PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

HENRI BUCHWALTER

Espaces localement convexes semi-faibles

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 2
« Compte rendu des journées infinitistes », , p. 13-28
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_2_13_0>

II$^{\text{ème}}$ Coll. Anal. Fonct.
(1973, Bordeaux)
p. 13-28

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1973 t. 10-2

ESPACES LOCALEMENT CONVEXES SEMI-FAIBLES

Henri BUCHWALTER

A la suite des travaux de BERRUYER et IVOL [2] sur les espaces $M_\sigma(T)$ et $M_\upsilon(T)$, on est amené à introduire une classe assez générale d'elc, contenant justement $M_\sigma(T)$ et $M_\upsilon(T)$: ce sont les espaces dits *semi-faibles* (on pourrait aussi les appeler espaces *séquentiellement faibles*).

1. - GENERALITES.

(1.1) DEFINITION. - *On dit qu'un elc séparé* E *est semi-faible si toute partie équicontinue* $H \subset E'$ *est contenue dans l'enveloppe disquée faiblement fermée d'une suite équicontinue* x'_n *tendant faiblement vers zéro.*

Ainsi, dans le dual E' d'un espace semi-faible, les parties $\overline{\Gamma}(x'_n)$, (x'_n) suite équicontinue tendant vers zéro faiblement, forment une base de disques équicontinus faiblement compacts.

Exemples. - *Tout espace faible est évidemment semi-faible*. Pour tout espace de Fréchet E, l'espace E'_c (qui est E' muni de la topologie de la convergence compacte sur E) est semi-faible, car tout compact de E est contenu dans l'enveloppe disquée fermée d'une suite tendant vers zéro. *Plus généralement tout espace de Schwartz* E *est semi-faible :* car pour toute partie équicontinue $H \subset E'$, il existe un disque équicontinu faiblement compact L tel que, sur H, la topologie faible $\sigma(E',E)$ coïncide avec celle de l'espace de Banach E'_H ; il suit de là que H est relativement compacte dans E'_H, donc contenue dans l'enveloppe disquée fermée (dans E'_L) d'une suite x'_n qui tend vers zéro dans E'_L. Alors cette enveloppe disquée fermée $\overline{\Gamma}(x'_n)$ est compacte dans E'_L, donc dans E'_σ, et par suite coïncide avec l'enveloppe disquée faiblement fermée de la suite (x'_n), suite qui est d'ailleurs équicontinue. Ainsi E est semi-faible. *En particulier tout espace nucléaire est semi-faible.*

Remarques :

(1) Ce dernier exemple est important. Les espaces de Schwartz sont assez bien connus et leurs propriétés vont nous guider pour la recherche des propriétés générales des espaces semi-faibles.

(2) La terminologie "*semi-faible*" ou "*séquentiellement faible*" est proposée par

analogie avec les espaces faibles : on remplace en effet les suites finies de E' par les suites dénombrables équicontinues $x'_n \to 0$. On doit donc obtenir a priori des espaces tout juste un peu plus fins que les espaces faibles. Les exemples précédents montrent toutefois qu'il en existe suffisamment.

PROPRIETES GENERALES :

(1.2) PROPOSITION. - *Les parties équicontinues du dual* E' *d'un espace semi-faible* E *sont métrisables pour la topologie faible.*

Preuve. - Car on peut supposer $H \subset \overline{\Gamma}(x'_n)$, avec (x'_n) équicontinue et tendant vers zéro. Alors le raisonnement classique montre que $L = \overline{\Gamma}(x'_n)$ est l'image de la boule unité A^1 de l'espace ℓ^1, espace que l'on munit de la topologie $\sigma(\ell^1, c_0)$, par l'application $\varphi : \overline{\lambda} \to \Sigma\, \lambda_n x'_n$. Il suffit en effet de vérifier que $\varphi : \ell^1 \to E'$ est continue pour les topologies faibles $\sigma(\ell^1, c_0)$ et $\sigma(E', E)$ et de se rappeler que A^1 est compacte pour $\sigma(\ell^1, c_0)$. Or A^1 est aussi métrisable, donc métrisable et compacte, de sorte que $L = \varphi(A^1)$, image continue d'un compact métrisable, est aussi compacte métrisable.

Remarque. - Il est clair qu'un espace séparable E possède aussi les propriétés de (1.2). Toutefois on verra qu'il existe des espaces semi-faibles non séparables et des espaces séparables (même normés et de dual fort E'_β séparable) qui ne sont pas semi-faibles.

(1.3) PROPOSITION. - *Tout elc* E, *complet et semi-faible, est topologiquement replet.*

Preuve. - Car E, étant complet, s'identifie à un sous-espace fermé de la limite projective $\varprojlim C(H)$, où H décrit l'ensemble $\mathcal{H}$ des disques équicontinus compacts de E'. Or chaque $H \in \mathcal{H}$ est métrisable, donc C(H) est espace de Banach séparable, donc topologiquement replet (puisque Lindelöf), et il en est de même de E qui apparaît comme un sous-espace fermé d'un produit d'espaces replets.

LE SEMI-AFFAIBLI ASSOCIE. - En plaçant sur le dual E' d'un elc séparé quelconque E la compactologie $\mathcal{H}_0$ définie par la base de disques compacts $\overline{\Gamma}(x'_n)$, où (x'_n) est une suite équicontinue tendant vers zéro, on place du même coup sur E une topologie d'elc intermédiaire entre sa topologie faible et sa topologie initiale. Et cette topologie est semi-faible. On notera E_0 l'espace ainsi obtenu : E_0 *est le semi-affaibli associé*. Par dualité on vérifie que tout morphisme $u : E \to F$ reste continu de E_0 dans F_0 ; ainsi E_0 est bien solution du problème universel des applications linéaires continues de E dans les espaces semi-faibles quelconques. Puisque E_0 est intermédiaire entre E_σ et E, alors E et E_0 ont les mêmes bornés. En particulier $E = E_0$ chaque fois que E_0 est espace de Mackey. Ainsi, si E est un espace normé non semi-faible, alors l'espace E_0 n'est pas métrisable, ni même infratonnelé, ni même espace de Mackey.

