PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

J. RAYNAUD

# Localisations et anneaux semi-noethériens à droite

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1971, tome 8, fascicule 3
, p. 77-112
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1971__8_3_77_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1971 t. 8-3.4

# LOCALISATIONS ET ANNEAUX SEMI-NOETHERIENS A DROITE

J. RAYNAUD

**INTRODUCTION** : Pour un anneau non nécessairement commutatif, si on prend comme spectre à droite l'ensemble des ensembles topologisants, idempotents et premiers d'idéaux à droite de l'anneau, on peut associer à toute localisation dans la catégorie des modules à droite sur cet anneau une partie du spectre à droite, et inversement à toute partie du spectre à droite on peut associer une localisation. Comme M. Haeque pour les anneaux commutatifs (3), on caractérise les localisations qui sont stables par cette correspondance : ce sont les intersections de localisations premières à droite. On donne une caractérisation et des exemples des localisations qui sont intersections réduites de localisations premières à droite, et ceci nous amène alors à caractériser les anneaux A tels que la dimension de Krull-Gabriel de la catégorie ModA des A-modules à droite soit définie. Ces anneaux sont appelés semi-noethériens à droite car nos résultats généralisent ceux établis pour des anneaux commutatifs dans (6) par N. Popescu. On s'aperçoit alors que le seul résultat, à notre connaissance, où N. Popescu abordait dans le cas non commutatif la caractérisation de ces anneaux est erroné et un contre-exemple est donné. On termine en montrant comment la notion de dimension de Krull-Gabriel se traduit sur le spectre à droite de ces anneaux semi-noethériens à droite, et on démontre que les anneaux semi-noethériens à droite A tels que la dimension de Krull-Gabriel de la catégorie ModA soit nulle sont les anneaux semi-artiniens à droite.

Les résultats de cet article ont été en partie annoncés dans (13).

## I - PRELIMINAIRES.

Dans la suite, les anneaux, modules et morphismes considérés sont unitaires, et les anneaux non nécessairement commutatifs. On désignera par ensemble premier à droite d'un anneau A tout ensemble topologisant, idempotent et premier (2) d'idéaux à droite de A. Le spectre à droite de A, noté Speg(A), sera l'ensemble des ensembles premiers à droite de A. Comme dans (9), tout ensemble topologisant et idempotent d'idéaux à droite de A associé à un A-module à droite simple sera appelé ensemble simple à droite de A. La catégorie des A-modules à droite sera notée ModA, et si $\mathfrak{a}$ est un idéal à droite de A et x un élément de A on notera $\mathfrak{a}:x$ l'idéal à droite $\{a\in A \mid xa\in \mathfrak{a}\}$ de A. D'une manière générale les notations et la terminologie utilisées seront celles de (1), (2) et (9).

Pour un ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F}$ d'idéaux à droite d'un anneau A, désignons par $\Omega\mathcal{F}$ l'ensemble des idéaux à droite de A qui sont maximaux dans l'ensemble des idéaux à droite de A qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{F}$. Il vient :

(1.0) LEMME : *Soient* $\mathfrak{F}$ *un ensemble topologisant et idempotent d'idéaux à droite d'un anneau* A *et* $\mathcal{C}$ *la sous-catégorie localisante de* ModA *associée à* $\mathfrak{F}$ *. Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :*

(1) $\mathfrak{F}$ *possède un* A-module *support ;*

(2) *L'ensemble* $\Omega_{\mathfrak{F}}$ *est non vide ;*

(3) *La catégorie quotient* ModA/$\mathcal{C}$ *possède un objet simple.*

<u>Démonstration</u> : (1)$\Longleftrightarrow$(2) Il est facile de voir que l'annulateur de tout élément non nul d'un A-module support de $\mathfrak{F}$ est un élément de $\Omega_{\mathfrak{F}}$ et que réciproquement pour tout élément $\mathfrak{p}$ de $\Omega_{\mathfrak{F}}$ le A-module à droite $A/\mathfrak{p}$ est un A-module support de $\mathfrak{F}$.

(1)$\Longleftrightarrow$(3) Si on désigne par T le foncteur canonique de ModA dans la catégorie quotient ModA/$\mathcal{C}$ et par S le foncteur adjoint à droite à T de ModA/$\mathcal{C}$ dans ModA, on peut vérifier aisément que si M est un A-module support de $\mathfrak{F}$ alors T(M) est un objet simple de ModA/$\mathcal{C}$ et que réciproquement si U est un objet simple de ModA/$\mathcal{C}$ alors le A-module à droite S(U) est un A-module support de $\mathfrak{F}$ .

On peut en outre remarquer que si $\mathfrak{p}$ est un élément de $\Omega_{\mathfrak{F}}$, c'est un h-idéal à droite (4) ("critical right ideal" de (12)) de A et que, pour tout élément $x$ de A n'appartenant pas à $\mathfrak{p}$ , l'idéal à droite $\mathfrak{p}\cdot\!\cdot x$ est aussi un élément de $\Omega_{\mathcal{F}}$. Il résulte de tout ce qui précède que pour un ensemble premier à droite $\mathcal{F}$ d'un anneau A, l'ensemble $\Omega_{\mathcal{F}}$ est non-vide et que de plus l'atome associé à $\mathcal{F}$ par H. Storrer (12) et considéré comme classe d'équivalence de h-idéaux à droite n'est autre que ce même ensemble $\Omega_{\mathcal{F}}$.

(1.1) LEMME : *Si* $\mathcal{F}$ *est un ensemble premier à droite d'un anneau* A, *et* $\mathfrak{a}$ *un idéal à droite de* A, *on a alors :*

$$\mathfrak{a} \notin \mathcal{F} \Longleftrightarrow \exists\, \mathfrak{p} \in \Omega_{\mathcal{F}} \quad \exists\, a \notin \mathfrak{a} \quad \mathfrak{a}\cdot\!\cdot a \subseteq \mathfrak{p}$$

<u>Démonstration</u> : Pour établir ce lemme il nous suffit de démontrer que la condition est nécessaire. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal à droite de A n'appartenant pas à $\mathcal{F}$, et si on considère un A-module support M de $\mathcal{F}$ alors il existe un homomorphisme non nul f du A-module à droite $A/\mathfrak{a}$ dans l'enveloppe injective E(M) du A-module M. Ainsi $y = f(\bar{1})$, où $\bar{1}$ est l'élément de $A/\mathfrak{a}$ désignant la classe de l'élément 1 de A, est un élément non nul de E(M), et donc il existe un élément a de A tel que ya est un élément non nul de M. Une vérification immédiate nous montre alors que a n'appartient pas à $\mathfrak{a}$, que l'annulateur $\mathfrak{p}$ de l'élément ya est un élément de $\Omega_{\mathcal{F}}$ et que $\mathfrak{a}\cdot\!\cdot a$ est contenu dans $\mathfrak{p}$ .

Donnons au passage une propriété des h-idéaux à droite qui est l'analogue dans le cas non commutatif de ce qui se passe pour les idéaux premiers d'un anneau commutatif.

(1.2) PROPOSITION

*Soient* $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ *des idéaux à droite d'un anneau* A *et* $\mathfrak{p}$ *un* h-*idéal à droite de* A . *Si* $\mathfrak{p}$ *contient le produit* $\mathfrak{a}_1 . \mathfrak{a}_2 . \ldots . \mathfrak{a}_n$ *ou l'intersection* $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_n$, *alors il existe au moins un* $\mathfrak{a}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ *et deux éléments* a,a' *de* A *tels qu'on a :* $a \notin \mathfrak{p}, a' \notin \mathfrak{a}_i$ *et* $\mathfrak{a}_i . {}^{\cdot} a' \subseteq \mathfrak{p} . {}^{\cdot} a$.

