PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

J. BERRUYER
B. IVOL

Espaces de mesures et compactologies

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 2
« Compte rendu des journées infinitistes », , p. 9-12
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_2_9_0>

II$^{\text{ème}}$ Coll. Anal. Fonct.
(1973, Bordeaux)
p. 9-12

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1973 t. 10-2

ESPACES DE MESURES ET COMPACTOLOGIES

J. BERRUYER et B. IVOL

Ces quelques lignes résument une conférence faite à Bordeaux à l'occasion des journées d'ANALYSE FONCTIONNELLE de Mars 1973. Un exposé détaillé a été publié dans (B.I.).

Dans ce qui suit on désigne par :

- T un espace topologique complètement régulier;
- $C(T)$ (resp. $C^{\infty}(T)$) l'algèbre des fonctions continues (resp. continues et bornées) sur T;
- $M_{\upsilon}(T)$ (resp. $M_{\sigma}(T)$) l'espace des formes linéaires μ sur $C(T)$ (resp. $C^{\infty}(T)$) qui transforment les suites décroissantes vers zéro en suites convergentes vers zéro. L'espace $M_{\upsilon}(T)$ (resp. $M_{\sigma}(T)$), s'identifie à l'espace des mesures de Riesz (resp. des mesures de Baire signées et bornées) sur T.
- $M(T)$ (resp. $M^{\infty}(T)$) l'espace des formes linéaires μ sur $C(T)$ (resp. $C^{\infty}(T)$) qui transforment les suites généralisées équicontinues décroissantes vers zéro en suites convergentes vers zéro. Ce sont, comme nous le verrons, les espaces introduits sous le vocable M(T) par BUCHWALTER dans (B U.1) et MX par LEGER-SOURY dans (L.S.).

Les quatre espaces de mesures ainsi définis sont engendrés par leur cône positif. Pour $M_{\sigma}(T)$ et $M_{\upsilon}(T)$ c'est bien connu. Quant à $M^{\infty}(T)$ qui est fermé en norme dans $M_{\sigma}(T)$, il suffit de remarquer que pour $\mu \in M^{\infty}(T)$ et $f \in C^{\infty}(T)$, la mesure $f.\mu$ appartient à $M^{\infty}(T)$. Le résultat pour $M(T)$ s'établit alors facilement puisque $M(T) = M^{\infty}(T) \cap M_{\upsilon}(T)$.

Ce théorème de décomposition permet de retrouver la définition habituelle de $M(T)$ (resp. $M^{\infty}(T)$) comme dual de l'espace compactologique $(C(T), \mathcal{H})$ (resp. $(C^{\infty}(T), \mathcal{H}^{\infty})$) où $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}^{\infty}$) est la famille des parties équicontinues simplement bornées (resp.uniformément bornées) munies de la topologie de la convergence simple. A ce titre, $M(T)$ et $M^{\infty}(T)$ sont naturellement munis d'une topologie d'elc complet et admettent respectivement $C(T)$ et $C^{\infty}(T)$ pour dual. Cette méthode s'applique également aux espaces $M_{\upsilon}(T)$ et $M_{\sigma}(T)$. La famille $\mathcal{H}_{o}$ des enveloppes disquées simplement fermées des suites (f_n) équicontinues et convergent simplement vers zéro, définit une compactologie sur $C(T)$. L'espace compactologique $C_{o}(T)$ ainsi obtenu a pour dual $M_{\upsilon}(T)$. En supposant de plus les suites (f_n) uniformément bornées, l'espace compactologique $C^{\infty}(T)$ a pour dual $M_{\sigma}(T)$. Ainsi $M_{\upsilon}(T)$ et $M_{\sigma}(T)$ sont munis d'une topologie localement convexe complète et $M_{\upsilon}(T)' = C(T)$, $M_{\sigma}(T)' = C^{\infty}(T)$.

Rappelons en suivant (BU.1), qu'en désignant par $\bar{c}X$ la topologie localement convexe sur l'ecc X, la plus fine induisant sur chaque compact sa topologie, on a $X^{*} = (\bar{c}X)'$. Nos espaces de mesures peuvent donc tous être considérés comme dual topologique. On retrouve alors pour les espaces $M_{\sigma}(T)$ et $M^{\infty}(T)$ les caractérisations de (F.G.H) et (WH). Pour $M(T)$, on obtient $\bar{c}C(T) = C_c(\theta T)$ grâce à l'égalité : $\mathcal{H}(T) = \mathcal{H}(\theta T)$ et aux deux résultats importants suivant. Le premier $M(T) = (\bar{c}C(T))' = (C_c(\theta T))'$ prouvé par HAYDON signifie que l'espace $M(T)$ est l'ensemble des mesures de Radon sur βT à support dans θT; le second affirme que $C_c(\theta T)$ est un espace tonnelé donc de Mackey car θT est de type (μ).

