PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

ALAIN BOUVIER

Structure des anneaux à factorisation unique

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1974, tome 11, fascicule 3
, p. 39-49
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1974__11_3_39_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1974 t. 11-3

STRUCTURE DES ANNEAUX A FACTORISATION UNIQUE

par Alain BOUVIER

Cet article est consacré à la démonstration d'un théorème de structure pour les anneaux à factorisation unique [5] et à des conséquences immédiates.

THEOREME DE STRUCTURE. - *Un anneau* A *est à factorisation unique* [5] *si et seulement s'il vérifie l'une des conditions :*

(i) A *est factoriel,*

(ii) A *est principal spécial* [9],

(iii) A *est local (non nécessairement noéthérien) et son idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *vérifie* $\mathfrak{m}^2 = (0)$.

DEMONSTRATION. - Conditions suffisantes. Si A vérifie (i) et (ii), il est à factorisation unique d'après [5] . Si A vérifie (iii), tout élément non nul de $\mathfrak{m} = A - U(A)$ est trivialement irréductible et possède une unique factorisation en irréductibles.

Conditions nécessaires. On sait [5] qu'un anneau à factorisation unique intègre est factoriel et que si A est un anneau à factorisation unique non intègre, il est local, de radical $\mathfrak{M}$ = div(A). Deux cas sont alors possibles :

1) A possède un élément irréductible et premier p. Alors, tout autre irréductible q est premier. Sinon, d'après [5] , on aurait $q^2 = 0 \in pA \Rightarrow q \in pA$, ce qui est absurde.

Donc A est D-atomique [5], présimplifiable (car à factorisation unique), non intègre, donc principal spécial [5].

2) A ne possède pas d'élément irréductible qui soit premier. Or A possède nécessairement des éléments irréductibles. D'après [5] , pour tout irréductible p de A, on a $p^2 = 0$. Donc pour tout élément $x \in \mathfrak{M}$, on a $x^2 = 0$. D'où $\mathfrak{M}$ = nil(A) et spec(A) = $\{\mathfrak{M}\}$.

Vérifions que $\mathfrak{M}^2 = (0)$. Soient p et q deux irréductibles non associés (donc distincts) de A. Alors, pq = 0 sinon, on a $0 = pq^2 = p^2q$ et pq(q-p) = 0.

Comme A est présimplifiable [5] , cela entraîne que q - p = 1 - u avec $u \in U(A)$, et $u \neq 1$. Par ailleurs, puisque $pq \neq 0$ et que pq (q-p) = 0 on a $q - p \notin U(A)$. Donc $q-p \in A^* - U(A)$ et q-p admet une factorisation en irréductibles, : $q - p = p_1p_2 \dots p_n$ avec p_i irréductibles et $h \geq 1$.

En multipliant par p, on obtient : $qp = p_1p_2 \dots p_hp \neq 0$.

Comme A est à factorisation unique, cela entraîne $h = 1$ et $p_1A = qA$. Donc $p_1 = qv$ avec $v \in U(A)$. Alors : $q - p = p_1p_2 \ldots p_h = qv$; d'où $q(1-v) = p$. Cela prouve que q divise p, ce qui est absurde. Donc le produit de deux irréductibles distincts ou non est toujours nul. Cela entraîne que $\mathfrak{m}^2 = (0)$.

C.Q.F.D.

CONSEQUENCES IMMEDIATES.

1) Un anneau à factorisation unique non intègre est de dimension de Krull nulle. C'est un anneau spécial d'indice 2 : il possède un unique idéal premier $\mathfrak{m}$ qui est nilpotent, d'indice de nilpotence égal à 2. $\mathfrak{m} = \mathrm{div}(A) = \mathrm{rad}(A) = \mathrm{nil}(A)$ et $\mathrm{spec}(A) = \{\mathfrak{m}\}$.

2) Un anneau à factorisation unique non intègre A n'est pas nécessairement noéthérien. Exemple : si K est un corps et si $A = K[X_n]_{n \in \mathbb{N}}/(X_nX_m)_{n,m \in \mathbb{N}}$.

3) Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal d'un anneau à factorisation unique non intègre A. L'anneau gradué $G_r(A)$ associé est $G_r(A) = \bigoplus_n (\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) = (A/\mathfrak{m}) \oplus \mathfrak{m}$. $0 \longrightarrow \mathfrak{m} \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{m} \longrightarrow 0$ est une suite exacte scindée de A-modules et A est une extension d'un anneau de carré nul par un corps.

4) Un anneau à factorisation unique est réduit si et seulement s'il est intègre, c'est-à-dire factoriel.

5) Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal d'un anneau à factorisation unique non intègre A. Pour un A-module M, les assertions suivantes sont équivalentes :

a) M est libre ;

b) M est projectif ;

c) M est plat ;

d) l'homomorphisme canonique $\mathfrak{M} \otimes_A M \longrightarrow M$ est injectif ;

e) $\mathrm{Tor}_1^A (A/\mathfrak{M}, M) = 0$.

REMARQUE. - Un anneau atomique [5], présimplifiable, possèdant des pgcd et des ppcm, n'est pas nécessairement à factorisation unique. En effet : $A = (\mathbb{Z} / 4 \mathbb{Z})[X]/(X^2 - 1)$ est un tel anneau ; mais il n'est pas à factorisation unique puisque $(3 + 3x)^2 = 1 + 2x \neq 0$.

On note K-dim(A) la dimension de Krull d'un anneau A et gb-dim(A) sa dimension globale.

COROLLAIRE 1. - *Pour un anneau à factorisation unique non intègre* A *de radical* $\mathfrak{M}$ *, les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) A *est noéthérien ;*

ii) $\mathfrak{M}$ *est de type fini ;*

iii) A *est artinien.*

DEMONSTRATION. - (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) : Conséquence immédiate du théorèmede I.S. Cohen. (iii) $\Rightarrow$ (i) : trivial ; (i) $\Rightarrow$ (iii) puisque K-dim(A) = 0.

COROLLAIRE 2. - *Soit $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal d'un anneau à factorisation unique non intègre* A. *L'anneau* A *est principal si et seulement si* $\mathfrak{M}$ *est un idéal principal.*

DEMONSTRATION. - Si $\mathfrak{M}$ est un idéal principal, d'après le corollaire 1, l'anneau A est artinien local. Alors $\mathfrak{M}$ principal entraîne A principal d'après [9] .

En utilisant une idée de J. HACHE, on peut énoncer :

COROLLAIRE 3. - *Si* p *est un élément irréductible d'un anneau localement à factorisation unique* [4] A, *pour tout* $k \geq 1$, A/p^kA *est un anneau présimplifiable.*

DEMONSTRATION. - Si $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ et si $p = (p_1, u_2, \ldots, u_n)$ où p_1 est irréductible dans A_1 et $u_i \in U(A_i)$ pour $i \geq 2$, on a $A/p^kA = A_1/p^kA_1$. On peut donc supposer A à factorisation unique.

Notre assertion est évidente lorsque A est factoriel ou principal spécial. Supposons que A vérifie la condition (iii) du théorèm de structure. Nous pouvons supposer $k = 1$. On note x' la classe de $x \in A$ dans A/pA où p est un irréductible de A. Supposons que $x'y' = 0$ avec $x' \neq 0$. Deux cas à considérer :

$xy \neq 0$. Alors, d'après [5] , $xy \in pA$ avec $xy \neq 0$ et $x \notin pA$ entraîne $y \in pA$, donc $y' = 0$.

$xy = 0$. Comme $x' \neq 0$, on a $y \notin U(A)$ donc $y \in A - U(A) = \mathfrak{m} \subseteq 1 - U(A)$ et $y' \in 1 - U(A/pA)$.

D'où le résultat.

REMARQUE. - Soit A un anneau à factorisation unique non intègre. La dimension de Krull de $A[X_1, \ldots, X_n]$ est toujours finie. De façon plus précise :

a) Si A est un anneau noethérien :

$$\text{K-dim}(A[X_1,\ldots,X_n]) = \text{K-dim}(A[[X_1,\ldots,X_n]]) = n \;;$$

b) Si A n'est pas noethérien : $n \leq \text{K-dim}\,(A[X_1,\ldots,X_n]) \leq 2^n-1$.