<u>Démonstration</u> : Puisque $\mathfrak{p}$ est un h-idéal à droite de A, l'ensemble topologisant et idempotent $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{A/\mathfrak{p}}$ d'idéaux à droite de A associé au A-module à droite $A/\mathfrak{p}$ est un ensemble premier à droite de A, et $\mathfrak{p}$ est un élément de $\Omega_{\mathfrak{F}}$. Donc si le produit $\mathfrak{a}_1 . \mathfrak{a}_2 . \ldots . \mathfrak{a}_n$ est contenu dans $\mathfrak{p}$, ce n'est pas un idéal à droite appartenant à $\mathfrak{F}$, ce qui implique qu'il existe un i, $(1 \leq i \leq n)$, tel qu'on a $\mathfrak{a}_i \notin \mathfrak{F}$. Ceci entraîne, d'après (1.1), l'existence d'un élément $\mathfrak{p}'$ de $\Omega_{\mathfrak{F}}$ et d'un élément $a_i$ de A tels que $\mathfrak{a}_i . {}^{\cdot} a_i$ soit contenu dans $\mathfrak{p}'$. Mais puisque $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ sont tous deux éléments de $\Omega_{\mathfrak{F}}$ et que $\Omega_{\mathfrak{F}}$ n'est autre que l'atome associé à $\mathfrak{F}$ par H. Storrer il vient : $\exists a \notin \mathfrak{p} \quad \exists a'' \notin \mathfrak{p}' \quad \mathfrak{p} . {}^{\cdot} a = \mathfrak{p}' . {}^{\cdot} a''$. Si on pose alors $a' = a_i a''$, on obtient le résultat. Si $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_n$ est contenu dans $\mathfrak{p}$, la démonstration est identique.

Dans toute la suite, nous désignerons par $\mathfrak{I}(A)$ l'ensemble des ensembles topologisants et idempotents $\mathfrak{F}$ d'idéaux à droite de A tels que $\{0\} \notin \mathfrak{F}$.

## (1.3) PROPOSITION

*Soit* A *un anneau. Alors :*

(1) *Si* $\mathfrak{G}$ *est un élément de* $\mathfrak{I}(A)$, *et si* $\mathfrak{F}$ *est un ensemble premier à droite de* A, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$ ;

(b) $\forall \mathfrak{P} \in \Omega_{\mathfrak{F}} \quad \mathfrak{P} \notin \mathfrak{G}$ ;

(c) $\exists \mathfrak{P} \in \Omega_{\mathfrak{F}} \quad \forall x \notin \mathfrak{P} \quad \mathfrak{P} .\cdot x \notin \mathfrak{G}$.

(2) *Si* $\mathfrak{F}$ *et* $\mathfrak{F}'$ *sont deux ensembles premiers à droite de* A, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$ ;

(b) $\forall \mathfrak{P} \in \Omega_{\mathfrak{F}} \; \forall \mathfrak{P}' \in \Omega_{\mathfrak{F}'} \quad \exists a \notin \mathfrak{P} \quad \exists a' \notin \mathfrak{P}' \quad \mathfrak{P} .\cdot a \subseteq \mathfrak{P}' .\cdot a'$.

*En ce qui concerne l'égalité on a les conditions équivalentes suivantes :*

($\alpha$) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$ ;

($\beta$) $\Omega_{\mathfrak{F}} = \Omega_{\mathfrak{F}'}$ ;

($\gamma$) $\forall \mathfrak{P} \in \Omega_{\mathfrak{F}} \; \forall \mathfrak{P}' \in \Omega_{\mathfrak{F}'} \quad \exists a \notin \mathfrak{P} \quad \exists a' \notin \mathfrak{P}' \quad \mathfrak{P} .\cdot a = \mathfrak{P}' .\cdot a'$ ;

($\delta$) $\exists \mathfrak{P} \in \Omega_{\mathfrak{F}} \quad \exists \mathfrak{P}' \in \Omega_{\mathfrak{F}'} \quad \exists a \notin \mathfrak{P} \quad \exists a' \notin \mathfrak{P}' \quad \mathfrak{P} .\cdot a = \mathfrak{P}' .\cdot a'$.

**Démonstration** : Elle est immédiate : il suffit d'utiliser les propriétés de $\Omega_{\mathcal{F}}$, le lemme (1.1) et le fait que l'ensemble $\Omega_{\mathcal{F}}$, pour $\mathcal{F}$ ensemble premier à droite de A, n'est autre que l'atome associé à $\mathcal{F}$.

Cette proposition, très utile dans la suite, nous donne pour un anneau commutatif le lemme (2.4) de N. Popescu (6).

II - LOCALISATIONS STABLES A DROITE.

Si $\mathfrak{a}$ est un idéal à droite d'un anneau A, on désignera par $D(\mathfrak{a})$ l'ensemble des éléments $\mathcal{F}$ de Speg(A) tels qu'on a $\mathfrak{a} \in \mathcal{F}$. (La famille formée par les réunions quelconques de parties de Speg(A) du type $D(\mathfrak{a})$ constitue une famille d'ouverts pour une certaine topologie sur Speg(A) que l'on pourra appeler topologie spectrale).

Toute partie Y de Speg(A) détermine une localisation $\widetilde{\mathcal{L}}_Y$ dans ModA caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F}_Y$ des idéaux à droite de A défini par :

$$\mathcal{F}_Y = \bigcap_{\mathcal{F} \in Y} = \{\mathfrak{a} \leq A \mid Y \subseteq D(\mathfrak{a})\}.$$

Inversement, toute localisation $\widetilde{\mathcal{L}}$ dans ModA, caractérisée par un ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F}$ d'idéaux à droite de A, détermine une partie $Y_{\widetilde{\mathcal{L}}} = Y_{\mathcal{F}}$ de Speg(A) définie par :

$$Y_{\widetilde{\mathcal{L}}} = Y_{\mathcal{F}} = \bigcap_{\mathfrak{a} \in \mathcal{F}} D(\mathfrak{a}) = \{\mathcal{P} \in \text{Speg}(A) \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}\}.$$

Si, comme M. Hacque dans (3) pour les anneaux commutatifs, pou toute localisation dans ModA caractérisée par un ensemble topologisant et idempotent $\mathfrak{F}$ d'idéaux à droite de A on considère $\mathfrak{F}_s$ l'ensemble topologisant et idempotent d'idéaux à droite de A défini par $\mathfrak{F}_s = \mathfrak{F}_Z$ avec $Z = Y_{\mathfrak{F}}$, on dira que $\mathfrak{F}$ est un *ensemble stable à droite de* A (ou que la *localisation* associée est *stable*) si on a $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_s$.

Il est évident, avec les notations précédentes, que $\mathfrak{F}_s$ est le plus petit ensemble stable à droite de A contenant $\mathfrak{F}$ (on pourra l'appeler le *stabilisé à droite de* $\mathfrak{F}$).

**(2.1) THEOREME.**

*Soient* A *un anneau et* $\mathcal{G}$ *un élément de* $\mathcal{J}(A)$. *Les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) $\mathcal{G}$ *est un ensemble stable à droite de* **A** *;*

(2) *Il existe une famille non vide* $(\mathfrak{F}_i)_{i \in I}$ *d'ensembles premiers à droite de* **A** *telle qu'on a* $\mathcal{G} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ *;*

(3) *Pour tout idéal à droite* $\mathfrak{a}$ de A *tel que* $\mathfrak{a} \notin \mathcal{G}$, *il existe un* h-*idéal à droite* $\mathfrak{p}$ *de* A *et un élément* **a** *de* A *n'appartenant pas à* $\mathfrak{a}$ *tels que :* $\mathfrak{a} .^{\cdot} a \subseteq \mathfrak{p}$ et $\forall x \notin \mathfrak{p} \quad \mathfrak{p} .^{\cdot} x \notin \mathcal{G}$.

<u>Démonstration</u> : (1) $\Longleftrightarrow$ (2) C'est évident.

(2) $\Longleftrightarrow$ (3) La condition (2) est équivalente à la condition suivante : pour tout idéal à droite $\mathfrak{a}$ de A tel que $\mathfrak{a} \notin \mathcal{G}$,

il existe un ensemble premier à droite $\mathfrak{F}$ de A tel qu'on a $\mathcal{G} \subseteq \mathfrak{F}$ et $G \notin \mathfrak{F}$. Or, d'après les résultats du paragraphe I, cette condition est équivalente à la condition (3).

Ce théorème étend aux anneaux non nécessairement commutatifs la proposition (3.3) de (3) et le théorème (1.1) de (7).

(2.2) DEFINITION.

