A. BATBEDAT

# Sur la conjecture de A. Lichnerowicz

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1974, tome 11, fascicule 3
, p. 51-57

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1974__11_3_51_0>

Publications du
Département de
Mathématiqqes
Lyon 1974 t.11-3

# SUR LA CONJECTURE DE A. LICHNEROWICZ

par A. BATBEDAT

## INTRODUCTION.

Dans sa note [1] aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris de 1964, A. Avez cite la conjecture suivante de A. Lichnerowicz : *Si le plus grand groupe connexe de transformations conformes d'une variété riemannienne compacte de dimension* $n \geq 3$, *n'est pas compact, la variété est globalement conforme à une sphère,* et en propose une démonstration dans [1] et [2] . Mais dans [11] , M. Obata montre que cette preuve est incomplète.

En 1969, J. Lelong-Ferrand expose dans [5] des résultats (qu'elle développe dans [6] ) très intéressants dans ce contexte mais qui concernent surtout les homéomorphismes ; or J. Milnor a construit [9] une variété homéomorphe et non difféormorphe à $S^7$.

Nous montrons ici comment la propriété d'existence d'une suite régulièrement dégénérescente établie dans [5] et [6] permet de reprendre la démonstration de Avez.

Ajoutons que cette conjecture a été déjà démontrée dans [12] par M. Obata (avec une méthode qui utilise le revêtement riemannien) ; d'autre part, dans chacune des notes [7] et [8] , J. Lelong-Ferrand dit que les p opriétés présentées "permettraient de donner une nouvelle démonstration de la conjecture de Lichnérowicz".

1. - On considère la variété riemannienne $(M,g)$, compacte, de classe $C^{\infty}$, de dimension $n > 2$ et le groupe $C$ des transformations (difféomorphismes) conformes de $(M,g)$ ( $\theta$ est conforme s'il existe une fonction $u(x)$ telle que $\theta^{*} g = ug$).

$C$ est un groupe de Lie de transformations de $M$ et sa topologie est la topologie "ouvert-compact" ; $C_o$ est la composante connexe de l'identité dans $C$. Le problème fondamental étant celui de la réductibilité éventuelle (à un groupe d'isométries) de $C$ ou de $C_o$, les propriétés suivantes (voir [3] ) permettent d'éclairer la conjecture de Lichnérowicz :

PROPOSITION 1.1. - *Pour que $C_o$ soit réductible, il faut et il suffit qu'il soit compact.*

*Pour la sphère $\mathbf{S}^n$, $C_o$ n'est pas réductible.*

D'autre part il résulte de [10] :

PROPOSITION 1.2. - *Si $C_o$ n'est pas compact, il contient un sous-groupe $G$ à un parapètre, fermé et non compact.*

Soit $\varepsilon$ un nombre réel positif : on appelle $\varepsilon$-*triplet* pour $(M,g)$ un triplet $\{a_1,a_2,a_3\}$ de points de $M$ tel que pour $i \neq j$ , $d(a_i,a_j) \geq \varepsilon$, et $\varepsilon$-*transformation* une transformation $\theta$ de $M$ pour laquelle il existe un $\varepsilon$-triplet dont l'image par $\theta$ est un $\varepsilon$-triplet.

La proposition 7.3 de [6] permet alors d'énoncer :

PROPOSITION 2.1. - *Toute famille de* $\varepsilon$-*transformations conformes de* $(M,g)$ *est équicontinue.*

Dans [5], l'auteur a introduit la notion suivante (que nous adaptons au contexte actuel) :

DEFINITION 2.2. - $(\phi_p)$ *est une suite régulièrement dégénérescente de transformations de* $M$ *s'il existe* $a$ *et* $b$ *dans* $M$ *tels que la suite* $\phi_p(x)$ *( resp.* $\phi_p^{-1}(y)$*) tende vers* $b$ *(resp.* $a$*) quel que soit* $x \in M' = M - \{a\}$ *(resp.* $y \in M'' = M - \{b\}$*), la convergence étant uniforme sur tout compact de* $M'$ *(resp.* $M''$*) .*

Soit $F$ une famille (de transformations) conforme non équicontinue. Il résulte de la proposition 2.1 que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\theta \in F$ qui n'est pas une $\varepsilon$-transformation ; ainsi, en donnant à $\varepsilon$ une suite de valeurs $\varepsilon_p$ tendant vers zéro, on obtient une suite $\theta_p$ extraite de $F$ (méthode de [6])

La démonstration de la proposition 8.1 de [6] donne alors ici :

PROPOSITION 2.3. - *Toute famille conforme non équicontinue contient une suite régulièrement dégénérescente.*

COROLLAIRE 2.4. - *Le groupe* G *de la proposition 1.2 contient une suite* $(\phi_p)$ *régulièrement dégénéresdente.*

3. - Lorsque $C_o$ n'est pas compact, on considère le groupe G de la proposition 1.2 et la suite $(\phi_p)$ du corollaire 2.4 avec les points a et b de la définition 2.2 (ces points peuvent être confondus).

