p. 811-841.

[10] A.M. VERSHIK, *Some characteristic properties of gaussian stochastic processes,* Theor. Probability App. , vol. IX (1964), p. 353-359.

Manuscrit remis le 17 mai 1974.

Jean-Luc BESSON
Département de Mathématiques
Université Cl. Bernard - Lyon-1
43, bd du 11-novembre-1918
69621 - VILLEURBANNE