*On dira qu'un anneau* A *est un* *<u>anneau stable à droite</u>* *si tout élément de* $\mathfrak{J}$(A) *est un ensemble stable à droite.*

Il résulte de la proposition (2.5.3) de (4) et du théorème précédent que tout anneau localement homogène à droite (l.h.-anneau à droite) est un anneau stable à droite et donc en particulier que les anneaux noethériens à droite, semi-artiniens à droite, etc... sont des anneaux stables à droite.

(2.3) PROPOSITION.

*Si* A *est un anneau stable à droite, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\mathfrak{F}$ *est un élément maximal de* $\mathfrak{J}$(A).

(2) $\mathfrak{F}$ *est un élément maximal de* Speg(A).

<u>Démonstration</u> : C'est immédiat puisque A est un anneau stable à droite et que donc tout élément de $\mathfrak{J}$(A) est contenu dans un ensemble premier à droite de A.

Dans le cas commutatif ce résultat n'était cité que pour des anneaux semi-noethériens (théorème (2.5) de (6)) qui sont stables comme on le verra dans le paragraphe suivant.

## III - LOCALISATIONS STABLES REDUITES A DROITE ET ANNEAUX SEMI-NOETHERIENS A DROITE.

### (3.1) THEOREME

*Soient* **A** *un anneau et* $\mathcal{G}$ *un élément de* $\mathfrak{J}$(**A**)*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\mathcal{G}$ *est une intersection d'ensembles premiers à droite de* **A** *de la forme* $\mathcal{G} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ *(où* $I \neq \emptyset$*) telle que, pour tout* $i \in I$*, il existe un élément* $F$ *de* $\Omega_{\mathcal{F}_i}$ *qui est élément de* $\Omega_{\mathcal{G}}$ *;*

(2) $\mathcal{G}$ *est une intersection d'ensembles premiers à droite de* **A** *de la forme* $\mathcal{G} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ *(où* $I \neq \emptyset$*) telle que, pour tout* $i \in I$*, il existe un module support de* $\mathcal{F}_i$ *qui est module support de* $\mathcal{G}$ *;*

(3) *Pour tout idéal à droite* $\mathfrak{a}$ *de* **A** *tel que* $\mathfrak{a} \notin \mathcal{G}$*, il existe un idéal à droite* $F$ *de* **A** *et un élément* **a** *de* **A** *n'appartenant pas à* $\mathfrak{a}$ *tels qu'on a* $\mathfrak{a} \cdot^{\cdot} a \subseteq F$ *et* $F \in \Omega_{\mathcal{G}}$ *;*

(4) $\mathcal{G}$ *est intersection réduite d'une famille non vide d'ensembles premiers à droite de* **A**.

<u>Démonstration</u> : (1)$\Longleftrightarrow$(2) C'est évident.

(1) $\Rightarrow$(4) Dans la condition (1) il est toujours possible de supposer que $i \neq i'$ implique $\mathcal{F}_i \neq \mathcal{F}_{i'}$. Il suffit alors de montrer que $\mathcal{G} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ est une intersection réduite : pour le voir on peut remarquer que pour un élément quelconque $j$ de $I$ l'élément $\mathfrak{p}$ de $\Omega_{\mathcal{F}_j}$ qui est élément de $\Omega_{\mathcal{G}}$ (et qui existe par hypothèse) est un idéal à droite appartenant à $\bigcap_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} \mathcal{F}_i$, ce qui nous donne le résultat.

(4) $\Rightarrow$(3) Par hypothèse $\mathcal{G}$ est intersection réduite d'une famille non vide $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ d'ensembles premiers à droite de A. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal à droite de A tel que $\mathfrak{a} \notin \mathcal{G}$, alors il existe un élément $j$ de $I$ tel que $\mathfrak{a} \notin \mathcal{F}_j$, et il résulte du lemme (1.1) l'existence d'un élément $\mathfrak{y}$ de $\Omega_{\mathcal{F}_j}$ et d'un élément $x$ de A tel que $\mathfrak{a} .^{\cdot} x$ soit contenu dans $\mathfrak{y}$. Comme de plus $\mathcal{G} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ est une intersection réduite, il existe un élément $\mathfrak{y}'$ de $\Omega_{\mathcal{F}_j}$ qui est élément de $\Omega_{\mathcal{G}}$ et puisque $\mathfrak{y}$ et $\mathfrak{y}'$ sont tous deux éléments de $\Omega_{\mathcal{F}_j}$ on a :

$\exists y \notin \mathfrak{y}$ $\exists y' \notin \mathfrak{y}'$ $\mathfrak{y} .^{\cdot} y = \mathfrak{y}' .^{\cdot} y'$. Si on pose

$\mathfrak{p} = \mathfrak{y} .^{\cdot} y = \mathfrak{y}' .^{\cdot} y'$ et $a = xy$, on obtient le résultat.

(3) $\Rightarrow$(1) Tout élément $\mathfrak{p}$ de $\Omega_{\mathcal{G}}$ (qui est non vide) étant un h-idéal à droite de A, l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F}_{A/\mathfrak{p}}$ d'idéaux à droite de A associé au A-module à droite

$A/\mathfrak{p}$ est un ensemble premier à droite et $\mathfrak{p}$ est un élément de $\Omega_{\mathcal{F}_{A/\mathfrak{p}}}$. On obtient alors le résultat car une simple vérification nous montre qu'on a $\mathcal{G} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \Omega_{\mathcal{G}}} \mathcal{F}_{A/\mathfrak{p}}$.

(3.2) DEFINITION.

*Tout ensemble topologisant et idempotent d'idéaux à droite d'un anneau* **A** *qui vérifie les conditions équivalentes du théorème* (3.1) *précédent sera appelé* *ensemble stable réduit à droite de* **A**. *(On dira que la localisation associée est une localisation stable réduite à droite).*

Il est évident que tout ensemble stable réduit à droite d'un anneau A est un ensemble stable à droite.

Un ensemble stable réduit à droite d'un anneau A étant intersection réduite d'une famille non vide d'ensembles premiers à droite de A, on peut se demander si cette famille est unique : la réponse est oui car en effet si on a $\mathcal{G} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i = \bigcap_{j \in J} \mathcal{F}'_j$, où les deux intersections sont réduites et où les familles $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ et $(\mathcal{F}'_j)_{j \in J}$ sont non vides et formées d'ensembles premiers à droite de A, alors il est facile de vérifier que pour tout élément i de I il existe un élément j de J tel qu'on a $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}'_j$ (puisque $\mathcal{G} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ est intersection réduite, il existe un élément $\mathfrak{p}_i$ de $\Omega_{\mathcal{F}_i}$ qui est élément de

$\Omega\mathcal{G}$. Ainsi il existe un élément j de J tel que $F_i \notin \mathcal{F}'_j$ et il résulte de (1.1), des propriétés de $\Omega\mathcal{G}$ et de (1.3) qu'on a $\mathcal{F}'_i = \mathcal{F}'_j$).

On peut citer comme exemple d'ensemble stable réduit à droite d'un anneau A : tout ensemble topologisant, idempotent et de type fini d'idéaux à droite de A (d'après le lemme (5.1.2) de (9)), et en particulier tout ensemble topologisant, idempotent et plat d'idéaux à droite de A. Donc dans un anneau noethérien à droite A tous les éléments de $\mathfrak{J}(A)$ sont des ensembles stables réduits à droite de A.

On est alors amené à se demander quels sont les anneaux A tels que tous les éléments de $\mathfrak{J}(A)$ soient des ensembles stables réduits à droite ? C'est l'objet de ce qui suit :

Suivant N. Popescu (6) nous appellerons *anneau semi-noethérien à droite* tout anneau A tel que la dimension de Krull-Gabriel de la catégorie ModA des A-modules à droite est définie ((1) page 382).

