

R. SEROUL

**Anneau de cohomologie entière et  $KU^*$ -théorie d'un produit  
symétrique d'une surface de Riemann**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1972, tome 9, fascicule 4  
, p. 27-66

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1972\\_\\_9\\_4\\_27\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1972__9_4_27_0)

© Université de Lyon, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ANNEAU DE COHOMOLOGIE ENTIERE ET  $KU^*$ -THEORIE  
D'UN PRODUIT SYMETRIQUE D'UNE SURFACE DE RIEMANN

par R. SEROUL

§ 0 - INTRODUCTION

Soient  $X$  un espace topologique et  $n \geq 1$  un entier. Sur l'espace  $X^n$ , le groupe symétrique  $S_n$  opère de manière naturelle par permutation des coordonnées. On pose  $X(n) = X^n/S_n$  et on dit que  $X(n)$  est le  $n$ -ième produit symétrique de  $X$ . Si  $X$  est une surface de Riemann de genre  $g \geq 0$ , A. MATTUCK [5] a prouvé que pour  $n > 2g-2$ , l'espace  $X(n)$  était muni d'une structure de fibré projectif complexe au-dessus de la jacobienne de  $X$ . Ce résultat et un résultat de A. GROTHENDIECK [2], qui affirme que l'on a un isomorphisme d'anneaux  $H^*(X(n); \mathbb{Q}) \cong H^*(X^n; \mathbb{Q})^{S_n}$ , ont permis à J.C. MACDONALD [4] de déterminer explicitement l'anneau de cohomologie  $H^*(X(n); \mathbb{Z})$ . Nous profitons de l'occasion pour signaler que la détermination de cet anneau de cohomologie nous semble incorrecte, faute d'avoir explicité des générateurs de  $H^*(X(n); \mathbb{Z})$  (prop. 7.1. p. 326 [4]).

Le but de ce travail consiste, pour une surface de Riemann  $X$ ,

- (i) à déterminer l'anneau de cohomologie  $H^*(X(n); \mathbb{Z})$  de manière élémentaire (i.e. sans avoir recours à la géométrie algébrique).
- (ii) à déterminer l'anneau  $KU^*X(n)$ .

Voici une brève description de la méthode employée. La donnée d'un point de base  $* \in X$  définit une injection canonique  $v_n: X(n) \rightarrow X(n+1)$  qui identifie  $X(n)$  à une sous-variété analytique fermée de codimension 1 de  $X(n+1)$ . Si l'on

pose  $X_0 = X - \{*\}$ , il est clair que l'on a  $X_0(n+1) = X(n+1) - X(n)$ . On désigne par  $w_n : X_0(n) \rightarrow X(n)$  l'injection canonique.

Cela dit, on dispose d'une suite exacte de Gysin (coefficients  $\mathbb{Z}$  omis) :

$$(E) \quad \dots \rightarrow H^i X(n) \xrightarrow{(v_n)_*} H^{i+2} X(n+1) \xrightarrow{w_{n+1}^*} H^{i+2} X_0(n+1) \rightarrow H^{i+1} X(n) \rightarrow \dots$$

Puisque  $X$  est une surface de Riemann de genre  $g \geq 0$ ,  $X_0$  se rétracte par déformation sur un bouquet de  $2g$  cercles. Soit  $T = S^1 \vee \dots \vee S^1$  ( $2g$  fois) ce bouquet de cercles. Le foncteur produit symétrique étant compatible avec les homotopies, il s'ensuit que  $X_0(n)$  et  $T(n)$  ont le même type d'homotopie. Afin de tirer un rendement maximum de la suite exacte de Gysin (E), nous explicitons entièrement l'anneau de cohomologie  $H^*(T(n), \mathbb{Z})$  [§ 3]. Ensuite, en utilisant la suite exacte (E) et une récurrence sur l'entier  $n$  [§ 4], nous retrouvons le résultat de J.C. MACDONALD concernant l'anneau  $H^*(X(n); \mathbb{Z})$ .

Cette méthode, convenablement transposée [§ 5], permet de prouver que l'anneau  $KU^* X(n)$  est isomorphe à l'anneau  $H^*(X(n); \mathbb{Z})$ .

Citons aussi le théorème curieux que voici [§ 2] : si  $X$  est une variété topologique de dimension  $> 0$  et si  $n \geq 2$  est un entier, alors  $X(n)$  est une variété topologique si et seulement si  $\dim X = 2$ , ce qui justifie à posteriori la considération de surfaces de Riemann.

Pour terminer, l'auteur du présent travail voudrait remercier

J.P. JOUANOLOU pour la gentillesse et la patience dont il a fait preuve.

§ 1 - ANNEAUX DE MACDONALD

1.0 - Généralités et conventions.

Dans ce paragraphe, la lettre  $g$  désigne un entier  $\geq 0$ , fixé une fois pour toutes. Considérons l'algèbre  $\mathbb{N}$ -graduée

$$E = \wedge (X_1, \dots, X_{2g}) [Y] ,$$

où  $X_1, \dots, X_{2g}$  sont de degré 1 et où  $Y$  est de degré 2 (si  $g = 0$ , on a simplement  $E = \mathbb{Z} [Y]$ ). Dans  $E$ , considérons l'idéal :

$$\mathcal{O}_1 = \sum_{i-j \neq \pm g} E \cdot X_i X_j + \sum_{1 \leq i \leq g} E \cdot (X_i X_{i+g} - Y)$$

et posons

$$A_1 = E / \mathcal{O}_1 .$$

Soit  $n$  un entier  $\geq 1$ . Le groupe symétrique  $S_n$  opère de manière naturelle sur l'anneau  $\bigotimes^n A_1$ . Dans son travail [4], MACDONALD donne une présentation explicite du sous-anneau  $A_n$  de  $(\bigotimes^n A_1)^{S_n}$  engendré par les éléments de degrés 1 et 2. Le but de ce paragraphe est de retrouver les principales propriétés des anneaux  $A_n$  à l'aide de leur seule présentation.

Introduisons quelques notations. Pour  $1 \leq i \leq g$ , on définit les éléments de  $E$

$$X'_i = X_{i+g} , \quad S_i = X_i X'_i , \quad Z_i = S_i - Y .$$

La lettre  $J$  désigne l'ensemble  $\{1, \dots, g\}$  si  $g > 0$  et l'ensemble vide si  $g = 0$ . Sauf mention explicite du contraire, les lettres  $A, B, C$  désignent trois parties deux à deux disjointes de l'ensemble  $J$ . Par contre, sauf mention explicite du contraire, les lettres  $U$  et  $V$  désignent deux parties non nécessairement disjointes de l'ensemble  $J$ . Si  $X$  est un ensemble fini, on désigne par  $n_X$  son cardinal.

Ainsi, avec les notations précédentes, on a :  $0 \leq n_A + n_B + n_C \leq g$   
 et  $0 \leq n_U + n_V \leq 2g$ .

De façon classique, on définit dans  $E$  les éléments

$$X_A = \begin{cases} 1 & \text{si } A = \emptyset . \\ X_{i_1} \dots X_{i_a} & \text{si } A = \{i_1 < \dots < i_a\} \end{cases}$$

et de manière analogue on définit les éléments  $X'_B, S_C, Z_C, X_U, X'_V$ , etc..

Avec ces notations, si  $i$  est un entier,  $1 \leq i \leq 2g$ , une base de  $\bigwedge^i (X_1, \dots, X_{2g})$  est constituée :

- soit par les éléments de la forme  $X_U X'_V$  avec  $n_U + n_V = i$ ,
- soit par les éléments de la forme  $X_A X'_B S_C$  avec  $n_A + n_B + 2n_C = i$ .

Soit  $n$  un entier  $\geq 1$ . Dans l'algèbre  $E$ , considérons l'idéal

$$\mathfrak{a}_n = \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\rangle \quad E. X_A X'_B Z_C Y^q$$

$n_A + n_B + 2n_C + q = n+1$

et appelons anneau de MACDONALD l'anneau

$$A_n = E / \mathfrak{a}_n.$$

Si le besoin s'en fait sentir, nous utiliserons la notation  $A_n(g)$  afin d'exhiber l'entier  $g \geq 0$ . Il est clair que l'anneau de MACDONALD  $A_n$  est un anneau  $\mathbb{N}$ -gradué, unitaire, commutatif (au sens des anneaux gradués!) et qu'il est engendré en tant qu'anneau par les classes des éléments  $X_1, \dots, X_{2g}$  et  $Y$  de  $E$ . Afin de ne pas surcharger les notations, nous désignerons par les lettres  $x_1, \dots, x_{2g}$  et  $y$  ces classes.

Si  $A$  est un anneau  $\mathbb{N}$ -gradué, on appelle anneau tronqué en degrés  $\geq n$  déduit de  $A$  l'anneau

$$A^{\geq n} = A / \text{idéal des termes de degré } > n.$$

Il est facile de s'assurer que dans l'algèbre  $E$  on a l'égalité suivante entre idéaux :

$$\mathcal{O}_n + (y) = (x_U x'_V : n_U + n_V = n+1) + (y).$$

Par conséquent, on a des isomorphismes d'anneaux gradués :

$$1.0.1. - E/\mathcal{O}_n + (y) \cong \wedge(X_1, \dots, X_{2g}) / (X_U X'_V : n_U + n_V = n+1) \cong \wedge^{<n}(X_1, \dots, X_{2g}).$$

1.1. - PROPOSITION 1.1.1. (MACDONALD) - Soit  $i$  un entier. Pour  $i=2n$ , on a un

isomorphisme  $A_n^{2n} \cong \mathbb{Z}$ . D'une manière plus précise, l'élément  $y^n$  est un générateur de  $A_n^{2n}$  et si  $x_A x'_B s_C y^q$  est de degré  $2n$ , on a  $x_A x'_B s_C y^q = 0$  si  $A \cup B \neq \emptyset$ , et  $s_C y^q = y^n$ .

Preuve. Posons pour simplifier  $m = x_A x'_B s_C y^q$ . Prouvons que  $y^n$  engendre  $A_n^{2n}$ .

Comme on peut écrire  $m = \pm x_{A \cup C} x'_B y^q$ , on a  $m = 0$  dans  $A_n$  dès que

$n_{A \cup C} + n_B + q > n$ . Si  $m$  est de degré  $2n$ , on a  $n_A + n_B + 2n_C + 2q = 2n$ . On en tire

$n_{A \cup C} + n_B + q = n + \frac{1}{2}(n_A + n_B)$ , ce qui prouve que  $m = 0$  si  $A \neq \emptyset$  ou si  $B \neq \emptyset$ .

Supposons maintenant  $A = B = \emptyset$  et  $m$  de degré  $2n$  et soit  $2n_C + 2q = 2n$ . Si  $n_C > 0$ ,

on a  $s_C y^q = 0$  dans  $A_n$ , puisque  $2n_C + q = n + n_C > n$ . De là, on déduit facilement par une récurrence sur l'entier  $n_C$  que l'on a l'égalité  $s_C y^q = y^n$  dans  $A_n^{2n}$ .

Prouvons maintenant que l'on a un isomorphisme  $A_n^{2n} \cong \mathbb{Z}$ . Pour cela,

on remarque que l'on peut considérer l'anneau  $\mathbb{Z}[y]$  comme un sous-anneau de  $E$ .

En outre, il est clair que dans  $E$ , on a l'égalité  $\mathbb{Z} \cdot y^{n+1} = \mathcal{O}_n \cap \mathbb{Z}[y]$ .

L'injection canonique  $\mathbb{Z}[y] \longrightarrow E$  induit, par passage au quotient, un monomorphisme  $\mathbb{Z}[y] / y^{n+1} \longrightarrow A_n$  qui est un isomorphisme en degré  $2n$ .

