PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

J. BICHOT

Propriétés d'unicité des supplémentaires

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1972, tome 9, fascicule 3
, p. 59-65
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1972__9_3_59_0>

PROPRIETES D'UNICITE DES SUPPLEMENTAIRES

J. BICHOT

Les anneaux considérés sont tous unitaires. Les modules, sauf mention explicite du contraire, sont des modules à gauche.

I. - Généralement, un facteur direct d'un module M possède dans M plusieurs supplémentaires. Nous nous proposons d'étudier, sous le nom de U.S *modules, les modules* M *tels que chaque facteur direct de* M *possède dans* M *un seul supplémentaire.*

Comme premier exemple, signalons que *tous les modules monogènes sur un anneau commutatif sont des* U.S.*modules*. (Il suffit de considérer A/K, K étant un idéal de l'anneau commutatif A. $I+J = I+J' = A$ et $I\cap J = I\cap J' = K$ implique alors $J = J'$. En effet, $I\cap(J+J') = I(J+J') = IJ + IJ' = K$).

Tout facteur direct d'un U.S.*module est un* U.S.*module*. Par contre, si M est un module non nul, M^2 *n'est en aucun cas un* U.S. *MODULE* (la diagonale possède deux supplémentaires distincts, $\{0\}\times M$ et $M\times\{0\}$). Cela montre en particulier qu'il *n'existe pas d'anneau* A *tel que tout* A-*module à gauche de type fini soit* U.S..

Il est facile de voir que *le treillis des sous-modules d'un module* M *est distributif si et seulement si pour tout couple* X,Y *de sous-modules de* M *tels que* $X\subseteq Y$ *le module* Y/X *est* U.S. (utiliser la distributivité sous la forme $P\cap Q = P\cap Q'$ et $P+Q = P+Q'$ implique $Q = Q'$). Cela fournit une preuve du fait que : *un sous-module d'un* U.S.*module n'est pas nécessairement un* U.S.*module*. (Les anneaux commutatifs auraient tous un treillis d'idéaux distributif : par exemple les anneaux commutatifs intègres seraient tous des anneaux de Prüfer.).

II. - Le résultat fondamental concernant l'unicité du supplémentaire d'un facteur direct d'un module M est du à Fuchs. Soit $M = N \oplus N'$; pour que N' soit l'unique supplémentaire de N dans M, il faut que N' soit stable par les endomorphismes de M et il suffit que N' soit stable par les projecteurs de M. (La démonstration du théorème 22-3 de [4] , relative aux groupes abéliens, est intégralement valable pour les modules). Donnons deux corollaires immédiats de ce théorème :

M est un U.S.*module si et seulement si* $M = M^1 \oplus M_2 = N \oplus N'$ *implique* $N = (N \cap M_1) \oplus (N \cap M_2)$.
Soit $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ *une décomposition d'un* U.S.*module* M, N *un facteur direct de* M *et* J *une partie non vide de* I . *Il vient* $N \cap (\bigoplus_{i \in J} M_i) = \bigoplus_{i \in J} (N \cap M_i)$

Dans un anneau A, un idéal à gauche I est stable par les endomorphismes de ${}_AA$ si et seulement si I est bilatère. Or on vérifie le lemme suivant :

Soit e un idempotent de l'anneau A ; l'idéal Ae est bilatère si et seulement si pour tout idempotent e' de A la condition eA = E'A implique e = e'. Si donc Ae est le seul supplémentaire de A(1-e), alors (1-e)A est le seul supplémentaire de eA. Nous ponvons donc énoncer :

Un anneau A *est un u-s-module en tant que* A*-module si et seulement si* A *est un* U *-* S*-module en tant que* A*-module à droite.* Nous parlerons donc de U.S.*anneau.*

Le théorème de Fuchs permet encore d'établie ce lemme :

Soit A un anneau, K, J et J' des idéaux à gauche de A tels que J+J' = A et $J \cap J' = K$. Pour que J/K soit l'unique supplémentaire de J'/K dans A/K il faut et il suffit que J soit un idéal bilatère. Ceci permet de caractériser les anneaux tels que tous les modules monogènes soient U.S. :

Soit A *un anneau, on a équivalence entre les trois propriétés :*

α) Tout A-module à gauche monogène est un U.S-module
β) Tout idéal à gauche de A est bilatère
γ) Tout idéal principal à gauche de A est bilatère.

Dans le cas des anneaux réguliers (au sens de Von Neumann) on peut améliorer la propriété de la façon suivante :

Soit A un anneau régulier, on a équivalence entre les propriétés :
α) Tout A-module à gauche monog§ne est un U.S.-module ;
α') Tout A-module à droite monogène est un U.S.module ;
β) (ou β') ou γ) ou γ') Tout idéal à gauche (à droite ; principal) est bilatère ;
δ) A est un U.S. anneau ;
ε) Tous les idempotents de A sont centraux ;
ζ) Le seul élément nilpotent de A est zéro.