Donnons dès maintenant un lemme dû à N. Popescu (lemme (1.1) de (6)) dont la démonstration se trouve dans (8) (lemme (4.3) page 232) et qui nous servira dans la démonstration du théorème (3.4) :

(3.3) LEMME (N. Popescu) : *Soit* $\mathcal{A}$ *une catégorie abélienne* *(localement petite) avec générateurs et limites inductives exactes. On a alors les conditions équivalentes suivantes :*

(1) *La dimension de Krull-Gabriel de* $\mathcal{A}$ *est définie ;*

(2) *Pour toute sous-catégorie localisante propre* $\mathcal{C}$ *de* $\mathcal{A}$ *(i.e.* $\mathcal{C} \neq \mathcal{A}$*) la catégorie quotient* $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ *contient des objets simples.*

(3.4) THEOREME

*Soit* A *un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) A *est un anneau semi-noethérien à droite ;*

(2) *Tout élément de* $\mathfrak{J}$(A) *est un ensemble stable réduit à droite ;*

(3) A *est un anneau stable à droite, et toute intersection d'une famille non vide d'ensembles premiers à droite de* A *peut être réduite ;*

(4) *Tout élément de* $\mathfrak{J}$(A) *possède un* A*-module support.*

<u>Démonstration</u> : Pour le début de la démonstration de (1) $\Rightarrow$(2) c'est à peu de choses près ce que fait N. Popescu dans (8) pour une partie de la démonstration du théorème (5.1) page 235 (lequel est erroné comme on en verra un contre-exemple ultérieurement). (1) $\Rightarrow$(2) Montrons que pour un élément quelconque $\mathcal{G}$ de $\mathfrak{J}$(A), la condition (2) du théorème (3.1) est vérifiée.

Considérons $(U_i)_{i \in I}$ un ensemble de représentants de tous les types d'objets simples de $\mathcal{L}$, où $\mathcal{L}$ est la sous-catégorie locale de ModA associée à l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{G}$. Pour tout $i \in I$, soient $E(U_i)$ l'enveloppe injective de $U_i$ dans $\mathcal{L}$ et $Q_i = S(E(U_i))$, où $S$ est le foncteur inclusion canonique de $\mathcal{L}$ dans ModA qui est adjoint à droite au foncteur canonique $T$ de ModA dans $\mathcal{L}$. Alors, d'après (2.3) page 217 de (5), l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_{Q_i}$ d'idéaux à droite de $A$ est un ensemble premier à droite de $A$ (la sous-catégorie localisante associée à $\mathcal{F}_i$ n'est autre que $T^{-1}(\mathcal{D}_i)$, où $\mathcal{D}_i$ est la sous-catégorie localisante de $\mathcal{L}$ caractérisée par les objets $Y$ de $\mathcal{L}$ tels que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(Y,E(U_i)) = 0$). Il est alors évident qu'on a $\mathcal{G} \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal à droite de $A$ appartenant à $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$, on a, pour tout $i \in I$, $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, Q_i) = 0$. Il vient alors pour tout $i \in I$ : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(T(A/\mathfrak{a}), E(U_i)) = 0$. Il résulte alors du lemme (1.2) de (6) (où lemme (5.2) page 235 de (8)) qu'on a $T(A/\mathfrak{a}) = 0$, c'est-à-dire que $\mathfrak{a}$ appartient à $\mathcal{G}$.

On a ainsi démontré la relation $\mathcal{G} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$, où $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ est une famille non vide d'ensembles premiers à droite de $A$, et si on pose $M_i = S(U_i)$, une vérification immédiate nous montre que $M_i$ est un A-module support des ensembles topologisants et idempotents $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}_i$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Il suffit de montrer que si $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ est une famille

non vide d'ensembles premiers à droite de A, alors l'intersection $\mathcal{G} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ peut être réduite. Or, par hypothèse, l'ensemble $\mathcal{G}$ qui est élément de $\mathfrak{J}(A)$ est intersection réduite d'une famille non vide $(\mathcal{F}'_k)_{k\in K}$ d'ensembles premiers à droite de A. Nous allons montrer que cette famille $(\mathcal{F}'_k)_{k\in K}$ est une sous-famille de la famille $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$, c'est-à-dire que :
$\forall k\in K \quad \exists i\in I \quad \mathcal{F}'_k = \mathcal{F}_i$, ce qui nous donnera le résultat.

Soit k un élément quelconque de K. Alors puisque $\mathcal{G} = \bigcap_{k'\in K} \mathcal{F}'_{k'}$ est une intersection réduite, il existe un élément $\mathfrak{p}_k$ de $\Omega_{\mathcal{F}'_k}$ qui est élément de $\Omega_{\mathcal{G}}$. De plus, comme $\mathfrak{p}_k$ n'appartient pas à $\mathcal{G} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$, il existe un élément i de I tel que $\mathfrak{p}_k$ n'appartient pas à $\mathcal{F}_i$. Il résulte alors de (1.1), du fait que $\mathfrak{p}_k$ est un élément de $\Omega_{\mathcal{G}}$ et de (1.3) qu'on a $\mathcal{F}'_k = \mathcal{F}_i$.

(3) $\Rightarrow$(2) C'est trivial.

(2) $\Rightarrow$(4) C'est évident.

(4) $\Rightarrow$(1) Si on considère une sous-catégorie localisante propre $\mathcal{C}$ de ModA (i.e. $\mathcal{C} \neq$ ModA) et si on désigne par $\mathcal{G}$ l'ensemble topologisant et idempotent d'idéaux à droite de A associé on a $\mathcal{G} \in \mathfrak{J}(A)$. Il résulte alors du lemme (1.0) que la catégorie quotient ModA/$\mathcal{C}$ possède des objets simples et donc d'après le lemme (3.3) que A est un anneau semi-noethérien à droite.

Le théorème est ainsi démontré.

En conséquence si $A$ est un anneau tel que tout élément de $\mathfrak{J}(A)$ est un ensemble topologisant, idempotent et de type fini d'idéaux à droite de $A$, c'est un anneau semi-noethérien à droite. En particulier tout anneau noethérien à droite est semi-noethérien à droite.

<u>Remarque</u> : Je ne sais pas s'il existe un anneau localement homogène à droite qui ne soit pas semi-noethérien à droite (un anneau semi-noethérien à droite est évidemment localement homogène à droite).

(3.5) COROLLAIRE

*Si* $A$ *est un anneau semi-noethérien à droite, alors toute partie non vide de* Speg(A) *possède un élément minimal.*

<u>Démonstration</u> : Si $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ est une famille non vide d'ensembles premiers à droite de $A$, alors d'après (3.4) l'intersection $\mathcal{G} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ peut être réduite, c'est-à-dire qu'il existe un sous-ensemble non vide $J$ de $I$ tel que $\mathcal{G} = \bigcap_{j \in J} \mathcal{F}_j$ est une intersection réduite. Il est alors aisé de voir que les $\mathcal{F}_j \, (j \in J)$ sont des éléments minimaux de la famille $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ (en effet puisque $\mathcal{G} = \bigcap_{j \in J} \mathcal{F}_j$ est une intersection réduite, il existe pour tout $j$ de $J$ un élément $\mathcal{Y}$ de $\Omega_{\mathcal{F}_j}$ qui est élément de $\Omega_{\mathcal{G}}$ et ainsi si on a $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j$, pour un certain $i \in I$, comme il résulte alors de (1.3) qu'on a $\forall \mathcal{P} \in \Omega_{\mathcal{F}_i} \quad \exists a \notin \mathcal{Y}$ $\exists a' \notin \mathcal{P} \quad \mathcal{Y}.\cdot a \subsetneq \mathcal{P}.\cdot a'$, on en déduit que $\mathcal{Y}.\cdot a$ est égal à

$\mathcal{F}.a'$ et donc qu'on a $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_j$).

On déduit immédiatement de ce corollaire :

(3.6) COROLLAIRE

*Si* A *est un anneau semi-noethérien à droite, et si* $\mathcal{F}$ *est un ensemble premier à droite de* A *élément non maximal de* Speg(A), *alors il existe un ensemble premier à droite* $\mathcal{F}'$ *de* A *tel que* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$, *et tel que pour tout ensemble premier à droite* $\mathcal{F}''$ *de* A *vérifiant* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'' \subseteq \mathcal{F}'$ *on a* $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}'$ *ou* $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}$.

Dans le cas commutatif les résultats précédents nous donnent en particulier le théorème (2.1), les corollaires (2.2) et (2.3) de (6).