LE COMPLETE SEMI-FAIBLE. - On sait que E et $\hat{E}$ ont le même espace dual E', avec les mêmes parties équicontinues et la même topologie faible sur ces parties équicontinues, autrement dit la même compactologie sur E'. Il suit de là que si E est semi-faible alors $\hat{E}$ l'est aussi. On peut donc, dans le cas général, introduire le complété $\hat{E}_0$ de E_0, dit *complété semi-faible de* E, de même qu'on introduit le complété faible $\hat{E}_\sigma$. Il est clair, par dualité, que $\hat{E}_0$ s'identifie à l'espace des formes linéaires u sur E' telles que $u(x'_n) \to 0$ pour toute suite (x'_n) équicontinue tendant vers zéro ; pour le voir on peut appliquer le théorème de complétion de Grothendieck en tenant compte de (1.2). Il suit de là $\hat{E} \subset \hat{E}_0$ dans le cas général, l'injection $\hat{E} \to \hat{E}_0$ étant bien entendu continue. Toutefois si les parties équicontinues de E' sont faiblement métrisables (par exemple si E est séparable) alors $\hat{E} = \hat{E}_0$ *algébriquement*.

Exemple. - *Applications aux espaces de mesures*. - Soit T un espace complètement régulier. On voit maintenant, avec l'une au moins des définitions possibles des espaces $M_\sigma(T)$ et $M_\upsilon(T)$, que ces espaces, avec leur topologie introduite par BERRUYER et IVOL dans [2], coïncident respectivement avec les complétés semi-faibles des espaces $M^\infty(T)$ et M(T). Ainsi les propositions (1.2) et (1.3) constituent des généralisations des énoncés (3.3.1), (3.3.2) et (3.3.11) de [2]. Mais de plus l'interprétation de M(T) et $M^\infty(T)$ comme solutions de problèmes universels [5], [20], donne aussitôt :

(1.4) PROPOSITION :

(a) $M_\sigma(T)$ *est la solution du problème universel de linéarisation continue de toute application continue* $f : T \to E$, *d'image* f(T) *bornée dans* E, *de* T *dans un espace complet et semi-faible* E *quelconque.*

(b) $M_\upsilon(T)$ *est la solution du problème universel de linéarisation continue de toute application continue* $f : T \to E$ *de* T *dans un espace complet et semi-faible* E *quelconque.*

PROPRIETES DE STABILITE. - On sait que les espaces de Schwartz ont de bonnes propriétés de stabilité : par produit quelconque, par passage aux sous-espaces, aux sommes directes *dénombrables* et aux quotients. Qu'en est-il donc des espaces semi-faibles ?

(1.5) PROPOSITION :

(a) Pour tout produit $E = \Pi E_i$ *on a* $E_\circ = \Pi(E_i)_\circ$.

(b) En particulier un produit quelconque d'espaces semi-faibles est semi-faible.

Preuve. - Il suffit de prouver $E_\circ = \Pi(E_i)_\circ$. Or déjà $E' = \oplus E_i'$ avec les égalités $\mathcal{H} = \oplus \mathcal{H}_i$, où $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_i$ sont les ensembles des disques équicontinus compacts de E et E_i et où $\oplus \mathcal{H}_i$ désigne la famille des sommes directes *finies* d'éléments de $\mathcal{H}_i$. Il suit de là que toute suite (x_n') de E', équicontinue et tendant faiblement vers zéro, est contenue dans une somme directe finie $\bigoplus_{i\in J} E_i'$, d'où la décomposition $x_n' = \sum_{i\in J} x_{n,i}'$, $x_{n,i}' \in E_i'$. On se ramène donc à travailler dans le dual de l'espace $E_J = \prod_{i\in J} E_i$ et dans ce cas on a $(E_J)_\sigma' = \bigoplus_{i\in J} (E_i)_\sigma'$ (alors que cette formule n'est pas valable pour une somme directe infinie), d'où l'on tire que les suites équicontinues $(x_{n,i}')$ tendent aussi vers zéro dans E_i' pour chaque $i \in J$. Il en résulte l'égalité $\mathcal{H}_\circ = \oplus(\mathcal{H}_i)_\circ$, d'où l'on déduit l'égalité topologique cherchée $E_\circ = \Pi(E_i)_\circ$.

(1.6) PROPOSITION. - *Tout sous-espace* F *d'un espace semi-faible* E *est semi-faible.*

Preuve. - Soit W un voisinage disqué de F ; on sait qu'il existe un voisinage disqué V de E tel que $W = V \cap F$. En remplaçant V par un voisinage d'une base, on peut supposer $V = H^\circ$, où $H = \overline{\Gamma}(x_n')$ avec (x_n') suite équicontinue tendant vers zéro dans E'. Par ailleurs on sait que, si $j : F \to E$ est l'injection canonique, alors sa transposée ${}^t j : E' \to F'$ permet d'identifier F' au quotient E'/F°, car $\mathrm{Ker}\,{}^t j = F^\circ$ précisément. Alors l'égalité $V = H^\circ$ donne $W = ({}^t jH)^\circ$ dans la dualité (F,F'). Or ${}^t jH$ est un disque équicontinu (faiblement) compact dans F' et la décomposition $x' = \Sigma \lambda_n x_n'$, $\overline{\lambda} = (\lambda_n) \in A^1$, pour toute $x' \in H$, donne ${}^t jx' = \Sigma \lambda_n {}^t jx_n'$. Et la suite ${}^t jx_n' \to 0$ dans F'. En résumé ${}^t jH \in \mathcal{H}_\circ(F')$ et $W = ({}^t jH)^\circ$, ce qui prouve que F est bien semi-faible.