PROPOSITION 3.1. - *Les points fixes de* G *sont* a *et* b.

*Preuve.* - Il est immédiat que les points fixes éventuels de G ne peuvent être que a ou b. La réciproque se démontre de la façon suivante (communiqué par J. Lelong-Ferrand) : $\theta$ étant choisie dans G, on considère x distinct de a et de $\theta^{-1}(a)$ :

$$\theta(b) = \theta(\lim \phi_p(x)) = \lim \theta\, \phi_p(x) = \lim \phi_p\, \theta(x) = b.$$

De même pour a.

Soit X le champ de vecteurs associé au groupe G. Il résulte de cette proposition que $X_a = X_b = 0$ et, pour tout x distinct de a et b, l'orbite de X passant par x est non dégénérée ; de plus a et b sont adhérents à toute vraie orbite.

Considérons maintenant un champ de tenseurs $\alpha$ et une fonction $\Phi(X,\alpha)$ de M vers $\mathbb{R}$, tels que :

(i) $\Phi(X,\alpha)$ est constante sur chaque orbite de X et c'est une fonction continue sur M ;

(ii) $X_y = 0$ implique $[\Phi(X,\alpha)]_y = 0$ ;

(iii) $[\Phi(X,\alpha)]_z = 0$ et $X_z \neq 0$ impliquent $\alpha_z = 0$.

Alors on montre facilement que $\alpha = 0$ sur M.

PROPOSITION 3.2. - *Si* $C_o$ *n'est pas compact,* (M,g) *est localement conformément plate.*

*Preuve*. - [1] et [12] proposent des fonctions $\Phi(X,\alpha)$ vérifiant les hypothèses précédentes et pour lesquelles $\alpha$ est le tenseur de Weyl (ou son analogue pour n = 3).

REMARQUE. - Dans la note [5] , J. Lelong-Ferrand dit que l'existence d'une suite régulièrement dégénérescente entraine que (M,g) est conformément plate, mais cette affirmation n'est pas reprise dans [6] .

PROPOSITION 3.3. - *Si* $C_0$ *n'est pas compact,* M ***est simplement connexe.***

*Preuve* : (élaborée en liaison avec Y. Kerbrat).- Soient V un voisinage de b dans lequel tout lacet est homotope à un lacet nul et $\lambda$ un lacet de M qui ne contient pas a (sinon une homotopie permet de l'éviter) : $\lambda$ est un compact contenu dans M' (définition 2.2) sur lequel $(\phi_p)$ converge uniformément ; donc il existe un indice q pour lequel $\phi_q(\lambda) \subset V$. On termine en remarquant que (puisque $\phi_q$ est élément de G) $\phi_q(\lambda)$ est homotope à $\lambda$.

4. -

THEOREME. - *La conjecture de A. Lichnérowicz est vraie. Si* $C_0$ *n'est pas compact,* (M,g) *est conforme à* $\mathbf{S}^n$.

*Preuve.* - D'après [4] , ceci résulte des propositions 3.2 et 3.3.

REFERENCES. -


[1] A. AVEZ, *C.R. Acad. Sci. Paris,* série A, t.259(1964),p.4469-4472.

[2] A. AVEZ, *C.R. Acad. Sci. Paris,* série A, t.260(1965).p.1550-1553.

[3] C. BARBANCE, *Thèse de doctorat,* Paris (1969).p. 1-65.

[4] N.H. KUIPER, *On conformally flat spaces in the large.*, Ann. of Math. t. 50(1949).p. 916-924.

[5] J. LELONG-FERRAND, *C.R. Acad. Sci. Paris,* série A, t.269 (1969).p.583-586.

[6] J. LELONG-FERRAND, *Transformations conformes et quasi-conformes des variétés riemanniennes compactes,* Bruxelles (1971).p. 1-44

[7] J. LELONG-FERRAND, *C.R. Acad. Sci. Paris,* série A.t 274 (1972),p. 483-486.

[8] J. LELONG-FERRAND, *C.R. Acad. Sci. Paris,* série A,t. 275 (1972),p.119-122.

[9] J. MILNOR, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere.*Ann. of Math. t.64 (1956), p. 399-405.

[10] D. MONTGOMERY and L. ZIPPIN, *Existence of subgroups iso-morphic to the real number.* Ann. of Math. t.53 (1931).p. 298-326.

[11] M. OBATA, *Commentaire n° 1635* , Math. Rewiews, t.31 ( 1966).

[12] M. OBATA, *The conjectures on conformal transformations of riemannian manifolds*, J. Differential geometry, t. 6 (1971).p. 247-258.

---

A. BATBEDAT
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Montpellier
34000 - MONTPELLIER