## IV - ANNEAUX VERIFIANT LA CONDITION (R) A DROITE.

On a vu dans la proposition (1.3) que pour qu'on ait la relation $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ entre deux ensembles premiers à droite il fallait qu'on ait une condition faisant intervenir tous les éléments de $\Omega_{\mathcal{F}}$ et de $\Omega_{\mathcal{F}'}$, et on peut se demander si une condition presque analogue ne faisant intervenir qu'un élément de $\Omega_{\mathcal{F}}$ et qu'un élément de $\Omega_{\mathcal{F}'}$ ne suffirait pas pour qu'on ait la relation $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$. La réponse est non en général comme on en verra un exemple ultérieurement.

(4.1) DEFINITION

*On dira qu'un anneau* <u>A *vérifie la condition* (R) *à droite*</u>, *si quels que soient les* h-*idéaux à droite* $\mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{p}'$ *de* A *la relation* $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ *implique la relation* $\mathfrak{F}_{A/\mathfrak{p}'} \subseteq \mathfrak{F}_{A/\mathfrak{p}}$ *entre les ensembles premiers à droite associés aux* A-*modules à droite homogènes* $A/\mathfrak{p}'$ *et* $A/\mathfrak{p}$.

Il est évident que les anneaux commutatifs et même plus généralement les anneaux dont tous les idéaux à droite sont bilatères vérifient cette condition (R) à droite.

On obtient immédiatement le lemme suivant :

(4.2) LEMME

*Si* A *est un anneau vérifiant la condition* (R) *à droite, et si* $\mathfrak{F}$ *et* $\mathfrak{F}'$ *sont deux ensembles premiers à droite de* A, *on a :*

$$\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F} \iff \exists \mathfrak{p} \in \Omega_{\mathfrak{F}} \quad \exists \mathfrak{p}' \in \Omega_{\mathfrak{F}'}, \quad \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'.$$

(4.3) LEMME

*Si* A *est un anneau vérifiant la condition* (R) *à droite, et si* $(\mathfrak{F}_i)_{i \in I}$ *est une famille non vide d'ensembles premiers à droite de* A, *alors si* $\mathfrak{F}$ *est un autre ensemble premier à droite de* A *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}$ ;

(b) $\exists i \in I \qquad \mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}$.

Démonstration : Pour démontrer que (a) implique (b) il suffit d'utiliser les lemmes (1.1) et (4.2).

(4.4) LEMME

*Si* A *est un anneau vérifiant la condition* (R) *à droite, et si* $\mathcal{F}$ *est un ensemble premier à droite de* A, *les assertions suivantes sont équivalentes* :

(1) $\mathcal{F}$ *est un ensemble simple à droite de* A ;

(2) $\mathcal{F}$ *est un élément minimal de* Speg(A) ;

(3) *Tout élément de* $\Omega_{\mathcal{F}}$ *est un idéal à droite maximal de* A.

Démonstration : (1) $\Rightarrow$ (2) C'est vrai et bien connu même si A ne vérifie pas la condition (R) à droite.

(2) $\Rightarrow$ (3) Si on considère un élément $\mathfrak{p}$ de $\Omega_{\mathcal{F}}$, alors il existe un idéal à droite maximal $\mathfrak{M}$ de A qui contient $\mathfrak{p}$, et ainsi, puisque A vérifie la condition (R) à droite, l'ensemble simple à droite $\mathcal{F}_{A/\mathfrak{M}}$ est contenu dans $\mathcal{F}$ ce qui implique qu'on a $\mathcal{F}_{A/\mathfrak{M}} = \mathcal{F}$ par minimalité de $\mathcal{F}$ dans Speg(A). On en déduit l'égalité $\mathfrak{p} = \mathfrak{M}$, et donc $\mathfrak{p}$ est un idéal à droite maximal de A.

(3) $\Rightarrow$ (1) C'est trivial.

On pourrait aussi démontrer facilement que si $\mathfrak{F}$ est un ensemble premier à droite d'un anneau A vérifiant la condition (R) à droite, alors pour que $\mathfrak{F}$ soit un élément maximal de Speg(A) il faut et il suffit que tout élément de $\Omega_{\mathfrak{F}}$ soit minimal parmi l'ensemble des h-idéaux à droite de A.

Donnons maintenant un exemple d'anneau qui ne vérifie pas cette condition (R) à droite : il nous est fourni par l'exemple (2.1) de (12) :

Soit A l'anneau des matrices triangulaires supérieures d'ordre 2 sur un corps. Considérons les idéaux $\mathfrak{p} = \{\begin{pmatrix}0&0\\0&\gamma\end{pmatrix}\}$, $\mathfrak{M} = \{\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\0&0\end{pmatrix}\}$ et $\mathfrak{M}' = \{\begin{pmatrix}0&\beta'\\0&\gamma'\end{pmatrix}\}$ de A. Il est facile de voir que $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sont des idéaux à droite maximaux de A, et une vérification immédiate nous montre que $\mathfrak{p}$ est un h-idéal à droite de A. De plus le A-module à droite $A_{/\mathfrak{M}}$ est isomorphe à un A-sous-module de $A_{/\mathfrak{p}}$ (si on pose $s = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, on a $\mathfrak{p}.\,{}^{\cdot}s = \mathfrak{M}$).
Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble topologisant et idempotent des idéaux à droite de A associé au A-module à droite $A_{/\mathfrak{M}}$ : c'est un ensemble simple à droite tel que $\mathfrak{p}$ est un élément de $\Omega_{\mathfrak{F}}$, et puisque $\mathfrak{p}$ n'est pas un idéal à droite maximal de A on déduit de (4.4) que A ne vérifie pas la condition (R) à droite.

Remarquons que cet anneau A est noethérien à droite (donc semi-noethérien à droite) ce qui nous servira dans la suite.

## V - LOCALISATIONS STABLES PLEINEMENT REDUITES A DROITE.

### (5.1) PROPOSITION.

*Soient* A *un anneau et* $\mathcal{G}$ *un élément de* $\mathcal{J}(A)$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\mathcal{G}$ *est une intersection d'ensembles premiers à droite de* A *de la forme* $\mathcal{G} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ *(où* $I \neq \emptyset$*) telle que, pour tout* $i \in I$*, l'unique (à un isomorphisme près) module atomique* $E_i$ *associé à* $\mathcal{F}_i$ (12) *est module support de* $\mathcal{G}$ *;*

(2) $\mathcal{G}$ *est une intersection d'ensembles premiers à droite de* A *de la forme* $\mathcal{G} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ *(où* $I \neq \emptyset$*) telle que, pour tout* $i \in I$*, tout module support de* $\mathcal{F}_i$ *est module support de* $\mathcal{G}$ *;*

(3) $\mathcal{G}$ *est une intersection d'ensembles premiers à droite de* A *de la forme* $\mathcal{G} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ *(où* $I \neq \emptyset$*) telle qu'on a* $\Omega_{\mathcal{G}} = \bigcup_{i \in I} \Omega_{\mathcal{F}_i}$.

<u>Démonstration</u> : (1) $\Longleftrightarrow$ (2) C'est évident car d'après (6.4) de (2) le module atomique associé à un ensemble premier à droite (12) est "le plus grand" module support de cet ensemble premier

à droite.

(2) $\Longrightarrow$ (3) La relation $\bigcup_{i \in I} \Omega_{\mathcal{F}'_i} \subseteq \Omega_{\mathcal{G}}$ est immédiate. Si $\mathfrak{P}$ est un élément de $\Omega_{\mathcal{G}}$, alors il existe un élément i de I tel que $\mathfrak{P}$ n'appartient pas à $\mathcal{F}'_i$ et il résulte alors de (1.1) qu'il existe un élément x de A n'appartenant pas à $\mathfrak{P}$ tel que $\mathfrak{P}.^{\cdot}x$ est un élément de $\Omega_{\mathcal{F}'_i}$ et donc que $\mathfrak{P}$ est aussi élément de $\Omega_{\mathcal{F}'_i}$ (car $\Omega_{\mathcal{F}'_i}$ est l'atome associé à l'ensemble premier à droite $\mathcal{F}'_i$). On obtient donc : $\Omega_{\mathcal{G}} = \bigcup_{i \in I} \Omega_{\mathcal{F}'_i}$.

