PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

JACQUES BERRUYER

BERNARD IVOL

# Espaces de mesures et compactologies

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1972, tome 9, fascicule 1, p. 1-35

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1972__9_1_1_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1972 t. 9-1

# ESPACES DE MESURES ET COMPACTOLOGIES

Jacques BERRUYER et Bernard IVOL

Les espaces de mesures bornées sur un espace topologique T ont fait l'objet, à la suite des travaux d'ALEXANDROFF d'un grand nombre de publications dont l'une des plus importantes est sans doute celle de VARADARAJAN [V1]. Ces espaces de formes linéaires sur l'algèbre $C^{\infty}(T)$ des fonctions réelles continues et bornées sur T sont définis habituellement sans faire appel à la notion de dualité. Ils sont toujours munis de la topologie de la convergence simple sur $C^{\infty}(T)$, appelée topologie étroite. Dans cette démarche aucune topologie naturelle n'apparaît sur les espaces de mesures.

Notre point de vue est fort différent et utilise la notion de compactologie développée par H. BUCHWALTER dans [B5], notion qui fournit ici avec la construction de l'espace M(T) l'exemple fondamental. Il nous paraît préférable de structurer $C^{\infty}(T)$ ou C(T) en algèbres compactologiques plutôt qu'en elc. Ainsi quatre espaces de mesures $M_{\sigma}(T)$, $M^{\infty}(T)$, $M_{\upsilon}(T)$ et M(T) apparaissent comme duals compactologiques et sont munis d'une topologie localement convexe complète, donnant $C^{\infty}(T)$ ou C(T) pour duals. De plus ces espaces contiennent T et les espaces de mesures à deux valeurs comme sous-espaces topologiques totaux.

On peut toutefois noter que sur $C^{\infty}(T)$ des topologies localement convexes ont été définies récemment, dans [F1] et [S1], donnant pour duals les espaces $M_{\sigma}(T)$ et $M_{\upsilon}(T)$. Nous pourrons alors relier ces questions aux compactologies en montrant en (2.1.3) et (3.3.12) que certaines de ces topologies, définies sur $C^{\infty}(T)$ ou C(T), sont exactement celles liées canoniquement aux compactologies introduites.

Il y a cependant d'autres problèmes. En effet la théorie des elc sort rarement du cadre des espaces infratonnelés, et pour ce qui nous préoccupe, c'est semble-t-il une lacune. Les exemples considérés ici sont, à cet égard, très significatifs : M(T) n'est infratonnelé que si T est discret ; quant à $M_\upsilon(T)$ il faut même que T soit discret et dénombrable. Les espaces (DF) pourraient être une première extension. Le résultat n'est pas meilleur puisque T est discret dénombrable dès que M(T) ou $M_\upsilon(T)$ est (DF). Une voie est peut-être ouverte dans [B7], en particulier par l'introduction de la notion d'elc hypotonnelé, généralisant celle d'espace tonnelé, et recouvrant les cas de M(T) et $M_\upsilon(T)$.

Outre les notions de compactification et de complétion d'un espace complètement régulier, nous utilisons certaines propriétés, rappelées en (0.2), de l'algèbre $C(T)$. Le chapitre 0 est consacré à la mise en place des outils indispensables pour la suite, hormis ceux qui relèvent des compactologies où nous renvoyons à [B5].

Les espaces de mesures possèdent certaines propriétés en commun qui font habituellement l'objet de démonstrations spécifiques. Il nous paraît utile de rechercher de bonnes hypothèses permettant d'obtenir ces résultats sous une forme générale. A cet effet, on s'intéresse dans le chapitre 1 aux espaces $M$ de formes linéaires sur $C^\infty(T)$ tels que pour toute $\mu \in M$ et toute $f \in C^\infty(T)$, la forme linéaire $\mu_f = f\mu$ appartienne à $M$. On obtient alors un théorème de décomposition recouvrant les cas classiques.

Les chapitres 2 à 3 sont consacrés respectivement à l'étude des espaces topologiques $M_\sigma(T)$ et $M_\upsilon(T)$. A partir de définitions analogues, les propriétés qui en résultent sont différentes.

On étudie dans le chapitre 4 l'espace M(T) introduit par H. BUCHWALTER dans [B5]. Dans [B3] l'étude de cet espace était liée à la caractérisation de telles mesures au moyen de leur support, ce qui faisait l'objet de la conjecture de BUCHWALTER : M(T) est l'espace des mesures de Radon sur $\beta T$ à support dans $\theta T$. Depuis lors R. HAYDON a montré dans [H1] qu'en appliquant à l'espace M(T) une technique de limite projective on obtient une réponse positive à cette conjecture. Pour notre part, nous donnons dans ce chapitre une démonstration qui utilise de manière essentielle la décomposition de M(T). Cela permet, en reprenant les résultats de [B3], d'établir de bonnes propriétés de cet espace et d'en dégager quelques conséquences.

## 0. - PRELIMINAIRES.

0.1. NOTATIONS. - Dans cet article, les espaces topologiques T introduits sont tous supposés séparés et complètement réguliers. On appelle partie bornée de T, toute partie P telle que les fonctions continues réelles soient bornées sur P, ce qui permet de définir $\|f\|_P = \sup_{t\in P}|f(t)|$. Un espace T dans lequel toute partie bornée est relativement compacte est dit $\mu$-espace. L'algèbre des fonctions réelles continues (resp. continues et bornées) sur T est notée $C(T)$ (resp. $C^\infty(T)$) quand elle n'est pas topologisée. Toute $f\in C(T)$ définit un disque $\Delta(f) = \{g\in C(T); |g|\leqslant|f|\}$. La notation $f_i\downarrow o$ signifie que la suite généralisée $(f_i)$ de $C(T)$, indexée par un ensemble I préordonné filtrant croissant, décroît vers zéro. On désigne par $C_c(T)$ (resp. $C_s(T)$) l'espace $C(T)$ muni de la topologie de la convergence compacte (resp. simple) sur T, et par $C^\infty(T)$ l'espace $C^\infty(T)$ muni de sa norme uniforme dont la boule unité est $\Delta = \Delta(1)$.

Le compactifié de Stone-Čech $\beta T$ de T peut s'interpréter comme l'espace des caractères de l'algèbre de Banach $C^\infty(T)$, muni de la topologie de la convergence simple sur $C^\infty(T)$. L'espace de tous les caractères algébriques de $C(T)$ muni de la topologie de la convergence simple sur $C(T)$ est le replété $\upsilon T$ de T ; l'espace T est replet lorsqu'il s'identifie topologiquement à son replété $\upsilon T$. La théorie de Hewitt est résumée dans l'énoncé suivant :

(0.1.1) THEOREME :

*(a)* $\upsilon T$ *est un sous-espace topologique partout dense de* $\beta T$*, complet pour la structure uniforme de la convergence simple sur* $C(T)$.

*(b) La transformation de Dirac* $j : T \to \upsilon T$ *est un homéomorphisme de* T *sur* $j(T)$ *d'image dense dans* $\upsilon T$.

*(c) L'application de prolongement* $f \to f^\upsilon$ *de* $C(T)$ *dans* $C(\upsilon T)$ *définit un isomorphisme algébrique de* $C(T)$ *sur* $C(\upsilon T)$*, et une isométrie entre les algèbres de Banach* $C^\infty(T)$ *et* $C^\infty(\upsilon T)$.

*(d) L'espace* $\upsilon T$ *et la transformation de Dirac* j *constituent la solution du problème universel des applications continues de* T *dans des espaces replets quelconques.*

0.2. QUELQUES PROPRIETES DE L'ESPACE $C(T)$. - Les résultats élémentaires suivants seront largement utilisés par la suite.

(0.2.1) PROPOSITION. - *Toute suite de* $C(T)$, *décroissante vers zéro, est équicontinue.*

*Preuve.* - Pour $t_o \in T$ et $\varepsilon > o$ il existe $N$ et un voisinage $V$ de $t_o$ tels que $f_n(t_o) \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N$, et $|f_N(t)-f_N(t_o)| < \varepsilon$ pour tout $t \in V$. La suite $(f_n)$ étant décroissante, pour $n \geqslant N$ et $t \in V$ on a $f_n(t) \leqslant 2\varepsilon$ d'où $|f_n(t)-f_n(t_o)| \leqslant 3\varepsilon$. La conclusion est immédiate.

(0.2.2) PROPOSITION. - *Soient* $(f_n)$ *et* $(g_n)$ *deux suites de* $C(T)$ *telles que* $|f_n| \leqslant g_n$. *Si la suite* $(g_n)$ *est équicontinue et converge simplement vers zéro, alors la suite* $(f_n)$ *est équicontinue.*

*Preuve.* - Il suffit de remarquer qu'une suite $(h_n)$ de $C(T)$ est équicontinue et converge simplement vers zéro si et seulement si pour tout point $t_o \in T$ et tout $\varepsilon > o$, il existe un voisinage $V$ de $t_o$ et un entier $N$ tel que $n \geqslant N \Rightarrow \|h_n\|_V \leqslant \varepsilon$.

(0.2.3) COROLLAIRE. - *Pour toute suite* $(f_n)$ *de* $C(T)$, *équicontinue et convergeant simplement vers zéro, la suite* $(f_n^\upsilon)$ *est équicontinue sur* $\upsilon T$ *et converge simplement vers zéro.*

*Preuve.* - Soit $g_n = \sup\limits_{k \geqslant n} |f_k|$ ; la suite $(g_n)$, formée de fonctions continues sur $T$, est décroissante vers zéro, ce qui implique que la suite $(g_n^\upsilon)$ est aussi décroissante vers zéro et d'après (0.2.1), équicontinue sur $\upsilon T$. Ainsi la suite $(f_n^\upsilon)$, telle que $|f_n^\upsilon| \leqslant g_n^\upsilon$ est équicontinue sur $\upsilon T$ grâce à (0.2.2).

L'étude simultanée de l'espace topologique $T$ et de son algèbre de fonctions continues $C(T)$ conduit aux diverses caractérisations suivantes :

(0.2.4) PROPOSITION. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(a)* $T$ *est discret ;*

*(b)* $\Delta$ *est réunion dénombrable de parties équicontinues ;*

*(c)* $C(T)$ *est réunion dénombrable de parties équicontinues.*

*Preuve :*

(a) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (b) : Evident

(b) $\Rightarrow$ (a) : Pour cela, supposons $T$ non discret et $\Delta = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} H_n$ où les $H_n$ sont des parties équicontinues de $C(T)$. Il existe d'une part $t_o \in T$ tel que $\{t_o\}$ ne soit pas ouvert, et d'autre part $U_n$, voisinage ouvert de $t_o$, tels que $|f(t)-f(t_o)| < 2^{-n}$ pour tous $f \in H_n$ et $t \in U_n$. Soit $t_n \in U_n$, $t_n \neq t_o$ ; il existe alors $\phi_n \in C(T)$ vérifiant $o \leqslant \phi_n \leqslant 1$, $\phi_n(t_o) = 1$ et $\phi_n(t_n) = o$. La fonction $\phi = \sum 2^{-n}\phi_n$ appartient à $\Delta$ et vérifie $\phi(t_o) = 1$, $\phi(t_k) \leqslant 1-2^{-k}$, d'où $\phi(t_o) - \phi(t_k) \geqslant 2^{-k}$ ce qui fournit la contradiction puisque $\phi$ appartient à une partie $H_k$ convenable.

(0.2.5) PROPOSITION. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(a)* T *est pseudocompact ;*

*(b)* $C(T)$ *est réunion dénombrable de parties simplement bornées.*

*Preuve :*

(a) $\Rightarrow$(b) : Evident.

Pour montrer (b) $\Rightarrow$(a), reprenons la démonstration de [B4]. Supposons que $C(T)$ est réunion d'une suite $(A_n)$ de parties simplement bornées. Si f est continue, positive et non bornée sur T, les ouverts $U_n = \{t;f(t)>n\}$ forment une suite localement finie d'ouverts non vides. Fixons $t_n \in U_n$ et posons $a_n = \operatorname{Sup}_{g \in A_n} |g(t_n)|$.

Il existe $\phi_n \in C(T)$ vérifiant $o \leqslant \phi_n \leqslant 1$, $\phi_n(t_n) = 1$ et supp $\phi_n \subset U_n$. La fonction $\phi = \sum(1+a_n)\phi_n$ est alors continue et telle que $\phi(t_n) \geqslant a_n+1$, donc $\phi$ n'appartient à aucun $A_n$, ce qui est absurde.

