

SAMUEL-DIEUDONNÉ EKONG

**Sur les automorphismes de certains groupes algébriques
affines semi-simples**

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1974, tome 11, fascicule 3
, p. 29-38

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1974__11_3_29_0

© Université de Lyon, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES AUTOMORPHISMES DE CERTAINS GROUPES
ALGÈBRIQUES AFFINES SEMI-SIMPLES

par Samuel-Dieudonné EKONG

Les notions d'automorphismes semi-simples et quasi-semi-simples ont été introduites par R. Steinberg dans [5] ; dans ce mémoire, il est prouvé que tout automorphisme semi-simple est quasi-semi-simple. Le but de ce travail est de montrer que dans une certaine classe de groupes algébriques affines connexes tout automorphisme quasi-semi-simple est aussi semi-simple.

1. - PRELIMINAIRES.

Tout les groupes considérés sont des groupes algébriques affines sur un corps K algébriquement clos au sens de [1] .

DEFINITION. - *On dit qu'un groupe algébrique G est algébriquement complet si*

- (i) Le centre $Z(G)$ de G est réduit à l'élément neutre,*
- (ii) tous les automorphismes (algébriques) de G sont intérieurs.*

PROPOSITION 1.1. - *Soit G un groupe algébrique affine, connexe et algébriquement complet.*

1°) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) G est semi-simple ;

b) G est réductif.

2°) G est adjoint (i.e. isomorphe à son adjoint).

Preuve. -

1°) C'est clair car le centre de G est trivial.

2°) Soit $\Pi:G \rightarrow H$ une isogénie centrale de G sur H ; G étant connexe, H est connexe et la trivialité du centre de G implique :

a) la trivialité du centre de H

b) que Π est un morphisme dominant injectif.

On en déduit donc que si $K(G)$ (resp. $K(H)$) est le corps des fonctions rationnelles sur G (resp. sur H) le comorphisme Π_0 de $K(H)$ dans $K(G)$ est un isomorphisme. Il existe alors, d'après [4, exposé 18], un isomorphisme de G sur H ; par conséquent G est isomorphe à son adjoint \bar{G} .

PROPOSITION 1.2. - Soit G un groupe algébrique affine connexe sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0.

On suppose le centre $Z(G)$ de G trivial ; alors :

a) Le groupe $\text{Aut}(G)$ des automorphismes (algébriques) de G est un groupe algébrique affine.

b) Le groupe $\text{Int}(G)$ des automorphismes intérieurs de G est un sous-groupe connexe de $\text{Aut}(G)$.

c) Le centre $Z(\text{Aut}(G)^\circ)$ de la composante connexe de l'élément neutre de $\text{Aut}(G)$ est trivial.

Preuve. - On sait, d'après [2], que sous ces hypothèses $\text{Aut}(G)$ est un groupe algébrique affine et que l'application canonique ψ de G dans $\text{Aut}(G)$ qui à tout élément x de G associe l'automorphisme intérieur $\psi(x) = F_x$ est un morphisme de groupes affines.

b) Puisque G est connexe, on en déduit que son image $\psi(G) = \text{Int}(G)$ est un sous-groupe connexe de $\text{Aut}(G)$. La trivialité du centre $Z(G)$ de G implique que le morphisme ψ est une bijection de G sur $\text{Int}(G)$. Le centre de $\text{Int}(G)$ est donc trivial et ψ est un isomorphisme (des groupes abstraits sous-jacents) de G sur $\text{Int}(G)$.

c) découle d'un résultat dû à G. Hochschild [3] : le centre de G étant trivial, le centralisateur $Z_{\text{Aut}(G)}(\text{Int}(G))$ de $\text{Int}(G)$ dans $\text{Aut}(G)$ est trivial ; puisque $\text{Int}(G)$ est connexe, on a les inclusions suivantes :

$$\text{Int}(G) \subset \text{Aut}(G)^\circ,$$

$$Z_{\text{Aut}(G)}(\text{Aut}(G)^\circ) \subset Z_{\text{Aut}(G)}(\text{Int}(G)) \quad ;$$

donc $Z_{\text{Aut}(G)}(\text{Aut}(G)^\circ)$ est trivial et par conséquent $Z(\text{Aut}(G)^\circ)$ est trivial.