(3) $\Rightarrow$ (2) Soit $E_i$ un module support de $\mathcal{F}'_i$. Pour démontrer que c'est un module support de $\mathcal{G}$ il nous suffit de montrer que si E' est un A-sous-module non nul de $E_i$ alors $E_i/_{E'}$ est un A-module $\mathcal{G}$-négligeable. Considérons $\bar{x} = x+E'$ un élément non nul de $E_i/_{E'}$ (où $x \in E_i$). Posons $\mathfrak{A} = \mathrm{Ann}\,(\bar{x})$ et $\mathfrak{P} = \mathrm{Ann}\,(x)$. Evidemment $\mathfrak{P}$ est un élément de $\Omega_{\mathcal{F}'_i}$ et il est contenu dans $\mathfrak{A}$. Comme $E_i$ est module support de $\mathcal{F}'_i$, l'idéal à droite $\mathfrak{A}$ appartient à $\mathcal{F}'_i$ et on en déduit que $\mathfrak{P}$ est strictement contenu dans $\mathfrak{A}$. De plus il résulte de l'hypothèse que $\mathfrak{P}$ est un élément de $\Omega_{\mathcal{G}}$ ce qui entraîne que $\mathfrak{A}$ appartient à $\mathcal{G}$. On a donc : $\bar{x} \in \mathcal{G}(E_i/_{E'})$.

En conséquence $E_i/_{E'}$ est un A-module $\mathcal{G}$- négligeable.

**(5.2) DEFINITION.**

*Tout ensemble topologisant et idempotent d'idéaux à droite d'un anneau* A *qui vérifie les conditions équivalentes de la proposition* (5.1) *précédente sera appelé* *ensemble stable pleinement réduit à droite de* A. *(On dira que la localisation associée est une* *localisation stable pleinement réduite à droite).*

Il est clair que tout ensemble stable pleinement réduit à droite est un ensemble stable réduit à droite.

Caractérisons les anneaux A tels que tout élément de $\mathfrak{J}(A)$ soit un ensemble stable pleinement réduit à droite :

**(5.3) THEOREME**

*Soit* A *un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) *Tout élément de* $\mathfrak{J}(A)$ *est un ensemble stable pleinement réduit à droite ;*

(2) A *est un anneau stable à droite qui vérifie la condition* (R) *à droite, et toute partie non vide de* Speg(A) *possède un élément minimal ;*

(3) A *est un anneau semi-noethérien à droite qui vérifie la condition* (R) *à droite.*

Démonstration : (1) $\Rightarrow$ (3) Il nous suffit de montrer que A vérifie la condition (R) à droite. Considérons $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ deux h-idéaux à droite de A tels qu'on ait la relation $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$, et $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ les ensembles premiers à droite de A respectivement associés aux A-modules à droite $A/_{\mathfrak{p}}$ et $A/_{\mathfrak{p}'}$. Montrons qu'on a la relation $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$. On peut supposer que $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ sont distincts et ainsi en déduire qu'on a $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{F}'$. Si on suppose que la relation $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$ n'est pas vérifiée et si on considère l'élément $\mathcal{G} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{F}'$ de $\mathfrak{J}(A)$ : c'est un ensemble stable pleinement réduit à droite de A et donc il existe une famille non vide $(\mathfrak{F}_i)_{i \in I}$ d'ensembles premiers à droite de A telle qu'on a $\mathcal{G} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ et telle que $\Omega_{\mathcal{G}} = \bigcup_{i \in I} \Omega_{\mathfrak{F}_i}$. Mais une vérification immédiate nous montre que cette famille $(\mathfrak{F}_i)_{i \in I}$ n'est autre que celle formée par les deux seuls éléments $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$. On a donc la relation $\Omega_{\mathcal{G}} = \Omega_{\mathfrak{F}} \cup \Omega_{\mathfrak{F}'}$. Comme $\mathfrak{p}$ est un élément de $\Omega_{\mathfrak{F}}$, c'est alors un élément de $\Omega_{\mathcal{G}}$ ce qui implique que $\mathfrak{p}'$ appartient à $\mathcal{G}$ et donc à $\mathfrak{F}'$ : contradiction. En conséquence on a la relation $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$.

(3) $\Rightarrow$ (2) Résulte de (3.4) et de (3.5).

(2) $\Rightarrow$ (1) Considérons un élément $\mathcal{G}$ de $\mathfrak{J}(A)$. Comme A est un anneau stable à droite, il existe une famille non vide $(\mathfrak{F}_i)_{i \in I}$ d'ensembles premiers à droite de A telle qu'on a $\mathcal{G} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Si on considère la sous-famille $(\mathfrak{F}_j)_{j \in J}$ de la famille $(\mathfrak{F}_i)_{i \in I}$ formée de tous les éléments minimaux de

la famille $(\mathcal{F}'_i)_{i\in I}$ on a alors $\mathcal{G} = \bigcap_{j\in J}\mathcal{F}'_j$ et on obtient sans difficulté la relation $\Omega_{\mathcal{G}} \subseteq \bigcup_{j\in J}\Omega_{\mathcal{F}'_j}$. Soient $j$ un élément de $J$, et $\mathfrak{p}$ un élément de $\Omega_{\mathcal{F}'_j}$. Ainsi $\mathfrak{p}$ n'appartient pas à $\mathcal{G}$. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal à droite de $A$ contenant strictement $\mathfrak{p}$, il appartient à $\mathcal{F}'_j$. S'il existait un élément $j'$ de $J$, distinct de $j$, tel que $\mathfrak{a}$ n'appartienne pas à $\mathcal{F}'_{j'}$, alors d'après (1.1) il existerait un élément $\mathfrak{p}'$ de $\Omega_{\mathcal{F}'_{j'}}$ et un élément $a$ de $A$ tels qu'on aurait $\mathfrak{p}\,.\,\dot{}a \subseteq \mathfrak{a}\,.\,\dot{}a \subseteq \mathfrak{p}'$, ce qui impliquerait, d'après (4.2), la relation $\mathcal{F}'_{j'} \subseteq \mathcal{F}'_j$ et donc une contradiction avec la minimalité de $\mathcal{F}'_j$. En conséquence $\mathfrak{a}$ appartient à $\mathcal{G}$ et donc $\mathfrak{p}$ est un élément de $\Omega_{\mathcal{G}}$. Ceci nous montre que $\mathcal{G}$ est un ensemble stable pleinement réduit à droite.

## VI - SUR UN RESULTAT DE N. POPESCU.

Les résultats que nous avons obtenus précédemment permettent de voir que le théorème (5.1) page 235 de (8) est erroné. En effet la condition (1) de ce théorème signifie que l'anneau $A$ est semi-noethérien à droite, tandis que la condition (2) équivaut à dire que tout élément de $\mathfrak{J}(A)$ est un ensemble stable pleinement réduit à droite ce qui d'après notre théorème (5.3) équivaut à dire que $A$ est un anneau semi-noethérien à droite qui vérifie la condition (R) à droite. Donc ces conditions ne sont pas équivalentes car on a vu au paragraphe IV qu'existent des anneaux semi-noethériens à droite qui ne vérifient pas la condition (R) à droite (un exemple a été donné). Signalons aussi que la condition (3) de ce théorème (5.1) de (8) est également légèrement inexacte.

## VII - SUR LA DIMENSION DE KRULL-GABRIEL DES ANNEAUX SEMI-NOETHERIENS A DROITE.

Dans toute la suite A désigne un anneau semi-noethérien à droite et $\mathcal{A}$ la catégorie ModA des A-modules à droite. On utilise alors les notations de (1) page 382. Pour tout ordinal $\alpha$, on notera $\mathfrak{F}_\alpha$ l'ensemble topologisant et idempotent d'idéaux à droite de A associé à la sous-catégorie localisante $\mathcal{A}_\alpha$ de $\mathcal{A}$ définie dans (1) page 382, et on désignera par $\mathrm{Speg}_\alpha(A)$ (resp. par $E_\alpha$) l'ensemble des éléments $\mathfrak{F}$ de Speg(A) tels qu'on ait $\mathfrak{F}_\alpha \subseteq \mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}_{\alpha+1} \not\subseteq \mathfrak{F}$ (resp. tels qu'il existe un élément $\mathfrak{p}$ de $\Omega_{\mathfrak{F}}$ tel que K-dim $A/_{\mathfrak{p}} \leq \alpha$).