Prouvons enfin que l'on a  $A_n^i = 0$  en degrés  $i > 2n$ . Supposons  $m$  de degré

$> 2n$ , i.e.  $n_A + n_B + 2n_C + 2q > 2n$ . En vertu de ce qui précède, on a  $m = 0$  si  $A \neq \emptyset$

ou si  $B \neq \emptyset$ . Il reste à envisager le cas  $m = s_C y^q$  avec  $2n_C + 2q > 2n$ . Toujours en

vertu de ce qui précède, on a  $m = y^{q+n_C}$ , d'où  $m = 0$  puisque dans  $A_n$ , on a

$$y^{n+1} = 0.$$

COROLLAIRE. - Dans l'anneau  $A_n$ , si  $z_U s_V y^q$  est de degré  $2n$ , on a

$$z_U s_V y^q = (-1)^{n_U} i(U,V) Y^n,$$

l'entier  $i(U,V)$  ("indicateur d'inclusion") étant défini de la manière suivante :

$$i(U,V) = \begin{cases} 0 & \text{si } U \not\subset V, \\ 1 & \text{si } U \subset V. \end{cases}$$

*Preuve.* On la fait par récurrence sur le cardinal de  $U$ . Si  $n_U = 0$ , il s'agit de 1.1.1. Ensuite, si  $k$  est un entier,  $1 \leq k \leq g$ , on peut écrire

$$z_k z_U s_V y^q = (s_k - y) z_U s_V y^q = s_k z_U s_V y^q - z_U s_V y^{q+1}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, cela s'écrit encore :

$$(-1)^{n_U} i(U, V \cup k) (1 - i(k, V)) y^n - (-1)^{n_U} i(U, V) y^n.$$

Le corollaire résulte alors de l'égalité :

$$i(U, V \cup k) (1 - i(k, V)) - i(U, V) = -i(U \cup k, V).$$

L'inclusion  $\mathcal{A}_{n+1} \subset \mathcal{A}_n$  dans  $E$ , donne naissance, pour  $n \geq 1$ , à une suite exacte d'anneaux gradués

$$1.1.3 \quad 0 \longrightarrow \mathcal{A}_n / \mathcal{A}_{n+1} \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{v^*} A_n \longrightarrow 0$$

où l'homomorphisme  $v^*$  est déterminé (avec des abus évidents de notation) par les égalités.

$$v^*(x_i) = x_i \quad 1 \leq i \leq 2g \quad \text{et} \quad v^*(y) = y.$$

Nous avons besoin d'informations concernant le noyau de  $v^*$ . Comme on a l'inclusion  $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$  dans l'algèbre  $E$ , le produit dans  $E$  induit un accouplement pour tout entier  $i$

$$1.1.4. \quad (\mathcal{A}_n / \mathcal{A}_{n+1})^{2(n+1)-i} \otimes_{\mathbb{Z}} (E / \mathcal{A}_{n+1} + (y))^i \longrightarrow (E / \mathcal{A}_{n+1})^{2(n+1)}.$$

Compte tenu des isomorphismes 1.0.1 et 1.1.1

$$E/\mathcal{O}_{n+1}^+(y) \cong \bigwedge^{\leq n+1} (X_1, \dots, X_{2g}).$$

$(E/\mathcal{O}_{n+1})^{2(n+1)} \cong \mathbb{Z}$ , on voit que l'accouplement 1.1.4 définit des homomorphismes de groupes abéliens

$$1.1.5. \quad (\mathcal{O}_n/\mathcal{O}_{n+1})^{2(n+1)-i} \longrightarrow \text{Hom} \left( \bigwedge^{\leq n+1} (X_1, \dots, X_{2g})^i, \mathbb{Z} \right).$$

PROPOSITION. 1.1.6. - Pour tout entier  $0 \leq i \leq n+1$ , le groupe abélien  $(\mathcal{O}_n/\mathcal{O}_{n+1})^{2(n+1)-i}$  est de rang  $\geq \binom{2g}{i}$ .

*Preuve.* Pour prouver l'inégalité  $\text{rang}(\mathcal{O}_n/\mathcal{O}_{n+1})^{2(n+1)-i} \geq \binom{2g}{i}$  pour  $0 \leq i \leq n+1$ , il suffit de prouver que les homomorphismes 1.1.5 sont surjectifs. Tout d'abord considérons les éléments de E.

$$1.1.6.1. \quad X_A X_B' S_C \text{ avec } n_A + n_B + 2n_C = i.$$

Il est clair que les classes des éléments 1.1.6.1. forment une base de  $(E/\mathcal{O}_{n+1}^+(Y))^i \cong \bigwedge^i (X_1, \dots, X_2)$ . Considérons alors les éléments de E.

$$1.1.6.2. \quad X_B X_A' Z_C Y^{n+1-i} \text{ avec } n_A + n_B + 2n_C = i.$$

Les égalités  $n_A + n_B + 2n_C + (n+1 - i) = n+1$  et  $n_A + n_B + 2n_C + 2(n+1-i) = 2(n+1)-i$  prouvent que les éléments 1.1.6.2. définissent des éléments de  $(\mathcal{O}_n/\mathcal{O}_{n+1})^{2(n+1)-i}$ .

La surjectivité des homomorphismes 1.1.5 résulte des congruences mod  $\mathcal{O}_{n+1}$ .

$$1.1.6.3. \quad X_B X_A' Z_C Y^{n+1-i} \cdot X_A X_B' S_C \equiv \begin{cases} \mp Y^{n+1} & \text{si } (A, B, C) = (A', B', C'), \\ 0 & \text{si } (A, B, C) \neq (A', B', C'). \end{cases}$$

Les conditions sur les indices étant évidemment  $n_A + n_B + 2n_C = n_{A'} + n_{B'} + 2n_{C'} = i$ . (moralement, les classes des éléments 1.1.6.2 jouent le rôle d'une base duale pour la base formée des classes des éléments 1.1.6.1). Prouvons les congruences 1.1.6.3. Pour commencer, si  $(A, B, C) = (A', B', C')$ , on déduit de 1.1.2 que l'on a

$$X_B X_A' Y^{n+1-i} \cdot X_A X_B' S_C = \pm Z_C S_A B C Y^{n+1-i} \equiv \pm Y^{n+1} \pmod{\mathcal{O}_{n+1}}.$$

Si  $(A, B) \neq (A', B')$ , on voit facilement à partir de 1.1.1 que la congruence 1.1.6.3. est vérifiée. Enfin, si  $(A, B) = (A', B')$ , toujours en vertu de 1.1.2, on a  $X_B X_A' Z_C Y^{n+1-i} \cdot X_A X_B' S_C' \equiv \pm i(C, A \cup B \cup C') Y^{n+1} \pmod{\mathcal{O}_{n+1}}$ .

Si  $C \neq C'$ , on a nécessairement  $i(C, A \cup B \cup C') = 0$ , d'où le résultat.

1.2.

PROPOSITION 1.2.1 - Il existe un unique morphisme de groupes abéliens gradués, de degré = +2

$$V_* : A_n \longrightarrow A_{n+1}.$$

(i)  $V_*(V^*a) = V_*(1).a$  pour tout  $a \in A_{n+1}$  ("formule de projection").

(ii)  $V_*(1) = y$ ,

En outre, l'image de  $V_*$  est un idéal de  $A_{n+1}$  et on a un isomorphisme d'anneaux gradués.

$$A_{n+1}/\text{im } V_* \cong \bigwedge^{\leq n+1} (X_1, \dots, X_{2g}).$$

Preuve. La condition  $V_*(V^*a) = a y$  pour  $a \in A_{n+1}$  prouve l'unicité de  $v_*$  car on sait que  $v^*$  est surjectif. L'inclusion  $y \mathcal{O}_n \subset \mathcal{O}_{n+1}$  dans  $E$  prouve que dans l'anneau  $A_{n+1}$  on a  $y \cdot \text{Ker } V^* = 0$ , i.e. que l'égalité  $v^*a = v^*a'$  implique l'égalité  $ay = a'y$ . Cela prouve donc l'existence de  $V_*$ . Il est clair que l'image de  $V_*$  est l'idéal principal  $(y)$  de  $A_{n+1}$ . Par conséquent on a des isomorphismes d'anneaux gradués

$$A_{n+1}/\text{im } V_* \cong E/\mathcal{O}_{n+1} + (Y) \cong \bigwedge^{\leq n+1} (X_1, \dots, X_{2g}).$$

PROPOSITION 1.2.2. - Soit  $n$  un entier  $\geq 1$ . Alors :

- (i) l'homomorphisme  $v_* : A_n \rightarrow A_{n+1}$  est un monomorphisme.  
(ii) l'anneau  $A_n$  est sans torsion, et pour tout entier  $0 \leq i \leq n$  on a

$$\text{rg } A_n^i = \text{rg } A_n^{2n-i} = \binom{2g}{i} + \binom{2g}{i-2} + \dots$$

(on rappelle que  $\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{i!}$  est le coefficient du binôme de Newton).

*Preuve.* L'assertion (ii) est vraie pour l'entier  $n=1$ . Supposons l'assertion (ii) vraie pour l'entier  $n$ . Nous allons montrer que cela implique l'assertion (i) pour l'entier  $n$  et l'assertion (ii) pour l'entier  $n+1$ .

Désignons par

$$1.2.2.1. \quad w^* : A_{n+1} \longrightarrow \langle \wedge^{n+1}(X_1, \dots, X_{2g}) \rangle$$

l'épimorphisme d'anneaux gradués déduit de 1.2.1. Soit  $K$  le noyau de  $w^*$ . Pour tout entier  $i$ , d'après 1.2.1. nous pouvons écrire une suite exacte

$$1.2.2.2. \quad 0 \rightarrow K^{i-2} \rightarrow A_n^{i-2} \xrightarrow{v_*} A_{n+1}^i \rightarrow (\langle \wedge^{n+1}(X_1, \dots, X_{2g}) \rangle)^i \rightarrow 0$$

d'où l'égalité

$$\text{rg } K^{i-2} = \text{rg } A_n^{i-2} + \text{rg}(\langle \wedge^{n+1} \rangle)^i - \text{rg } A_{n+1}^i .$$

Compte tenu de 1.1.3 cela s'écrit encore

$$1.2.2.3. \quad \text{rg } K^{i-2} = \text{rg } A_n^{i-2} - \text{rg } A_n^i + \text{rg}(\langle \wedge^{n+1} \rangle)^i - \text{rg}(\mathcal{U}_n / \mathcal{U}_{n+1})^i .$$

Par hypothèse de récurrence, le rang de  $A_n$  est connu en tous degrés.

La proposition 1.1.6. fournit une minoration du rang de  $(\mathcal{U}_n / \mathcal{U}_{n+1})^i$  ; utilisant 1.2.2.3., on voit que  $\text{rg } K^{i-2} \leq 0$  quel que soit l'entier  $i$ .

Par conséquent, puis  $A_n$  est supposé libre, cela prouve que l'on a  $K = 0$ ,

i.e.  $v^*$  est un monomorphisme. Sachant maintenant que  $K = 0$ , l'assertion (ii) relative à l'entier  $n+1$  est une conséquence immédiate de 1.2.2.2.

En résumé, nous avons le

THEOREME . 1.2.3. - Pour tout entier  $n \geq 1$  et tout entier  $g \geq 0$ ,  
l'anneau de MACDONALD  $A_n(g)$  est sans torsion. En outre, si  
 $i$  est un entier, on a

$$\text{rg } A_n^i = \text{rg } A_n^{2n-i} = \binom{2g}{i} + \binom{2g}{i-2} + \dots \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n$$

et  $A_n^i = 0$  pour  $i > 2n$ .

1.3 Remarque. Soient  $n \geq 1$  et  $g \geq 0$  deux entiers et soit  $A_n(g)$   
l'anneau de MACDONALD associé à ces entiers. Supposons donnés :

(1.3.1) un anneau  $A$ ,  $\mathbb{N}$ -gradués, commutatif et unitaire.

(1.3.2) un épimorphisme d'anneaux gradués

$$v^* : A \longrightarrow A_n(g)$$

(1.3.3) un monomorphisme de groupes abéliens gradués, de degré  $+2$

$$v_* : A_n(g) \longrightarrow A$$

tel que l'on ait une "formule de projection"

$$v_* (v^* a) = v_* (1) \cdot a$$

pour tout  $a \in A$ . On suppose aussi que l'on a, dans l'anneau  
 $A_n(g)$ , l'égalité

$$v^* v_* (1) = y.$$

(1.3.4) un isomorphisme d'anneaux gradués

$$A/\text{im } v_* \cong \langle \wedge^{n+1} (X_1, \dots, X_{2g}) \rangle.$$

où les éléments  $X_1, \dots, X_{2g}$  sont de degré 1.

On peut se demander si, dans ces conditions, l'anneau  $A$  est iso-  
morphe à l'anneau  $A_{n+1}(g)$  de MACDONALD. (On disposerait ainsi d'une  
définition récurrente des anneaux de MACDONALD). Malheureusement, la  
réponse est mitigée, ainsi que le prouve la

PROPOSITION 1.3.5. - Soient  $n \geq 1$  et  $g \geq 0$  deux entiers et  $(A, v^*, v_*)$ ,  
satisfaisant aux conditions 1.3.1 à 1.3.4.

(i) Si  $n \geq 2g-1$ , l'anneau  $A$  est isomorphe à l'anneau de MACDONALD  
 $A_{n+1}(g)$ .

(ii) Si  $n = 1$  et  $g = 2$  pour tout entier  $k \in \mathbb{Z}$ , considérons, dans l'algèbre  $E$ , l'idéal

$$\mathcal{O}(k) = \sum_{i \neq j} E.X_i.(S_j - kY) + \sum_{i \neq j} E.X_i'(S_j - kY) + \sum_{n_A + n_B + 2n_C = 2} E.X_A X_B' Z_C Y.$$

Alors l'anneau  $A$  est isomorphe à l'un des anneaux  $E/\mathcal{O}(k)$ .