Remarque. - On ne peut pas prouver que, dans le cas général, $F_\circ$ est un sous-espace de $E_\circ$, autrement dit que le foncteur de semi-affaiblissement commute aux sous-espaces. D'ailleurs ce résultat est faux. On verra en effet un peu plus loin, en (2.1) et (2.7), que l'espace $c_\circ$ est semi-faible tandis que l'espace ℓ^∞ ne l'est pas. Or $c_\circ$ n'est pas un sous-espace topologique de $(\ell^\infty)_\circ$:

(1.7) PROPOSITION. - *L'espace semi-faible* $(\ell^\infty)_\circ$ *induit sur* $c_\circ$ *la topologie (non métrisable)* $(c_\circ)$ *d'espace de Schwartz associé introduite dans* (11) *et* (19), *qui est celle de la convergence uniforme sur les parties compactes (ou fai-*

blement compactes) de l'espace de Banach ℓ^1. *Autrement dit* $(\ell^\infty)_\circ$, $(\ell^1)'_c$ *et* $\tau(\ell^\infty,\ell^1)$ *induisent la même topologie sur* $c_\circ$.

Preuve. - L'injection canonique $j : c_\circ \to \ell^\infty$ se transpose en $\pi : (\ell^\infty)' \to \ell^1$. Par ailleurs l'isométrie canonique $J : \ell^1 \to (\ell^\infty)'$ satisfait $\pi J = 1$, c'est-à-dire, ce qui est classique, que ℓ^1 est facteur direct de $(\ell^\infty)'$. Or $(\ell^\infty)_\circ$ induit sur $c_\circ$ la topologie de la convergence uniforme sur les suites de ℓ^1 de la forme $\pi\mu_n$, où $\mu_n \in (\ell^\infty)'$ et $\mu_n \to 0$ faiblement. Si $\lambda_n \to 0$ en norme dans ℓ^1, alors $\lambda_n = \pi\mu_n$ avec $\mu_n = J\lambda_n$ tendant vers zéro dans $(\ell^\infty)'$. Réciproquement, si $\mu_n \to 0$ faiblement dans $(\ell^\infty)'$, alors $\pi\mu_n \to 0$ en norme dans ℓ^1 d'après un résultat bien connu de PHILLIPS [18]. Alors $(\ell^\infty)_\circ$ induit sur $c_\circ$ la topologie de la convergence uniforme sur les suites de ℓ^1 convergentes en norme vers zéro, autrement dit celle de la convergence compacte sur ℓ^1. On voit ainsi, avec le théorème de Schur, que la topologie $(\ell^\infty)_\circ$ (qui n'est pas de Mackey) et la topologie de Mackey $\tau(\ell^\infty,\ell^1)$ induisent la même topologie sur $c_\circ$, qui est celle $[c_\circ]$ d'espace de Schwartz associé [11] et qui, bien entendu, n'est pas de Mackey.

Toutefois une remarque de GROTHENDIECK ([7], p. 112), généralisant un résultat de KÖTHE [15], assure que si E *est séparable, alors pour tout sous-espace* F *de* E, *toute suite équicontinue* (y'_n) *de formes linéaires sur* F *convergeant faiblement vers zéro peut se relever en une suite équicontinue* $x'_n \in E'$ *qui converge encore faiblement vers zéro.* On a donc, dans un sens plus positif que (1.7) :

(1.8) PROPOSITION. - *Soit* E *un elc séparable. Pour tout sous-espace* F *de* E, *le semi-affaibli associé* $F_\circ$ *est sous-espace de* $E_\circ$.

Le cas des sommes directes dénombrables se traite bien, grâce à une démonstration qui nous a été proposée par R. HAYDON, dans un communication personnelle.

(1.9) PROPOSITION :

(a) Pour toute somme directe dénombrable $E = \oplus E_n$ *on a* $E_\circ = \oplus (E_n)_\circ$.

(b) En particulier une somme directe dénombrable d'espaces semi-faibles est semi-faible.

Preuve. - Supposons les entiers $n \geq 1$. Il suffit de montrer que l'application identique $E_\circ \to \oplus (E_n)_\circ$ est continue. Pour cela fixons, pour chaque n, une partie $A_n = \overline{\Gamma}(x'_{n,j})$, où la suite $x'_{n,j}$, $j \geq 1$, est équicontinue dans E'_n et converge faiblement vers zéro quand $j \to +\infty$. Il faut maintenant prouver que la partie équicontinue $A = \Pi A_n$ de E' est contenue dans l'enveloppe disquée faiblement fermée d'une suite équicontinue de E' convergeant faiblement vers zéro. Posons $B = \Pi 2^n A_n$ et désignons par C l'ensemble dénombrable de tous les points

$$y'_{n,j} = (0,0,\dots,0,2^n x'_{n,j},0,\dots) \in E'$$

quand n et j varient. Alors déjà $C \subset B$, donc C est équicontinu puisque B l'est. De plus pour chaque $x = (x_n) \in E$, il existe un entier N tel que $x_n = 0$ pour $n>N$; et pour tout $\varepsilon>0$ fixé, il existe, pour chaque entier $n \leqslant N$, un entier J_n tel que $|\langle x_n, x'_{n,j}\rangle| \leqslant \varepsilon 2^{-n}$ dès que $j \geqslant J_n$; d'où l'on déduit $|\langle x,x'\rangle| \leqslant \varepsilon$ pour tous les points $x' \in C$ sauf un nombre fini. Ainsi l'ensemble dénombrable C peut être ordonné en une suite (équicontinue) de E' convergeant faiblement vers zéro. Il reste à voir $A \subset \overline{\Gamma}(C)$ ce qui est immédiat puisque, pour tout $x' = (x'_n) \in A$, chaque $x'_n \in A_n$ admet une décomposition $x'_n = \sum_{j\geqslant 1} \lambda_{n,j}\, x'_{n,j}$, avec $\sum_{j \geqslant 1} |\lambda_{n,j}| \leqslant 1$. Alors il suffit d'écrire $x' = \sum_{n,j} 2^{-n}\lambda_{n,j} y'_{n,j}$, et tout est dit.

PROBLEME DES QUOTIENTS. - Il n'est pas résolu et sa discussion sera reprise plus loin en (2.8).

2. - L'ESPACE UNIVERSEL c_0.

(2.1) THEOREME. - *L'espace de Banach c_0 est semi-faible.*

Preuve. - Dans le dual ℓ^1, la suite base (e_n) est équicontinue, tend faiblement vers zéro et la boule A^1 de ℓ^1 est justement $\overline{\Gamma}(e_n)$.