(7.1) PROPOSITION.

*Soit* A *un anneau semi-noethérien à droite. Alors pour tout ordinal* $\alpha <$ K-dim$(\mathcal{A})$, *il y a bijection entre* $\mathrm{Speg}_\alpha$(A) *et l'ensemble des types d'objets simples de la catégorie quotient* $\mathcal{A}/_{\mathcal{A}_\alpha}$ . *De plus* $\mathfrak{F}_\alpha$ *est l'intersection des ensembles premiers à droite de* A *qui sont éléments de* $\mathrm{Speg}_\alpha$(A) *et cette intersection est réduite.*

<u>Démonstration</u> : Comme d'après (5.1) de (12) il y a correspondance binnivoque entre l'ensemble des types de modules atomiques et

l'ensemble Speg(A) des ensembles premiers à droite de A, on peut considérer que $Speg_\alpha(A)$ n'est autre que l'ensemble des types de modules atomiques $\mathcal{A}_\alpha$- fermés et contenant un sous-objet non nul de $\mathcal{A}_{\alpha+1}$. De plus l'application de $Speg_\alpha(A)$ dans l'ensemble $Sp_\alpha(\mathcal{A})$ défini par P. Gabriel [(1) page 383], qui au type d'un module atomique fait correspondre le type de son enveloppe injective est une bijection (l'application réciproque étant celle qui au type d'un injectif indécomposable Q fait correspondre le type du coeur C(Q) de Q) : cela résulte du fait qu'un anneau semi-noethérien à droite est localement homogène à droite, de (2.9) de (12) et de (2.5) de (12) [ou de la proposition (2.5.1) de (4)]. On a alors la première partie du résultat d'après la proposition (2) page 383 de (1). La deuxième partie du résultat se déduit immédiatement de la démonstration de (1) ⟹ (2) du théorème (3.4), de ce qui précède et de la démonstration du théorème (3.1).

(7.2) THEOREME

*Soit* A *un anneau semi-noethérien à droite. On a alors :*

(1) $Speg(A) = \bigcup_\alpha Speg_\alpha(A) = \bigcup_\alpha E_\alpha$.

(2) *Pour tout ordinal* $\alpha \leq \text{K-dim}(\mathcal{A})$ : $E_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} Speg_\beta(A)$.

(3) *Pour tout ordinal* $\alpha \leq \text{K-dim}(\mathcal{A})$, *les ensembles* $E_\alpha$ *sont constitués de la façon suivante :*

– $E_{-1}$ *est vide, et* $E_0 = Speg_{-1}(A)$ *est l'ensemble des* *ensembles simples à droite de* **A** ;

- *si* $\alpha$ *a un prédécesseur* $\beta$ : $E_\alpha = E_\beta \cup \mathrm{Speg}_\beta(A)$ *et* $E_\beta \cap \mathrm{Speg}_\beta(A) = \emptyset$ ;

- *si* $\alpha$ *est un ordinal limite* : $E_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} E_\beta$.

<u>Démonstration</u> : Si $\alpha$ est un ordinal strictement plus petit que K-dim($\mathcal{A}$), alors il résulte de (1.3) que pour qu'un ensemble premier à droite $\mathfrak{F}$ de A soit élément de $\mathrm{Speg}_\alpha(A)$ il faut et il suffit que $\mathfrak{F}$ appartienne à l'ensemble $E_{\alpha+1}$ et n'appartienne pas à l'ensemble $E_\alpha$.

(1) C'est évident.

(2) Si $\mathfrak{F}$ est un élément de $E_\alpha$, alors il existe un élément $\mathfrak{p}$ de $\Omega_{\mathfrak{F}}$ tel qu'on a $\text{K-dim}A_{/\mathfrak{p}} \leq \alpha$. Or il existe un ordinal $\beta$ tel que $\mathfrak{F}$ appartient à $\mathrm{Speg}_\beta(A)$ ce qui implique que $\mathfrak{F}$ n'appartient pas à $E_\beta$ et donc qu'on a $\text{K-dim}A_{/\mathfrak{p}} > \beta$. On en déduit $\beta<\alpha$, et on a ainsi démontré la relation $E_\alpha \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{Speg}_\beta(A)$. Si $\mathfrak{F}$ est un élément de $\mathrm{Speg}_\beta(A)$, où $\beta$ est un ordinal strictement plus petit que $\alpha$, alors c'est un élément de $E_{\beta+1}$ et donc de $E_\alpha$. D'où le résultat $E_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{Speg}_\beta(A)$.

(3) Il est clair que l'ensemble $E_{-1}$ est vide, et que l'on a $E_0 = \mathrm{Speg}_{-1}(A)$. En outre, d'après (7.1), $\mathrm{Speg}_{-1}(A)$ est l'ensemble des ensembles simples à droite de A.

Si $\alpha$ est un ordinal qui admet un prédécesseur $\beta$, alors les relations se démontrent sans difficulté d'après ce qui précède.

Si $\alpha$ est un ordinal limite : si $\beta$ est un ordinal strictement plus petit que $\alpha$, alors $\beta+1$ est aussi un ordinal strictement plus petit que $\alpha$ et on en déduit : $\mathrm{Speg}_\beta(A) \subseteq E_{\beta+1} \subseteq \bigcup_{\gamma<\alpha} E_\gamma$, ce qui implique qu'on a : $E_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{Speg}_\beta(A) \subseteq \bigcup_{\gamma<\alpha} E_\gamma \subseteq E_\alpha$.

(7.3) Remarque : Si A est un anneau semi-noethérien à droite, alors la dimension de Krull-Gabriel de la catégorie $\mathcal{A} = \mathrm{Mod}A$ des A-modules à droite est le plus petit ordinal $\alpha$ tel qu'on ait $E_\alpha = \mathrm{Speg}(A)$.

(7.4) PROPOSITION.

*Soit* **A** *un anneau semi-noethérien à droite. Considérons un ordinal non nul* $\alpha$ *qui admet un prédécesseur* $\beta$, *et* $\mathfrak{F}$ *un élément de* $E_\alpha$. *Alors tout élément* $\mathfrak{F}'$ *de* Speg(A) *tel qu'on ait* $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$ *et* $\mathfrak{F}' \neq \mathfrak{F}$ *est élément de* $E_\beta$. *Si de plus l'anneau* **A** *vérifie la condition* (R) *à droite, alors* $E_\alpha$ *est l'ensemble des éléments* $\mathfrak{F}$ *de* Speg(A) *tels qu'on ait* $\mathfrak{F}' \in E_\beta$ *pour tout élément* $\mathfrak{F}'$ *de* Speg(A) *qui vérifie* $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$ *et* $\mathfrak{F}' \neq \mathfrak{F}$.

Démonstration : On peut supposer qu'on a $\alpha \leq \mathrm{K\text{-}dim}(\mathcal{A})$. Comme d'après (7.2) on a les relations $E_\alpha = E_\beta \cup \mathrm{Speg}_\beta(A)$ et $E_\beta \cap \mathrm{Speg}_\beta(A) = \emptyset$, on en déduit que $\mathfrak{F}$ est soit un élément de $E_\beta$, soit un élément de $\mathrm{Speg}_\beta(A)$. Considérons un élément $\mathfrak{F}'$ de

Speg(A) tel qu'on ait $\mathfrak{F}'\subseteq\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'\neq\mathfrak{F}$.

- Si $\mathfrak{F}$ est un élément de $E_\beta$, il existe un élément $\mathfrak{p}$ de $\Omega_{\mathfrak{F}}$ tel qu'on a K-dim$A/_{\mathfrak{p}}\leq\beta$. En outre d'après (1.3) si on considère un élément $\mathfrak{p}'$ de $\Omega_{\mathfrak{F}'}$, il existe deux éléments x et x' de A tels qu'on a : $x\notin\mathfrak{p}$ $x'\notin\mathfrak{p}'$ et $\mathfrak{p}.^{\cdot}x\subseteq\mathfrak{p}'.^{\cdot}x'$. Comme $\mathcal{A}_\beta$ est une sous-catégorie localisante de $\mathcal{A}$ et que $\mathfrak{p}'.^{\cdot}x'$ est un élément de $\Omega_{\mathfrak{F}'}$, on en déduit qu'on a K-dim$A/_{\mathfrak{p}'.^{\cdot}x'}\leq\beta$ et donc que $\mathfrak{F}'$ est un élément de $E_\beta$.