2. - LE CAS DES GROUPES SEMI-SIMPLES ALGÈBRIQUEMENT COMPLETS.

PROPOSITION 2.1. - *Soit G un groupe algébrique affine connexe algébriquement complet sur un corps algébriquement clos .*

1) *Si la caractéristique de K est 0 alors $\text{Aut}(G) = \text{Int}(G)$ est un groupe algébrique affine connexe algébriquement complet.*

2) Si G est semi-simple, tout automorphisme quasi-semi-simple de G est semi-simple.

Preuve. -

1) La Première partie découle de la proposition 1.2 il existe d'autre part d'après la proposition 1.1 un isomorphisme f de G sur $\text{Int}(G)$. Soit ψ un automorphisme de $\text{Int}(G)$; considérons la suite

$$G \xrightarrow{f} \text{Int}(G) \xrightarrow{\psi} \text{Int}(G) \xrightarrow{f^{-1}} G$$

$f^{-1} \circ \psi \circ f$ est alors un automorphisme de G par conséquent il existe un unique élément x de G tel que $f^{-1} \circ \psi \circ f = F_x$ d'où

$$\psi = f F_x f^{-1}$$

$$\forall \alpha \in \text{Int}(G)$$

$$\psi(\alpha) = f(x f^{-1}(\alpha) x^{-1})$$

$$= f(x) \alpha f(x)^{-1}$$

$$= F_{f(x)}(\alpha)$$

donc $\psi = F_{f(x)}$, et par conséquent ψ est un automorphisme intérieur de $\text{Int}(G)$ donc $\text{Int}(G)$ est complet.

2) Si G est semi-simple et algébriquement complet, soit F un automorphisme de G . il existe un unique élément a de G tel que $F = F_a$. Si F

est quasi-semi-simple, il existe un sous-groupe de Borel B de G et un tore maximal T de G contenu dans B , F -invariants donc

$$F(B) = F_a(B) = aBa^{-1} = B \quad \Rightarrow \quad a \in B$$

$$F(T) = F_a(T) = aTa^{-1} = T \quad \Rightarrow \quad a \in N_G(T) \quad \text{où } N_G(T) \text{ est le normalisateur de } T \text{ dans } G;$$

comme $B \cap N_G(T) = Z_G(T)$ [1] et [4] où $Z_G(T)$ est le centralisateur de T dans G , on en déduit que a est un élément de $Z_G(T)$.

G étant semi-simple $Z_G(T) = T$ donc a est un élément de T et par conséquent

a est semi-simple donc $F = F_a$ est semi-simple.

THEOREME 1. - *Soit G un groupe algébrique affine sur un corps algébriquement clos*

1) *Si un sous-groupe de Borel de G est algébriquement complet, alors il en est de même de tous les sous-groupes de Borel de G .*

2) *Si un sous-groupe de Borel de G est algébriquement complet, alors, tout automorphisme de G qui laisse invariant un sous-groupe de Borel B et un tore maximal T contenu dans B , laisse invariant tout sous-groupe de Borel de G qui contient T .*

Preuve. -

1) Désignons par \mathfrak{B} l'ensemble des sous-groupes de Borel de G ; soit B un élément de \mathfrak{B} ; si B est algébriquement complet, le centre $Z(B)$ de B est trivial par conséquent

$$\forall B' \in \mathfrak{B}, Z(B') = Z(G^\circ) = Z(B) = \{1\}, \quad \text{où } G^\circ \text{ est la composante}$$

connexe de l'élément neutre 1. Les sous-groupes de Borel étant conjugués il existe un élément x de G tel que

$$B' = xBx^{-1}$$

désignons par F_x l'automorphisme intérieur $g \rightarrow xgx^{-1}$ de G ; on a donc

$$B' = F_x(B)$$

Soit F' un automorphisme de B' , considérons la suite

$$B \xrightarrow{F_x} B' \xrightarrow{F'} B' \xrightarrow{F_x^{-1}} B$$

$F = F_x^{-1} \circ F' \circ F_x$ est un automorphisme de B par conséquent, il existe un unique élément b de B tel que

$$F_x^{-1} \circ F' \circ F_x = F_b \quad ; \text{ d'où}$$

$$F' = F_x \circ F \circ F_x^{-1} = F_{xbx^{-1}}$$

par conséquent F' est un automorphisme intérieur de B' ; donc B' est complet.