(0.2.6) COROLLAIRE. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(a)* T *est fini ;*

*(b)* $C(T)$ *est réunion dénombrable de parties équicontinues et simplement bornées.*

(0.2.7) PROPOSITION. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(a)* T *est un* P*-espace, c'est-à-dire tout noyau de* T *est ouvert ;*

*(b) toute réunion dénombrable de parties équicontinues de* $C(T)$ *est équicontinue ;*

*(c) toute suite* $(f_n)$ *de* $C(T)$ *est équicontinue ;*

*(d) toute suite* $(f_n)$ *de* $\Delta$ *est équicontinue.*

*Preuve :*

(a) $\Rightarrow$(b) : Car l'intersection d'une suite $(V_n)$ de voisinages d'un point t de

T est encore un voisinage de t.
(b) ⟹(c) ⟹(d) : Evident.
(d) ⟹(a) : Car pour tout noyau $Z = Z(f)$, où $o \leq f \leq 1$, la suite $(g_n)$ de $\Delta$ définie par $g_n = n(\frac{1}{n} \wedge f)$ est équicontinue, ce qui prouve que la fonction $1_{\complement Z} = \lim g_n$ est continue donc que Z est ouvert.

Enfin, rappelons sous la forme donnée dans [B6] quelques résultats dus à Nachbin.

Pour toute $f \in C(T)$ on désigne par $\overline{f}$ l'application continue de $\beta T$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ définie par f. Lorsque $f \in C^\infty(T)$ on conserve la notation classique $f^\beta$. Soit D un disque de $C(T)$ contenant $\Delta$. Il existe un plus petit fermé F de $\beta T$ tel que $\|\overline{f}\|_F = o$ implique $f \in D$. Ce fermé, noté K(D), s'appelle l'appui de D. La condition $\|\overline{f}\|_{K(D)} < 1$ implique également $f \in D$.

(0.2.8) THEOREME. - *Soit* D *un disque de* C(T) *contenant* $\Delta$ . *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(a)* $K(D) \subset \upsilon T$ ;

*(b)* D *est un voisinage de zéro dans* $C_c(\upsilon T)$ ;

*(c)* D *est un disque bornivore dans* $C_c(\upsilon T)$ ;

*(d)* D *absorbe tous les disques* $\Delta(f)$ *où* $f \in C(T)$ ;

*(e)* D *est un disque équivore, c'est-à-dire absorbe toutes les parties équicontinues et simplement bornées de* C(T).

## 1. - UNE PROPRIETE DE STABILITE DES ESPACES DE MESURES.

Désignons par $M_\beta(T)$ le dual de l'espace de Banach $C^\infty(T)$, c'est-à-dire l'espace des mesures de Radon sur $\beta T$, que l'on topologise en général de deux manières : avec la norme uniforme qui en fait un espace de Banach, ou avec la topologie $\sigma(M_\beta(T), C^\infty(T))$ dite topologie étroite. Le sous-espace de $M_\beta(T)$, ensemble des formes linéaires $\mu$ satisfaisant à la condition suivante : $f_n \in C^\infty(T)$, $f_n \downarrow o \Rightarrow \mu(f_n) \to o$ est noté $M_\sigma(T)$, et s'identifie à l'espace des mesures signées bornées sur la tribu de Baire ba(T) de T, qui est la tribu engendrée par les noyaux de T. C'est de plus un sous-espace fermé de l'espace de Banach $M_\beta(T)$, engendré par son cône positif.

1.1. DECOMPOSITION D'UN SOUS-ESPACE DE $M_\sigma(T)$. - Soit $Ba^\infty(T)$ la plus petite classe de fonctions $f : T \to \mathbb{R}$, contenant $C^\infty(T)$ et stable par limite simple de suites uniformément bornées. L'ensemble $Ba^{\infty}(T)$ est évidemment contenu dans l'algèbre des fonctions Baire-mesurables et bornées.

(1.1.1) PROPOSITION. - $Ba^{\infty}(T)$ *est une algèbre.*

*Preuve.* - Montrons par exemple que $Ba^{\infty}(T)$ est stable pour les sommes ; les autres vérifications sont analogues. Pour $f \in C^{\infty}(T)$, l'ensemble $H_f = \{g \in Ba^{\infty}(T) \ ; \ f+g \in Ba^{\infty}(T)\}$ qui contient $C^{\infty}(T)$ est stable par limite simple de suites uniformément bornées. Ainsi $Ba^{\infty}(T) = H_f$. Un raisonnement identique prouve que l'ensemble $H = \{f \in Ba^{\infty}(T) \ ; \ H_f = Ba^{\infty}(T)\}$ est égal à $Ba^{\infty}(T)$.

(1.1.2) PROPOSITION. - *Une partie* A *de* T *appartient à* ba(T) *si et seulement si sa fonction caractéristique* $1_A$ *appartient à* $Ba^{\infty}(T)$.

*Preuve.* - La proposition (1.1.1) montre que l'ensemble $\mathcal{T} = \{A \subset T \ ; \ 1_A \in Ba^{\infty}(T)\}$ est une tribu. Si $U = \{t \ ; \ f(t) > o\}$ est un conoyau de T avec $o \leq f \leq 1$, alors $1_U = \lim \uparrow f_n$, où $f_n \in C^{\infty}(T)$ est définie par $f_n = 1 \wedge nf$. Ainsi $\mathcal{T}$ contient les conoyaux et $ba(T) \subset \mathcal{T}$. Réciproquement si $1_A$ appartient à $Ba^{\infty}(T)$, la fonction $1_A$ est Baire-mesurable donc $A \in ba(T)$.

(1.1.3) COROLLAIRE. - $Ba^{\infty}(T)$ *est l'algèbre des fonctions Baire-mesurables et bornées.*

*Preuve.* - Il reste à prouver qu'une fonction f, Baire-mesurable et bornée, appartient à $Ba^{\infty}(T)$. On peut supposer $f \geq o$ ; il existe alors une suite $(f_n)$ de fonctions positives étagées sur ba(T) telle que $f_n \uparrow f$, ce qui suffit.

Si $\mu \in M_{\sigma}(T)$ et $A \in ba(T)$, la mesure de Baire $B \to \mu(A \cap B)$ est notée $\mu_A$.

(1.1.4) THEOREME. - *Pour un sous-espace fermé* M *de l'espace de Banach* $M_{\sigma}(T)$, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(a) pour toute* $\mu \in M$ *et toute* $f \in C^{\infty}(T)$, *la mesure* $\mu_f = f\mu$ *appartient à* M ;

*(b) pour toute* $\mu \in M$ *et toute* $f \in Ba^{\infty}(T)$, *la mesure* $\mu_f = f\mu$ *appartient à* M ;

*(c) pour toute* $\mu \in M$ *et tout* $A \in ba(T)$, *la mesure* $\mu_A$ *appartient à* M ;

*(d) pour toute* $\mu \in M$ *et tout noyau* Z *de* T, *la mesure* $\mu_Z$ *appartient à* M.

*Preuve :*

(a) $\Rightarrow$ (b) : Si $\mu \in M$, l'ensemble $E = \{f \in Ba^{\infty}(T) ; \ \mu_f \in M\}$ qui contient déjà $C^{\infty}(T)$

est égal à $Ba^{\infty}(T)$. En effet, soit f la limite simple d'une suite $(f_n)$ de E telle que $\|f_n\| \leqslant 1$ pour tout n ; la fonction f est $\mu$-intégrable donc $\mu_f \in M_\sigma(T)$ et l'inégalité $\|\mu_{f_n} - \mu_f\| \leqslant |\mu|(|f_n - f|)$ montre que $\mu_f \in M$.

(b) $\Rightarrow$(c) : D'après (1.1.2) ; (c) $\Rightarrow$(d) : Evident.

(d) $\Rightarrow$(c) : L'ensemble $A$ des parties $A\in ba(T)$ telles que $\mu_A \in M$ pour toute $\mu\in M$, stable par passage au complémentaire et par réunion finie disjointe, est en fait une tribu car pour toute suite croissante $(A_n)$ de $A$, de réunion A, la mesure $\mu_A$ appartient à $M$ grâce à l'inégalité $\|\mu_A - \mu_{A_n}\| \leqslant |\mu|(1_A - 1_{A_n})$.
Ainsi $A = ba(T)$.

(c) $\Rightarrow$(a) : Déjà, pour toute fonction f appartenant à l'espace vectoriel $E$ des fonctions étagées sur l'algèbre de Baire de T, et pour toute $\mu\in M$, on a $\mu_f \in M$. Il suffit alors de prouver que toute fonction $f\in C^{\infty}(T)$ est limite uniforme d'une suite $(f_n)$ de fonctions de $E$. Pour cela, on se ramène à supposer $f\geqslant o$ en remplaçant, au besoin, cette fonction par la fonction $f - \operatorname{Inf}_{t\in T} f(t)$, et on construit $f_n$ de la manière suivante :

$$\bullet \qquad f_n = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\|f\|}{n}\, 1_{A_{p,n}} \quad \text{où} \quad A_{p,n} = \{t\in T \ ; \ f(t) > \tfrac{p}{n}\|f\|\}.$$

(1.1.5) <u>COROLLAIRE</u>. - *Tout sous-espace fermé $M$ de l'espace de Banach $M_\sigma(T)$ satisfaisant à l'une des conditions équivalentes du théorème (1.1.4) est engendré par son cône positif.*

*Preuve.* - Si $\mu\in M$, alors $\mu$, et par suite $\mu^+$, appartiennent à $M_\sigma(T)$. D'après le théorème de Hahn-Jordan, il existe $A\in ba(T)$ tel que $\mu^+ = \mu_A$ et tout est dit.

La proposition suivante et son corollaire (1.1.7) donnent une démonstration de (1.1.5) qui éclaire tout à fait le sens des hypothèses faites sur $M$.

(1.1.6) <u>PROPOSITION.</u> - *Soient* $\mu\in M_\sigma(T)$ *et* $f\in Ba^{\infty}(T)$. *Pour tout* $\varepsilon>o$, *il existe une partie* $A\in ba(T)$ *et une suite* $(f_n)$ *de* $C^{\infty}(T)$ *telles que :*

*(a)* $|\mu|(T\setminus A) < \varepsilon$ ;

*(b)* $\|f-f_n\|_A \to o$ *quand* $n \to \infty$.

*Preuve.* - Pour une mesure $\mu\in M_\sigma(T)$ donnée, la famille $F$ des fonctions $f\in Ba^{\infty}(T)$ pour lesquelles la proposition (1.1.6) est vraie, contient $C^{\infty}(T)$. Soit alors f la limite simple d'une suite uniformément bornée de $F$. La mesure $|\mu|$ étant bornée, il existe en vertu du théorème d'Egoroff, une partie $B \in ba(T)$ telle que $|\mu|(T\setminus B) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\|f_n - f\|_B \to o$. Pour tout $n \geqslant 1$, il existe $A_n \in ba(T)$ et une suite $(g_{n,k})_k$ de $C^\infty(T)$ telles que $|\mu|(T\setminus A_n) \leqslant \varepsilon 2^{-(n+1)}$ et $\|f_n - g_{n,k}\|_{A_k} \to o$ quand $k \to \infty$. Il suffit alors de poser $A = B \cap (\bigcap_{n \geqslant 1} A_n)$, et d'utiliser le procédé diagonal pour montrer que f appartient à $F$.

(1.1.7) COROLLAIRE. - *Pour toute mesure* $\mu \in M_\sigma(T)$ *et pour tout* $\varepsilon > o$, *il existe* $f \in C^\infty(T)$ *telle que* $o \leqslant f \leqslant 1$ *et* $\|\mu^+ - f\mu\| \leqslant \varepsilon$.

*Preuve.* - On sait que $\mu^+ = 1_A \mu$ avec $A \in ba(T)$ ; il existe donc $B \in ba(T)$ et $f_n \in C^\infty(T)$ telles que $\|f_n - 1_A\|_B \to o$ et $|\mu|(T\setminus B) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$. On peut même supposer $o \leqslant f_n \leqslant 1$ et alors il existe N tel que $\|\mu^+ - f_n\mu\| \leqslant \|\mu\| \|1_A - f_n\|_B + 2|\mu|(T\setminus B) \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N$.

(1.1.8) COROLLAIRE. - *Soit* $\mu \in M_\sigma(T)$. *Pour toute fonction* $f \in Ba^\infty(T)$, *il existe une suite* $(A_n)$ *de* $ba(T)$ *telle que :*

*(a)* $|\mu|(T\setminus \bigcup_n A_n) = o$ ;

*(b) La restriction de* f *à* $A_n$ *est continue pour tout* n.

1.2. APPLICATIONS A L'ESPACE $M^\infty(T)$. - Grâce aux résultats précédents, on obtient quelques informations supplémentaires sur l'espace $M^\infty(T)$ introduit par LEGER-SOURY dans [L1] et étudié par M. ROME dans [R3]. HAYDON [H1] et WHEELER [W1] retrouvent ces résultats par des voies différentes. Rappelons la construction de cet espace. La famille $H^\infty(T)$ des parties équicontinues et uniformément bornées de $C^\infty(T)$, chacune étant munie de la topologie de la convergence simple, structure $C^\infty(T)$ en algèbre compactologique [B5]. L'espace $M^\infty(T)$, ensemble des formes linéaires sur $C^\infty(T)$ qui sont continues sur les $H \in H^\infty(T)$, muni de la $H^\infty$-convergence est un elc complet admettant pour dual l'espace $C^\infty(T)$.