(2.2) COROLLAIRE. - *Tout sous-espace d'un c_0^I est semi-faible.*

On va voir qu'on tient là exactement tous les espaces semi-faibles. En effet :

(2.3) LEMME. - *Soit E un elc quelconque. Pour toute suite équicontinue (x'_n) convergeant faiblement vers zéro dans E', désignons par V le voisinage de zéro polaire de (x'_n). Alors l'espace de Banach $\hat{E}_V$ est isométrique à un sous-espace fermé de c_0.*

Preuve. - Soit p_V la semi-norme jauge de V sur E. Alors pour tout $x \in E$ on a $p_V(x) = \operatorname{Sup}_n |\langle x,x'_n\rangle|$. Définissons donc l'application $\varphi_V : E \to c_0$ par $\varphi_V(x) = (\langle x,x'_n\rangle)_n$, de sorte que $\|\varphi_V(x)\| = p_V(x)$. Ce qui permet de voir que l'espace de Banach séparé complété $\hat{E}_V$ de l'espace semi-normé (E,p_V) est isométrique au sous-espace fermé $\overline{\varphi_V(E)}$ de c_0.

(2.4) THEOREME. - *Soit E un espace semi-faible et soit I le cardinal d'une famille de voisinages de zéro (V_i) disqués fermés telle que les homothétiques λV_i, $\lambda>0$, forment une base de voisinages de zéro. Alors E est isomorphe à un sous-espace de c_0^I.*

Preuve. - On se ramène aisément à supposer que chaque V_i est le polaire d'une suite équicontinue convergeant faiblement vers zéro. Posons donc, avec les notations du lemme $\varphi_i = \varphi_{V_i} : E \to c_o$. L'application $\varphi = (\varphi_i)$, de E dans c_o^I, est injective, car E est séparé, et elle permet d'identifier E à un sous-espace de c_o^I.

(2.5) COROLLAIRE 1. - *Tout espace métrisable semi-faible* E *est isomorphe à un sous-espace de* $c_o^{\mathbb{N}}$ *(qui est un espace métrisable semi-faible). En particulier* E *est distingué et* E *et* E'_β *sont séparables.*

Preuve. - Soit $M = c_o^{\mathbb{N}}$. Déjà $M'_\beta = (\ell^1)^{(\mathbb{N})}$, d'où l'on tire que M'_β est séparable. Or si $E \subset M$ alors E' s'identifie algébriquement à M'/E° et l'application $M'_\beta/E^\circ \to E'_\beta$ est continue. Alors la topologie de E'_β est moins fine que la topologie quotient M'_β/E°, et cette dernière est séparable. Donc E'_β est séparable. Ainsi E'_β est un espace (DF) séparable ; il est donc infratonnelé ([7], page 71) et par suite aussi tonnelé puisqu'il est complet. Ainsi E est distingué, ce qui implique encore que $E'_\beta = M'_\beta/E^\circ$ topologiquement ([7], p. 75). Enfin E est séparable puisque $M = c_o^{\mathbb{N}}$ est métrisable et séparable.

Remarque. - Les conditions sur E et E'_β sont redondantes. On peut montrer ([4], chap. IV, §3, ex. 24 b) que si E est métrisable et si E'_β est séparable alors E aussi est séparable.

(2.6) COROLLAIRE 2. - *Tout espace normé semi-faible est isomorphe à un sous-espace de* c_o. *En particulier il est séparable ainsi que son dual fort.*

(2.7) COROLLAIRE 3. - *Les espaces* ℓ^1 *et* ℓ^∞ *ne sont pas semi-faibles.*

LIAISON AVEC LA THEORIE DES VARIETES D'ELC [6]. - On rappelle avec [6] qu'on nomme *variété* une classe non vide $\mathcal{V}$ d'elc (séparés) stable par passage aux produits quelconques, aux sous-espaces, aux quotients et aux images isomorphes. On a ainsi la variété $\mathcal{V}_\sigma$ des espaces faibles, celle $\mathcal{U}$ des espaces ultra-nucléaires [10] (ou s-nucléaires de [17]), celles $\mathcal{N}$ des espaces nucléaires et $\mathcal{S}$ des espaces de Schwartz. Chacune de ces variétés est monogène, c'est-à-dire engendrée par un seul espace G, dit générateur. Même mieux : dans chacun des quatre cas la variété est exactement formée des elc isomorphes à des sous-espaces des produits quelconques G^I. En rappelant des résultats connus signalons que l'on peut prendre pour G les espaces $\mathbb{R}$, s' (espace des suites à croissance lente), s (espace des suites à décroissance rapide) et $(\ell^1)'_c = \tau(\ell^\infty, \ell^1)$ respectivement associés aux variétés $\mathcal{V}_\sigma$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{N}$ et $\mathcal{S}$, [17], [14], [12].

Désignons maintenant par SF la classe des espaces semi-faibles et par $\mathcal{V}_0$ la variété $\mathcal{V}(c_0)$ engendrée par l'espace c_0. Le théorème (2.4) signifie évidemment que SF est contenue dans $\mathcal{V}_0$. Nous ignorons s'il y a égalité $\mathcal{V}_0$ = SF. Ce problème est d'ailleurs strictement équivalent au problème des quotients soulevé plus haut. On a en effet :

(2.8) <u>PROPOSITION</u>. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $\mathcal{V}_0$ = SF *;*

(b) tout espace de Banach $E \in \mathcal{V}_0$ *est semi-faible ;*

(c) tout quotient (séparé) d'un espace semi-faible est semi-faible.

(d) tout quotient (séparé) de c_0 *est isomorphe à un sous-espace de* c_0.

Preuve. - Les implications (a) $\Rightarrow$(b) $\Rightarrow$(d) et (a) $\Rightarrow$(c) $\Rightarrow$(d) sont évidentes. Montrons (d) $\Rightarrow$(a) : il résulte du théorème (1.4) de [6] et du fait classique que c_0 est isomorphe à son carré $(c_0)^2$, que $\mathcal{V}_0$ est formée des elc isomorphes aux sous-espaces d'un produit quelconque de quotients de c_0, de sorte que l'assertion (d) implique que $\mathcal{V}_0$ est formée des elc isomorphes à des sous-espaces des produits c_0^I, ce qui est justement (a).