Réciproquement, pour tout entier  $k$ , il existe  $v^*$  et  $v_*$  tels que  $(E/\mathcal{O}(k), v^*, v_*)$  vérifient les conditions 1.3.1 à 1.3.4.

*Preuve.* - Les conditions 1.3.3 et 1.3.4 permettent d'écrire une suite exacte d'objets  $\mathbb{N}$ -gradués

$$1.3.5.1 \quad 0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{v_*} A \xrightarrow{w^*} \wedge^{n+1}(X_1, \dots, X_{2g}) \longrightarrow 0$$

où  $v_*$  est un morphisme de groupes abéliens, de degré  $+2$ , et où  $w^*$  est un morphisme d'anneaux gradués. La considération de 1.3.5.1 prouve aussitôt que

1.3.5.2 l'anneau  $A$  est sans torsion et pour tout entier  $i$  on a  $\text{rg}A^i = \text{rg}A_{n+1}^i(g)$ .

Puisque le groupe  $A^1$  est libre de rang  $2g$ , la condition 1.3.2 prouve que  $v^* : A^1 \rightarrow A_n^1$  est un isomorphisme. Par conséquent, cela permet de définir une base de  $A^1$ , notée  $x_1, \dots, x_{2g}$  par abus de notation, telle que  $v^* x_i = x_i \quad 1 \leq i \leq 2g$ . De même, en degré 1,  $w^* : A^1 \rightarrow \wedge^1(X_1, \dots, X_{2g})$  est un isomorphisme. Cela permet de supposer que l'on a  $w^* x_i = X_i \quad 1 \leq i \leq 2g$ . Enfin, avec un abus de notation, posons  $y = v_*(1)$  dans  $A^2$ . D'après 1.3.3, on a donc  $v^*y = y$ . Prouvons maintenant que

1.3.5.3 Les éléments  $x_1, \dots, x_{2g}$  et  $y$  engendrent  $A$  en tant qu'anneau.

Pour cela, soit  $a \in A$ . On peut écrire  $w^*a = P(x_1, \dots, x_{2g})$  où  $P$  est un polynôme à coefficients entiers. En vertu de 1.3.5.1, on a alors

$a = P(x_1, \dots, x_{2g}) + v_*(Q(x_1, \dots, x_{2g}, y))$  où  $Q$  est aussi un polynôme à coefficients entiers. Les égalités dans  $A_n \quad v^* x_i = x_i$  et  $v^* y = y$  ainsi que la formule de projection, prouvent alors aussitôt que l'on a dans l'anneau  $A$

$$a = P(x_1, \dots, x_{2g}) + v_*(1) \cdot Q(x_1, \dots, x_{2g}, y) = P(x_1, \dots, x_{2g}) + yQ(x_1, \dots, x_{2g}, y).$$

Définissons un homomorphisme d'anneaux gradués

$$f : E = \Lambda(X_1, \dots, X_{2g})[Y] \longrightarrow A$$

en posant  $fX_i = x_i$   $1 \leq i \leq 2g$  et  $fy = y$ . D'après 1.3.5.3,  $f$  est un épimorphisme. Supposons avoir prouvé que  $f$  s'annule sur l'idéal  $\mathcal{O}_{n+1}$  de  $E$ . Par passage au quotient,  $f$  induit un épimorphisme d'anneaux  $A_{n+1}(g) \longrightarrow A$ . Alors 1.3.5.2 prouve que cet épimorphisme est un isomorphisme.

Si  $q > 0$  est un entier, on peut écrire dans l'anneau  $A$

$$x_A x'_B z_C y^q = v_* (x_A x'_B z_C y^{q-1}).$$
 Par conséquent

1.3.5.4 dans l'anneau  $A$  on a  $x_A x'_B z_C y^q = 0$  dès que  $n_A + n_B + 2n_C + q = n+2$  et  $q > 0$ .

Supposons  $n \geq 2g-1$  et prouvons que l'idéal  $\mathcal{O}_{n+1}$  de  $E$  est alors engendré par les éléments  $x_A x'_B z_C y^q$  tels que  $n_A + n_B + 2n_C + q = n+2$  et  $q > 0$ .

Compte tenu de 1.3.5.4, nous aurons ainsi prouvé l'assertion (i). Nous avons  $n_A + n_B + n_C \leq g$ , ce qui implique  $n+2 \leq g + n_C + q \leq 2g+q$ . Comme  $n \geq 2g-1$ , on en déduit aussitôt que  $q > 0$ .

Avant de passer à la démonstration de l'assertion (ii), prouvons tout d'abord le résultat suivant :

1.3.5.5 pour tout entier  $0 \leq i \leq n+1$ , la multiplication par  $y^i$  dans l'anneau  $A$  réalise un isomorphisme de  $A^{n+1-i}$  sur  $A^{n+1+i}$ .

Ce résultat se démontre par récurrence sur l'entier  $n$ . Soit  $a \in A^{n+1+i}$ . Si on suppose  $i \geq 1$ , on a un isomorphisme  $v_* : A_n^{n+i-1} \longrightarrow A^{n+1+i}$  en vertu de 1.3.5.1. Sachant d'autre part que la multiplication par  $y^{i-1}$  dans  $A_n$  réalise un isomorphisme de  $A_n^{n-i+1}$  sur  $A_n^{n+i-1}$ , on voit qu'on peut écrire  $a = v_* (y^{i-1} \cdot t)$  avec un  $t \in A_n$  convenable. En utilisant la formule de projection, on obtient  $a = y^i \cdot a'$  avec  $a' \in A$  convenable. Par conséquent, la multiplication par  $y^i$  dans  $A$  induit un épimorphisme de  $A^{n+1-i}$  sur  $A^{n+1+i}$ . A cause de 1.3.5.2, cet épimorphisme est un isomorphisme.

Prouvons l'assertion (ii) : nous supposons désormais  $n = 1$  et  $g = 2$ . Une base de  $A^1$  est formée par les  $x_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) et une base de  $A^2$  est formée par les  $x_i x_j$  ( $1 \leq i < j \leq 4$ ) et  $y$ . En vertu de 1.3.5.5, on voit qu'une base de  $A^3$  est formée par les  $x_i y$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) et que  $y^2$  est un générateur de  $A^4$ .

Nous pouvons alors écrire

$$s_1 x_2 = n_1 x_1^b + n_2 x_2^b + n_1' x_1'^b + n_2' x_2'^b.$$

En multipliant cette égalité par  $x_i$  ( $1 < i \leq 4$ ), et en tenant compte des égalités  $s_i y = y^2$   $i = 1, 2$  et  $x_A x_B' y = 0$  si  $n_A + n_B = 2$  dues à 1.3.5.4, il est facile de voir que l'on a nécessairement  $s_1 x_2 = k x_2 y$  et  $s_1 s_2 = k y^2$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . De même, on s'assure que l'on a nécessairement les égalités :

$$s_1 x_2' = k x_2' y \quad s_2 x_1 = k x_1 y \quad s_2 x_1' = k x_1' y.$$

Par conséquent, ces égalités, ainsi que les égalités dues à 1.3.5.4 prouvent que l'on a un épimorphisme d'anneaux gradués  $f : E/\mathcal{O}(k) \rightarrow A$  déterminé par  $f x_i = x_i$  et  $f y = y$ . Nous allons maintenant prouver que l'anneau  $E/\mathcal{O}(k)$  étant donné, il existe  $v^*$  et  $v_*$  tels que les conditions 1.3.1 et 1.3.4 soient satisfaites. Cela prouvera aussitôt que l'émorphisme  $f$  est un isomorphisme. Traduits en termes d'idéaux de  $E$ , les propriétés 1.3.2 à 1.3.4 se réénoncent ainsi :

1.3.2' on a une inclusion  $\mathcal{O}(k) \subset \mathcal{O}_1$ .

1.3.3' la condition  $a.Y \in \mathcal{O}(k)$  implique  $a \in \mathcal{O}_1$ .

1.3.4' on a l'égalité  $\mathcal{O}(k) + (Y) = (X_U X_V' : n_U + n_V = 3) + (Y)$ .

Les propriétés 1.3.2' et 1.3.4' se vérifient facilement. Reste à prouver 1.3.3'. Comme on a  $\mathcal{O}_1^i = E^i$  pour  $i \geq 3$ , on voit qu'on peut supposer  $a$  de degré 1 ou 2 seulement. Si  $a$  est de degré 1, il est facile de s'assurer que la condition  $aY \in \mathcal{O}(k)$  implique  $a = 0$ . Si  $a$  est de degré 2, puisque  $\mathcal{O}_1$  contient tous les termes  $X_A X_B'$  de degré 2, on voit que l'on peut se borner à examiner le cas où  $a = n_1 S_1 + n_2 S_2 + nY$ . On a alors  $aY = n_1(S_1 - Y)Y + n_2(S_2 - Y)Y + (n + n_1 + n_2)Y^2 = n_1 Z_1 Y + n_2 Z_2 Y + (n + n_1 + n_2)Y^2$ . Comme  $Z_1 Y$  et  $Z_2 Y$  sont dans  $\mathcal{O}(k)$ , la relation  $aY \in \mathcal{O}(k)$  exige  $(n + n_1 + n_2)Y^2 \in \mathcal{O}(k)$ . On voit facilement que cela exige  $n + n_1 + n_2 = 0$ , d'où  $a = n_1 Z_1 + n_2 Z_2 \in \mathcal{O}_1$ . Terminons cette démonstration par deux remarques.

Tout d'abord, l'anneau  $A_2(2)$  de MACDONALD est l'anneau  $E/\mathcal{O}(1)$ .  
 Ensuite, considérons l'homomorphisme  $p : \mathbb{Z}(E/\mathcal{O}(k))^1 \rightarrow (E/\mathcal{O}(k))^3$   
 induit par le produit dans l'anneau  $E/\mathcal{O}(k)$ . Par définition même  
 l'image de  $p$  est d'indice  $k^4$  dans  $(E/\mathcal{O}(k))^3 \cong \mathbb{Z}^4$ . Cela prouve que pour  
 $0 \leq h < k$ , les anneaux  $E/\mathcal{O}(h)$  et  $E/\mathcal{O}(k)$  ne sont pas isomorphes.

§ 2. PRODUITS SYMETRIQUES.

2.0. - Définitions et notations.

Soient  $X$  un espace topologique et  $n \geq 1$  un entier. Sur l'espace  $X^n$   
 le groupe symétrique  $S_n$  opère de manière naturelle en permutant les  
 coordonnées. L'espace quotient

$$X(n) = X^n/S_n$$

s'appelle  $n$ -ième produit symétrique de l'espace  $X$ . On note

$$q_n : X^n \longrightarrow X(n)$$

la projection canonique. Ainsi,  $X(1) = X$  et  $q_1 = \text{id}$ . Par convention, on  
 pose

$$X^0 = X(0) = \text{un point} \quad q_0 = \text{id}.$$

Se donner un point de  $X(n)$  revient à se donner  $n$  points de  $X$ , sans  
 considérations d'ordre. Plus précisément, on voit, en regroupant les  
 points confondus, que la donnée d'un point de  $X(n)$  consiste en la donnée :

- de  $r$  points de  $X$  ;  $x_1, \dots, x_r$  deux à deux distincts
- d'entiers  $k_i \geq 1$  ("l'ordre de multiplicité de  $x_i$ ") tels que  
 $k_1 + \dots + k_r = n$ .

De façon abrégée, nous noterons  $\{x_1, \dots, x_n\}$  un point de  $X(n)$ , ou  
 bien  $\{x_1(k_1), \dots, x_r(k_r)\}$  s'il est besoin de plus de précision.

Supposons maintenant  $X$  muni d'un point base, noté  $*$ , et  
 posons

$$X_0 = X \text{ \underline{a} point base.}$$

La donnée d'un point base dans  $X$  permet de définir le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 X^n & \xrightarrow{U_n} & X^{n+1} \\
 \downarrow q_n & & \downarrow q_{n+1} \\
 X(n) & \xrightarrow{V_n} & X(n+1)
 \end{array}$$

où  $u_n(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, *)$  et  $V_n\{X_1, \dots, X_n\} = \{X_1, \dots, X_n, *\}$ .

L'injection (canonique)  $V_n : X(n) \hookrightarrow X(n+1)$  permet d'identifier  $X(n)$  à un sous espace fermé de  $X(n+1)$ . Il est alors clair que l'on a

$$X_o(n+1) = X(n+1) \cup X(n)$$

On désignera par

$$w_n : X_o(n) \hookrightarrow X(n)$$

l'injection canonique.

Sauf mention explicite du contraire, les groupes de cohomologie  $H^*X$  désignent les groupes de cohomologie entière  $H^*(X; \mathbb{Z})$  de l'espace  $X$ . Il est clair que l'homomorphisme image réciproque  $q_n^*$  en cohomologie définit un homomorphisme, encore noté  $q_n^*$  par abus de notation, tel que

$$q_n^* : H^*(X(n); \mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(X^n; \mathbb{Z})^{S_n}.$$

2.1 - Quelques résultats généraux sur la cohomologie d'un produit symétrique.