La proposition (0.2.1) montre que $M^\infty(T)$ est contenu dans $M_\sigma(T)$. De plus $M^\infty(T)$ est fermé pour la norme et, en appliquant le corollaire (1.1.5), on retrouve, par ce biais, le corollaire 1 de [R2].

(1.2.1) THEOREME. - *Pour une mesure* $\mu \in M_\beta(T)$, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(a)* $\mu \in M^\infty(T)$ ;

*(b)* $\mu^{+}\in M^{\infty}(T)$ *et* $\mu^{-}\in M^{\infty}(T)$ *;*

*(c)* $|\mu|\in M^{\infty}(T)$.

Comme autre application de (1.1.5), on peut citer :

(1.2.2) PROPOSITION. - *Une forme linéaire* $\mu$ *sur* $C^{\infty}(T)$ *appartient à* $M^{\infty}(T)$ *si et seulement si, pour toute suite généralisée* $(f_i)$ *de* $C^{\infty}(T)$*, équicontinue et décroissante vers zéro, la suite généralisée* $(\mu(f_i))$ *tend vers zéro.*

*Preuve.* - Supposons d'abord $\mu\geqslant o$. Si $(f_i)$ est une suite généralisée de $C^{\infty}(T)$, équicontinue, uniformément bornée et convergeant simplement vers zéro, la suite généralisée $g_i = \sup\limits_{j\geqslant i}|f_j|$ est équicontinue et décroissante vers zéro. Alors $|\mu(f_i)| \leqslant \mu(g_i)$ d'où le résultat. Dans le cas général, le sous-espace $M$ des mesures $\mu$ de $M_{\sigma}(T)$ satisfaisant à la condition de (1.2.2) est fermé pour la norme et vérifie la condition a) de (1.1.4). Son cône positif, égal à $(M^{\infty}(T))^{+}$, engendre l'espace tout entier et $M = M^{\infty}(T)$.

*Remarque 1.* - A tout espace compactologique convexe régulier $X$, on peut associer (B5) un elc $\overleftarrow{c}X$ qui est l'espace $X$ muni de la topologie localement convexe la plus fine rendant continues les injections $K \to X$ où K décrit la famille des disques "compacts" de $X$. On a alors l'égalité compactologique $(\overleftarrow{c}X)' = \overleftarrow{\gamma}X^{*}$. Rappelons que la topologie $T_{\infty}$ de l'elc $\tau(C^{\infty}(T), H^{\infty})$, n'est autre que la topologie $\beta_e$ introduite dans (W1) par WHEELER qui démontre en particulier que $\overleftarrow{c}C^{\infty}(T)$ est un espace de Mackey. On obtient alors :

(1.2.3) PROPOSITION. - *La topologie* $T_{\infty}$ *sur* $C^{\infty}(T)$ *est la topologie localement convexe la plus fine rendant convergentes les suites généralisées équicontinues* $f_i\downarrow o$.

*Preuve.* - La topologie $T_{\infty}$ vérifie cette propriété. L'espace $(C^{\infty}(T),T)$ où $T$ est la plus fine topologie localement convexe sur $C^{\infty}(T)$ vérifiant cette propriété a pour dual $M^{\infty}(T)$. Ainsi $T$ est moins fine que $\tau(C^{\infty}(T), M^{\infty}(T)) = T_{\infty}$ d'où le résultat.

*Remarque 2.* - En suivant (F1), on peut considérer les parties régulières de $M_{\beta}(T)$, c'est-à-dire les parties A de $M_{\beta}(T)$ telles que pour toute suite généralisée équicontinue $f_i\downarrow o$, la suite généralisée $(\mu(f_i))$ converge vers zéro uniformément sur A. Il est facile de voir que $\mathcal{T}_\infty$ est la topologie de la convergence uniforme sur les parties régulières de $M_\beta(T)$.

L'espace des formes linéaires $\mu$ sur $C^\infty(T)$ satisfaisant à la condition suivante : $(f_i \in C^\infty(T),\ f_i \downarrow o) \Rightarrow (\mu(f_i) \to o)$ et noté habituellement $M_\tau(T)$, est ainsi un sous-espace de $M^\infty(T)$. Le corollaire (1.1.5) donne une démonstration simple de l'existence de la décomposition de $M_\tau(T)$, ce qui, avec le théorème (1.2.1), permet d'énoncer un résultat de [L1] sous une forme plus générale : " si T est paracompact alors $M^\infty(T) = M_\tau(T)$ ". Largement étudié dans la littérature, l'espace $M_\tau(T)$ s'identifie à l'espace des mesures boréliennes $\mu$ sur T, telles que $(\mu(F_i))$ tende vers zéro pour toute suite généralisée $(F_i)$ de fermés de T décroissante vers l'ensemble vide.

Les propriétés de $M_\tau(T)$ nous donnent d'ailleurs l'occasion d'obtenir de nouvelles propriétés du couple en dualité $(C^\infty(T),\ M_\tau(T))$, faisant intervenir les structures uniformes compatibles avec la topologie de T.

(1.2.3) <u>THEOREME</u>. - *Soient* T *un espace complètement régulier,* $\mathcal{V}$ *une structure uniforme compatible et* $\mathcal{V}^\infty(T)$ *l'algèbre des fonctions numériques bornées uniformément continues sur* $(T,\mathcal{V})$. *Toute fonction positive* $f \in C(T)$ *est limite simple d'une suite généralisée croissante* $(g_i)$ *de* $\mathcal{V}^\infty(T)$.

*Preuve.* - L'ensemble $G = \{g \in \mathcal{V}^\infty(T);\ o \leq g \leq f\}$ étant filtrant croissant, il suffit de prouver que la fonction $h = \sup_{g \in G} g$ est égale à f. Sinon il existe $t_o \in T$ tel que $h(t_o) < f(t_o)$, et $g \in G$ telle que $f(t_o) - 4\alpha < g(t_o) \leq f(t_o) - 3\alpha$ avec $3\alpha = f(t_o) - h(t_o)$. Soient alors d un écart de la structure uniforme $\mathcal{V}$ tel que $f - 4\alpha < g < f - 2\alpha$ sur $B_d(t_o,1)$ et $\phi \in \mathcal{V}^\infty(T)$ telle que $o \leq \phi \leq 1$, $\phi(t_o) = 1$ et $\operatorname{supp} \phi \subset B_d(t_o,1)$. La fonction $g' = g - 2\alpha\phi$ appartient à G et $g'(t_o) > f(t_o) - 2\alpha$ ce qui est absurde.

(1.2.4) <u>COROLLAIRE</u>. - *Avec les notations du théorème précédent, une mesure* $\mu \in M_\tau(T)$ *est nulle si et seulement si* $\mu(f) = o$ *pour toute* $f \in \mathcal{V}^\infty(T)$.

(1.2.5) <u>COROLLAIRE</u>. - *Pour toute structure uniforme compatible* $\mathcal{V}$ *sur* T, *l'espace* $\mathcal{V}^\infty(T)$ *des fonctions uniformément continues et bornées sur* $(T,\mathcal{V})$ *est dense dans* $C^\infty(T)$ *muni de la topologie* $\sigma(C^\infty(T), M_\tau(T))$.

On sait déjà [L1] que, sur le cône positif de $M_\tau(T)$, la topologie de la

$H^\infty$-convergence coïncide avec la topologie étroite. On a un peu mieux puisque :

(1.2.6) PROPOSITION. - *Soient* $V$ *une structure uniforme compatible sur* T *et* $V^\infty(T)$ *l'algèbre des fonctions uniformément continues et bornées. Sur le cône positif de* $M_\tau(T)$, *la topologie étroite coïncide avec la topologie faible* $\sigma(M_\tau(T),V^\infty(T))$.

*Preuve.* - Soit $(\mu_\alpha)$ une suite généralisée de $(M_\tau(T))^+$ convergeant vers $\mu\in(M_\tau(T))^+$ pour la topologie $\sigma(M_\tau(T),V^\infty(T))$. Soit C un fermé de T. Si $(d_i)$ est une famille saturée d'écarts sur T définissant la structure uniforme $V$, on pose $G_{in} = \{t\in T \; ; \; d_i(t,C) \leqslant \frac{1}{n}\}$. Puisque pour tout $t\in T$ on a $d_i(t,C) + d_i(t,\complement G_{in}) \leqslant \frac{1}{n}$, la fonction $f_{in}$ définie sur T par

$$f_{in}(t) = \frac{d_i(t,\complement G_{in})}{d_i(t,C)+d_i(t,\complement G_{in})}$$ est uniformément continue et telle que $o\leqslant f_{in}\leqslant 1$, $f_{in} = 1$ sur C, $f_{in} = o$ sur $\complement G_{in}$.

On en déduit les inégalités :

$$\overline{\lim_\alpha}\, \mu_\alpha(C) \leqslant \overline{\lim_\alpha} \int f_{in}d\mu_\alpha = \int f_{in}\, d\mu \leqslant \mu(G_{in})$$

Soit alors un ouvert U contenant C et tel que $\mu(U) - \mu(C) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ ; pour l'ordre naturel sur les couples (i,n), la suite généralisée $(G_{in}\setminus U)$ décroît vers l'ensemble vide et il existe (i,n) tel que $\mu(G_{in}\setminus U) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ d'où $\mu(G_{in}) \leqslant \varepsilon + \mu(C)$.

Ainsi $\overline{\lim_\alpha}\, \mu_\alpha(C) \leqslant \mu(C)$ ce qui suffit en vertu d'un théorème classique.

1.3. MESURES A DEUX VALEURS, CARACTERES ET POINTS EXTREMAUX. - Fixons tout d'abord les notations. Pour un sous-espace $M$ de $M_\beta(T)$, on note $B_M$ sa boule unité et $B_M^+$ la partie positive de $B_M$. L'ensemble des points extrêmaux d'une partie convexe C de $M$ est noté $E(C)$. Par mesure à deux valeurs sur T, on entend mesure $\sigma$-additive sur l'algèbre de Baire $F$ de T, à deux valeurs 0 ou 1, et $J_M^+$ désigne l'ensemble des mesures à deux valeurs sur T appartenant à $M$. Enfin, $G_M$ désigne l'ensemble des caractères de l'algèbre de Banach $C^\infty(T)$ qui appartiennent à $M$.

(1.3.1) PROPOSITION. - *Toute* $\mu\in G_M$ *est une mesure à deux valeurs.*

*Preuve.* - Il suffit de prouver que, pour tout noyau Z de T, $\mu(Z) = o$ ou $\mu(Z) = 1$.

Supposons $\mu(Z) < 1-\varepsilon$ où $\varepsilon>o$. Puisque $\mu(Z) = \mathrm{Inf}\{\mu(g)\ ;\ 1_Z \leqslant g \leqslant 1,\ g\in C^{\infty}(T)\}$, il existe $g\in C^{\infty}(T)$ telle que $1_Z \leqslant g \leqslant 1$ et $\mu(g) \leqslant 1-\varepsilon$. Alors, pour tout entier n, on a $\mu(Z) \leqslant \mu(g^n) = \mu(g)^n \leqslant (1-\varepsilon)^n$ et par suite $\mu(Z) = o$.

La proposition suivante est implicitement contenue dans [VI] :

(1.3.2) PROPOSITION. - *Toute mesure à deux valeurs sur* T, *appartenant à* $M$ *est un élément de* $E(B_M^+)$.

*Preuve.* - Soit $\mu\in J_M^+$, $\mu\neq o$, telle que $\mu = a\mu_1 + (1-a)\mu_2$ avec $o<a<1$ et $\mu_i\in B_M^+$ $(i=1,2)$. Puisque $\|\mu\| = 1$, on a $1 \leqslant a\|\mu_1\| + (1-a)\|\mu_2\| \leqslant 1$ d'où $\|\mu_1\| = \|\mu_2\| = 1$. Si $A\in F$ est telle que $\mu(A) = 1$, alors $\mu_1(A) = \mu_2(A) = 1$. Si $\mu(A) = o$, alors $\mu(\complement A) = 1$ donc $\mu_1(\complement A) = \mu_2(\complement A) = 1$ et $\mu_1(A) = \mu_2(A) = o$. En résumé $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ce qu'il fallait démontrer.