<u>*Remarque*</u>. - Il semble que la conjecture $\mathcal{V}_0$ = SF devrait se résoudre par la négative, c'est-à-dire qu'il est assez probable qu'il existe effectivement un quotient de c_0 non isomorphe à un sous-espace de c_0. Toutefois un tel exemple est vraisemblablement très difficile à construire puisqu'il résulte de [13] que si E est un quotient de c_0, et si son dual E' est un espace de Banach approximant, alors E est isomorphe à un facteur direct de c_0, autrement dit il est même isomorphe à c_0 par ([16], p. 234) dès qu'il est de dimension infinie. Dans l'ignorance où nous sommes donc, nous ne retiendrons que la situation la plus défavorable (et la plus probable) SF $\subset \mathcal{V}_0$. Ce point peut d'ailleurs se préciser, en invoquant les théorèmes (1.1) et (4.1) de [6] selon :

(2.9) <u>PROPOSITION</u> :

(a) Tout espace $E \in \mathcal{V}_0$ *est un quotient (séparé) d'un espace semi-faible.*

(b) Tout espace normable $E \in \mathcal{V}_0$ *est un quotient (séparé) d'un espace normable semi-faible.*

D'ailleurs la relation entre SF et $\mathcal{V}_0$ permet de répondre à la question 3 de [6]. Puisque tout espace de Schwartz est semi-faible on a évidemment $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}_0$.

On peut maintenant donner quelques précisions supplémentaires concernant les espaces normés semi-faibles, améliorant (2.6) et (2.7) :

(2.10) THEOREME. - *Un espace de Banach semi-faible* E *de dimension infinie n'est jamais réflexif, ni même faiblement semi-complet. De plus son bidual* E'' *n'est pas séparable. En particulier aucun espace* ℓ^p, $1 \leq p \leq +\infty$, *n'est semi-faible.*

Preuve. - On peut utiliser le théorème (4.13) de [6], au moins pour la première partie de l'énoncé, valable pour un espace de Banach $E \in \mathcal{V}_0$. On peut aussi faire une démonstration élémentaire qui s'appuie sur un résultat classique de BANACH ([1], p. 192) relatif à la dimension linéaire : à savoir qu'un sous-espace fermé E de c_0, de dimension infinie, contient à son tour un sous-espace M isomorphe à c_0. Il suit de là que E'' contient M'', c'est-à-dire un sous-espace isomorphe à ℓ^∞, donc il n'est pas séparable. Alors E, qui est séparable ainsi que son dual fort E', ne peut être réflexif. Il ne peut être non plus faiblement semi-complet car dans ce cas, il serait aussi réflexif par le théorème (4.9) de [6] liant réflexivité et presque-réflexivité.

Le théorème précédent admet une généralisation intéressante au cas localement convexe, généralisation qui précise encore les relations existant entre espaces semi-faibles et espaces de Schwartz. Rappelons qu'un elc (séparé) E est dit infra-Schwartz avec [9], lorsque toute application linéaire continue de E dans un espace de Banach B est faiblement compacte, c'est-à-dire transforme un voisinage de zéro convenable de E en une partie relativement faiblement compacte de B. Désignons par IS la classe des espaces infra-Schwartz ; on obtient donc avec IS et SF deux généralisations des espaces de Schwartz. Le rapport avec (2.10) tient au fait qu'un espace de Banach E n'est infra-Schwartz que s'il est réflexif. On a alors :

(2.11) THEOREME. - *Tout espace* E *à la fois semi-faible et infra-Schwartz est un espace de Schwartz, autrement dit* $IS \cap SF = \mathcal{S}$.

Preuve. - Soit u : $E \to B$ une application linéaire continue de E dans un espace de Banach B. Il s'agit de prouver que u est compacte. Utilisant l'hypothèse et le lemme (2.3), il existe un voisinage de zéro disqué fermé V de E tel que l'image u(V) soit relativement faiblement compacte dans B et tel que l'espace de Banach $\hat{E}_V$ soit semi-faible, c'est-à-dire sous-espace de c_0. Or u se factorise à travers une application linéaire continue v : $\hat{E}_V \to B$ telle que $v(\hat{V}) = \overline{u(V)}$, en désignant par $\hat{V}$ la boule unité de $\hat{E}_V$. Mais alors v est une application faiblement compacte ; elle est donc compacte d'après ([8], corollaire du th. 10, p. 173), et ainsi u est aussi compacte.

On peut enfin terminer ce paragraphe consacré à l'espace c_0 en donnant deux nouvelles propriétés des espaces semi-faibles.

(2.12) PROPOSITION. - *Soit* E,F *deux espaces semi-faibles. Alors le produit tensoriel* $E \hat{\otimes} F$ *est semi-faible.*

Preuve. - Supposons d'abord E,F espaces de Banach semi-faibles, donc isomorphes à des sous-espaces fermés de c_0. On sait alors que $E \hat{\otimes} F$ est un sous-espace fermé de $c_0 \hat{\otimes} c_0$. Or $c_0 \hat{\otimes} c_0 = c_0(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ est lui-même isomorphe à c_0, et tout est dit. Dans le cas général, utilisant le lemme (2.3), on voit que E (resp. F) possède une base de voisinages de zéro disqués fermés V (resp. W) telle que les espaces de Banach $\hat{E}_V$ (resp. $\hat{F}_W$) soient semi-faibles. Comme $E \hat{\otimes} F = \varprojlim_{V,W} \hat{E}_V \hat{\otimes} \hat{F}_W$, on est ramené à ce qui précède, compte tenu de (1.5) et (1.6).

LA PROPRIETE DE BANACH-SAKS :

(2.13) DEFINITION. - *On dit qu'un espace normé* E *vérifie la propriété* (BS) *de Banach-Saks lorsque toute suite* $x_n \in E$ *qui converge faiblement vers zéro, possède une sous-suite* x_{n_k} *telle que*

$$\left\|\frac{1}{k}(x_{n_1}+x_{n_2}+\ldots+x_{n_k})\right\| \to 0$$

On a alors, avec SEMADENI ([21], p. 332) :

(2.14) THEOREME. - *L'espace* c_0 *vérifie la condition* (BS).