Commençons par rappeler un résultat qui est un corollaire immédiat d'un théorème de GROTHENDIECK [2] (voir aussi [4]).

THEOREME 2.1.1. (GROTHENDIECK). Soit  $X$  un espace séparé. Pour tout entier  $n \geq 2$ , l'homomorphisme image réciproque

$$q_n^* : H^*(X(n); \mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(X^n; \mathbb{Q})^{S_n}$$

est un isomorphisme en cohomologie rationnelle;

Ce théorème a permis à MACDONALD [3] de déterminer explicitement les nombres de Betti de  $X(n)$ , connaissant ceux de  $X$ . Son résultat s'énonce ainsi :

THEOREME 2.1.2 (MACDONALD) - Soit  $X$  un espace séparé tel que  $H^*(X, \mathbb{Q})$  soit de dimension finie et soient  $b_i$ ,  $i \geq 0$ , ses nombres de Betti. Alors, le polynôme de Poincaré  $P(X(n), x)$  de l'espace  $X(n)$  est le coefficient de  $t^n$  dans le développement en série entière de la fraction rationnelle

$$\frac{(1+xt)^{b_1} (1+x^3t)^{b_3} \dots}{(1-t)^{b_0} (1-x^2t)^{b_2} \dots}$$

2.2. - Quand un produit symétrique est-il une variété topologique ?

Soit  $X$  un espace. On pose

$$\Gamma X = CX \underset{+}{=} X \cong (X \times \mathbb{R}_+) / X \times 0$$

( $\mathbb{R}_+$  désigne l'ensemble des nombres réels  $\geq 0$ ), et on dit que  $\Gamma X$  est le "cône illimité" de base  $X$ . Avec cette notation on a le

LEMME 2.2.1. - Pour tout entier  $n \geq 1$  et tout entier  $p \geq 1$ , on a des homéomorphismes :

- (i)  $\mathbb{R}(n) \cong \mathbb{R}_+^{n-1} \times \mathbb{R}$
- (ii)  $\mathbb{R}^2(n) \cong \mathbb{R}^{2n}$
- (iii)  $\mathbb{R}^P(2) \cong \Gamma \mathbb{R}P^{P-1} \times \mathbb{R}^P$ .

Preuve. Dans le cas (i), un homéomorphisme est donné par l'application  $(t_1, \dots, t_n) \longmapsto \{t_n, t_n - t_{n-1}, \dots, t_n - (t_{n-1} + \dots + t_1)\}$ .

Dans le cas (ii), il s'agit de l'homéomorphisme bien connu  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}(n)$  qui consiste à associer à chaque polynôme complexe unitaire de degré  $n$  l'ensemble de ses racines. Enfin, dans le cas (iii), un homéomorphisme  $\Gamma \mathbb{R}P^{P-1} \times \mathbb{R}^P \longrightarrow \mathbb{R}^P(2)$  est fourni par  $(tu, t, v) \longmapsto \{v+tu, v-tu\}$  avec  $u \in S^{P-1}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $v \in \mathbb{R}^P$ .

**THEOREME 2.2.2** - Soit  $X$  une variété topologique de dimension  $p \geq 1$  et soit  $n \geq 2$  un entier. Alors  $X(n)$  est une variété topologique (nécessairement de dimension  $np$ ) si et seulement si  $p = 2$ .

*Preuve.* Tout d'abord, puisque  $X$  est un espace séparé, il en est de même de  $X(n)$ . Considérons un point de  $X(n)$  de la forme  $\{x_1(k_1), \dots, x_r(k_r)\}$ . Puisque  $X$  est une variété de dimension  $p$ , il est possible de trouver des voisinages ouverts  $U_1, \dots, U_r$  des points  $x_1, \dots, x_r$  respectivement, deux à deux disjoints et homéomorphes à  $\mathbb{R}^p$ . De cela, on déduit que les ouverts de  $X(n)$

$$q_n(U_1^{k_1} X \dots X U_r^{k_r}) \cong U_1(k_1) X \dots X U_r(k_r)$$

forment un système fondamental de voisinages du point  $\{x_1(k_1), \dots, x_r(k_r)\}$  dans  $X(n)$ . Si  $p = 2$ , il est clair en vertu de 2.2.1 que  $X(n)$  est une variété de dimension  $2n$ . Supposons maintenant que  $X(n)$  soit une variété de dimension  $np$  avec  $p \neq 2$ . En considérant un point de  $X(n)$  de la forme  $\{x_1(2), x_2, \dots, x_{n-1}\}$  on voit que l'espace  $W = \mathbb{R}^p(2) \times \mathbb{R}^{(n-2)p}$  doit être homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^{np}$ . Si  $p = 1$ , grâce à 2.2.1, on peut écrire  $W = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$ . A cause de l'invariance du domaine,  $W$  ne peut pas être homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Supposons alors  $p \geq 3$ . En utilisant 2.2.1, on voit que  $W = \mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R}^{(n-1)p}$  est homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^{np}$ . Par conséquent, puisque  $W$  est une variété connexe orientable de dimension  $np$ , la dualité de Poincaré montre que l'on a un isomorphisme  $H^r X \cong \text{Hom}(H_C^{np-r} W, \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(H_C^{np-r+1} W; \mathbb{Z})$ .

Comme  $W$  est contractile, cela exige pour  $r \geq 0$   $\text{Ext}(H_C^{np-r+1} W, \mathbb{Z}) = 0$ . Faisant  $r = p-2 > 0$ , il vient  $H_C^{(n-1)p+3} W \cong H_C^3 \mathbb{R}P^{p-1} \cong H^2 \mathbb{R}P^{p-1} \cong \mathbb{Z}$  d'où une contradiction puisque l'on a  $\text{Ext}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$ .

### § 3. ANNEAU DE COHOMOLOGIE ENTIERE D UN PRODUIT SYMETRIQUE D'UN BOUQUET DE CERCLES.

3.1. Soit  $T$  un bouquet de  $k$  cercles ( $k$  entier  $\geq 1$ ), i.e.

$$T = S^1 \vee \dots \vee S^1,$$

Le point base de  $Z$  étant le point commun aux cercles. Ainsi, on a

$$T_0 = \mathbb{R} \amalg \dots \amalg \mathbb{R} \quad (k \text{ fois}).$$

Commençons par identifier la cohomologie à supports compacts de  $T_0(n)$ . Pour cela, nous avons besoin du lemme suivant, de preuve facile :

LEMME 3.1.1. - *Considérons un espace topologique, somme de  $k$  sous-espaces*

$$X = X_1 \amalg \dots \amalg X_k.$$

Alors, pour tout entier  $n \geq 0$ , on a un homéomorphisme

$$X(n) \cong \bigsqcup_{\substack{i_1 \geq 0, \dots, i_k \geq 0 \\ i_1 + \dots + i_k = n}} X_1(i_1) \times \dots \times X_k(i_k).$$

En considérant 3.1.1 avec 2.2.1 et la formule de Künneth, on arrive tout de suite à la :

PROPOSITION 3.1.2. - *Pour tout entier  $n \geq 1$  on a un isomorphisme*

$$H_c^i(T_0(n); \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{\binom{k}{n}} & \text{si } i = n \\ 0 & \text{si } i \neq n. \end{cases}$$

(on rappelle que l'on a  $\binom{k}{n} = \frac{1}{n!} k(k-1)\dots(k-n+1)$  et que par conséquent  $\binom{k}{n} = 0$  si  $n > k$ ,

On peut remarquer que 3.1.2. est en accord avec le théorème 2.1.2 (encore valable en cohomologie à supports compacts) de MACDONALD. En effet, ce théorème prouve que le polynôme de Poincaré  $P(T_0(n), x)$  de  $T_0(n)$  est de coefficient de  $t^n$  dans  $k$  développement en série entière de

$$(1+xt)^k = 1 + \binom{k}{1}xt + \dots + \binom{k}{n}x^n t^n + \dots$$

3.2. - Déterminons maintenant les groupes de cohomologie de  $T(n)$ .  
Toujours d'après 2.1.2, le polynôme de Poincaré  $P(T(n), \mathbb{X})$  de  $T(n)$   
est le coefficient de  $t^n$  dans le développement en série entière de  
 $(1+xt)^k/1-t$ . Autrement dit, on a :

$$3.2.1. \quad P(T(n), \mathbb{X}) = 1 + \binom{k}{1} X + \dots + \binom{k}{n} X^n.$$

Il reste à régler le problème de la torsion de  $T(n)$ . Nous allons prouver  
par récurrence sur l'entier  $n$  que l'espace  $T(n)$  est sans torsion. Tout  
d'abord  $T(1) = S^1 \vee \dots \vee S^1$  est sans torsion. Supposons alors  $T(n)$  sans  
torsion. On peut écrire une suite exacte illimitée :

$$3.2.2. \dots \rightarrow H_C^i T_O(n+1) \rightarrow H^i T(n+1) \xrightarrow{v_n^*} H^i T(n) \rightarrow H_C^{i+1} T_O(n+1) \rightarrow \dots$$

La considération de 3.2.2 et de 3.1.2 prouve que, pour  $i > n+1$ . D'après  
ou  $i \neq 1 < n+1$ , l'homomorphisme de restriction  $v_n^* : H^i T(n+1) \rightarrow H^i T(n)$   
est un isomorphisme. Pour  $i = n, n+1$ , on peut écrire un bout de 3.2.2. :

$$0 \rightarrow H^n T(n+1) \xrightarrow{v_n^*} H^n T(n) \rightarrow H_C^{n+1} T_O(n+1) \rightarrow H^{n+1} T(n+1) \rightarrow 0.$$

Puisque par hypothèse  $H^n(T(n))$  est libre, il en est de même de  $H^n(T(n+1))$ .  
D'après 3.2.1, les groupes  $H^n(T(n))$  et  $H^n T(n+1)$  ont même rang  $\binom{k}{n}$ . On  
en déduit aussitôt que l'on a des isomorphismes

$$v_n^* : H^n T(n+1) \xrightarrow{\cong} H^n T(n) \quad \text{et} \quad H_C^{n+1} T_O(n+1) \xrightarrow{\cong} H^{n+1} T(n+1).$$

On peut remarquer que le deuxième isomorphisme prouve que 3.1.2 et 3.2.1  
sont en accord. En résumé, on a la

PROPOSITION 3.2.3. - Pour tout entier  $n \geq 1$ , les groupes de cohomologie  
entière de  $T(n)$  sont sans torsion et leur rang est donné par 3.2.1.  
En outre, l'homomorphisme de restriction

$$v_1^* : H^*(T(n+1); \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(T(n); \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme en degrés  $\neq n+1$ .

3.3. - Occupons-nous maintenant d'anneaux de cohomologie. Commençons par l'anneau  $H^*(T, \mathbb{Z})$ . Soit  $t_1, \dots, t_k$  une base de  $H^1 T$ . Puisque l'on a  $H^i T = 0$  dès que  $i > 1$ , il est clair que les éléments  $t_1, \dots, t_k$  engendrent  $H^* T$  en tant qu'anneau et qu'ils sont soumis aux relations  $t_i \cdot t_j = 0$   $1 \leq i, j \leq k$ . En appliquant la formule de Künneth  $H^*(T^h, \mathbb{Z}) \cong \bigotimes^n H^*(T, \mathbb{Z})$ , on voit que  $H^* T^n$  est engendré, en tant qu'anneau, par les éléments de degré 1

$$3.3.2. \quad t_{ir}(n) \cdot t_{js}(n) = 0 \quad \text{ssi} \quad r = s.$$

Afin de soulager les notations, nous écrirons dans la suite  $t_{ir}$  au lieu de  $t_{ir}(n)$ . L'action du groupe symétrique  $S_n$  sur  $H^* T^n$  est donnée par la formule

$$3.3.3. \quad s \cdot t_{ir} = t_{i s^{-1}(r)} \quad \text{si} \quad s \in S_n.$$

Cela permet de définir les éléments de  $(H^1 T^n)^{S_n}$

$$\bar{t}_i = t_{i1} + \dots + t_{in} \quad 1 \leq i \leq k.$$

Enfin, il est clair que l'homomorphisme de restriction

$$u_n^* : H^* T^{n+1} \longrightarrow H^* T^n \quad \text{se décrit comme suit}$$

$$3.3.4. \quad u_n^* t_{ir}(n+1) = \begin{cases} t_{ir}(n) & \text{si } 1 \leq r \leq n, \\ 0 & \text{si } r = n+1. \end{cases}$$

En vertu de 3.2.3, on a des isomorphismes

$$H^1 T \xleftarrow{\sim} \xleftarrow{v_1^*} H^1 T(2) \xleftarrow{\sim} \xleftarrow{v_2^*} \dots \xleftarrow{\sim} H^1 T(n) \xleftarrow{\sim} \xleftarrow{v_n^*} H^1 T(n+1) \xleftarrow{\sim} \dots$$

Cela permet de définir, par récurrence sur l'entier  $n \geq 1$ , une base  $t_1(n), \dots, t_k(n)$  de  $H^1(T(n); \mathbb{Z})$  telle que l'on ait

$$3.3.6. \quad \begin{cases} t_i(1) = t_i \\ v_n^* t_i(n+1) = t_i(n) \end{cases} \quad 1 \leq i \leq k$$

Une fois de plus, afin de soulager les notations, nous ferons l'abus de notations consistant à omettre l'indice  $n$  dans la notation  $t_i(n)$ .