De l'égalité $\bar{c}C(T) = C_c(\theta T)$, on déduit que $C_c(T)$ est un espace de Kelley pour T c-replet. Le problème d'une réciproque n'est, à notre connaissance, pas résolu sauf dans le cas où T est un $k\mathfrak{r}$-espace.

Pour l'espace $M_{\upsilon}(T)$, on utilise des arguments analogues pour obtenir $C_c(\upsilon T) = \bar{c}C_{o}(T)$. D'une part, l'égalité $M_{\upsilon}(T) = C_c(\upsilon T)'$ due à Choquet se retrouve grâce au théorème de Nachbin-Shirota, et, d'autre part, on a $\mathcal{H}_{o}(T) = \mathcal{H}_{o}(\upsilon T)$ puisque les équicontinus métrisables de $C(T)$ se prolongent à υT en équicontinus métrisables.

Abordons maintenant quelques propriétés topologiques des espaces de mesures. La topologie de $M_\sigma(T)$ (resp. $M^\infty(T)$) coïncide avec la topologie faible, c'est-à-dire la topologie étroite, sur le cône positif de l'espace. Les complétés semi-faibles au sens de (BU.2) des espaces $M^\infty(T)$ et $M(T)$ sont respectivement $M_\sigma(T)$ et $M_\upsilon(T)$ et à ce titre ils sont replets. En outre θT est un sous-espace topologique total de $M^\infty(T)$ et $M(T)$ comme υT est un sous-espace topologique total de $M_\sigma(T)$ et $M_\upsilon(T)$.

La caractérisation des bornés de ces espaces est simple. Ce sont les bornés en norme pour $M_\sigma(T)$ et $M^\infty(T)$ d'où $M_\sigma(T)'_\beta = C^\infty(T) = M^\infty(T)'_\beta$ avec $C^\infty(T)$ muni de la norme uniforme. Le théorème de Nachbin-Shirota montre qu'un borné de $M(T)$ (resp. $M_\upsilon(T)$) est absorbé par $\bar{\Gamma}(K)$ où K est un compact de θT (resp. υT). Ainsi les bornés de $M(T)$ (resp. $M_\upsilon(T)$) sont les parties B bornées en norme et telles que les supports des $\mu \in B$ sont contenus dans le même compact de θT (resp. υT). Ces espaces sont de type (μ) et, d'une part $M(T)'_c = M(T)'_\beta = C_c(\theta T)$, d'autre part $M_\upsilon(T)'_c = M_\upsilon(T)'_\beta = C_c(\upsilon T)$.

Il est enfin intéressant de dresser un tableau relatif à quelques cas particuliers.

	$M^\infty(T)$	$M_\sigma(T)$	$M(T)$	$M_\upsilon(T)$
T fini	Réflexif	Infratonnelé	frechet	métrisable
T discret dénombrable	Banach séparable ou ℓ^1		DF	DF ou infratonnelé
T discret	Infratonnelé ou $\ell^1(I)$		infratonnelé ou $\mathbb{R}^{(I)}$	

Il apparait dans ce tableau que les espaces introduits ne sont pas en général infratonnelés ni même DF. Ceci suggère à nouveau une classification des espaces infratonnelés. Une voie est peut-être ouverte avec la notion d'elc hypotonnelé introduite par BUCHWALTER et qui recouvre les cas de $M(T)$ et $M_\upsilon(T)$. Pour terminer, remarquons que tous les espaces vérifient la propriété d'approximation ce qui pourrait être le point de départ de l'étude des espaces de mesures à valeurs vectorielles.

(B.I.)J.BERRUYER - B.IVOL - Espaces de mesures et compactologies Publications Dép.Math.Lyon, 9-1, 1972, p.1-35

(BU.1)H.BUCHWALTER - Topologies et compactologies, Publ.Dép.Math.Lyon 6-2, 1969, p.1-74.

(BU.2)H.BUCHWALTER - Espaces localement convexes semi-faibles. Exposé aux journées d'analyse fonctionnelle de Bordeaux 1973.

(F.G.H)D.H.FREMLIN - D.J.H.GARLING - R.G.HAYDON, Bounded measures on topological spaces, Proc.London Math.Soc., 25, 1972, p.115-136

(HA)R.G.HAYDON - Sur les espaces $M(T)$ *et* $M^{\infty}(T)$, *Comptes-Rendus, 275 série A, 1972, p.989.*

(L.S.)C.LEGER - P.SOURY, le convexe topologique des probabilités sur un espace topologique, J.Math.pures et appl., 50, 1971, p.363-425.

(RO)M.ROME - L'espace $M^{\infty}(T)$, *Publ.Dép.Math.Lyon, 9-1, 1972, p.37-60.*

(WH)R.F.WHEELER - The strict topology, separable measures and paracompactness, à paraître au Pacific J.