(2.15) COROLLAIRE. - *Tout espace normé semi-faible vérifie la condition* (BS).

Preuve. - Car il est immédiat que la condition (BS) reste vérifiée quand on passe d'un espace à un sous-espace.

Remarque. - La réciproque de (2.15) est fausse. On peut trouver dans BANACH ([1], page 200) la preuve que les espaces ℓ^p, $1<p<\infty$, vérifient la condition (BS). Ils ne sont pas, pour autant, semi-faibles. La propriété de Banach-Saks n'est donc pas en liaison très étroite avec la notion d'espace semi-faible. Elle nous sera toutefois très utile un peu plus loin.

3. - LES ESPACES C(K) SEMI-FAIBLES.

Une classe particulière d'espaces de Banach est formée des algèbres de fonctions continues C(K), pour K compact. Peut-on déterminer K pour que C(K) soit semi-faible ? Par exemple si $K=\bar{\mathbb{N}}$ est le compactifié d'Alexandrof de $\mathbb{N}$, alors

$C(K) = c = c_0 \oplus \mathbb{R}$ est bien semi-faible.

Désignons par $\mathcal{K}_s$ la classe des compacts K tels que C(K) soit semi-faible. Puisque C(K) et son dual fort $C(K)'_\beta$ sont séparables d'après (2.6), on voit facilement que K est nécessairement un compact dénombrable ou fini (donc métrisable). Ce point est important car il permet de rattacher la théorie des espaces semi-faibles à celle des compacts *clairsemés*, puisque tout compact dénombrable est clairsemé. De plus un théorème de MAZURKIEWICZ-SIERPIŃSKI (voir [21], page 155) assure que tout compact dénombrable est homéomorphe à un espace $[1,\Omega]$, où Ω est un ordinal dénombrable. On peut d'ailleurs préciser ce théorème de représentation ordinale en introduisant les ensembles dérivés d'un compact quelconque K. On appelle dérivé $K^{(1)}$ de K le sous-espace (compact) de K formé des points d'accumulation de K. On définit ensuite, pour tout ordinal α, le $\alpha^{\text{ème}}$ dérivé $K^{(\alpha)}$ par les formules :

$$\begin{cases} K^{(\alpha)} = (K^{(\alpha-1)})^{(1)} & \text{si } \alpha \text{ a un prédécesseur ;} \\ K^{(\alpha)} = \bigcap\limits_{\xi<\alpha} K^{(\xi)} & \text{si } \alpha \text{ est ordinal limite.} \end{cases}$$

Le théorème de CANTOR-BENDIXSON (voir par exemple [21], page 148) assure alors que K est un compact clairsemé (toute partie non vide $A \subset K$ possède un point isolé dans A), si et seulement s'il existe un ordinal α tel que le dérivé $K^{(\alpha+1)}$ soit vide, ce qui implique, si α est choisi minimal, que $K^{(\alpha)}$ est fini non vide. Posons donc Card $K^{(\alpha)} = m$, $m \geq 1$.

Il est facile de voir que pour toute application continue $u : K \to L$ on a $u(K^{(\xi)}) \subset L^{(\xi)}$ pour tout ξ, de sorte que les indices (α,m) précédents sont des invariants topologiques. Alors le théorème de MAZURKIEWICZ-SIERPIŃSKI se précise en :

(3.1) <u>THEOREME</u> (MAZURKIEWICZ-SIERPIŃSKI). - *Soit* K *un compact dénombrable et* (α,m) *ses indices caractéristiques. Alors* K *est homéomorphe à l'espace* $[1,\omega^\alpha m]$, *où* $\omega=\omega_0$ *est le premier ordinal infini.*

On pourra remarquer que α est nécessairement un ordinal dénombrable : $0 \leq \alpha < \omega_1$, ce qu'on aurait pu voir plus tôt en constatant que $\xi \leq \alpha$ implique $K^{(\xi+1)} \neq K^{(\xi)}$.

Cela étant, la caractérisation des compacts $K \in \mathcal{K}_s$ est aisée si l'on utilise des théorèmes profonds. En effet, si C(K) est semi-faible alors, d'après ([16], corollaire 1, page 234), C(K) est de dimension finie (et K est fini) ou bien C(K) est isomorphe à c_0 ; et dans ce dernier cas le théorème 1 de [3], page 59, donne la condition nécessaire et suffisante $\omega^\alpha m < \omega^\omega$, relative aux indices caractéristiques (α,m) de K, condition d'ailleurs équivalente à la seule condition $\alpha<\omega$, c'est-à-dire $\alpha=n$ fini.

Il nous paraît toutefois intéressant de retrouver ce résultat par des voies plus élémentaires. Désignons en effet par S (resp. S') l'ensemble des ordinaux $\Omega<\omega_1$ tels que $[1,\Omega]\in\mathcal{K}_s$ (resp. tels que $C[1,\Omega]$ vérifie la condition (BS) de Banach-Saks). D'après (2.15) on a $S\subset S'$.

Puisque $C[1,\Omega+1] = C[1,\Omega]\oplus\mathbb{R}$, alors $\Omega+1$ est élément de S (ou S') chaque fois que Ω l'est. De plus, pour tout $\Omega'\leqslant\Omega$, le compact $[1,\Omega']$ est un of de $[1,\Omega]$, ce qui implique que $C[1,\Omega']$ s'identifie à un sous-espace de $C[1,\Omega]$, et par suite Ω' est encore élément de S (ou S') chaque fois que Ω l'est. En résumé S et S' sont des sections commençantes ouvertes de l'intervalle $[1,\omega_1[$. Si s (resp. s') est la borne supérieure de S (resp. S'), alors $s\leqslant s'\leqslant\omega_1$ et le problème revient à déterminer s (et accessoirement s'). Or le résultat clé se rapporte justement à la condition (BS). On sait en effet, en suivant un théorème de SCHREIER (1930) (voir par exemple [21], page 332), que l'espace $C[1,\omega^\omega]$ ne vérifie pas la condition (BS). Alors $\omega^\omega\notin S'$ et $s\leqslant s'\leqslant\omega^\omega$.