LEMME 3.3.6. -

- (i) pour tout entier  $n \geq 1$ , les éléments  $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k$  forment une base de  $H^1(T^n; \mathbb{Z})^n$ .
- (ii) si  $n = k$ ,  $k$  produit  $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k$  est un générateur de  $H^k(T^k, \mathbb{Z})^{S_k}$ .
- (iii) pour tout entier  $n \geq 1$ , on a la formule (avec les abus de notations déjà signalés)

$$q_n^* t_i = \bar{t}_i.$$

*Preuve.* - Prouvons (i). pour cela, soit  $x \in (H^1 T^n)^{S_n}$ . En vertu de 3.3.1, on peut écrire  $x = \sum_{i,r} n_{ir} t_{ir}$  avec  $n_{ir} \in \mathbb{Z}$ . Si  $s \in S_n$ ,

on peut écrire d'après 3.3.3  $s.x = \sum_{i,r} n_{ir} t_i s^{-1}(r)$ . Si  $x$  est

invariant sous l'action de  $S_n$ , on doit avoir  $s.x = x$  quel que soit  $s \in S_n$ , i.e.  $x$  est une combinaison linéaire des éléments  $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k$ . Le reste de la démonstration est évident.

Pour prouver (ii), supposons que l'on ait  $n = k$ . Soit  $I = (i_1, \dots, i_k) \subset \{1, \dots, k\}^k$  un multi-indice et posons

$$t_I = t_{i_1,1} t_{i_2,2} \dots t_{i_k,k}.$$

A cause des relations 3.3.2, les éléments de la forme  $t_I$  forment une base de  $H^k T^k$ . Le groupe symétrique  $S_k$  opère de façon naturelle sur l'ensemble produit  $\{1, \dots, k\}^k$  par permutation des coordonnées. Les relations 3.3.3 montrent que si  $s \in S_k$  on a

$$s. t_I = e_s t_{s.I}$$

où  $e_s$  désigne la signature de la permutation  $s$ . Si  $x \in H^k T^k$ , on a  $x = \sum_I n_I t_I$ , la sommation portant sur tous les multi-indices  $I$ . Cherchons à quelles conditions  $x$  est invariant sous l'action de  $S_k$ .

Par exemple, considérons la permutation  $s = (1.2)$ . On peut écrire :

$$x = \sum_{i_1 = i_2} n_I t_I + \sum_{i_1 \neq i_2} n_I t_I$$

$$s.x = - \sum_{i_2 = i_1} n_I t_I - \sum_{i_2 \neq i_1} n_I t_I.$$

Par conséquent, la relation  $x = s.x$  exige que l'on ait  $n_I = 0$  chaque fois que  $i_1 = i_2$  dans le multi-indice  $I$ . En considérant les autres transpositions de  $S_k$ , on voit immédiatement qu'une condition nécessaire pour que  $x$  soit invariant est que l'on ait  $n_I = 0$  chaque fois que deux indices sont égaux dans le multi-indice  $I$ . Par conséquent si  $x$  est invariant, on peut écrire  $x = \sum_s n_s t_s(1, \dots, k)$  la sommation portant sur toutes les permutations  $s \in S_k$ . Soit  $u \in S_k$  et exprimons que l'on a  $u.x = x$ . Il vient

$$\sum_s n_s t_s(1, \dots, k) = \sum_u e_u \sum_s n_s t_{us}(1, \dots, k)$$

ce qui exige les égalités  $n_s = e_s . n_{i_s}$

Par conséquent, on peut écrire :

$$x = n \sum_s e_s t_s(1, \dots, k) = n \sum_s t_{1s}(1) t_{2s}(2) \dots t_{ks}(k) = n \bar{t}_1 \dots \bar{t}_k.$$

L'assertion (iii) se prouve par récurrence sur l'entier  $n$ . Pour  $n = 1$ , on a  $\bar{t}_1 = y t_1$  et  $q_1^* = \text{id}$ . Supposons alors l'assertion vraie pour l'entier  $n$  et considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (H^1 T^1)^{S_n} & \xleftarrow{u_n^*} & (H^1 T^{n+1})^{S_{n+1}} \\ \uparrow q_n^* & & \uparrow q_{n+1}^* \\ H^1 T(n) & \xleftarrow{v_n^*} & H^1 T(n+1) \end{array}$$

Avec les abus de notations déjà signalé, on a d'après 3.3.4  $u_n^* \bar{t}_i = \bar{t}_i$  pour  $1 \leq i \leq k$ . Par conséquent, d'après l'assertion (i),  $u_n^*$  induit un isomorphisme sur les sous-groupes des invariants de degré 1. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} q_{n+1}^* t_i &= (u_n^*)^{-1} q_n^* v_n^* t_i && \text{(commutativité du diagramme).} \\ &= (u_n^*)^{-1} q_n^* t_i && (3.3.5) \\ &= (u_n^*)^{-1} \bar{t}_i && \text{(récurrence)} \\ &= \bar{t}_i && (3.3.4) . \end{aligned}$$

Avant d'arriver au résultat final de ce numéro, nous avons besoin d'un lemme de nature algébrique.

LEMME 3.3.7. - Soit  $A$  un anneau  $\mathbb{Z}$ -gradué, commutatif et unitaire. On suppose qu'en degrés  $i < 0$  on a  $A^i = 0$  et qu'il existe un entier  $k \geq 0$  tel qu'en degrés  $i \geq 0$ ,  $A^i$  soit libre de rang  $\binom{k}{i}$ . Soit  $a_1, \dots, a_k$  une base de  $A^1$  et considérons le morphisme d'anneaux gradués

$$f : \wedge (X_1, \dots, X_k) \rightarrow A$$

(où  $X_1, \dots, X_k$  sont de degré 1) défini par  $fX_i = a_i$   $1 \leq i \leq k$ . Si le produit  $a_1 \dots a_k$  est un générateur de  $A^k$ , alors  $f$  est un isomorphisme d'anneaux gradués.

Preuve. - Soit  $I$  une partie de  $\{1, \dots, k\}$  et posons de façon classique

$$a_I = \begin{cases} 1 & \text{si } I = \emptyset, \\ a_{i_1} \dots a_{i_\ell} & \text{si } I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_\ell\}. \end{cases}$$

Si  $I$  est une partie de  $\{1, \dots, k\}$  désignons par  $I^c$  son complémentaire. Enfin, soit  $b$  un générateur de  $A^k \cong \mathbb{Z}$ . Avec ces notations, il est clair que l'on a

$$a_I \cdot a_{J^c} = \begin{cases} \pm b & \text{si } J = I \\ 0 & \text{si } J \neq I \text{ et } n_J = n_I. \end{cases}$$

(cela vient de ce que  $A^k$  est libre). Prouvons tout d'abord que la relation  $a_1 \dots a_k \neq 0$  implique que  $f$  est un monomorphisme. Il revient au même de prouver que pour chaque entier  $1 \leq i \leq k$ , les éléments  $a_I$  avec  $n_I = \ell$  sont linéairement indépendants dans  $A^\ell$ . Soit  $\sum_{n_I = \ell} n_I a_I = 0$ . Alors si  $n_{I_0} = \ell$ , on peut écrire :

$$\sum_{n_I = \ell} n_I a_{I_0} a_I = \pm n_{I_0} a_1 \dots a_k = 0.$$

On en conclut  $n_{I_0} = 0$ , puisque  $A^k$  est sans torsion. Supposons prouvé que la relation  $a_1 \dots a_k = \pm b$  implique que l'image de  $f$  est un facteur direct du groupe abélien libre  $A$ . On en déduira aussitôt la surjectivité de  $f$  puisqu'en chaque degré  $\text{im } f$  de  $A$  ont même rang. Pour prouver que  $\text{im } f$  est un facteur direct de  $A$ , il suffit de prouver que  $\text{im } f$  est pur dans  $A$ . Soit donc  $a \in A$  tel qu'il existe un entier  $n \neq 0$  tel que  $n \cdot a \in \text{im } f$ . On peut supposer  $a$  homogène de degré  $1 \leq \ell \leq k$ , ce qui permet d'écrire

$$n \cdot a = \sum_{n_I = \ell} n_I \cdot a_I. \text{ En multipliant cette égalité par } a_{I_0} \text{ avec } n_{I_0} = \ell$$

il vient  $n \cdot a \cdot a_{I_0} = \sum n_I a_I a_{I_0} = \pm n_{I_0} b$ . Comme  $a a_{I_0}$  est de degré  $k$ , on en déduit que  $n$  divise  $n_{I_0}$ , d'où le résultat

THEOREME 3.3.8 - Soit  $T$  un bouquet de  $k$  cercles. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a un isomorphisme d'anneaux gradués

$$H^*(T(n), \mathbb{Z}) \cong \bigwedge^{\leq n} (t_1, \dots, t_k).$$

où  $t_1, \dots, t_k$  est la base de  $H^1(T(n); \mathbb{Z})$  définie par 3.3.5.

*Preuve.* - Supposons avoir prouvé le théorème lorsque  $n = k$ . Compte tenu de 3.2.3. et de 3.3.5., le cas général en résulte aussitôt. Si  $n = k$ , prouvons que l'anneau  $H^*T(k)$  remplit toutes les conditions du lemme 3.3.7. Tout d'abord en vertu de 3.2.3.  $H^*T(k)$  est libre et  $\text{rg. } H^i T(k) = \binom{k}{i}$  pour  $i \geq 0$ . Reste à prouver que le produit  $t_1 \dots t_k$  est un générateur de  $H^k T(k)$ . Notant  $t$  un générateur de  $H^k T(k)$ , on peut écrire :  $t_1 \dots t_k = a \cdot t$  avec  $a \in \mathbb{Z}$ . Par image réciproque on obtient  $q_k^*(t_1 \dots t_k) = a q_k^* t$ , et comme on peut écrire  $q_k^* t = b \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k$  d'après 3.3.6 (ii) avec  $b \in \mathbb{Z}$ , il vient, en utilisant 3.3.6. (iii) ;  $\bar{t}_1 \dots \bar{t}_k = ab \bar{t}_1 \dots \bar{t}_k$ . Par conséquent, on aura  $ab = 1$ , ce qui prouve le résultat.

3.4. Remarque.

Soient  $Z_1, \dots, Z_k$   $k$  nombres complexes, deux à deux distincts, et posons :

$$U_k = \mathbb{C} \setminus \{Z_1, \dots, Z_k\}.$$

L'ouvert  $U_k$  a même type d'homotopie qu'un bouquet de  $k$ -cercles, soit  $T$ . Le produit symétrique étant compatible avec les homotopies, on en déduit que  $U_k(n)$  a même type d'homotopie que  $T(n)$  pour tout entier  $n \geq 1$ . Utilisant l'homomorphisme 2.2.1.  $\mathbb{C}(n) \cong \mathbb{C}^n$ , il n'est pas difficile de donner une description de  $U_k(n)$  en termes d'un ouvert de  $\mathbb{C}^n$ . A cet effet, soient  $\omega_1, \dots, \omega_k$  les formes linéaires non homogènes sur  $\mathbb{C}^n$  suivantes

$$\omega_i(X_1, \dots, X_n) = X_1 + Z_i X_2 + Z_i^2 X_3 + \dots + Z_i^{n-1} X_n + Z_i^n.$$

Il est clair que  $U_k(n)$  est homéomorphe à l'ouvert de  $\mathbb{C}^n$  complémentaire des hyperplans affines d'équation  $\omega_i = 0 \quad 1 \leq i \leq k$ .

Le théorème 3.3.8 nous montre que l'anneau de cohomologie entière de cet ouvert est une algèbre extérieure sur  $k$  éléments de degré 1, tronquée en degrés  $\geq n$ .

§ 4. - ANNEAU DE COHOMOLOGIE ENTIÈRE D'UN PRODUIT SYMÉTRIQUE D'UNE SURFACE DE RIEMANN.

4.1. - Généralités.

Dans tout ce qui suit, sauf mention explicite du contraire, la lettre  $X$  désigne une surface de Riemann compacte de genre  $g \geq 0$ . Rappelons [4] que l'on munit canoniquement  $X(n)$  d'une structure de variété analytique compacte de dimension complexe  $n$ . Si de plus on s'est donné un point base  $* \in X$ , l'injection canonique  $v_n : X(n) \hookrightarrow X(n+1)$  identifie  $X(n)$  à une sous variété analytique fermée de codimension 1 de  $X(n+1)$ .