On remarquera que ces diverses propriétés n'impliquent nullement la commutativité de A. Tout corps non commutatif est un anneau régulier les vérifiant. La démonstration de $\delta) \Rightarrow \varepsilon)$ peut s'appuyer sur le lemme : Dans un anneau A, si e est kun idempotant tel que les idéaux eA et Ae soient bilatères, e est central.
$\zeta) \Rightarrow \varepsilon)$ figure en [2] exercice 17 du paragraphe 6. La réciproque s'appuye sur la propriété suivante des anneaux réguliers : si $a \in A$ et si I est un idéal à gauche de A, alors $(aA) \cap I = aI$. On en tire $aA = a^2A$ pour tout $a \in A$.

Pour les produits d'anneaux, on a la propriété suivante, immédiate :

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'anneaux et $A = \prod_{i\in I} A_i$ l'anneau produit des A_i
1) A est un U.S.anneau si et seulement si chaque Ai est un U.S.anneau.
2) Tout A-module à gauche monogène est U.S. si et seulement si, pour chqque $i \in I$, tout Ai-module à gauche monogène est U.S.

III - Rappelons quelques définitions. Un sous-module N d'un module M est facteur direct absolu de M si tout complément relatif de N dans M est un supplémentaire de N. Si chaque sous-module complément de L est facteur direct absolu, M est dit infra-injectif. Si tout sous-module de M possède une plus grande extension essentielle dans M, M est dit bien complémenté.

Nous avons démontré en [1] qu'un module M est à la fois infrainjectif et bien complémenté si et seulement si les sous-modules compléments de M forment un sous-treillis du treillis des sous-modules de M. Enfin un module M est dit uniforme si tout sous-module non nul de M est essentiel dans M, et deux modules uniformes sont dits similaires, ou encore de même type si leurs enveloppes injectives sont isomorphes.

Première reparque : *Tout U.S.module infra-injectif est bien complémenté.* (Si N est un sous-module de M, et N^ecun complément relatif de N dans M, l'unique supplémentaire N^{cc} de N^c est la plus grande extension essentielle de N dans M).

En utilisant cette remarque, le théorème de Fuchs et le fait que tout module quasi-injectif est infra-injectif, on obtient la propriété :

Si E *est un U.S.module quasi-injectif, tout sous-module de* E *est un U.S.module.*

Le résultat suivant répond dans une certaine mesure à la question de savoir si un module admettant une déoomposition donnée en sous-modules uniformes est ou non U.S. :

Soit M *un module infra-injectif et bien complémenté, somme directe d'une famille* $(X_i)_{i\in I}$ *de sous modules uniformes telle que, pour chaque type de modules uniformes, il existe seulement un nombre fini des* X_i *qui soient de type* t. *Alors, pour que* M *soit un U.S.module, il faut et il suffit que les* X_i *soient deux à deux non isomorphes.*

La démonstration repose sur le lemme suivant : Sous les hypothèses du théorème, si V est un facteur direct de M tel que $V \cap X_i = 0$ pour tout $i \in I$, alors V = 0. En désignant par V^c un complément relatif quelconque de V, et par V_i^c un complément relatif de V contenant X_i, l'isomorphie de V^c et V_i^c montre que V^c possède un sous-module W_i isomorphe à X_i. On démontre alors par récurrence que la famille $(W_i)_{i\in I}$ est linéairement indépendante. Un résultat de J. Fort [3] permet d'affirmer que tout sous-module non nul de M, en particulier V si V n'est pas nul, contient un sous-module uniforme non nul, disons U. U et les W_i forment une famille linéairement indépendante. D'après les théorèmes de dimension de Miyashita [5] le cardinal de l'ensemble des sous-modules d'une famille linéairement indépendante de sous-modules uniformes qui sont du type de U et majoré par le cardinal de l'ensemble des sous-modules uniformes de ce type dans une famille linéairement indépendante maximale, comme les X_i.

On aboutit donc à $p+1 \leqslant p$, p étant un cardinal fini : d'où la nullité de V.

Ce lemme une fois établi, si $N \oplus N' = M$, on désigne par J l'ensemble des indices i tels que $N \cap X_i \neq 0$ et, de même, par J' l'ensemble des i tels que $N' \cap X_i \neq 0$. On met alors N sous la forme $V \oplus (\underset{i \in J}{\oplus} X_i)$, on vérifie que $V \cap X_i = 0$ pour tout $i \in I$; d'où $N = \underset{i \in J}{\oplus} X_i$ et $N' = \underset{i \in J'}{\oplus} X_i$; d'où $J' = I-J$ qui montre que J'; donc N', est complètement déterminé par J, c'est-à-dire par N.