Recherchons maintenant des résultats dans un autre sens.

(3.2) PROPOSITION. - *Pour tout ordinal* $\Omega\geqslant\omega$ *on a*

$$C[1,\Omega\omega] = (c_0\hat{\otimes}C[1,\Omega])\oplus\mathbb{R}$$

isomorphiquement, et même isométriquement si l'on place sur la somme directe la norme Sup.

Preuve. - Il suffit de voir que $C_0([1,\Omega\omega[)$ est isométrique au produit tensoriel $c_0\hat{\otimes}C[1,\Omega]$. Or pour chaque entier n, l'espace $[\Omega n+1,\Omega(n+1)]$ est un of de $[1,\Omega\omega]$, homéomorphe à $[1,\Omega]$ puisque $\Omega(n+1) = \Omega n + \Omega$ par définition. Il s'ensuit que toute $f\in C_0([1,\Omega\omega[)$ est complètement connue par la suite f_n de ses restrictions aux $[\Omega n+1,\Omega(n+1)]$ et cette suite (f_n) s'identifie donc à une suite $f_n\in C[1,\Omega]$ telle que $\|f_n\|\to 0$, puisque $f(\xi)\to 0$ quand $\xi\to\Omega\omega$. Comme $\|f\| = \mathrm{Sup}\|f_n\|$, on reconnaît en $C_0([1,\Omega\omega[)$ l'espace $c_0(C[1,\Omega])$, autrement dit, à une isométrie près, l'espace $c_0\hat{\otimes}C[1,\Omega]$, ce qui démontre tout.

(3.3) COROLLAIRE 1. - *Pour tout entier* $n\geqslant 1$ *on a* $\omega^n\in S$ *et* $C[1,\omega^n]$ *est isomorphe à* c_0.

Preuve. - On a déjà $C[1,\omega] = c = c_0\oplus\mathbb{R}\simeq c_0$ et alors $\omega\in S$. Raisonnons par récurrence en supposant $C[1,\omega^n]\simeq c_0$. Alors, d'après (3.2), on a $C[1,\omega^{n+1}]\simeq(c_0\hat{\otimes}c_0)\oplus\mathbb{R}$

soit $C(1,\omega^{n+1}) \simeq c_o \oplus \mathbb{R} = c \simeq c_o$ et tout est dit.

(3.4) COROLLAIRE 2. - *On a* $s = s' = \omega^{\omega}$.

Preuve. - En effet (3.3) donne $\omega^n \leq s$ pour tout entier n, donc $\omega^{\omega} \leq s \leq s' \leq \omega^{\omega}$.

En résumé on peut tout rassembler en un seul énoncé, débarrassé d'ailleurs des ordinaux.

(3.5) THEOREME. - *Soit* K *un espace compact non vide. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) C(K) *est semi-faible, c'est-à-dire* $K \in \mathcal{K}_s$;

(b) K *est dénombrable et* C(K) *vérifie la condition* (BS) *de Banach-Saks ;*

(c) C(K) *est de dimension finie ou bien est isomorphe à* c_o ;

(d) K *est dénombrable et possède un* $(n+1)^{\text{ème}}$ *dérivé* $K^{(n+1)}$ *vide,* n *fini ;*

(e) K *est homéomorphe à un espace* $(\overline{\mathbb{N}})^n \times (1,m)$, $n \geq 0$ *et* $m \geq 1$ *finis.*

Preuve. - (c) $\Rightarrow$ (a) $\Rightarrow$ (b) : Evident.

(b) $\Rightarrow$ (d) : D'après (3.1) K est homéomorphe à un espace $(1,\omega^{\alpha}m)$, $\alpha < \omega_1$ et m fini. On a $\omega^{\alpha}m < \omega^{\omega}$ d'après l'égalité $s' = \omega^{\omega}$ de (3.4), d'où $\alpha < \omega$ et $\alpha = n$ est fini.

(d) $\Rightarrow$ (c) : Si n est choisi minimal dans (d) alors K est homéomorphe à $(1,\omega^n m)$ pour $m \geq 1$ fini convenable (on exclut le cas $K = \emptyset$). Si $n=0$ alors K est fini et $C(K) = \mathbb{R}^m$ est bien de dimension finie. Si $n \geq 1$, alors $(1,\omega^n m)$ est somme topologique de m espaces homéomorphes à $(1,\omega^n)$ et l'on voit que C(K) est isomorphe à l'espace produit $(C(1,\omega^n))^m$, donc à l'espace c_o^m d'après (3.3). Mais comme c_o^2 est isomorphe à c_o, alors c_o^m est aussi isomorphe à c_o pour tout entier $m \geq 1$.

(d) $\Leftrightarrow$ (e) : Il suffit d'utiliser (3.1) et la remarque que les indices caractéristiques du compact $(\overline{\mathbb{N}})^n \times (1,m)$ sont justement n et m.

Pour terminer, donnons deux conséquences intéressantes relatives aux espaces complètement réguliers T.

(3.6) PROPOSITION. - *Soit* T *un espace complètement régulier. Pour que l'algèbre de Banach* $C^{\infty}(T)$ *des fonctions continues et bornées sur* T *soit semi-faible, il faut et il suffit que* T *soit un compact de la classe* $\mathcal{K}_s$.

Preuve. - Il suffit de prouver que T est compact. Or il est déjà métrisable car c'est un sous-espace de la boule unité faible du dual $C^{\infty}(T)'$ et $C^{\infty}(T)$ est séparable. Soit alors (x_n) une suite de points distincts de T : il suffit, d'après le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS, de montrer qu'elle a un point adhérent dans T. Raisonnons par l'absurde ; ce qui revient à dire que T contient une partie dénombrable discrète et fermée, donc un sous-espace fermé homéomorphe à $\mathbb{N}$. Alors $C^{\infty}(N) = \ell^{\infty}$ apparaît comme un quotient de $C^{\infty}(T)$, ce qui est absurde puisque $C^{\infty}(T)$ est séparable.