Rappelons aussi [4] la structure d'anneau de  $H^*(X^n; \mathbb{Z})$ . Pour  $n = 1$  elle se décrit ainsi : on peut choisir une base  $x_1, \dots, x_{2g}$  de  $H^1(X; \mathbb{Z})$  et un générateur  $y$  de  $H^2(X; \mathbb{Z})$  tels que le cup-produit soit donné par les formules

$$x_i x_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i-j \neq \pm g, \\ y & \text{si } 1 \leq i \leq g \text{ et } j = i+g. \end{cases}$$

Appliquant la formule de Künneth  $H^*(X^n; \mathbb{Z}) \cong H^*(X; \mathbb{Z}) \otimes H^*(X^n; \mathbb{Z})$ , on en déduit que  $H^*(X^n; \mathbb{Z})$  est engendré, en tant qu'anneau, par les éléments

$$4.1.1. \quad \begin{cases} x_{ir}^{(n)} = 1 \otimes \dots \otimes x_i \otimes \dots \otimes 1, \\ y_r^{(n)} = 1 \otimes \dots \otimes y \otimes \dots \otimes 1. \end{cases}$$

avec  $x_i$  et  $y$  à la  $r$ -ième place,  $1 \leq i \leq 2g$ ,  $1 \leq r \leq n$ . Toujours afin de soulager les notations, nous omettrons le plus souvent l'indice  $n$  dans les notations  $x_{ir}^{(n)}$  et  $y_r^{(n)}$ . Les éléments 4.1.1. sont soumis aux relations

$$4.1.2. \quad \begin{cases} x_{ir} x_{js} = 0 & \text{ssi } i-j \neq \pm g \text{ et } r = s, \\ x_{ir} x_{i+g,r} = y_r & 1 \leq i \leq g, 1 \leq r \leq n. \end{cases}$$

Le groupe symétrique  $S_n$  opère sur  $H^*(X^n; \mathbb{Z})$  de la manière suivante ( $s \in S_n$ ):

$$4.1.3. \quad \begin{cases} s \cdot x_{ir} = x_{i, \bar{s}^{-1}(r)}, \\ s \cdot y_r = y_{\bar{s}^{-1}(r)}. \end{cases}$$

Cela permet d'introduire les éléments suivants de  $H^*(X^n; \mathbb{Z})^{S_n}$

$$4.1.4. \quad \begin{cases} \bar{x}_i = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} & (1 \leq i \leq 2g), \\ \bar{y} = y_1 + y_2 + \dots + y_n. \end{cases}$$

Enfin, l'homomorphisme de restriction  $u_n^* : H^*(X^{n+1}; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X^n; \mathbb{Z})$  est déterminé par les formules

$$4.1.5. \quad \begin{cases} u_n^* x_{ir}^{(n+1)} = \begin{cases} x_{ir}^{(n)} & \text{si } r < n+1, \\ 0 & \text{si } r = n+1. \end{cases} \\ u_n^* y_r^{(n+1)} = \begin{cases} y_r^{(n)} & \text{si } r < n+1, \\ 0 & \text{si } r = n+1. \end{cases} \end{cases}$$

4.2. La proposition suivante est immédiate.

PROPOSITION 4.2.1. -

(i) Pour tout entier  $n \geq 1$ , les éléments  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2g}$  forment une base de  $H^1(X^n; \mathbb{Z})^{S_n}$ , l'homomorphisme de restriction

$$u_n^* : H^1(X^{n+1}; \mathbb{Z})^{S_{n+1}} \longrightarrow H^1(X^n; \mathbb{Z})^{S_n}$$

est un isomorphisme et on a l'égalité  $u_n^* \bar{x}_i = \bar{x}_i$ .

(ii) Pour tout entier  $n \geq 2$ , les éléments  $\bar{x}_i \bar{x}_j$ , avec  $1 \leq i < j \leq 2g$  et  $\bar{y}$  forment une base de  $H^2(X_n; \mathbb{Z})^{S_n}$ ; l'homomorphisme de restriction

$$U_n^* : H^2(X^{n+1}; \mathbb{Z})^{S_{n+1}} \longrightarrow H^2(X^n; \mathbb{Z})^{S_n}$$

est un isomorphisme et on a les égalités  $U_n^*(\bar{x}_i \bar{x}_j) = \bar{x}_i \bar{x}_j$  et  $U_n^* \bar{y} = \bar{y}$ .

Remarque. On peut facilement prouver [4] que les éléments  $\bar{x}_i, \bar{x}_j$ ,  $1 \leq i < j \leq 2g$  et  $\bar{y}$ , considérés comme éléments de  $H^*(X^n, \mathbb{Q})$  engendrent le sous-anneau  $H^*(X^n, \mathbb{Q})^{S_n}$ . Ce résultat devient faux si on remplace  $\mathbb{Q}$  par  $\mathbb{Z}$ .

PROPOSITION 4.2.2. - L'homomorphisme de restriction.

$$v_1^* : H^1(X(n+1); \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X(n); \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme en degré 1 pour  $n \geq 1$ .

*Preuve.* - Si  $X$  est une surface de Riemann de genre  $g \geq 0$ ,  $X_0 = X \setminus \{*\}$  a même type d'homotopie qu'un bouquet de  $2g$  cercles. Comme le foncteur produit symétrique est compatible avec les homotopies, 3.3.8 prouve que

4.2.2.1.  $H^*(X_0(n); \mathbb{Z})$  est une algèbre extérieure sur  $2g$  éléments de degré 1, tronquée en degrés  $> n$ . Comme  $X_0(n)$  est une variété topologique connexe, orientable, de dimension réelle  $2n$ , la dualité de Poincaré prouve que l'on a des isomorphismes

$$4.2.2.2. \quad H_c^i(X_0(n); \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \bigwedge^{2n-i} \mathbb{Z}^{2g} & \text{si } n \leq i \leq 2n, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Ceci dit, nous pouvons écrire une suite exacte pour  $n \geq 1$

$$0 = H_n^1 X_0(n+1) \longrightarrow H^1 X(n+1) \xrightarrow{v_n^*} H^1 X(n) \longrightarrow H_c^2 X_0(n+1)$$

Cela prouve déjà que pour  $n \geq 1$ ,  $v_n^*$  est injectif en degré 1. En considérant 2.1.1. et 4.2.1 (ou en utilisant directement 2.1.2), on voit que les groupes  $H^1 X(n+1)$  et  $H^1 X(n)$  ont même rang  $2g$ . Comme 4.2.2.2. prouve que  $H_c^2 X_0(n+1)$  est libre, on en déduit que  $v_n^*$  est surjectif en degré 1.

La proposition 4.2.2. prouve que pour  $n \geq 1$ , on a des isomorphismes

$$H^1 X \xleftarrow{v_1^*} H^1 X(2) \xleftarrow{\sim} \dots \xleftarrow{\sim} H^1 X(n) \xleftarrow{v_n^*} H^1 X(n+1) \xleftarrow{\sim} \dots$$

Cela prouve aussitôt que  $H^1 X(n)$  est libre de rang  $2g$ . En outre, on peut définir par récurrence sur l'entier  $n$ , une base  $X_1(n) \dots X_{2g}(n)$  de  $H^1 X(n)$  en posant

$$4.2.3. \quad \begin{cases} x_i(1) = x_i, \\ v_n^* x_i(n+1) = x_i(n) \end{cases} \quad \text{avec } 1 \leq i \leq 2g \\ \text{et } n \geq 1.$$

Avec l'abus de notation qui consiste à oublier la lettre  $n$  dans la notation  $x_i(n)$ , on a tout de suite la proposition :

PROPOSITION. 4.2.4. - Pour tout entier  $n \geq 1$ , l'homomorphisme image réciproque

$$q_n^* : H^1(X(n); \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X^n; \mathbb{Z})^{S_n}$$

est un isomorphisme. D'une manière plus précise, on a les égalités :

$$q_n^* x_i = \bar{x}_i \quad 1 \leq i \leq 2g.$$

*Preuve.* - Elle se fait par récurrence sur l'entier  $n$  de façon semblable à la démonstration de 3.3.6 (iii).

COROLLAIRE . 4.2.5. - Pour tout entier  $n \geq 1$ , l'homomorphisme de restriction

$$w_n^* : H^*(X(n); \mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(X_0(n); \mathbb{Z}).$$

est un épimorphisme. De plus, c'est un isomorphisme en degré 1.

Preuve. - En vertu de 4.2.2.1., il nous suffit de prouver que  $w_n^*$  est un isomorphisme en degré 1. Pour cela, considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (H^1 X^n)^{S_n} & \xrightarrow{\text{restriction}} & (H^1 X_0^n)^{S_n} \\ \uparrow q_n^* & & \uparrow (q_n|_{X_0^n})^* \\ H^1 X(n) & \xrightarrow{w_n^*} & H^1 X_0(n) \end{array}$$

D'après 4.2.4,  $q_n^*$  est un isomorphisme. De même, 3.3.6 (iii) prouve que  $(q_n|_{X_0^n})^*$  est un isomorphisme. Enfin, il est clair que l'homomorphisme de restriction  $(H^1 X^n)^{S_n} \longrightarrow (H^1 X_0^n)^{S_n}$  est lui aussi un isomorphisme. D'où le résultat.

PROPOSITION 4.2.6. - Pour tout entier  $n \geq 1$  on a une suite exacte courte de Gysin.

$$4.2.6.1. \quad 0 \rightarrow H^*(X(n); \mathbb{Z}) \xrightarrow{(v_n)_*} H^*(X(n+1); \mathbb{Z}) \xrightarrow{w_{n+1}^*} H^*(X_0(n+1); \mathbb{Z}) \rightarrow 0,$$

où  $(v_n)_*$  est de degré +2. En outre,  $X(n)$  est sans torsion et pour tout entier  $0 \leq i \leq n$  on a

$$\text{rg } H^i(X(n); \mathbb{Z}) = \text{rg } H^{2n-i}(X(n); \mathbb{Z}) = \binom{2g}{i} + \binom{2g}{i-2} + \dots$$

Preuve. - Puisque  $v_n : X(n) \hookrightarrow X(n+1)$  est une sous variété analytique complexe fermée de codimension 1, on a une suite exacte de Gysin illimitée

$$\dots \rightarrow H^i X(n) \xrightarrow{(v_n)_*} H^{i+2} X(n+1) \xrightarrow{w_{n+1}^*} H^{i+2} X_0(n+1) \rightarrow H^{i+1} X(n) \rightarrow \dots$$

D'après 4.2.5.,  $w_{n+1}^*$  est un épimorphisme. On en conclut aussitôt que 4.2.6.1. est une suite exacte. La fin de la démonstration se fait par récurrence sur l'entier  $n \geq 1$ , en utilisant 4.2.6.1. et 4.2.2.1.

4.3. Rappelons la propriété suivante, qui donne une interprétation géométrique de l'homomorphisme de Gysin. Soit  $B$  une variété analytique complexe et soit  $A$  une sous variété analytique fermée de codimension 1 de  $B$ . Désignons par  $i : A \hookrightarrow B$  l'injection canonique et  $\mathcal{J}$  l'idéal de définition de  $A$ . Soit  $E$  un fibré (vectoriel) analytique inversible de base  $B$ . Si le fibré  $E$  possède une section analytique qui s'annule exactement sur  $A$ , on a

$$4.3.1. \quad c_1(E) = i_* (1)$$

dans  $H^2(B; \mathbb{Z})$ . Un exemple important d'un tel fibré  $E$  est le fibré de faisceau de sections  $\mathcal{J}$ . Par exemple, considérons le cas  $B = X$  et  $A = *$  (le point base de  $X$ ). Désignons par la lettre  $L$  le fibré analytique inversible de faisceau de sections  $\mathcal{J}$  et par  $S$  une section analytique de  $L$  telle que  $S(*) = 0$  et  $S(x) \neq 0$  si  $x \in X_0$ . On a donc, d'après 4.3.1.,  $c_1(L) = i_* (1) \in H^2(X; \mathbb{Z})$ . Ecrivons un bout de suite exacte de Gysin

$$H^*(*) \xrightarrow{i_*} H^2 X \longrightarrow H^2 X_0 = 0$$

Nécessairement, on a  $i_*(1) = \pm y$ ,  $y$  générateur de  $H^2 X$ . Quitte à remplacer  $y$  par  $-y$ , on peut supposer que l'on a

$$4.3.2. \quad c_1(L) = y$$

dans  $H^2(X, \mathbb{Z})$ .