(1.3.3) THEOREME. - *Soit* $M$ *un sous-espace de* $M_\beta(T)$ *tel que pour toute* $\mu\in M$ *et toute* $f\in C^{\infty}(T)$ *la mesure* $\mu_f = f\mu$ *appartient à* $M$. *Alors* $J_M^+ = E(B_M^+) = G_M\cup\{o\}$.

*Preuve.* - Il reste à prouver que toute $\mu\in E(B_M^+)$, $\mu\neq o$ est élément de $G_M$. Tout d'abord, une mesure $\mu\in E(B_M)$ est telle que $\|\mu\| = 1$, car en supposant $o < \|\mu\| < 1$, il existe $a>1$ tel que $o < a\|\mu\| < 1$ d'où $\mu = \frac{1}{a}(a\mu) + (1-\frac{1}{a})o$ ce qui est contradictoire. Ensuite si $\mu(f) = o$ pour une fonction $f\in C^{\infty}(T)$, $\mu(fg) = o$ pour toute $g\in C^{\infty}(T)$. En effet, on se ramène facilement à supposer $\|f\| \leqslant 1$. Les applications $g \to \mu_1(g) = \mu((1+f)g)$ et $g \to \mu_2(g) = \mu((1-f)g)$ définissent deux mesures $\mu_1$ et $\mu_2$ appartenant à $B_M^+$. Comme $\mu = \dfrac{\mu_1+\mu_2}{2}$, on obtient $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ et le résultat cherché. Enfin il est aisé de voir que la condition $\mu(f) = 1$ implique $\mu(f^2) = 1$ et, par suite $\mu(fg) = 1$ dès que $\mu(f) = \mu(g) = 1$.
La conclusion est alors immédiate.

Ce qui suit précise, dans certains cas, le rapport entre $B_M$ et $G_M$.

(1.3.4) PROPOSITION. - *Soit* $M$ *un sous-espace de* $M_\beta(T)$, *contenant* T. *L'enveloppe disquée étroitement fermée de* $G_M$ *dans* $M$ *est égale à* $B_M$.

*Preuve.* - Dans la dualité $(C^{\infty}(T), M_\beta(T))$ le polaire de $G_M$ est $\Delta$. Grâce au théorème des bipolaires, l'enveloppe disquée étroitement fermée de $G_M$ dans $M_\beta(T)$ coïncide avec $\Delta°$, c'est-à-dire avec la boule unité de $M_\beta(T)$ et il en est de même de leurs traces sur $M$.

(1.3.5) <u>COROLLAIRE</u>. - *Soit M un sous-espace de* $M_\beta(T)$, *contenant* T *et muni d'une topologie localement convexe* $\mathcal{T}$ *donnant pour dual* $C^\infty(T)$. *L'enveloppe disquée* $\mathcal{T}$*-fermée de* $G_M$ *est égale à la boule unité de M.*

L'espace $M^\infty(T)$ est déjà un exemple d'une telle situation ; nous allons en étudier un autre.

## 2. - UNE TOPOLOGIE SUR L'ESPACE $M_\sigma(T)$.

Il s'agit dans ce chapitre d'étudier une topologie localement convexe sur $M_\sigma(T)$, topologie que nous définissons par dualité à partir d'une compactologie sur $C^\infty(T)$. Cette topologie, plus fine que la topologie étroite, est suffisamment faible pour donner $C^\infty(T)$ comme dual et pour que T, et aussi son replété $\upsilon T$, soient des sous-espaces topologiques totaux de $M_\sigma(T)$.

### 2.1. <u>CONSTRUCTION DE L'ELC</u> $M_\sigma(T)$.

(2.1.1) <u>PROPOSITION</u>. - *Soit* $(f_n)$ *une suite de* $C^\infty(T)$, *équicontinue, uniformément bornée et convergeant simplement vers zéro. L'adhérence* $\overline{\Gamma}(f_n)$, *dans l'espace produit* $\mathbb{R}^T$, *de son enveloppe disquée est un disque compact métrisable de* $C_s^\infty(T)$ *et* $\overline{\Gamma}(f_n) = \{\sum \lambda_n f_n \; ; \sum |\lambda_n| \leqslant 1\}$.

*Preuve*. - Soit u l'application continue de $\ell^1$ muni de la topologie $\sigma(\ell^1, c_o)$ dans $C_s^\infty(T)$ définie par $u((\lambda_n)) = \sum \lambda_n f_n$. La boule unité de $\ell^1$ étant disquée métrisable et compacte pour $\sigma(\ell^1, c_o)$, il en est de même de son image par u dans $C_s^\infty(T)$ qui est alors $\overline{\Gamma}(f_n)$.

La famille $\mathcal{H}_o^\infty(T)$ des parties $\overline{\Gamma}(f_n)$ de $C^\infty(T)$, où $(f_n)$ est une suite équicontinue uniformément bornée et convergeant simplement vers zéro, chacune étant munie de la topologie de la convergence simple sur T, est un recouvrement filtrant croissant de $C^\infty(T)$, formé de disques compacts dans l'espace $C_s^\infty(T)$. Ainsi $\mathcal{H}_o^\infty$ définit une compactologie vectorielle convexe régulière, structurant $C^\infty(T)$ en un espace compactologique que nous notons $C_o^\infty(T)$. On a alors :

(2.1.2) <u>THEOREME</u>. - *Le dual compactologique de* $C_o^\infty(T)$ *est l'espace* $M_\sigma(T)$ *des mesures de Baire signées et bornées sur* T.

*Preuve*. - Un élément $\mu$ du dual $(C_o^\infty(T))^*$ est une forme linéaire sur $C^\infty(T)$ continue sur les parties $H\in\mathcal{H}_o^\infty(T)$ ; en particulier $\mu(f_n) \to o$ pour toute suite $f_n \downarrow o$ et ainsi $\mu\in M_\sigma(T)$. Réciproquement, on considère une suite $(g_n)$ dans $H\in\mathcal{H}_o^\infty(T)$ qui converge vers zéro (on peut toujours se ramener à cette situation car H est un disque métrisable). Si $\mu\in M_\sigma(T)$, la suite $(\mu(g_n))$ tend vers zéro grâce à l'inégalité $|\mu(g_n)| \leqslant |\mu|(|g_n|)$ et au théorème de convergence dominée.

L'espace $M_\sigma(T)$ peut alors être muni de la topologie de la $\mathcal{H}_o^\infty$-convergence définie par les semi-normes $p_H(\mu) = \operatorname{Sup}_n|\mu(f_n)|$ où $H = \bar{\Gamma}(f_n)$ est élément de $\mathcal{H}_o^\infty$, pour laquelle c'est un elc complet. Son dual, lu compactologiquement, est $C_o^\infty(T)$ comme il résulte du théorème (3.2.2) de [B5].

Il est intéressant de comparer le théorème (2.1.2) avec la construction de $M_\sigma(T)$ que donnent FREMLIN, GARLING et HAYDON dans un récent article [F1]. Rappelons brièvement leur méthode. Une partie A de $M_\beta(T)$ est dite σ-régulière lorsque $\operatorname{Sup}_{\mu\in A}|\mu(f_n)| \to o$ pour toute suite $f_n$ de $C^\infty(T)$ décroissante vers zéro. Soit $T_\sigma$ la topologie sur $C^\infty(T)$ de la convergence uniforme sur les parties σ-régulières, qui est aussi la topologie localement convexe la plus fine rendant convergentes les suites $f_n\downarrow o$. Le dual de l'elc $(C^\infty(T),T_\sigma)$ est l'espace $M_\sigma(T)$. La compactologie $\mathcal{H}_o^\infty$ et la topologie $T_\sigma$ sont reliées par :

(2.1.3) <u>PROPOSITION</u>. - *La topologie $T_\sigma$ est la plus fine topologie localement convexe sur $C^\infty(T)$ qui coïncide avec la topologie de la convergence simple sur les $H\in\mathcal{H}_o^\infty$ d'où la formule : $\overline{c}C_o^\infty(T) = (C^\infty(T),T_\sigma)$.*

*Preuve*. - Puisque $T_\sigma$ est la plus fine topologie localement convexe rendant convergentes les suites de $C^\infty(T)$ décroissantes vers zéro, et que les disques $H\in\mathcal{H}_o^\infty$ sont simplement métrisables, le résultat s'obtient alors par un procédé classique en remarquant qu'une partie A est σ-régulière si et seulement si son enveloppe solide S(A) l'est.

(2.1.4) <u>COROLLAIRE</u>. - *L'espace $(C^\infty(T),T_\sigma)$ est un elc de Kelley [B5].*

2.2. <u>ETUDE DE L'ELC</u> $M_\sigma(T)$. - La topologie de la $\mathcal{H}_o^\infty$- convergence est en général strictement plus fine que la topologie étroite comme le montrera la proposition (2.3.2). Toutefois :

(2.2.1) <u>PROPOSITION</u>. - *La topologie de la $\mathcal{H}_o^\infty$-convergence coïncide avec la topologie étroite sur le cône positif de $M_\sigma(T)$.*

*Preuve.* - Soient $(\mu_\alpha)$ une suite généralisée de $M_\sigma^+(T)$ qui converge étroitement vers $\mu$, et $(f_n)$ une suite de $C^\infty(T)$, équicontinue, uniformément bornée et convergeant simplement vers zéro. On peut supposer $f_n \geqslant o$. Soit $g_n = \operatorname{Sup}_{m \geqslant n} f_m$

Pour tout $\varepsilon > o$, il existe k tel que $\mu(g_k) \leqslant \varepsilon$ ; il existe aussi $\alpha_o$ tel que $\operatorname{Sup}_{n \leqslant k} |\mu_\alpha(f_n) - \mu(f_n)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $\alpha \geqslant \alpha_o$. Pour n>k on a

$|\mu_\alpha(f_n) - \mu(f_n)| \leqslant \operatorname{Max}(\mu(g_k), \mu_\alpha(g_k))$ et il existe $\alpha_1$ tel que

$\operatorname{Sup}_{n > k} |\mu_\alpha(f_n) - \mu(f_n)| \leqslant 2\varepsilon$ pour tout $\alpha \geqslant \alpha_1$, ce qui achève la démonstration.

(2.2.2) COROLLAIRE. - T *et* $\upsilon T$ *sont des sous-espaces topologiques totaux de* $M_\sigma(T)$.

*Preuve.* - Il reste à voir que T est total dans $M_\sigma(T)$, ce qui provient de l'égalité $M_\sigma(T)' = C^\infty(T)$.

(2.2.3) PROPOSITION. - *Une partie* B *de* $M_\sigma(T)$ *est bornée si et seulement si* B *est bornée en norme.*

*Preuve.* - Si B est un borné de $M_\sigma(T)$ qui n'est pas borné sur $\Delta$, il existe $\mu_n \in B$ et $g_n \in \Delta$ telles que $|\mu_n(g_n)| \geqslant n^2$. Ainsi B n'est pas bornée sur la suite équicontinue $(\frac{g_n}{n})$ qui converge uniformément vers zéro, d'où la contradiction.

(2.2.4) COROLLAIRE. - $M_\sigma(T)$ *admet une base dénombrable de bornés.*

(2.2.5) COROLLAIRE. - *Le dual fort de* $M_\sigma(T)$ *est l'espace de Banach* $C^\infty(T)$.

*Preuve.* - Immédiate car le polaire de la boule unité de $M_\sigma(T)$ est $\Delta$.

Rappelons la caractérisation des parties étroitement relativement compactes de $M_\sigma(T)$ donnée par VARADARAJAN dans [V1] :

THEOREME. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(a)* B *est étroitement relativement compacte dans* $M_\sigma(T)$ *;*

*(b)* B *est bornée en norme et* $\operatorname{Sup}_{\mu \in B} |\mu|(f_n) \to o$ *pour toute suite* $(f_n)$ *de* $C^\infty(T)$ *telle que* $f_n \downarrow o$.

Il est facile de voir qu'une partie B de $M_\sigma(T)$ qui vérifie la deuxième condition de (b) est bornée en norme. On est alors conduit à :

(2.2.6) THEOREME. - *Pour une partie* B *de* $M_\sigma(T)$ *les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(a)* B *est relativement compacte ;*

*(b)* B *est étroitement relativement compacte ;*

*(c) pour toute suite* $(f_n)$ *de* $C^{\infty}(T)$*, équicontinue, uniformément bornée et convergeant simplement vers zéro, on a* $\sup_{\mu \in B} |\mu|(f_n) \to 0$ *;*

*(d) l'enveloppe solide* S(B) *de* B *est étroitement relativement compacte.*

*Preuve :*

(a) ⟹(b) : Evident.

(b) ⟹(c) : On sait déjà que $\sup_{\mu \in B} |\mu|(f_n) \to 0$ pour toute suite $f_n \downarrow 0$ grâce au théorème précédent; on se ramène facilement dans le cas général à une suite décroissante.