2) Si un sous-groupe de Borel B de G est algébriquement complet, d'après 1) tous les sous-groupes de Borel de B sont algébriquement complets.

Soient F un automorphisme de G , B un sous-groupe de Borel de G , T un tore maximal contenu dans B , F -invariants. La restriction F/B de F à B est un automorphisme de B ; donc $\exists ! b \in B$, $F/B = F_b$.

Soient B' un sous-groupe de Borel de G , distinct de B et F' la restriction de F à B' ; puisque $F(B') = F'(B')$ est un sous-groupe de Borel de G , il existe un élément y de G tel que $yF'(B')y^{-1} = B$; d'où la suite

$$B \xrightarrow{F_x} B' \xrightarrow{F'} F'(B') \xrightarrow{F_y} B$$

$F_y \circ F' \circ F_x$ est alors un automorphisme de B donc il existe un unique élément d de B tel que

$$F_y \circ F' \circ F_x = F_d$$

d'où $F' = F_y^{-1} d x^{-1}$; soit $C = y^{-1} d x^{-1}$

La restriction de F à B' coïncide donc avec la restriction à B' de F_C ; explicitons l'élément C ; on a $B' = x B x^{-1}$

$$\forall y \in B', \exists \beta \in B, y = x \beta x^{-1} \quad \text{d'où}$$

$$\begin{aligned} F(y) &= F(x)F(\beta)F(x)^{-1} \\ &= F(x) b \beta b^{-1} F(x)^{-1} \\ &= F(x) b x^{-1} x \beta x^{-1} x b^{-1} F(x)^{-1} \\ &= F_{F(x) b x^{-1}}(y) \end{aligned}$$

$$\text{donc } C = F(x) b x^{-1} .$$

Soit \mathcal{B}^T l'ensemble (fini) des sous-groupes de Borel de G qui contiennent le tore maximal F -invariant T ; puisque $F(T)$ est un tore maximal, on a $F(T) = T$; si $B \in \mathcal{B}^T$ on a $F(T) = F_b(T) = b T b^{-1} = T$

On en déduit donc comme précédemment que b est un élément du centralisateur $Z_G(T)^\circ$ de T dans G .

Si B' appartient à \mathcal{B}^T , et est distinct de B , comme $Z_G(T)^\circ$ est contenu dans B' quelque soit l'élément B' de \mathcal{B}^T [1] et [4] on en déduit

que b appartient à B' ; si la restriction F/B' de F à B' est F_C alors

$\forall t \in T$, $btb^{-1} = CtC^{-1}$; mais $btb^{-1} = t$ donc $CtC^{-1} = t$ donc $C \in Z_G(T) \circ CB'$
 d'où $F(B') = B'$ c.q.f.d.

THEOREME 2. - Soit Γ un groupe algébrique affine tel que Γ possède un sous-groupe de Borel algébriquement complet.

- a) si Γ est connexe, alors Γ est algébriquement complet,
- b) si Γ est un sous-groupe connexe, normal, fermé d'un groupe algébrique affine G , Γ est un facteur direct.