L'entier  $n \geq 1$  étant donné, désignons par  $p_i = X^n \rightarrow X$  les  $n$  projections  $1 \leq i \leq n$  et posons

$$L_i = p_i^* L .$$

Sur le fibré inversible  $L_1 \otimes \dots \otimes L_n$  de base  $X^n$ , le groupe symétrique  $S_n$  opère de façon compatible avec son action sur la base. On constate facilement que l'espace

$$4.3.3 \quad E_n = L_1 \otimes \dots \otimes L_n / S_n$$

est canoniquement muni d'une structure de fibré vectoriel analytique inversible de base  $X(n)$ , pour laquelle on a un isomorphisme

$$4.3.4. \quad q_n^* E_n = L_1 \otimes \dots \otimes L_n .$$

Traduite en termes de classes de Chern , 4.3.4. signifie que l'on a dans  $H^2(X^n; \mathbb{Z})$

$$4.3.5. \quad q_n^* c_1(E_n) = y_1 + \dots + y_n = \bar{y}.$$

Considérons la section  $p_1^*(s) \otimes \dots \otimes p_n^*(s)$  du fibré  $L_1 \otimes \dots \otimes L_n$  au-dessus de  $X^n$ . Par passage au quotient, cette section définit une section analytique du fibré  $E_n$  au-dessus de  $X(n)$ , section qui s'annule exactement sur  $X(n-1)$ . Par conséquent, 4.3.1 montre que l'on a dans  $H^2(X(n); \mathbb{Z})$

$$4.3.6 \quad (v_{n-1})_{\star}^*(1) = c_1(E_n) \quad \text{pour} \quad n \geq 2 .$$

Prouvons aussi que l'on a

$$4.3.7. \quad v_n^*(v_1)_{\star}^*(1) = c_1(E_n) \quad \text{pour} \quad n \geq 1 .$$

Puisque  $X(n)$  est sans torsion (4.2.6), le théorème 2.1.1. prouve que

4.3.8. *L'homomorphisme de restriction  $q_n^* : H^*(X(n); \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X^n; \mathbb{Z})^{\mathbb{S}_n}$  est un monomorphisme.*

Par conséquent, il nous suffit de vérifier que pour  $n \geq 1$  , on a

$$q_n^* v_n^*(v_n)_{\star}^*(1) = q_n^* c_1(E_{n+1})$$

On peut écrire :

$$q_n^* v_n^*(v_n)_{\star}^*(1) = q_n^* v_n^* c_1(E_{n+1}) \quad 4.3.6.$$

$$= u_n^* q_{n+1}^* c_1(E_{n+1})$$

$$= u_n^* y \quad (4.3.5)$$

$$= \bar{y} \quad (4.1.5)$$

$$= q_n^* c_1(E_n) \quad (4.3.5) ,$$

Pour  $n \geq 1$ , considérons l'élément

$$y(n) = v_n^*(v_n)_{\star}^*(1) = c_1(E_n)$$

de  $H^2(X(n); \mathbb{Z})$ . On a donc

$$4.3.9. \quad \begin{cases} y(1) = y \\ v_{n+1}^* y(n+1) = y(n) \end{cases} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

(La première assertion provient de 4.3.2, la deuxième est une conséquence immédiate de 4.3.8 et 4.3.5. Avec l'abus de notation consistant à omettre l'entier  $n$  dans  $y(n)$  on a la proposition suivante :

PROPOSITION 4.3.10. - Pour tout entier  $n \geq 2$ , l'homomorphisme image réciproque

$$q_n^* : H^2(X(n), \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X^n, \mathbb{Z})^{S_n}$$

est un isomorphisme. D'une manière plus précise, les éléments  $x_i \cdot x_j$   $1 \leq i < j \leq 2g$  et  $y$  forment une base de  $H^2(X(n), \mathbb{Z})$  et on a les égalités

$$q_n^*(x_i \cdot x_j) = \bar{x}_i \cdot \bar{x}_j \quad q_n^* y = \bar{y}$$

Preuve. D'après 4.3.8.,  $q_n^*$  est un monomorphisme. Pour la surjectivité, il suffit de se rappeler qu'une base de  $(H^2 X_n)^{S_n}$  est constituée par les éléments  $\bar{x}_i \cdot \bar{x}_j$   $1 \leq i < j \leq 2g$  et  $\bar{y}$  (4.2.1. partie ii) et d'utiliser 4.2.4. ainsi que 4.3.5.

PROPOSITION 4.3.11. - Pour tout entier  $n \geq 1$ , les éléments  $x_1, \dots, x_{2g}$  et  $y$  engendrent  $H^*(X(n); \mathbb{Z})$  en tant qu'anneau.

Preuve.- Elle se fait par récurrence sur l'entier  $n$  de façon analogue à la preuve de 1.3.5.3.

THEOREME 4.3.12. - Soit  $X$  une surface de Riemann de genre  $g \geq 0$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , soit  $A_n(g)$  l'anneau de MACDONALD. On a un isomorphisme d'anneaux gradués

$$f : A_n(g) \longrightarrow H^*(X(n); \mathbb{Z})$$

caractérisé par les égalités

$$f(x_i) = x_i \quad (1 \leq i \leq 2g) \quad \text{et } f y = y.$$

*Preuve* - La proposition 4.3.11 montre que l'on définit un épimorphisme d'anneaux gradués.

$$f : E = \wedge (X_1, \dots, X_{2g}) [Y] \longrightarrow H^*(X(n), \mathbb{Z})$$

en posant

$$f(X_i) = x_i \quad 1 \leq i \leq 2g \quad \text{et} \quad f(Y) = y.$$

Supposons avoir prouvé que  $f$  s'annule sur l'idéal  $\mathcal{O}_n$  de  $E$ . Par passage au quotient, on obtient alors un épimorphisme d'anneaux, encore noté  $f$ ,

$$f : A_n(g) \longrightarrow H^*(X(n), \mathbb{Z})$$

qui est nécessairement un isomorphisme puisque  $A_n(g)$  et  $H^*(X(n), \mathbb{Z})$  sont libres et ont même rang en chaque degré (1.2.3. et 4.2.6). Par conséquent, tout revient à prouver que dans l'anneau  $H^*X(n)$  on a

$$x_A x'_B z_C y^q = 0 \quad \text{dès que} \quad n_A + n_B + 2n_C + q = n + 1.$$

Sachant (4.3.8) que  $q_n^*$  est un monomorphisme, il revient au même de prouver que l'on a

$$q_n^*(x_A x'_B z_C y^q) = 0 \quad \text{si} \quad n_A + n_B + 2n_C + q = n + 1.$$

On peut écrire :

$$q_n^* x_i = \bar{x}_i = x_{i1} + \dots + x_{in}$$

$$q_n^* x'_i = \bar{x}'_{i1} + \dots + x'_{in} \quad (\text{on rappelle que } x'_{ir} = x_{i+g,r}).$$

$$q_n^* y = \bar{y} = y_1 + \dots + y_n$$

$$q_n^* z_i = \bar{z}_i = \bar{x}_i \bar{x}'_i - \bar{y} = \sum_{k \neq i} x_{ik} x'_{ik} \quad (\text{car } Y = x_{ir} x'_{ir}).$$

Posons  $A = \{i_1 < \dots < i_k\}$ ,  $B = \{j_1 < \dots < j_b\}$  et  $C = \{k_1 < \dots < k_c\}$ .

En développant  $q_n^*(x_A x'_B z_C y^q) = \bar{x}_A \bar{x}'_B \bar{z}_C \bar{y}^q$ , on obtient une somme de monôme de la forme

$$4.3.1.2.1 \quad (x_{i_1 p_1} \dots x_{i_a p_a}) (x'_{j_1 q_1} \dots x'_{j_b q_b}) \cdot (x_{k_1 r_1} x'_{k_1 s_1} \dots x_{k_c r_c} x'_{k_c s_c}) y_{b_1} \dots y_{b_q}$$

avec  $r_i \neq s_i$  pour  $1 \leq i \leq 2g$ . A cause des relations 4.1.2, pour qu'un monôme 4.3.12.1 soit non nul il est nécessaire que les indices  $p_1 \dots p_a$ ,  $q_1 \dots q_b$ ,  $r_1 \dots r_c$ ,  $s_1, \dots, s_c$  et  $t_1, \dots, t_q$  soient deux à deux distincts. Comme ces indices sont compris entre 1 et  $n$ , on en déduit que l'on doit avoir  $n_A + n_B + 2n_C + q \leq n$ , ce qui est impossible, vu que l'on a  $n_A + n_B + 2n_C + q = n + 1$ . Par conséquent, deux des indices au moins sont égaux, ce qui prouve le résultat.

§ 5. - KU THEORIE D'UN PRODUIT SYMETRIQUE D'UNE SURFACE DE RIEMANN.

5.1. - Si  $X$  est un CW compact (ou un espace ayant même type d'homotopie qu'un CW complexe compact), on désigne par  $AH(X)$  la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch

$$E_2^{p+q}(X) = H^p(X, KU^q(pt)) \implies KU^{p+q}(X).$$

Dans un but de simplification, on utilisera désormais la notation  $K^*(X)$  pour désigner la  $KU^*$  théorie de l'espace  $X$ . On rappelle que la notation

$$ch : K^*(X) \longrightarrow H^*(X; \mathbb{Q})$$

désignera le caractère de Chern. Enfin, on note

$$p_* : H^*(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(X; \mathbb{Q})$$

l'homomorphisme induit par l'inclusion canonique  $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ .

LEMME 5.1.1. - Soit  $a \in H^1(X, \mathbb{Z})$  une classe de cohomologie entière de degré 1.

Alors il existe  $\alpha \in \bar{K}^1(X)$  tel que l'on ait

$$ch \alpha = p_*(a).$$

*Preuve.* - On considère le diagramme commutatif suivant, où les flèches horizontales sont les isomorphismes de suspension

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{K}^1 X & \xrightarrow[\sim]{\sigma} & \tilde{K}^0 \Sigma X \\
 \downarrow ch & & \downarrow ch \\
 H^{impair}(X; \mathbb{Q}) & \xrightarrow[\sim]{\sigma} & \tilde{H}^{pair}(\Sigma X; \mathbb{Q}).
 \end{array}$$

5.1.1.1.

Soit  $E$  un fibré inversible de base  $\Sigma X$  tel que  $c_1(E) = \sigma a \in H^2(\Sigma X; \mathbb{Z})$ . Considérons l'élément  $[E] - 1 \in \tilde{K}^0 \Sigma X$ . On peut écrire

$$ch([E] - 1) = a' + \frac{i}{2!} a'^2 + \dots + \frac{1}{n!} a'^n + \dots$$

avec  $a' = p_* \sigma a = \sigma p_* a$ . Puisque dans l'anneau de cohomologie d'une suspension le cup produit est trivial, il reste  $ch([E] - 1) = \sigma p_* a$ .

Si on définit  $\alpha \in \bar{K}^1 X$  par la condition  $\sigma \alpha = [E] - 1$ , la commutativité du diagramme 5.1.1.1. prouve que l'on a

$$ch \alpha = \sigma^{-1} ch \sigma \alpha = \sigma^{-1} ch([E] - 1) = \sigma^{-1} \sigma p_* a = p_* a.$$

COROLLAIRE. 5.1.2. Soit  $T$  un bouquet de  $k$ -cercles. Alors, pour tout entier  $n \geq 1$  le caractère de Chern induit un isomorphisme d'anneaux

$$\text{ch} : K^* T(n) \longrightarrow H^*(T(n); \mathbb{Z}).$$

*Preuve.* - D'après 3.3.8, on a un isomorphisme d'anneaux gradués  $H^*(T(n); \mathbb{Z}) \cong \bigwedge^{\leq n} (t_1, \dots, t_k)$  où  $t_1, \dots, t_k$  sont de degré 1. Puisque  $H^*(T(n); \mathbb{Z})$  est sans torsion,  $\rho_*$  permet d'identifier  $H^*(T(n); \mathbb{Z})$  à un sous-anneau de  $H^*(T(n); \mathbb{Q})$ . Appliquant 5.1.1. on voit qu'il existe des éléments  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in K^{-1}T(n)$  tels que  $\text{ch} \alpha_i = t_i \quad 1 \leq i \leq k$ . Nous savons déjà que le caractère de Chern est injectif, puisque  $T(n)$  est sans torsion. La démonstration sera terminée si nous prouvons que les éléments  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  engendrent  $K^* T(n)$  en tant qu'anneau. Soit donc  $\alpha \in \widehat{K}^* T(n)$ . On peut écrire

$$\text{ch} \alpha = \frac{1}{\ell!} P_\ell(t_1, \dots, t_k) + \frac{1}{(\ell+1)!} P_{\ell+1}(t_1, \dots, t_k) + \dots + \frac{1}{n!} P_n(t_1, \dots, t_k),$$

où  $P_\ell, \dots, P_n$  sont des polynômes à coefficients entiers, homogènes de degrés respectivement  $\ell, \dots, n$ . En vertu des théorèmes d'intégralité,  $\frac{1}{\ell!} P_\ell(t_1, \dots, t_k)$  est une classe entière, i.e.  $\frac{1}{\ell!} P_\ell$  est un polynôme à coefficients entiers. Par conséquent, on aura

$$\text{ch} \left[ \alpha - \frac{1}{\ell!} P_\ell(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \right] = \frac{1}{(\ell+1)!} P_{\ell+1}(t_1, \dots, t_k) + \dots + \frac{1}{n!} P_n(t_1, \dots, t_k).$$

par application répétée des théorèmes d'intégralité et en utilisant l'injectivité du caractère de Chern, on voit facilement que les polynômes  $\frac{1}{\ell!} P_\ell, \dots, \frac{1}{n!} P_n$  sont à coefficients entiers et que l'on a dans  $K^* T(n)$  l'égalité

$$\alpha = \frac{1}{\ell!} P_\ell(\alpha_1, \dots, \alpha_k) + \dots + \frac{1}{n!} P_n(\alpha_1, \dots, \alpha_k).$$