(c) ⟹(a) : La restriction de B à $H \in \mathcal{H}_0^{\infty}$ est un équicontinu de $C(H)$ puisque pour toute suite $g_n$ tendant vers g dans H, on a $\sup_{\mu \in B} |\mu(g_n) - \mu(g)| \to 0$. Il reste à appliquer les résultats (3.3.3) et (3.3.4) de [B5].

(d) ⟹(b) et (c) ⟹(d) : Evident.

(2.2.7) COROLLAIRE. - *Les intervalles de* $M_{\sigma}(T)$ *sont compacts.*

L'espace $M_{\sigma}(T)$ étant faiblement semi-complet d'après [V1] on peut remarquer, grâce au théorème (2.2.6), que les suites faiblement de Cauchy dans $M_{\sigma}(T)$ sont convergentes pour la topologie de la $\mathcal{H}_0^{\infty}$-convergence. On pourra rapprocher ce résultat du théorème 7 de [D1].

(2.2.8) PROPOSITION. - *L'espace* $M_{\sigma}(T)'_c$ *est isomorphe à* $(C^{\infty}(T), \mathcal{T}_{\sigma})$.

*Preuve.* - $M_{\sigma}(T)$ étant complet, on a $M_{\sigma}(T)'_c = \bar{c}(M_{\sigma}(T)') = \bar{c}C_0^{\infty}(T)$, ce qui ramène à la topologie $\mathcal{T}_{\sigma}$ d'après (2.1.3).

## 2.3. QUELQUES CAS PARTICULIERS.

(2.3.1) PROPOSITION. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(a)* T *est pseudocompact ;*

*(b)* $M_{\sigma}(T)$ *est semi-réflexif ;*

*(c)* $M_{\sigma}(T)$ *est un espace de type* $(\mu)$ *;*

*(d)* $M_{\sigma}(T)$ *est un espace de Schwartz ;*

*(e)* $M_{\sigma}(T) = C^{\infty}(T)'_c$.

*Preuve :*

(a) $\Rightarrow$(e) : Dans cette démonstration, $C^\infty(T)$ est l'espace $C^\infty(T)$ muni de la compactologie $H^\infty$ définie en (1.2) ; $\bar{\gamma}C^\infty(T)$ est, comme dans [B5], l'ecc associé au Banach $C^\infty(T)$, et T étant pseudocompact, on a $\bar{\gamma}C^\infty(T) = C^\infty(T)$. Pour un compact K de $C^\infty(T)$, il existe une suite $(f_n)$ convergeant vers zéro dans $C^\infty(T)$ (donc équicontinue), dont l'enveloppe disquée fermée pour la norme, et a fortiori l'enveloppe disquée simplement fermée, contient K. D'où les égalités compactologiques $C_o^\infty(T) = C^\infty(T) = \bar{\gamma}C^\infty(T)$ et par suite les égalités topologiques $M_\sigma(T) = M^\infty(T) = C^\infty(T)'_c$.

(e) $\Rightarrow$(d) : Car si E est un espace de Fréchet, $E'_c$ est un espace de Schwartz.

(d) $\Rightarrow$(c) $\Rightarrow$(b) : Evident.

(b) $\Rightarrow$(a) : Résulte de (2.2.5) puisqu'alors $M_\sigma(T) = M_\beta(T)$ et $\upsilon T = \beta T$, ce qui caractérise les espaces pseudocompacts.

(2.3.2) <u>PROPOSITION</u>. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(a)* T *est fini ;*

*(b)* $M_\sigma(T)$ *est de dimension finie ;*

*(c)* $M_\sigma(T)$ *est un espace faible ;*

*(d)* $M_\sigma(T)$ *est infratonnelé.*

*Preuve :*

(a) $\Rightarrow$(b), (b) $\Rightarrow$(c) et (b) $\Rightarrow$(d) : Evident.

(c) $\Rightarrow$(a) : Si T est infini, soient $(t_n)$ une suite de points distincts et $f_n \in C^\infty(T)$ telle que : $o \leq f_n \leq 1$, $f_n(t_k) = o$ si $k<n$, $f_n(t_n) = 1$. La suite $(2^{-n}f_n)$ converge uniformément vers zéro sur T et l'espace vectoriel qu'elle engendre est de dimension infinie. Ceci contredit l'hypothèse puisque toute partie $H \in H_o^\infty$ devrait engendrer un espace de dimension finie.

(d) $\Rightarrow$(a) : Si $M_\sigma(T)$ est infratonnelé les équicontinus du dual $M_\sigma(T)'$ sont les bornés de $C^\infty(T)$. Ainsi T est déjà discret puisque le disque unité $\Delta$ est équicontinu, et $M_\sigma(T)$ est normable. Mais de plus $\Delta \in H_o^\infty$, donc il existe une suite $f_n \in C^\infty(T)$, bornée en norme et convergeant simplement vers zéro, telle que $\Delta \subset \bar{\Gamma}(f_n)$. Alors l'application $\mu \to (\mu(f_n))_n$ réalise une injection de $M_\sigma(T)$ dans $c_o$ qui permet d'identifier $M_\sigma(T)$ à un sous-espace topologique de $c_o$. Le dual fort de $M_\sigma(T)$, qui est l'espace de Banach $\ell^\infty(T)$, est donc séparable, ce qui implique que T est fini.

## 3. - UNE TOPOLOGIE SUR L'ESPACE DES MESURES DE RIESZ.

Nous construisons sur l'espace, noté $M_\upsilon(T)$, des mesures de Riesz de T, une topologie localement convexe complète suffisamment faible pour que T et son replété $\upsilon T$ apparaissent comme des sous-espaces topologiques totaux de $M_\upsilon(T)$. Pour cette topologie, l'espace $M_\upsilon(T)$ est de type ($\mu$) ; il n'est pas infratonnelé en général, bien qu'il soit toujours hypotonnelé au sens de [B7]. Ceci montre une fois de plus la nécessité d'une classification des elc non infratonnelés.

3.1. RAPPELS. - Une mesure de Riesz sur T est par définition une forme linéaire sur C(T) bornée sur les disques $\Delta(f)$ pour toute $f\in C(T)$. Toute forme linéaire positive sur C(T) est une mesure de Riesz et toute mesure de Riesz est différence de deux formes linéaires positives sur C(T).

(3.1.1) PROPOSITION. - *Une forme linéaire $\mu$ sur C(T) est une mesure de Riesz si et seulement si pour toute suite $(f_n)$ de C(T), décroissante vers zéro, la suite $(\mu(f_n))$ tend vers zéro.*

*Preuve.* - Pour montrer la condition nécessaire qui est classique, on se limite à supposer $\mu\geq o$. Pour tout nombre réel $\varepsilon>o$, la suite d'ouverts $U_m = \{t\in T\ ;\ f_m(t)<\varepsilon\}$ croît vers T. Pour tout $n\geq m$ et tout $t\in U_m$, on a $(f_n(t)-\varepsilon)^+ = o$ et la formule $g = \sum_n (f_n-\varepsilon)^+$ définit une fonction g continue sur T. Et ainsi $\sum \mu\left((f_n-\varepsilon)^+\right) \leq \mu(g)$ et $\mu\left((f_n-\varepsilon)^+\right)$ décroît vers zéro ce qui achève la démonstration car $o\leq\mu(f_n) \leq \varepsilon\mu(1) + \mu\left((f_n-\varepsilon)^+\right)$.

Pour la condition suffisante, soit f une fonction positive continue sur T telle que $\mu$ ne soit pas bornée sur $\Delta(f)$. Pour tout $M>o$, il existe $g\in C(T)$ telle que $o\leq g\leq f$ et $|\mu(g)| = M$. En effet, il existe $h\in C(T)$ telle que $o\leq|h|\leq f$ et $|\mu(h)| \geq 2M$. On voit alors que $g' = h^+$ ou $g' = h^-$ réalise les conditions $o\leq g'\leq f$ et $|\mu(g')| \geq M$ et il suffit de poser $g = \dfrac{Mg'}{|\mu(g')|}$. Construisons par récurrence une suite $(M_n)$ vérifiant $M_1 = 1$ et $2^{-(n+1)}M_{n+1} = (n+1) + \sum_1^n 2^{-k}M_k$, puis une suite $(g_n)$ telle que $o\leq g_n\leq f$ et $|\mu(g_n)| = M_n$. La série $\sum_1^\infty 2^{-k}g_k$ est localement normalement convergente, donc sa somme h est une fonction continue. Soit $h_n = \sum_1^n 2^{-k}g_k$ et $f_n = h-h_n$. La suite $(f_n)$ décroît vers zéro et

$$|\mu(f_n)| \geqslant |\mu(h_n)| - |\mu(h)| \geqslant 2^{-n} M_n - \sum_1^{n-1} 2^{-k} M_k - |\mu(h)| = n - |\mu(h)| .$$

Ainsi $(\mu(f_n))$ ne tend pas vers zéro, d'où le résultat.

(3.1.2) PROPOSITION. - *L'ensemble des restrictions à* $C^\infty(T)$ *des mesures de Riesz sur* T *s'identifie à un sous-espace de* $M_\beta(T)$.

*Preuve.* - Soit $\mu$ une mesure de Riesz et $\check{\mu}$ sa restriction à $C^\infty(T)$. L'application $\mu \to \check{\mu}$ est injective ; en effet si $\mu(f) = o$ pour toute $f \in C^\infty(T)$, et si $g \in C(T)$ est une fonction continue, que l'on peut supposer positive, alors la suite $g_n = n \wedge g$ croît vers $g$ d'où $\mu(g) = \lim \mu(g_n) = o$.

Ainsi à toute mesure de Riesz $\mu$ sur T, on associe une unique mesure de Radon $\check{\mu}$ sur $\beta T$. Par définition, le support de la mesure de Riesz $\mu$ est le support de la mesure $\check{\mu}$ correspondante. CHOQUET, dans [C1], caractérise les mesures de Riesz comme étant les mesures de Radon sur $\beta T$ à support dans $\upsilon T$. Nous allons retrouver ce résultat par application du théorème de NACHBIN rappelé en (0.2.8).

(3.1.3) PROPOSITION. - *Soit* $\mu$ *une mesure de Riesz sur* T *dont la restriction à* $C^\infty(T)$ *appartient à* $M_\beta(T)$, *et soit* D *le disque de* $C(T)$ *défini par :* $D = \{f \in C(T)\ ;\ |\mu(f)| \leqslant 1\}$ *; alors* $Supp\ \check{\mu} = K(D)$.

*Preuve.* - Pour $f \in C^\infty(T)$ telle que $f^\beta = o$ sur $K(D)$ on a $\mu(f) = o$, donc déjà $Supp\ \check{\mu} \subset K(D)$. Réciproquement, on remarque, dans le cas où $\mu$ est positive, qu'une fonction $f \in C(T)$ a un prolongement continu unique $\bar{f}$ à $\beta T$ qui est $\check{\mu}$-intégrable et tel que $\check{\mu}(\bar{f}) = \mu(f)$. En effet, on peut supposer $f \geqslant o$ ; la suite $f_n^\beta$ où $f_n = n \wedge f$ croît simplement vers $\bar{f}$ et $\check{\mu}(f_n^\beta) \leqslant \mu(f)$, donc avec le théorème de Beppo-Lévi et (3.1.1) $\check{\mu}(\bar{f}) = \lim \mu(f_n) = \mu(f)$. Si $\mu$ est une mesure de Riesz quelconque, la mesure $(\check{\mu})^+$ est la restriction à $C^\infty(T)$ de $\mu^+$ d'où $(\check{\mu})^+(\bar{f}) = (\mu^+)^\vee(\bar{f})$. Ainsi $\mu(f) = \check{\mu}(\bar{f})$, de sorte que la condition "$\bar{f} = o$ sur $Supp\ \check{\mu}$" implique $\mu(f) = o$. Mais alors $K(D) \subset Supp\ \check{\mu}$, d'après la définition de l'appui $K(D)$.

Avant de regrouper les résultats obtenus, donnons une autre caractérisation des éléments de $M_\beta(T)$.

(3.1.4) PROPOSITION. - *Pour une forme linéaire* $\mu$ *sur* $C^\infty(T)$, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(a)* $\mu \in M_\beta(T)$ *;*

*(b)* $\mu$ *est bornée sur les parties équicontinues, uniformément bornées de* $C^\infty(T)$ *;*

*(c)* $\mu$ *est bornée sur les suites* $(f_n)$ *de* $C^\infty(T)$ *, équicontinues, uniformément bornées et convergeant simplement vers zéro.*

*Preuve :*

(a) $\Rightarrow$(b) : car si H est une partie équicontinue et uniformément bornée de $C^\infty(T)$ alors $H \subset \Delta(f)$ où $f = \sup_{g \in H} |g|$.

(b) $\Rightarrow$(c) : Evident.