COROLLAIRE. - *Soit A un anneau à factorisation unique non intègre ;*

a) Si A est noethérien, sa dimension globale est infinie.

b) Si A n'est pas noethérien, sa dimension globale est supérieure ou égale à 3.

DEMONSTRATION. - a) Comme A est local non intègre, si A est noethérien, A ne peut pas être de dimension globale finie [2].

b) Supposons A non noethérien ; on a $\text{gb-dim}(A) \geq 2$ sinon A serait héréditaire. Or A est présimplifiable, donc connexe et tout anneau héréditaire connexe est intègre.

Si $\text{gb-dim}(A) = 2$, d'après [8] , deux cas sont possibles :

1) $\mathfrak{m}$ est principal ou n'est pas de type fini ; alors [8] A est un

anneau intègre (de valuation) et c'est contradictoire.

2) $\mathfrak{M}$ est engendré par une suite régulière de deux éléments. D'après notre corollaire 1, l'anneau A serait noéthérien et ce serait encore contradictoire. Donc ; gb-dim(A) $\geqslant 3$.

REMARQUE . - Pour un anneau à factorisation unique noéthérien non intègre A, on a $\text{gb-dim}(A[X_1,\dots,X_n]) = \text{gb-dim}(A[[X_1,\dots,X_N]]) = \infty$.

COROLLAIRE 5. - *Pour tout anneau localement à factorisation unique* A, *on a* $\text{Pic}(A) = 0$.

DEMONSTRATION. - Soit A un anneau localement à factorisation unique, il peut se mettre sous la forme $A = (\prod_{i=1}^{n} A_i) \times B$ où les A_i sont factoriels et B semi-local. D'après [7] on a alors :

$$\text{Pic}(A) = (\bigoplus_{i=1}^{n} \text{Pic}(A_i)) \oplus \text{Pic}(B) = 0.$$

Nous appelons *Anneaux de Fletcher* les "unique factorization rings" de [6].

COROLLAIRE 6. - *Soit* A *un anneau localement à factorisation unique* [4] . A *est un anneau de Fletcher si et seulement si les idéaux premiers principaux sont les idéaux premiers de hauteur* $\leqslant 1$.

DEMONSTRATION. - La condition est nécessaire d'après [6] . Réciproquement soit $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ un anneau localement à factorisation unique dont les idéaux premiers principaux sont les idéaux premiers de hauteur $\leqslant 1$. L'anneau A_1 est factoriel ou principal spécial ; sinon, d'après le théorème de structure, A_1 est local et son idéal maximal $\mathfrak{m}_1$ est non principal et de hauteur nulle dans A_1. Il s'ensuit que $\mathcal{F} = \mathfrak{m}_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ est un idéal premier non principal et de hauteur nulle dans A ce qui est absurde.

Par conséquent, tous les A_i sont factoriels ou principaux spéciaux, donc de Fletcher [6] et il en est de même de A.

c.q.f.d.

COROLLAIRE 7. - *Soit* S *une partie multiplicative d'un anneau localement à factorisation unique* A *; alors,* $S^{-1}A$ *est localement à factorisation unique et l'image canonique de* A *dans* $S^{-1}A$ *est intégralement fermée.*

DEMONSTRATION. - L'anneau A peut se mettre sous la forme $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ où les A_i sont des anneaux à factorisation unique. Alors $S^{-1}A$ est de la forme $\prod_{i=1}^{n} S_i^{-1}A_i$, donc est localement à factorisation unique [5].

Soient $\phi : A \longrightarrow S^{-1}A$ et $\phi_i : A_i \longrightarrow S_i^{-1}A_i$ les homomorphismes canoniques et $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$ un élément entier sur $\phi(A)$. Il peut se mettre sous la forme $\left(\frac{a_1}{s_1}, \ldots, \frac{a_n}{s_n}\right)$ et $\frac{a_i}{s_i}$ est entier sur $\phi_i(A_i)$. On peut supposer

$S_i^{-1} A_i$ non nul.