5.2. - Dans ce qui suit, la lettre  $X$  désigne une surface de Riemann compacte de genre  $g \geq 0$ . Puisque  $X(n)$  est sans torsion, en vertu de 5.1.1. il existe des éléments  $\alpha_1(n), \dots, \alpha_{2g}(n)$  de  $K^{-1}X(n)$  tels que l'on ait dans  $H^1(X(n); \mathbb{Z})$  l'égalité

$$5.2.1. \quad \text{ch} \alpha_i(n) = x_i(n) \quad 1 \leq i \leq 2g.$$

On pose aussi, dans  $\widehat{K}^0 X(n)$ ,

$$\beta(n) = [E_n]^{-1}$$

où  $E_n$  est le fibré analytique inversible de base  $X(n)$  défini par 4.3.3. Puisque on a posé  $y(n) = c_1(E_n) \in H^2(X(n); \mathbb{Z})$ , on a donc dans  $H^{\text{pair}}(X(n); \mathbb{Q})$  :

$$5.2.2.2 \quad \text{ch } \beta(n) = y(n) + \frac{1}{2!} y(n)^2 + \dots + \frac{1}{n!} y(n)^n.$$

Une fois de plus, nous omettrons systématiquement l'indice  $n$  dans les notations  $\alpha_i(n)$ ,  $\beta(n)$ , etc...

PROPOSITION 5.2.3. -

(i) Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a une suite exacte correcte "de Gysin"

$$5.2.3.1. \quad 0 \longrightarrow K^*(X(n)) \xrightarrow{(v_n)_*} K^*X(n+1) \xrightarrow{w_{n+1}^*} K^*X_0(n+1) \longrightarrow 0$$

(ii) Dans  $K^*X(n)$ , on a les égalités

$$-\beta = v_n^* (v_n)_*(1) \quad \text{pour } n \geq 1 \text{ et}$$

$$-\beta = (v_{n-1})_*(1) \quad \text{pour } n \geq 2.$$

(iii) Pour tout entier  $n \geq 1$ , les éléments  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2g}$  et  $\beta$  engendrent  $K^*X(n)$  en tant qu'anneaux.

*Preuve.* - (i) L'injection canonique  $v_n : X(n) \hookrightarrow X(n+1)$  définit, en  $KU$  théorie, un homomorphisme de Gysin,  $(v_n)_* : K^*X(n) \longrightarrow K^*X(n+1)$  qui, composé avec l'homomorphisme de restriction  $w_{n+1}^* : K^*X(n+1) \longrightarrow K^*X_0(n+1)$ , donne l'homomorphisme nul. Les morphismes de suites spectrales

$$(v_n)_* : AH X(n) \longrightarrow AH X(n+1)$$

$$w_{n+1}^* : AH X(n+1) \longrightarrow AH X_0(n+1)$$

induisent sur les termes  $E_2$  une suite exacte courte de Gysin

$$0 \longrightarrow E_2X(n) \xrightarrow{(v_n)_*} E_2X(n+1) \xrightarrow{w_{n+1}^*} E_2X_0(n+1) \longrightarrow 0$$

Comme les espaces  $X(n)$ ,  $X(n+1)$  et  $X_0(n+1)$  sont sans torsion, leurs suites spectrales d'Atiyah-Hirzebruch sont dégénérées et par conséquent on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \text{grad } K^*(X(n)) \xrightarrow{\text{grad}(v_n)_*} \text{grad } K^*X(n+1) \xrightarrow{\text{grad } w_{n+1}^*} \text{grad } K^*X_0(n+1) \longrightarrow 0$$

Pour conclure, il ne reste plus qu'à se servir du lemme algébrique évident que voici

LEMME. 5.1.3.2. - Soient  $M', M, M''$  trois groupes abéliens filtrés,  $f : M' \rightarrow M$  et  $g : M \rightarrow M''$  deux morphismes de groupes abéliens filtrés. On suppose que l'on a

(i)  $g \circ f = 0$

(ii)  $M = \bigcup F^p M$  et  $F^p M = 0$  dès que  $p$  est assez grand.

Dans ces conditions, si la suite

$$\text{grad } M' \xrightarrow{\text{grad } f} \text{grad } M \xrightarrow{\text{grad } g} \text{grad } M''$$

est une suite exacte, il en est de même de la suite

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''.$$

Prouvons maintenant les formules de la partie (ii). Puisque le fibré  $E_n$  possède une section analytique au dessus de  $X(n)$  qui annule exactement sur  $X(n-1)$ , il est bien connu [1] que l'on a

$$(v_{n-1})_*(1) = \lambda_{-1}(E_n) = 1 - [E_n] = -\beta \quad \text{si } n \geq 2.$$

D'autre part, comme  $v_n^* E_{n+1} = E_n$ , on déduit aussitôt de cette égalité que l'on a aussi

$$-\beta = 1 - [E_n] = v_n^*(1 - [E_{n+1}]) = v_n^*(v_n)_*(1) \quad \text{si } n \geq 1.$$

Prouvons enfin la partie (iii). La démonstration se fait par récurrence sur l'entier  $n$ , de façon analogue à la preuve de 1.3.5.3., en utilisant les parties (i) et (ii). Le seul point délicat est le suivant :

5.2.3.3. Les éléments  $w_{n+1}^* \alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq 2g$ , engendrent  $K^* X_0(n+1)$  en tant qu'anneau.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K^* X(n+1) & \xrightarrow{w_{n+1}^*} & K^* X_0(n+1) \\ \downarrow \text{ch} & & \downarrow \text{ch} \\ H^*(X(n+1), \mathbb{Q}) & \xrightarrow{w_{n+1}^*} & H^*(X_0(n+1), \mathbb{Q}) \end{array}$$

On a  $ch w_{n+1}^* \alpha_i = w_{n+1}^* ch \alpha_i = w_{n+1}^* x_i \quad 1 \leq i \leq 2g$  dans  $H^1(X_0(n+1); \mathbb{Z})$ .

D'après 4.2.5, les éléments  $w_{n+1}^* x_i$  engendrent  $H^*(X_0(n+1), \mathbb{Z})$ . Comme 5.1.2. prouve que l'on a un isomorphisme  $ch : K^* X_0(n+1) \rightarrow H^*(X_0(n+1); \mathbb{Z})$ , on en déduit que les éléments  $w_{n+1}^* \alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq 2g$ , engendrent  $K^* X_0(n+1)$  en tant qu'anneau.

THEOREME . 5.2.4. - Soient  $X$  une surface de Riemann de genre  $g \geq 0$  et  $n \geq 1$  un entier. Notant  $A_n(g)$  l'anneau de MACDONALD, on a un isomorphisme d'anneau

$$f : A_n(g) \xrightarrow{\sim} K \cup^* X(n)$$

tel que  $f X_i = \alpha_i \quad 1 \leq i \leq 2g$  et  $f Y = j^3$ .

Preuve. - Elle se fait de façon analogue à celle du théorème 4.3.12. Puisque  $H^*(X(n); \mathbb{Z})$  est sans torsion, il en est de même de  $K^* X(n)$ . D'autre part, en utilisant 5.2.3.1 et 5.1.2, une récurrence sur l'entier  $n$  prouve que l'on a  $rg K^* X(n) = rg A_n(g)$ . Par conséquent, posant dans  $K^* X(n)$ ,

$$\alpha_i' = \alpha_{i+g} \quad 1 \leq i \leq 2g \quad \text{et} \quad \gamma_i = \alpha_i \alpha_i' - \beta$$

on voit qu'on est ramené à prouver que dans  $K^* X(n)$  on a

$$\alpha_A \alpha_B \gamma_C \beta^q = 0 \quad \text{si} \quad n_A + n_B + 2n_C + q = n+1.$$

Considérons le monomorphisme composé

$$h : K^* X(n) \xrightarrow{ch} H^*(X(n); \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} A_n(g) \otimes \mathbb{Q}.$$

On peut écrire, par définition même des  $\alpha_i$  et de  $j^3$

$$h(\alpha_i) = x_i$$

$$h(j^3) = y + \frac{1}{2!} y^2 + \dots + \frac{1}{n!} y^n = y \cdot P.$$

$$h(\gamma_i) = z_i - \left( \frac{1}{2!} y^2 + \dots + \frac{1}{n!} y^n \right) = z_i + y^2 Q.$$

La démonstration sera terminée si nous prouvons que dans l'anneau  $A_n \otimes \mathbb{Q}$  on a  $x_A x_B' (z_i + y^2 \cdot Q) C y^q = 0$  si  $n_A + n_B + 2n_C + q = n+1$ . Si nous développons cette expression, il vient

$$x_A x'_B (z_i + y^2 \cdot Q)_C y^q = x_A x'_B \left[ z_C + \dots + \left( \sum_{C_i} z_{C_i} \right) y^{2i} + \dots + y^{2n_C} \right] y^q,$$

où le symbole  $\sum_{C_i}$  signifie que la sommation se fait sur toutes les

parties  $C_i \subset C$  de cardinal  $n_{C_i} = n_C - i$  ( $0 \leq i \leq n_C$ ). Mais alors

$$x_A x'_B z_{C_i} y^{2i+q} = 0 \text{ puisque } n_A + n_B + 2n_{C_i} + (2i+q) = n_A + n_B + 2(n_C - i) + (2i+q) = n+1.$$

Pour finir, déterminons les opérations  $\Psi^K$  d'Adams dans  $K^0X(n)$ . Comme  $K^0X(n)$  est engendré, en tant qu'anneau, par les éléments  $\alpha_U \alpha_V$  avec  $n_U + n_V$  pair et  $\beta$ , tout revient à calculer  $\Psi^k(\alpha_U \alpha_V)$  et  $\Psi^k(\beta)$ .

Supposant toujours  $n_U + n_V$  pair, on a  $\text{ch}(\alpha_U \alpha_V) = x_U x'_V$  et par conséquent  $\text{ch} \Psi^k(\alpha_U \alpha_V) = k^{\frac{1}{2}(n_U + n_V)} x_U x'_V = \text{ch}(k^{\frac{1}{2}(n_U + n_V)} \alpha_U \alpha_V)$ , d'où l'on déduit aussitôt l'égalité

$$\Psi^k(\alpha_U \alpha_V) = k^{\frac{1}{2}(n_U + n_V)} \alpha_U \alpha_V.$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \Psi^k \beta &= \Psi^k([E_n] - 1) \\ &= \Psi^k([E_n]) - 1 \\ &= [E_n]^k - 1 \quad (\text{car } E_n \text{ est de rang } 1) \\ &= (1+\beta)^k - 1. \end{aligned}$$

En résumé :

PROPOSITION 5.2.5 - Dans  $K^0X(n)$  les opérations  $\Psi^k$  d'Adams sont déterminés par les formules

$$\Psi^k(\alpha_U \alpha_V) = k^{\frac{1}{2}(n_U + n_V)} \alpha_U \alpha_V \quad (n_U + n_V \text{ pair}),$$

$$\Psi^k(\beta) = (1+\beta)^k - 1.$$

BIBLIOGRAPHIE.

- 1 M.F. ATIYAH  
F. HIRZEBRUCH : *Analytic cycles on complex manifolds.*  
Topology 1 - (1961) - pp. 25-45.
- 2 A. GROTHENDIECK : *Sur quelques points d'algèbre homologique.*  
Tohoku Math. J. 9 (1957) pp. 119-221.
- 3 J.G. MACDONALD : *The Poincare polynomial of a symmetric product.*  
Proc. Camb. Phil. Soc. 58 - (1962). pp. 563-568.
- 4 I.G. MACDONALD : *Symetric product of an algebraic curve.*  
Topology 1 (1962) pp. 319-343.
- 5 A. MATTUCK : *Picard bundles.*  
Illinois J. Math. 5§1961) pp. 540-560.

---

SEROUL Raymond  
U.E.R. DE MATHÉMATIQUES  
7, rue René Descartes  
67 - STRASBOURG