La seconde conséquence est relative à l'espace $C_c(T)$ de toutes les fonctions continues sur T, muni de la topologie de la convergence compacte.

(3.7) <u>THEOREME</u>. - *Pour que l'espace* $C_c(T)$ *soit semi-faible, il faut et il suffit que tous les compacts* K *de* T *appartiennent à la classe* $\mathcal{K}_s$.

Preuve. - La condition est évidemment suffisante car $C_c(T)$ est un sous-espace topologique de la limite projective $\varprojlim_K C(K)$, et cette dernière est semi-faible si les compacts K sont de la classe $\mathcal{K}_s$. La réciproque est due à R. HAYDON, dans une communication personnelle. Supposons $C_c(T)$ semi-faible et fixons un compact K de T. Le voisinage de zéro $V_K = \{f \ ; \|f\|_K \leq 1\}$ admet pour polaire V_K° un disque que l'on peut identifier à la boule unité B(K) de l'espace de Banach $M(K) = C(K)'$ des mesures de Radon sur K. L'hypothèse implique donc l'existence d'un autre compact L de T et d'une suite $\mu_n \in M(L)$ qui converge vers zéro faiblement dans M(L), tels que $B(K) \subset \Gamma(\mu_n)$. On tire déjà de là que la boule unité faible B(K) est métrisable et séparable, donc que K lui-même est dénombrable (et métrisable). A fortiori, pour les mêmes raisons, le compact L est dénombrable (et métrisable) ; mais la condition $B(K) \subset \Gamma(\mu_n)$ implique l'existence d'une constante $\lambda > 0$ telle que $K \subset \lambda B(L)$, d'où l'on tire facilement $K \subset L$. On peut donc appliquer le théorème de BORSUK-DUGUNDJI (voir par exemple [21], page 365), ce qui fournit l'existence d'un opérateur linéaire continu de prolongement $u : C(K) \to C(L)$ tel que $\|u\| = 1$. L'opérateur transposé $u' : M(L) \to M(K)$ est une *projection* linéaire continue de M(L) sur M(K), qui transforme la suite $\mu_n \in M(L)$ en une suite $\mu'_n = u'(\mu_n) \in M(K)$, convergeant vers zéro faiblement dans M(K). Or pour toute $\nu \in B(K)$ il existe une suite de scalaires (λ_n) telle que $\Sigma|\lambda_n| \leq 1$ et $\nu = \Sigma\lambda_n\mu_n$. On en tire $\nu = u'(\nu) = \Sigma\,\lambda_n\mu'_n$, ce qui signifie $B(K) \subset \Gamma(\mu'_n)$ et montre enfin que l'espace C(K) est semi-faible, d'où la conclusion.

-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] <u>S. BANACH</u>, *Théorie des opérations linéaires*, Varsovie, 1932.

[2] <u>J. BERRUYER</u> et <u>B. IVOL</u>, *Espaces de mesures et compactologies*, Publ. Dép. Math. Lyon, 9-1, 1972, p. 1-35.

BIBLIOGRAPHIE
(suite)

(3) C. BESSAGA et A. PELCZYŃSKI, *Spaces of continuous functions* (IV), Studia Math., 19, 1960, p. 53-62.

(4) N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, chap. III-V, Paris, 1955.

(5) H. BUCHWALTER, *Topologies et compactologies*, Publ. Dép. Math., Lyon, 6-2, 1969, p. 1-74.

(6) J. DIESTEL, S.A. MORRIS et S.A. SAXON, *Varieties of linear topological spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 172, 1972, p. 207-230.

(7) A. GROTHENDIECK, *Sur les espaces* (F) *et* (DF), Summa Brasil. Math., 3.6, 1954, p. 57-122.

(8) A. GROTHENDIECK, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type* C(K), Can. J. Math., 5, 1953, p. 129-173.

(9) H. HOGBÉ-NLEND, *Théorie des bornologies et applications*, Lecture Note n° 213, Springer, 1971.

(10) H. HOGBÉ-NLEND, *Ultra-nucléarité et bornologie à décroissance très rapide*, Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1970/71, exp. n° 21, 18 pages.

(11) H. JARCHOW, *Die Universalität des Raumes* c_0 *für die Klasse der Schwartz-Räume*, Math. Ann., à paraître en 1973.

(12) H. JARCHOW et J. SWART, *On Mackey convergence in locally convex spaces*, à paraître.

(13) W.B. JOHNSON et M. ZIPPIN, *On subspaces of quotients of* $(\Sigma G_n)_{\ell_p}$ *and* $(\Sigma G_n)_{c_0}$, Israel J. Math., 13, 1972, p. 311-316.

(14) T. KOMURA et Y. KOMURA, *Über die Einbettung der nuklearen Räume in* $(s)^A$, Math. Ann., 162, 1965-66, p. 284-286.

(15) G. KÖTHE, *Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume*, Math. Zeit., 51, 1948, p. 317-345.

(16) J. LINDENSTRAUSS et A. PELCZYŃSKI, *Contribution to the Theory of the Classical Banach Spaces*, J. Funct. Anal., 8, 1971, p. 225-249.

(17) A. MARTINEAU, *Sur une propriété universelle de l'espace des distributions de M. Schwartz*, Comptes rendus, 259, 1964, p. 3162.

BIBLIOGRAPHIE

(suite et fin)

(18) R.S. PHILLIPS, *On linear transformations,* Trans. Amer. Math. Soc., 48, 1940, p. 516-541.

(19) D. RANDTKE, *A simple example of a universal Schwartz space,* Proc. Amer. Math. Soc., 37-1, 1973, p. 185-188.

(20) M. ROME, *L'espace* $M^{\infty}(T)$, Publ. Dép. Math. Lyon, 9-1, 1972, p. 37-60.

(21) Z. SEMADENI, *Banach spaces of continuous functions, vol. I,* Varsovie, 1971.

H. BUCHWALTER
Département de Mathématiques
Université LYON I
43, boulevard du Onze Novembre
69621-VILLEURBANNE