Preuve. - Désignons par H l'holomorphe de Γ (i.e. le produit semi-direct $\Gamma \rtimes \text{Aut}(\Gamma) = H$) on sait [2] que, en caractéristique 0, H est un groupe algébrique affine. Tout automorphisme de G est induit par un automorphisme intérieur de H donc : $\forall F \in \text{Aut}(\Gamma)$, $\exists h \in H$ tel que $F_h/\Gamma = F$; puisque tout automorphisme de Γ laisse invariant un sous-groupe de Borel B de Γ (d'après [5]) on a $F(B) = F_h(B) = B$; donc F_h/B est un automorphisme de B par conséquent il existe un unique élément b de B tel que :

$h x h^{-1} = b x b^{-1}$, $\forall x \in B$; donc $b^{-1}h$ centralise B et par conséquent $F_{b^{-1}h}(\gamma) = \gamma$, $\forall \gamma \in \Gamma$, donc

$$F_h/G = F_b = F$$

par conséquent tous les automorphismes de Γ sont intérieurs. Γ étant connexe le centre de Γ est le même que celui d'un de ses sous-groupes de Borel donc $Z(\Gamma) = \{1\}$ et par conséquent Γ est algébriquement complet.

b) Si Γ est un sous-groupe connexe normal fermé, d'un groupe algébrique affine G , Γ étant algébriquement complet (compte tenu de a/) est un facteur direct (ceci est un fait bien connu)

d'où

$$G = \Gamma \times Z \quad \text{où } Z \text{ est le centralisateur dans } G \text{ de } \Gamma.$$

THEOREM 3. - *Soit G un groupe algébrique affine réductif sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.*

Si un sous-groupe de Borel de G est algébriquement complet, tout automorphisme quasi-semi-simple de G est semi-simple.

Preuve. - Si G possède un sous-groupe de Borel algébriquement complet, alors, la composante connexe G° de l'élément neutre de G est un groupe algébriquement complet réductif. Soient B un sous-groupe de Borel de G et T un tore maximal de G contenu dans B ; désignons par $S(B,T)$ l'ensemble des automorphismes quasi-semi-simples de G qui laissent simultanément invariant B et T . Puisque $\text{Aut}(G)$ opère à gauche sur l'ensemble \mathcal{B} (resp. \mathcal{E}) des sous-groupes de Borel (resp. des tores maximaux) de G , $S(B,T)$ est l'intersection des stabilisateurs de B et T dans $\text{Aut}(G)$.

On sait [1] que : $\text{Aut}(G) = \text{Int}(G) \cdot S(B,T)$ et que $\text{Aut}(G)/\text{Int}(G)$ est un groupe fini. Par conséquent si F est un élément de $S(B,T)$, la restriction de F à B est de la forme F_b où b est un élément de B appartenant au centralisateur connexe $Z_G(T)^\circ = T$, de T donc b est semi-simple ; soient

\bar{F} la classe de F dans $\text{Aut}(G)/\text{Int}(G)$ et m l'ordre de \bar{F} alors F^m est un automorphisme intérieur de F par conséquent il existe un élément a de G , tel que $F^m = F_a$ mais $F^m/B = F_b^m = F_{b^m}$ donc $a = zb^m$ où $z \in Z_G(B) = Z_G(G^\circ)$ comme $Z_G(G^\circ)$ est fini et que la caractéristique du corps de base est nulle, on en déduit que z est semi-simple donc F est semi-simple.

COROLLAIRE. - Soit G un groupe algébrique affine semi-simple. Si G possède un sous-groupe de Borel algébriquement complet, alors tout automorphisme de G est produit d'un automorphisme intérieur et d'un automorphisme semi-simple.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] A. BOREL, *Linear algebraic groups*, W.A. BENJAMIN, Inc. (1969).
- [2] G. HOCHSCHILD and G. MOSTOW, *Automorphisms of affine algebraic groups*, J. algebra, t. 13 (1969), p. 535-543.
- [3] G. HOCHSCHILD, *Automorphism towers of affine algebraic groups*, J. Algebra, t. 22 (1972) ; p. 365-373.
- [4] SEMINAIRE CHEVALLEY, *Classification des groupes de Lie algébriques*, Ecole Normale Supérieure, Paris, (1958), 2 vol.
- [5] R. STEINBERG, *Endomorphisms of linear algebraic groups*, Mem. Math. Soc. n° 80 (1969).

S. D. EKONG
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11-novembre-1918
69621-VILLEURBANNE