Si A_i est factoriel, $\frac{a_i}{s_i} \in \phi_i(A_i)$; si A_i est principal spécial ou vérifie (iii) du théorème de structure, $S_i^{-1}A_i \neq 0$ entraîne $S_i^{-1}A_i = A_i$ et $\frac{a_i}{s_i} \in \phi_i(A_i)$ d'où $\frac{a}{s} \in \phi(A)$.

Soient B un système représentatif d' éléments irréductibles [5] d'un anneau A et ϕ_B l'application $X \longmapsto X^{-1}A$ de l'ensemble des parties non vides de B dans l'ensemble des anneaux de fractions de A. En correction à une erreur de [9] , on peut énoncer ([1] et [3]) :

Pour un anneau atomique A, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

A *est* D-*atomique ;*

Il existe un système représentatif d'éléments irréductibles B *tel que* Φ_B *soit bijective ;*

Pour tout système représentatif d'éléments irréductibles B, Φ_B *est bijective.*

Le théorème suivant permet de donner, pour des anneaux autres que les anneaux atomiques, une condition nécessaire et suffisante pour que Φ_B soit bijective lorsque B est un système représentatif d'éléments *indécomposables* [5] .

THEOREME 2. - *Soit* A *un anneau localement à factorisation unique ; les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) A *est* D-*atomique,*

ii) Pour tout système représentatif d'éléments indécomposables B , Φ_B *est bijective ;*

iii) Il existe un système représentatif d'éléments indécomposables B, *tel que* Φ_B *soit bijective.*

DEMONSTRATION. - Le résultat étant trivial si A est intègre, on suppose que A n'est pas intègre. Comme dans un anneau atomique non intègre, les systèmes représentatifs d'éléments irréductibles sont les systèmes représentatifs d'éléments indécomposables [5] , il est clair que (i)$\Longrightarrow$(ii) et que (ii)$\Longrightarrow$(iii).

(iii)$\Longrightarrow$(i). Supposons qu'il existe un système représentatif d'éléments indécomposables B tel que Φ_B soit bijective. A est atomique. Sinon, A est de type (k,h) avec $k \geq 2$ [5] . Donc $A = A_1 \times A_2$ où A_1 est un anneau intègre et n'est pas un corps et où A_2 est localement à factorisation unique. Il existe nécessairement dans B un indécomposable de la forme (0,u) avec u unité de A_2 et un indécomposable (p,v) avec p indécomposable non nul dans A_1 et v unité de A_2. Les éléments (0,u) et (p,v) sont distincts. Posons $X = \{(0,u)\}$ et $Y = \{(0,u) , (p,v)\}$. Alors X et Y sont deux parties distinctes de B telle que $X^{-1}A=A_2 = Y^{-1}A$ et Φ_B ne serait bijective, ce qui est contradictoire. Donc A est atomique et notre assertion est une conséquence du résultat rappelé plus haut.

BIBLIOGRAPHIE. -

[1] J.C. ALLARD, *Remarque sur les anneaux de fractions des anneaux D-atomiques*, Publ. Dép. Math. (Lyon); t.8 (1971), fasc. 2, p. 87-91.

[2] M. AUSLENDER et D. BUCHSBAUM, *Homological dimension in local rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 85, p. 390-1957.

[3] A. BOUVIER, *Sur les anneaux de fractions des anneaux atomiques présimplifiables*, Bull. Soc. Math. France, 95, (1971), p. 371.

[4] A. BOUVIER, *Remarques sur les factorisations dans les anneaux commutatifs*, Publ. Dép. Math. (Lyon); t.8 (1971), fasc. 3, p. 23-54.

[5] A. BOUVIER, *Anneaux présimplifiables*, Rev. Roumaine, Math. Pures Appl. (à paraître).

[6] C.R. FLETCHER, *Unique factorization in commutative ring*, (Thèse).

[7] M. FONTANA, *Groupes de Picard et anneaux factoriels*, Séminaire P. LEFEBVRE, Lyon, (1973).

[8] W. VASCONCELOS, *The local rings of global dimension two*, Proc. Amer. Math. Soc. t. 2 (1972), p. 381.

[9] O. ZARISKI et P. SAMUEL, *Commutative algebra*, Van Nostrand, New-York (1960).

A. BOUVIER
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11-novembre-1918
69621-VILLEURBANNE