(c) $\Rightarrow$(a) : Si $\mu$ n'est pas bornée sur $\Delta$, alors il existe, pour tout n, une fonction $g_n \in \Delta$ telle que $|\mu(g_n)| \geq n^2$. La suite $f_n = \frac{g_n}{n}$ est équicontinue, uniformément bornée et converge simplement vers zéro, mais $|\mu(f_n)| \geq n$ d'où la contradiction.

En résumé :

(3.1.5) <u>THEOREME</u>. - *Soit* $\mu$ *une forme linéaire sur* C(T). *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(a)* $\mu$ *est une mesure de Riesz sur* T *;*

*(b) pour toute suite* $(f_n)$ *de* C(T) *décroissante vers zéro, la suite* $(\mu(f_n))$ *tend vers zéro ;*

*(c) pour toute suite* $(f_n)$ *de* C(T) *, équicontinue et convergeant simplement vers zéro, la suite* $(\mu(f_n))$ *tend vers zéro ;*

*(d)* $\mu$ *est bornée sur les suites* $(f_n)$ *de* C(T) *équicontinues et convergeant simplement vers zéro ;*

*(e)* $\mu$ *est bornée sur les parties équicontinues et simplement bornées de* C(T) *;*

*(f) il existe une mesure de Radon* m *sur* $\beta T$*, à support* K *contenu dans* $\upsilon T$*, telle que* $\mu(f) = m_K(f^\upsilon|_K)$ *pour toute* $f \in C(T)$ *;*

*(g)* $\mu$ *est continue sur* $C_c(\upsilon T)$.

*Preuve :*

(a)$\Leftrightarrow$(b) : C'est la proposition (3.1.1).

(b) $\Rightarrow$(c) : Voir par exemple la preuve de (1.2.2).

(c) $\Rightarrow$(d) : Evident.

(d) $\Rightarrow$(e) : Preuve analogue à celle de (c) $\Rightarrow$(a) dans la proposition (3.1.4).

(e) $\Rightarrow$(f) : Si $\mu$ vérifie la condition (e), il suffit grâce à (3.1.3) et (3.1.4) de prouver que $K(D)$ est inclus dans $\upsilon T$, ce qui résulte de (0.2.8) car D est équivore.

(f) $\Rightarrow$(g) : La condition (f) prouve que $\mu$ est une mesure de Riesz ; ainsi d'après (3.1.3) $K(D)$ est inclus dans $\upsilon T$ et D est un voisinage de zéro dans $C_c(\upsilon T)$ d'après (0.2.8).

(g) $\Rightarrow$(b) : Evident.

Signalons, à titre de remarque, que l'espace des mesures de Riesz sur T est précisément noté $M_\upsilon(T)$ à cause de l'énoncé (f).

3.2. <u>CONSTRUCTION DE L'ELC</u> $M_\upsilon(T)$. - Le théorème (3.1.5) nous amène à introduire une compactologie convenable sur $C(T)$ donnant pour dual l'espace $M_\upsilon(T)$ des mesures de Riesz sur T. Cette démarche, identique à celle de la construction de l'espace $M_\sigma(T)$, fournit du même coup sur $M_\upsilon(T)$ une topologie localement convexe complète donnant pour dual l'espace $C(T)$.

Par une démonstration calquée sur celle de (2.1.1), on obtient :

(3.2.1) <u>PROPOSITION</u>. - *Soit* $(f_n)$ *une suite de* $C(T)$, *équicontinue et convergeant simplement vers zéro. L'adhérence* $\bar{\Gamma}(f_n)$, *dans l'espace produit* $\mathbb{R}^T$, *de son enveloppe disquée, est un disque compact métrisable équicontinu de* $C_s(T)$ *et* $\bar{\Gamma}(f_n) = \{\sum \lambda_n f_n \ ; \ \sum|\lambda_n| \leqslant 1\}$.

En poursuivant l'analogie avec le chapitre 2, il est facile de voir que la famille $\mathcal{H}_o(T)$ des parties $H = \bar{\Gamma}(f_n)$ de $C(T)$, où $(f_n)$ est une suite équicontinue convergeant simplement vers zéro, est un recouvrement filtrant croissant de $C(T)$, formé de disques compacts dans l'espace $C_s(T)$. Ainsi $\mathcal{H}_o(T)$ définit une compactologie vectorielle convexe régulière, structurant $C(T)$ en un espace compactologique que nous notons $\mathcal{C}_o(T)$.

La métrisabilité des disques $\bar{\Gamma}(f_n)$ et la condition (c) du théorème (3.1.5) montrent que le dual de l'espace compactologique $\mathcal{C}_o(T)$ s'identifie à l'espace $M_\upsilon(T)$ des mesures de Riesz sur T. Ce dernier est ainsi naturellement muni d'une topologie localement convexe complète qui est celle de la $\mathcal{H}_o$-convergence, définie par les semi-normes $p_H(\mu) = \operatorname{Sup}_n |\mu(f_n)|$, où $H = \bar{\Gamma}(f_n)$ décrit $\mathcal{H}_o(T)$. Son dual, lu compactologiquement, est alors $C_o(T)$, ce qui implique que T est un sous-espace total de l'elc $M_\upsilon(T)$.

D'après (0.2.3), la famille $\mathcal{H}_o(T)$ ne change pas en remplaçant l'espace T par son replété $\upsilon T$. Cette remarque montre que la topologie de $\upsilon T$ est celle de la $\mathcal{H}_o$-convergence, et $\upsilon T$ apparaît alors comme un sous-espace topologique de $M_\upsilon(T)$. En résumé :

(3.2.2) <u>THEOREME</u>. - *La topologie de la $\mathcal{H}_o$-convergence fait de l'espace $M_\upsilon(T)$ des mesures de Riesz sur* T *un elc complet contenant* T *et* $\upsilon T$ *comme sous-espaces totaux et ayant pour dual l'espace* $C(T)$.

3.3. <u>PROPRIETES GENERALES DE L'ESPACE</u> $M_\upsilon(T)$.

(3.3.1) <u>PROPOSITION</u>. - *L'espace topologique* $M_\upsilon(T)$ *est replet.*

*Preuve.* - Il suffit de prouver que toute application continue $\phi$ d'un espace complètement régulier S dans $M_\upsilon(T)$ se prolonge en une application continue $\upsilon S \to M_\upsilon(T)$. Or $\phi$ détermine par transposition, une application linéaire compactologique $\psi : C_o(T) \to C_o(S)$ définie par $\psi(f)(s) = \langle f,\phi(s)\rangle$, à partir de laquelle on construit une application linéaire continue $\Phi : M_\upsilon(S) \to M_\upsilon(T)$, définie par $\Phi(\mu)(f) = \mu(\psi(f))$, dont la restriction à $\upsilon S$ est le prolongement de $\phi$ cherché.

(3.3.2) <u>PROPOSITION</u>. - *L'espace topologique* $M_\sigma(T)$ *est replet.*

*Preuve.* - Par un raisonnement analogue au précédent, on obtient, à partir de l'application continue $\phi : S \to M_\sigma(T)$, une application $\psi : C_o(T) \to C_o(S)$ et une application $\Phi : M_\upsilon(S) \to M_\sigma(T)$ ce qui suffit.

L'étude des parties bornées de $M_\upsilon(T)$ va mettre en évidence les différences topologiques entre $M_\sigma(T)$ et $M_\upsilon(T)$.

(3.3.3) <u>THEOREME</u>. - *Pour toute partie* B *de* $M_\upsilon(T)$, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(a) pour toute* $f \in C(T)$, $B(f)$ *est bornée dans* $\mathbb{R}$ ;

*(b)* B *est un borné de l'elc* $M_\upsilon(T)$ ;

*(c) pour toute* $f \in C(T)$, B *est borné sur l'intervalle* $\Delta(f)$.

*Preuve :*

(a) $\Rightarrow$ (b) : Car $M_\upsilon(T)' = C(T)$ et les bornés sont les mêmes pour toutes les topologies compatibles avec la dualité.

(b) $\Rightarrow$ (c) : Si B n'est pas borné sur $\Delta(f)$, pour tout entier n, il existe $\mu_n \in B$ et $g_n \in \Delta(f)$ telles que $|\mu_n(g_n)| \geq n^2$. Ainsi B n'est pas borné sur la suite équicontinue $(\frac{g_n}{n})$ qui converge vers zéro.

(3.3.4) <u>COROLLAIRE.</u> - *Le polaire de tout disque borné de* $M_\upsilon(T)$ *est un voisinage de zéro dans* $C_c(\upsilon T)$.

*Preuve.* - Le polaire de tout disque borné B de $M_\upsilon(T)$ est un disque fermé de $C_c(\upsilon T)$. Puisque B est borné, il existe pour toute $f \in C(T)$ un scalaire $\lambda_f$ tel que $\Delta(f) \subset \lambda_f B°$, et en particulier $\Delta \subset \lambda B°$. Le disque $\lambda B°$ est alors, d'après (0.2.8), un voisinage de zéro dans $C_c(\upsilon T)$ et $B°$ également.

(3.3.5) <u>PROPOSITION.</u> - *Pour tout borné* B *de* $M_\upsilon(T)$, *il existe* $\lambda > o$ *et un compact* K *de* $\upsilon T$ *tels que* $|\mu(f)| \leq \lambda \| f^\upsilon \|_K$ *pour toute* $f \in C(T)$ *et toute* $\mu \in B$.

*Preuve.* - D'après (3.3.4), il existe $\varepsilon > o$ et un compact K de $\upsilon T$ tels que $\| f^\upsilon \|_K \leq \varepsilon \Rightarrow f \in \Gamma(B)°$ ce qui suffit.

(3.3.6) <u>COROLLAIRE.</u> - *Pour tout borné* B *de* $M_\upsilon(T)$, *il existe* $\lambda > o$ *et un compact* K *de* $\upsilon T$ *tels que* $B \subset \lambda \bar{\Gamma}(K)$, *où* $\bar{\Gamma}(K)$ *désigne l'enveloppe disquée fermée de* K *dans* $M_\upsilon(T)$.

*Preuve.* - C'est une conséquence immédiate de (3.3.5) et du théorème des bipolaires.

(3.3.7) <u>PROPOSITION.</u> - *Une partie* B *de* $M_\upsilon(T)$ *est bornée si et seulement si* B *est bornée en norme et s'il existe un compact* K *de* $\upsilon T$ *tel que* Supp $\mu \subset K$ *pour toute* $\mu \in B$.

*Preuve.* - La condition nécessaire provient de (3.3.3) et (3.3.5). Réciproquement, si $f \in C(T)$, il existe $g \in C^\infty(T)$ telle que $\|g\| < 1$ et $g^\upsilon = \frac{f^\upsilon}{\|f^\upsilon\|_K}$ sur K. D'où pour toute $\mu \in B$, $|\mu(f)| = |\mu(g)| \, \|f^\upsilon\|_K \leq M \|f^\upsilon\|_K$.

Le corollaire (3.3.6) a pour conséquence évidente :

(3.3.8) THEOREME. - *L'espace* $M_\cup(T)$ *est un elc de type* $(\mu)$, *c'est-à-dire que ses bornés sont relativement compacts.*

On tire de ce théorème les conséquences suivantes :

(3.3.9) COROLLAIRE :

*(a) Une partie* A *de* $M_\cup(T)$ *est relativement compacte si et seulement si son enveloppe solide* S(A) *est relativement compacte.*

*(b) Les intervalles de* $M_\cup(T)$ *sont compacts.*

*(c)* $M_\cup(T)$ *est faiblement semi-complet.*

*(d)* $M_\cup(T)'_\beta = M_\cup(T)'_c = C_c(\cup T)$.

En regroupant les caractérisations des bornés de $M_\cup(T)$, on obtient :

(3.3.10) COROLLAIRE. - *Pour une partie* B *de* $M_\cup(T)$, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(a)* B *est relativement compacte ;*

*(b)* B *est relativement faiblement compacte ;*

*(c)* B *est bornée ;*

*(d)* B *est un équicontinu du dual* $C_c(\cup T)'$ ;

*(e) pour toute suite* $(f_n)$ *équicontinue et tendant vers zéro, on a* $\sup_{\mu\in B}|\mu|(f_n) \to 0$.

*Preuve.* - Les propriétés (a),(b),(c) sont équivalentes puisque $M_\cup(T)$ est un elc de type $(\mu)$.

(a) $\Rightarrow$(d) : Car on a les égalités compactologiques $C_c(\cup T)' = (M_\cup(T)'_c)' = \bar{\gamma}M_\cup(T)$ où $\bar{\gamma}M_\cup(T)$ désigne l'ecc associé à l'elc $M_\cup(T)$.

(e) $\Rightarrow$(c) et (d) $\Rightarrow$(e) : Evident.