- Si $\mathfrak{F}$ est un élément de $\mathrm{Speg}_\beta(A)$, il résulte de (7.1) que $\mathfrak{F}'$ n'est pas élément de $\mathrm{Speg}_\beta(A)$ et donc qu'on a $\mathfrak{F}_\beta\not\subseteq\mathfrak{F}'$. Il résulte alors de (1.3) que $\mathfrak{F}'$ est un élément de $E_\beta$.

Supposons de plus maintenant que l'anneau A vérifie la condition (R) à droite, et considérons un élément $\mathfrak{F}$ de Speg(A) tel que pour tout élément $\mathfrak{F}'$ de Speg(A) qui vérifie $\mathfrak{F}'\subseteq\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'\neq\mathfrak{F}$ on ait $\mathfrak{F}'\in E_\beta$. D'après (7.2) il existe un ordinal $\gamma$ tel que $\mathfrak{F}$ est élément de $\mathrm{Speg}_\gamma(A)$. Si on avait $\gamma\geq\alpha$ , on en déduirait $\gamma>\beta$ et on aurait alors $\mathfrak{F}_\beta\subseteq\mathfrak{F}_\gamma\subseteq\mathfrak{F}$. Ceci impliquerait, d'après (7.1) et (4.3), l'existence d'un élément $\mathfrak{F}'$ de $\mathrm{Speg}_\beta(A)$ tel qu'on ait $\mathfrak{F}'\subseteq\mathfrak{F}$. Comme en outre $\gamma$ est distinct de $\beta$ et que les ensembles $\mathrm{Speg}_\gamma(A)$ et $\mathrm{Speg}_\beta(A)$ sont disjoints on aurait $\mathfrak{F}'\neq\mathfrak{F}$, ce qui entraînerait alors par hypothèse que $\mathfrak{F}'$ est un élément de $E_\beta$ et donc une contradiction car les ensembles $E_\beta$ et $\mathrm{Speg}_\beta(A)$ sont disjoints. C'est donc qu'on a : $\gamma<\alpha$, ce qui implique que $\mathfrak{F}$

est un élément de $E_\alpha$.

<u>Remarque</u> :

1) Pour un anneau commutatif, le théorème (7.2) et la proposition (7.4) nous donnent le théorème (2.7) de (6).

2) Si A est un anneau noethérien à droite ayant assez d'idéaux bilatères, il y a correspondance biunivoque entre ensembles premiers à droite de A et idéaux bilatères premiers de l'anneau A. Une simple vérification nous montre alors que l'ensemble $E_\alpha$ que nous avons défini s'identifie à celui défini par P. Gabriel dans (1) page 425. Donc le théorème (7.2) et la proposition (7.4) nous donnent en quelque sorte une généralisation du corollaire 2 page 425 de (1).

On déduit sans difficulté à partir des résultats précédents :

(7.5) COROLLAIRE.

*Soient* A *un anneau semi-noethérien à droite, et* $\alpha$ *un ordinal strictement inférieur à* K-dim($\mathcal{A}$). *Considérons* $E'_\alpha$ *le complémentaire de l'ensemble* $E_\alpha$ *dans* Speg (A). *Alors les éléments de* $\mathrm{Speg}_\alpha(A)$ *sont des éléments minimaux de l'ensemble* $E'_\alpha$. *Si de plus l'anneau* A *vérifie la condition* (R) *à droite, alors* $\mathrm{Speg}_\alpha(A)$ *est l'ensemble des éléments minimaux de* $E'_\alpha$.

Il est facile de voir que si A est un anneau semi-noethérien à droite tel que K-dim($\mathcal{A}$) soit un ordinal fini $n$, alors toute chaîne d'ensembles premiers à droite de $A$ possède au plus $n+1$ éléments.

Pour terminer donnons le résultat suivant :

(7.6) THEOREME.

*Les anneaux semi-noethériens à droite* A *tels que la dimension de Krull-Gabriel de la catégorie* $\mathcal{A}$ = ModA *des* A-modules *à droite soit nulle sont les anneaux semi-artiniens à droite.*

<u>Démonstration</u> : Si $A$ est un anneau semi-noethérien à droite tel qu'on a K-dim($\mathcal{A}$) = 0, alors il est évident que tout A-module à droite non nul contient un sous-module simple car c'est un élément de $\mathcal{A}_0$ la sous-catégorie localisante socle de ModA. Donc $A$ est un anneau semi-artinien à droite.

Si $A$ est un anneau semi-artinien à droite, on a vu (après (2.2)) que c'est un anneau stable à droite et donc pour démontrer que c'est un anneau semi-noethérien à droite il nous suffit, d'après (3.4), de montrer que toute intersection $\mathcal{G} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ d'ensembles premiers à droite de $A$ (formant une famille non vide) peut être réduite. En fait d'après la démonstration de (1) $\Rightarrow$ (4) du théorème (3.1) il nous suffit de montrer que, pour tout $i \in I$, il existe un élément de $\Omega_{\mathcal{F}_i}$ qui est élément de $\Omega_{\mathcal{G}}$. Or ceci est vérifié car d'après la proposition (2.3.8) de

(9) [proposition (1.8) de (10)] les ensembles $\mathcal{F}_i$ sont des ensembles simples à droite ce qui implique que, pour tout $i \in I$, il existe un idéal à droite maximal qui est élément de $\Omega_{\mathcal{F}_i}$ et qui sera nécessairement élément de $\Omega_{\mathcal{G}}$. Le fait que la dimension de Krull-Gabriel de la catégorie ModA soit nulle résulte alors de la proposition (2.3.8) de (9) déjà citée, du théorème (7.2) et de la remarque (7.3).

## BIBLIOGRAPHIE


(1) P. GABRIEL : *Des catégories abéliennes*. Bull. Soc. Math. France - 90 - (1962) - 323 - 448 -

(2) O. GOLDMAN : *Rings and Modules of quotients*. Journal of Algèbra - 13 - (1969) - 10 - 47 -

(3) M. HACQUE : *Localisations commutatives stables*. C.R. Acad. Sc. Paris - Sér. A - 270 - (1970) - 995 - 998 -

(4) A. HUDRY : *Application de la théorie de la localisation aux anneaux et aux modules*. Thèse de Doctorat de Spécialité - Faculté des Sciences de Lyon - (Avril 1970) -

(5) N. POPESCU : *Le spectre à gauche d'un anneau*. Journal of Algebra - 18 - (1971) - 213 - 228 -

(6) N. POPESCU : *Les anneaux semi-noethériens*. C.R. Acad. Sc. Paris - Sér. A - 272 - (1971) - 1439 - 1441.

(7) N. POPESCU : *Sur les C.P.-anneaux* . C.R. Acad. Sc. Paris - Sér. A - 272 - (1971) - 1493 - 1496 -

(8) N. POPESCU : *Categorii Abeliene*. Editura Academiei Republicii Socialiste România - Bucuresti - (1971)

(9) J. RAYNAUD : *Sur la théorie de la localisation.* Thèse de Doctorat de Spécialité - n° 7 - Univers Claude Bernard - Lyon I (Février 1971) -

(10) J. RAYNAUD : *Epimorphismes plats d'anneaux et propriété de transfert.* C.R. Acad. Sc. Paris - Sér. 270 -(1970) - 1714 -1717 -

(11) J. RAYNAUD : *Sur les épimorphismes plats d'anneaux.* C.R. Acad. Sc. Paris - Sér. A - 271 - (1970) - 65 - 68 -

(12) H. STORRER : *On Goldman's primary decomposition.* Tulane Ring Year - 1970/1971 - Lecture Notes n° 246 -

(13) J. RAYNAUD : *Localisations stables à droite et anneaux semi-noethériens à droite.* C.R. Acad. Sc. Paris - Sér. A - 275 - (1972) - 13 - 16 -

Manuscrit remis le 10 novembre 1972.

Jacques RAYNAUD
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 - VILLEURBANNE