Comme corollaire, citons :

Soit M *un module semi-simple, pour que* M *soit un U.S.module, il faut et il suffit que chaque composant isotypique de* M *soit simple.*
Soit M *un module injectif bien complémenté, admettant une décomposition en somme directe d'injectifs indécomposables* $(M_i)_{i \in I}$:/ M *est un U.S. module si et seulement si les* M_i *sont deux à deux isomorphes.*

Le problème du passage de la propriété U.S. à l'enveloppe injective reçoit une réponse positive dans le cas ci-dessous :

Soit M *un U.S.module infra-injectif, et* E *son enveloppe injective. Si* E *est bien complément, par exemple si le sous-module singulier de* M *est nul, alors* E *est un U.S.module.*

En combinant cette remarque avec le théorème précédant, on obtient le résultat négatif suivant concernant les infra-injectifs :

Soit N *un module uniforme de sous-module singulier nul. Si* N' *est un module uniforme similaire à* N *et non isomorphe à* N, $N \times N'$ *n'est pas infra-injectif.*

IV - Nous donnons maintenant quelques résultats relatifs à la situation duale du paragraphe III. Dans un module M, Y est un supplément de X si $Y+X = M$ et si Y est minimal pour cette propriété. M est dit bien supplémenté si, dans la situation $X+Y = M$, il existe toujours un supplément de X contenu dans Y. M est un α-module si tout sous-module X contient un plus petit sous-module $\alpha(X)$ tel que $X+Y = M \Rightarrow \alpha(X)+Y = M$, et si α est une application croissante.

X est clos si X ne possède pas de sous-module propre X' tel que $X+Y = M \not\Rightarrow X'+Y = M$. M est infra-projectif si tout sous-module clos possède des suppléments, et si ces suppléments sont en fait des supplémentaires. (cf. [1]). On a les résultats :

1) Tout U.S. module infra-projectif et bien supplémenté est un α-module.
2) Soit P un module quasi-projectif et bien supplémenté ; si P est un U.S.module, tout quotient de P est encore un U.S.module.
3) Soit M un U.S.module infra-projectif, et P une converture infra-projective de M. (par exemple une couverture projective, s'il en existe). Si P est un U.S.module,alors P est U.S.
4) Soit A un anneau bien supplémenté (on dit encore : semi-parfait, et la notion est bilatère). On a équivalence entre

- A est un U.S.anneau,
- Tout A-module à gauche monogène est un U.S.module,
- Tout A-module à droite monogène est un U.S.module.

5) Soit M un α-module infra-projectif, somme directe d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ de sous-modules indécomposables ayant la propriété : Pour tout facteur direct V de M distinct de M, il existe un indice $i_0 \in I$ tel que $V+(\bigoplus_{i\neq i_0} X_i)\neq M$. Alors M est U.S.

Cette propriété a lieu en particulier si la famille $(X_i)_{i\ I}$ est finie et composée de sous-modules deu x à deux non isomorphes.

V - Notons une propriété des anneaux d'endomorphismes. Renault a démontré en 6 (Lemme 4.1) cette propriété : Soit E un module injectif dont le sous-module singulier E^{Δ} est nul. Pour qu'il n'existe pas d'endomorphismes nilpotents non nuls de E - c'est-à-dire pour que l'anneau End(E) soit réduit - il faut et il suffit que, pour tout endomorphisme f de E et tout sous-module injectif E_1 on ait $f(E_1) \subsetneq E_1$. In terprétée à la lumière du théorème de Fuchs, la propriété se lit : il faut et il suffit que E soit un U.S.module.

D'autre part, on vérifie aisément le lemme : Soit M un module dont le sous-module singulier M^{Δ} est nul, E l'enveloppe injective de M. Si End(E) est résuit, alors End(M) l'est aussi. (Si $f \in End(M)$ vérifie $f^2 = o$, on vérifie que tout prolongement g de f à E est tel que g^2 prolonge f^2, et que $Ker(g^2)$ est un facteur direct, d'où $g^2 = o$).

On énonce alors :

Soit M *un module infra-injectif tel que le sous-module singulier* M^{Δ} *soit nul : Si* M *est un U.S.module,* End(M) *est réduit. Dans le cas où* M *est quasi-injectifs la réciproque est exacte : si* End(M) *est réduit,* M *est U.S.*

(En effet, si M est infra-injectif et U.S., E est encore U.S. : la propriété de Renault et le lemme donnent alors le résultat. Réciproquement, M étant stable par les endomorphismes de E, End(E) est réduite, E est U.S., et M l'est aussi).

Les anneaux commutatifs munis d'éléments nilpotents non nuls - par exemple $\mathbb{Z}/(4)$ - montrent que End(M) n'est pas réduit pour tout U.S.module M.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. BICHOT : Essentialité et Importance dans les modules. Thèse de 3e cycle - Lyon 1968.

[2] BOURBAKI : Algèbre - Chapitre 8 : Modules et Anneaux semi-simples. Hermann.

[3] J. FORT : Sommes directes de sous-modules co-irréductibles d'un module. CR Acad. Sc. T. 262,1966,1239-1242.

[4] L. FUCHS : Abelian groups. Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences - Budapest 1958.

[5] Y. MIYASHITA : On quasi-injective modules. J. Fac. Sc. Hokkaido Univ. 18 (1965) 158-187.

[6] G. RENAULT : Anneaux réduits non commutatifs. J. Math. Pures et appliquées 46 (1967) p. 203-214.

Manuscrit remis le 21 février 1973.

J. BICHOT
Maître-assistant
Université Claude Bernard
Département de mathématiques
43, bd du 11 novembre 1918
69621 - VILLEURBANNE