L'espace $M_\cup(T)$ possède en outre certaines propriétés des espaces de SCHWARTZ :

(3.3.11) PROPOSITION. - *Les parties équicontinues du dual* $M_\cup(T)'$ *sont faiblement métrisables.*

*Preuve.* - Sur un équicontinu de $M_\cup(T)'$, c'est-à-dire sur une partie $H \in \mathcal{H}_o(T)$, la topologie faible coïncide avec la topologie de la convergence simple qui est métrisable.

La comparaison faite au chapitre 2 entre la topologie $\mathcal{T}_\sigma$ et la compactologie $\mathcal{H}_o^\infty$ sur $C^\infty(T)$ se transcrit ici en :

(3.3.12) PROPOSITION. - *Sur* $C(T)$ *les topologies suivantes sont identiques :*

*(a) la topologie de la convergence compacte sur* $\upsilon T$ *;*

*(b) la plus fine topologie localement convexe rendant convergentes les suites* $(f_n)$ *de* $C(T)$ *décroissantes vers zéro ;*

*(c) la plus fine topologie localement convexe qui coïncide avec la topologie de la convergence simple sur les parties* $H \in \mathcal{H}_o$.

*Muni de l'une de ces topologies,* $C(T)$ *admet pour dual* $M_\upsilon(T)$.

*Preuve.* - $M_\upsilon(T)$ étant complet, la formule $C_c(\upsilon T) = M_\upsilon(T)'_c = \bar{c}(C_o(T))$ montre déjà que les topologies définies en (a) et (c) sont identiques. Pour montrer que celles définies en (b) et (c) sont identiques, on remarque d'abord que la première est plus fine que la seconde et que la seconde, qui est celle de $C_c(\upsilon T)$, est une topologie de Mackey puisque $C_c(\upsilon T)$ est ultrabornologique. Il suffit donc de vérifier, ce qui est d'ailleurs immédiat, que $M_\upsilon(T)$ est le dual de $C(T)$ quand on le munit de la topologie définie en (b).

L'analogue de la proposition (2.2.1) est :

(3.3.13) PROPOSITION. - *La topologie de la* $\mathcal{H}_o$*-convergence coïncide avec la topologie faible* $\sigma(M_\upsilon(T),C(T))$ *sur le cône positif de* $M_\upsilon(T)$.

Enfin la caractérisation (d) du théorème (3.1.5) signifie exactement que l'espace $M_\upsilon(T)$ est b-réflexif au sens de [B7]. Il est donc hypotonnelé, c'est-à-dire que dans $M_\upsilon(T)'$ tout disque équivore absorbe les bornés faibles, comme il résulte de [B7]. Cependant, ainsi que nous allons le voir, il n'est pas infratonnelé en général.

## 3.4. CAS PARTICULIERS.

(3.4.1) PROPOSITION. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(a)* $M_\upsilon(T)$ *est infratonnelé ;*

*(b)* $M_\upsilon(T)$ *est un espace* (DF) *;*

*(c)* T *est discret dénombrable.*

*Preuve.* - Si $T = \mathbb{N}$ alors $C_s(T)$ est un espace de Fréchet, donc toute partie simplement bornée de C(T) est contenue dans l'enveloppe disquée simplement fermée d'une suite tendant vers zéro. Il suit de là que l'algèbre compactologique $C_o(T)$ est l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ lu avec la compactologie produit, d'où $M_\upsilon(T)$ est la somme directe $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ; c'est donc un espace (DF) infratonnelé. D'autre part (b) $\Rightarrow$(a) car plus généralement, d'après [H3], un espace (DF) de type ($\mu$) est infratonnelé. Enfin (a) $\Rightarrow$(b) : $M_\upsilon(T)$ est alors un espace de Montel donc aussi son dual fort $C_c(\upsilon T)$ ce qui équivaut classiquement à $\upsilon T$ discret. L'espace T est alors discret replet. Le compact $[o,1]^T$ de $C_c(T)$ est un borné du dual fort de $M_\upsilon(T)$ ; il est donc équicontinu et par suite contenu dans une partie $H \in \mathcal{H}_o(T)$, de sorte qu'il est métrisable ce qui implique que T est dénombrable.

(3.4.2) PROPOSITION. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(a)* $M_\upsilon(T)$ *est métrisable ;*

*(b)* T *est fini.*

*Preuve :*

(a) $\Rightarrow$(b) est évident et (b) $\Rightarrow$(a) résulte de (0.2.6).

On précise facilement le théorème 8 de [C1] par :

(3.4.3) PROPOSITION. - *Si* T *est un* P*-espace, en particulier si* T *est discret, l'espace* $M_\upsilon(T)$ *est l'ensemble des mesures de Radon sur* $\beta T$ *à support fini contenu dans* $\upsilon T$.

*Preuve.* - Si T est un P-espace, il en est de même de $\upsilon T$ et dans tout P-espace les bornés sont finis.

## 4. - L'ESPACE M(T).

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'espace M(T) introduit par H. BUCHWALTER dans [B5]. Le résultat fondamental, dû à HAYDON [H1], caractérisant M(T) comme l'espace des mesures de Radon sur $\beta T$ à support dans $\theta T$, permet de dégager des conséquences importantes.

### 4.1. QUELQUES PROPRIETES.

- Rappelons tout d'abord la construction de M(T) et les conséquences énoncées dans [B5]. La famille $\mathcal{H}(T)$ des parties équicontinues et simplement bornées de C(T), chacune étant munie de la topologie de la convergence simple sur T, structure C(T) en algèbre compactologique. L'espace M(T), dual de $C(T)$, est l'ensemble des formes linéaires sur $C(T)$ qui sont continues sur les $H \in \mathcal{H}$. Muni de la topologie de la $\mathcal{H}$-convergence, c'est un elc complet dont le dual, lu compactologiquement, est précisément $C(T)$. On rappelle pour mémoire que $M(T)$ est solution du problème universel de linéarisation de toute application continue de $T$ dans un elc complet quelconque. L'ensemble $\beta T \cap M(T)$ s'identifie au c-replété $\theta T$ de $T$. De plus $M(T) = M(\theta T)$ puisque $C(T) = C(\theta T)$ compactologiquement et $\theta T$ est l'adhérence de $T$ dans $M(T)$. Les sous-espaces topologiques $T$ et $\theta T$ sont totaux dans $M(T)$. Enfin, l'espace $M(T)$ étant contenu dans $M_\upsilon(T)$, on décrit les éléments de $M_\upsilon(T)$ qui appartiennent à $M(T)$ par :

(4.1.1) <u>THEOREME</u>. - *Soit* $\mu$ *une mesure de Riesz sur* $T$. *La mesure* $\mu$ *appartient à* $M(T)$ *si et seulement si sa restriction à* $C^\infty(T)$ *appartient à* $M^\infty(T)$.

*Preuve*. - Soit $\mu$ une mesure de Riesz sur $T$ dont la restriction à $C^\infty(T)$ appartient à $M^\infty(T)$. Comme la restriction à $C^\infty(T)$ de $\mu^+$ est la partie positive de la restriction de $\mu$ à $C^\infty(T)$, on peut supposer $\mu \geq 0$. Si $(f_i)$ est une suite généralisée de $C(T)$, équicontinue et convergeant simplement vers zéro, la suite généralisée $(g_i^2)$ où $g_i = \dfrac{f_i}{1+|f_i|}$ est équicontinue, uniformément bornée et converge simplement vers zéro. D'après (3.1.5), la mesure $\mu$ est bornée sur la famille $((1+|f_i|)^2)$ et le résultat provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(4.1.2) <u>COROLLAIRE</u>. - *Une forme linéaire* $\mu$ *sur* $C(T)$ *appartient à* $M(T)$ *si et seulement si pour toute suite généralisée* $(f_i)$ *de* $C(T)$, *équicontinue et décroissante vers zéro, la suite généralisée* $(\mu(f_i))$ *tend vers zéro.*

Si $T$ est un espace métrisable, VARADARAJAN démontre dans [V1] qu'une mesure $\mu \in M_\sigma(T)$ est $\tau$-régulière si et seulement s'il existe un fermé séparable $C$ de $T$ tel que $|\mu|(T \setminus C) = 0$. Ce résultat vient d'être généralisé au cas d'un espace complètement régulier par WHEELER dans [W1] sous la forme suivante : une mesure $\mu$ de $M_\sigma(T)$ appartient à $M^\infty(T)$ si et seulement si, pour tout écart continu $d$ sur $T$, il existe un $d$-noyau séparable $Z_d$ portant $\mu$. On en déduit :

(4.1.3) <u>COROLLAIRE</u>. - *Une forme linéaire* $\mu$ *sur* $C(T)$ *appartient à* $M(T)$ *si et seulement si pour tout écart continu* $d$ *sur* $T$, *il existe un* $d$-*noyau séparable* $Z_d$ *tel que* $|\mu|(T \setminus Z_d) = 0$.

L'espace $M^\infty(T)$ étant engendré par son cône positif, on obtient aussi avec (4.1.1):

(4.1.4) THEOREME. - *Pour une mesure de Riesz* $\mu$ *sur* T, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(a)* $\mu \in M(T)$ ;

*(b)* $\mu^+ \in M(T)$ *et* $\mu^- \in M(T)$ ;

*(c)* $|\mu| \in M(T)$.

4.2. ETUDE DE L'ELC M(T). - Sachant que toute $\mu \in M_\upsilon(T)$ a son support dans $\upsilon T$, on considère alors l'ensemble $M_\theta(T)$, égal à $C_c(\theta T)'$, des mesures de Radon sur $\beta T$ dont le support est contenu dans $\theta T$, d'où les inclusions : $M_\theta(T) \subset M(T) \subset M_\upsilon(T)$. En fait nous allons montrer que même $M_\theta(T) = M(T)$ ce qui a fait l'objet d'une conjecture de H. BUCHWALTER dans [B3].

(4.2.1) THEOREME (HAYDON). - *L'espace* M(T) *est l'espace des mesures de Radon sur* $\beta T$ *à support contenu dans* $\theta T$.

*Preuve.* - Il suffit de prouver d'après (4.1.4) qu'une mesure positive $\mu$ de M(T) a son support K contenu dans $\theta T$. Le résultat est acquis dans le cas d'un espace métrique séparable car $T = \upsilon T$. Si T est supposé seulement métrisable, alors $\mu \in M_\tau(T)$ d'après [L1] et il existe un fermé séparable S de T tel que $\mu(T \setminus S) = o$. La forme linéaire $\mu_S$ définie sur C(S) par $\mu_S(f) = \mu(\bar{f})$ où $\bar{f}$ est un prolongement continu quelconque de f à T appartient à $M_\upsilon(S)$ et $K \subset \operatorname{Supp} \mu_S \subset S$. Dans le cas général, à toute $H \in \mathcal{H}(T)$, on associe l'écart continu $d_H$ défini sur T par $d_H(t,s) = \operatorname{Sup}_{f \in H} |f(t)-f(s)|$. En désignant par $T_H$ l'espace séparé associé à l'écart $d_H$, l'application canonique $\phi : T \to T_H$ fournit par transposition une application $\Phi : M(T) \to M(T_H)$. La mesure $\mu$ étant positive on a $\phi^\upsilon(K) = \operatorname{Supp} \Phi(\mu)$ et $\phi^\upsilon(K) \subset T_H$. Si une suite généralisée $(f_i)$ converge simplement vers zéro dans H et si $u \in K$ alors $u(f_i) = f_i(\phi^\upsilon(u))$ tend vers zéro ; ceci prouve que u appartient à $\theta T$.

Ce théorème important nous permet d'obtenir sur M(T) des résultats analogues à ceux obtenus sur $M_\upsilon(T)$.

(4.2.2) PROPOSITION. - *Pour tout borné* B *de* M(T), *il existe* $\lambda > o$ *et* K *compact de* $\theta T$ *tels que* $|\mu(f)| \leqslant \lambda \| f^\theta \|_K$ *pour toute* $f \in C(T)$ *et toute* $\mu \in B$.

*Preuve.* - Le polaire du disque borné $\Gamma(B)$ de M(T) est un tonneau de $C_c(\theta T)$. Puisque $\theta T$ est un $\mu$-espace [B8], $C_c(\theta T)$ est tonnelé et $\Gamma(B)°$ est un voisinage de zéro de cet espace. Il existe donc $\varepsilon>o$ et un compact K de $\theta T$ tels que $\|f^{\theta}\|_K \leqslant \varepsilon$ implique $f \in \Gamma(B)^{\circ}$, ce qui suffit.

(4.2.3) <u>COROLLAIRE</u>. - *Pour tout borné* B *de* M(T), *il existe* $\lambda>o$ *et* K *compact de* $\theta T$ *tels que* $B \subset \lambda\bar{\Gamma}(K)$, *où* $\bar{\Gamma}(K)$ *désigne l'enveloppe disquée fermée de* K *dans* M(T).

(4.2.4) <u>PROPOSITION</u>. - *Une partie* B *de* M(T) *est bornée si et seulement si* B *est bornée en norme et s'il existe un compact* K *de* $\theta T$ *tel que* $\mathrm{Supp}\,\mu \subset K$ *pour toute* $\mu \in B$.

(4.2.5) <u>THEOREME</u>. - *L'espace* M(T) *est un elc de type* ($\mu$), *c'est-à-dire que ses bornés sont relativement compacts.*

(4.2.6) <u>COROLLAIRE</u> :

*(a) Une partie* A *de* M(T) *est relativement compacte si et seulement si son enveloppe solide* S(A) *est relativement compacte.*

*(b) Les intervalles de* M(T) *sont compacts.*

*(c)* M(T) *est faiblement semi-complet.*

*(d)* $M(T)'_{\beta} = M(T)'_{c} = C_c(\theta T)$.

(4.2.7) <u>COROLLAIRE</u>. - *Pour une partie* B *de* M(T), *les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(a)* B *est relativement compacte ;*

*(b)* B *est relativement faiblement compacte ;*

*(c)* B *est bornée ;*

*(d)* B *est un équicontinu du dual* $C_c(\theta T)'$ ;

*(e) pour toute suite généralisée* $(f_i)$ *de* C(T), *équicontinue et tendant vers zéro, on a* $\sup_{\mu \in B}|\mu|(f_i) \to o$.

Ce qui précède permet d'obtenir des informations supplémentaires sur l'espace $C_c(\theta T)$ :

(4.2.8) <u>THEOREME</u>. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(a)* $\theta T$ *est un* $k_R$*-espace ;*

*(b)* $C_c(\theta T)$ *est un elc complet ;*

*(c)* M(T) *est un elc de Kelley.*

*De plus ces conditions impliquent l'égalité* $M(T) = C_c(\theta T)'_c$.

*Preuve :*

(a) $\Rightarrow$(b) est classique.

(b) $\Rightarrow$(c) : Avec le théorème (4.2.3) de [B5], on remarque que toute partie compacte de $C_c(\theta T)$ est équicontinue et simplement bornée, donc élément de $\mathcal{H}(\theta T) = \mathcal{H}(T)$. Alors $M(T)'_c$ est complet et ses compacts sont des équicontinus de $M(T)'$. Grâce au critère (3.4.10) de [B5], $M(T)$ est un elc de Kelley.

(c) $\Rightarrow$(b) : Car si $M(T)$ est Kelley, alors $C_c(\theta T)$ qui est égal à $M(T)'_c$ d'après (4.2.6) est complet.

(4.2.9) <u>THEOREME</u>. - *L'espace* $C_c(\theta T)$ *est un elc de Kelley.*

*Preuve.* - C'est le critère (3.4.7) de [B5] puisque $M(T)$ est complet et $M(T)'_c = C_c(\theta T)$.

En suivant la proposition (3.3.12) on obtient :

(4.2.10) <u>PROPOSITION</u>. - *Sur* $C(T)$ *les topologies suivantes sont identiques :*

*(a) la topologie de la convergence compacte sur* $\theta T$ *;*

*(b) la plus fine topologie localement convexe rendant convergentes les suites généralisées* $(f_i)$ *de* $C(T)$*, équicontinues et décroissantes vers zéro ;*

*(c) la plus fine topologie localement convexe qui coïncide avec la topologie de la convergence simple sur les parties* $H \in \mathcal{H}$ *;*

*(d) la topologie localement convexe la plus fine rendant continue l'application canonique de* $C_c(T_d)$ *dans* $C(T)$ *pour tout écart continu* $d$ *sur* $T$*, où* $T_d$ *désigne l'espace métrique associé à* $d$.

*Preuve.* - Les topologies définies en (a),(b) et (c) sont identiques comme dans (3.3.12). Montrons l'équivalence des topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ définies respectivement en (a) et (d). Déjà $\mathcal{T}_2$ est plus fine que $\mathcal{T}_1$ et $M(T) \subset (C(T),\mathcal{T}_2)'$. Puisque $\mathcal{T}_1 = \tau(C(T),M(T))$, il suffit pour conclure de montrer que le dual de $(C(T),\mathcal{T}_2)$ est $M(T)$. Or si $\mu$ est dans $(C(T),\mathcal{T}_2)'$ et si $(f_i)$ est une suite généralisée équicontinue convergeant simplement vers zéro, il existe un écart continu $d$ tel que $f_i \to 0$ dans $C_c(T_d)$ et $\mu(f_i) \to 0$.

## 4.3. <u>CAS PARTICULIERS</u>.

(4.3.1) <u>PROPOSITION</u>. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(a)* M(T) *est infratonnelé ;*

*(b)* M(T) *est une somme directe de droites ;*

*(c)* T *est discret.*

*Preuve :*

(a) $\Rightarrow$(c) : Si M(T) est infratonnelé, le polaire de $\Delta$ est un voisinage de zéro car c'est un tonneau de M(T), bornivore puisque M(T) est complet. Ainsi $\Delta$ est équicontinu dans $C^{\infty}(T)$ et T est discret.

(c) $\Rightarrow$(b) : L'algèbre compactologique C(T) est l'espace $\mathbb{R}^{T}$, lu avec la compactologie produit, d'où $M(T) = \mathbb{R}^{(T)}$.

(b) $\Rightarrow$(a) : Evident.

(4.3.2) <u>COROLLAIRE</u>. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(a)* M(T) *est métrisable ;*

*(b)* T *est fini.*

*Preuve.* - Il suffit de prouver (a) $\Rightarrow$(b). L'espace T étant déjà discret, on a $M(T) = \mathbb{R}^{(T)}$. Si T était infini, l'espace $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, sous-espace topologique complet de M(T) serait un espace de Fréchet, ce qui n'est pas.

(4.3.3) <u>PROPOSITION</u>. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(a)* M(T) *est un espace* (DF) *;*

*(b)* T *est discret dénombrable.*

*Preuve :*

(b) $\Rightarrow$(a) : D'après (4.3.1) M(T) est égal à $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ; il est donc tonnelé et admet une base dénombrable de bornés.

(a) $\Rightarrow$(b) : Toute suite $(f_n)$ de $\Delta$ est équicontinue car c'est une partie fortement bornée de M(T)'. Ainsi T est déjà un P-espace grâce à (0.2.7). De plus M(T) possède une base dénombrable de bornés $(B_n)$ et les parties $A_n = T \cap B_n$ forment une base dénombrable de bornés de T (cf. (0.1)) puisque le dual de M(T) est C(T). Les bornés d'un P-espace étant finis, T est dénombrable.

5. - QUESTION D'APPROXIMATION.

On prouve ici que les espaces M(T) et $M_\upsilon(T)$ ont la propriété d'approximation, grâce d'une part à la caractérisation de leurs compacts obtenue en (4.2.3) et (3.3.6) et d'autre part au lemme ci-dessous utilisé dans [R3] pour démontrer que l'espace $M^\infty(\hat{T})$ est lui aussi approximant.

(5.1) LEMME (ROME). *Pour toute* $H \in \mathcal{H}(T)$ *et tout* $\varepsilon > o$, *il existe une partition continue de l'unité* $(\phi_i)_{i \in I}$ *et une famille* $(t_i)_{i\in I}$ *de points de* T *telles que* $|f(t) - \sum_i f(t_i)\,\phi_i(t)| \leqslant \varepsilon$ *pour toute* $f \in H$ *et tout* $t \in T$.

(5.2) THEOREME. - *Les espaces* M(T) *et* $M_\upsilon(T)$ *ont la propriété d'approximation.*

*Preuve.* - Montrons par exemple le théorème pour M(T). Soient $H \in \mathcal{H}(T)$, L un compact de M(T) et $\varepsilon > o$. Il existe $\lambda > o$ et un compact K de $\theta T$ tels que $L \subset \lambda \overline{\Gamma}(K)$. Associons à $\alpha = \frac{\varepsilon}{\lambda}$ et à $H \in \mathcal{H}(\theta T)$ la partition continue de l'unité $(\phi_i)_{i\in I}$ sur $\theta T$, et la famille $(t_i)_{i \in I}$ de points de $\theta T$ comme dans (5.1). Il existe alors une partie finie J de I telle que $\phi_i|_K = 0$ pour tout $i \notin J$. L'opérateur u défini sur M(T) par $u(\mu) = \sum_{i\in J} \mu(\phi_i)\,\varepsilon_{t_i}$ est de rang fini et pour $f \in H$ et $\mu \in K$ on a $|\langle f, \mu - u(\mu)\rangle| \leqslant \alpha$ d'où $(1-u)(K) \subset \alpha H^\circ$. Ainsi $(1-u)(L) \subset \varepsilon H^\circ$, ce qui achève la démonstration.

La preuve est analogue pour l'espace $M_\upsilon(T)$ ; il suffit de remarquer que $\mathcal{H}_o(T) = \mathcal{H}_o(\upsilon T)$ d'après (0.2.3), et que pour tout compact L de $M_\upsilon(T)$ il existe, d'après (3.3.6), un scalaire $\lambda > o$ et un compact K de $\upsilon T$ tels que $L \subset \lambda \overline{\Gamma}(K)$.

## BIBLIOGRAPHIE


(B1) A. BADRIKIAN, *Séminaire sur les fonctions aléatoires linéaires et les mesures cylindriques*, Lecture Notes in Math., 1970, vol.139.

(B2) J. BERRUYER - B. IVOL, *Une topologie sur l'espace des mesures de Riesz*, Comptes Rendus, 274, série A, p. 1927.

(B3) J. BERRUYER - B. IVOL, *L'espace* M(T), Comptes Rendus, 275, série A, 1972, p.33.

(B4) N. BLANCHARD - M. JOURLIN, *La topologie de la convergence bornée sur les algèbres de fonctions continues*, Publ. Dép. Math. Lyon, 6-2, 1969, p. 85-96.

(B5) H. BUCHWALTER, *Topologies et compactologies*, Publ. Dép. Math. Lyon, 6-2, 1969, p. 1-74.

(B6) H. BUCHWALTER, *Sur le théorème de Nachbin-Shirota*, J. Math. pures et appl., 51, 1972, p. 399-418.

(B7) H. BUCHWALTER, *Espaces ultrabornologiques et b-réflexivité*, Publ. Dép. Math. Lyon, 8.1, 1971, p. 91-106.

(B8) H. BUCHWALTER, *Parties bornées d'un espace topologique complètement régulier*, Séminaire Choquet, 1969-70, n° 14, 15 pages.

(C1) G. CHOQUET, *Cardinaux 2-mesurables et cônes faiblement complets*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 17.1, 1967, p. 383-393.

(D1) R.M. DUDLEY, *Convergence of Baire measures*, Studia Math., 27, 1966, p. 251-268.

(F1) D.H. FREMLIN - D.J.H. GARLING - R.G. HAYDON, *Bounded measures on topological spaces*, Proc. London Math. Soc., 25, 1972, p. 115-136.

(G1) E. GRANIRER, *On Baire measures on D-topological spaces*, Fund. Math., LX, 1967, p. 1-22.

(H1) R.G. HAYDON, *Sur les espaces* M(T) *et* $M^{\infty}(T)$, Comptes Rendus, 275, série A, 1972, p. 989.

(H2) H. HOGBE-NLEND, *Sur une question de J. DIEUDONNE*, Bull. Soc. Math. France, 98-3, 1970, p. 201-208.

## BIBLIOGRAPHIE

(suite et fin)

(L1) C. LEGER - P. SOURY, *Le convexe topologique des probabilités sur un espace topologique*, J. Math. pures et appl., 50, 1971, p. 363-425.

(R1) M. ROME, *Le dual compactologique de l'espace* $C^{\infty}(T)$ , Comptes Rendus, 274, série A, 1972, p. 1631.

(R2) M. ROME, *Ordre et compacité dans l'espace* $M^{\infty}(T)$, Comptes Rendus, 274, série A, 1972, p. 1817.

(R3) M. ROME, *L'espace* $M^{\infty}(T)$, Publ. Dép. Math. Lyon, 9-1, 1972, p. 37-60.

(S1) F.D. SENTILLES, *Bounded continuous functions on a completely regular space*, Trans. A.M.S., 168, 1972, p. 311-336.

(V1) V.S. VARADARAJAN, *Measures on topological spaces*, A.M.S. Translations, 48, 1965, p. 161-228.

(W1) R.F. WHEELER, *The strict topology, separable measures and paracompactness*, à paraître au Pacific J.

Manuscrit remis le 7 décembre 1972.

Jacques BERRUYER
Bernard IVOL
Département de Mathématiques
Université de Saint-Etienne
23, rue du Docteur Paul Michelon
42100 - SAINT-ETIENNE