PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

H. MAILLOT

Sur les formes de Killing et leurs « duales » sur une variété riemannienne

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1971, tome 8, fascicule 3
, p. 19-75
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1971__8_3_19_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1971.t.8.3.4.

SUR LES FORMES DE KILLING ET LEURS "DUALES" SUR UNE VARIETE RIEMANNIENNE

H. MAILLOT

INTRODUCTION : Soient M une variété riemannienne, ω une forme différentielle de degré p sur M. Pour tout x dans M, $(\nabla\omega)(x)$ est une application linéaire de T_xM dans l'espace vectoriel des formes p- linéaires alternées continues sur T_xM. Si, pour tout x dans M, $(\nabla\omega)(x)$ est du type $u \to i_u t$, où t est une forme $(p+1)$- linéaire alternée continue sur T_xM, ω est dite classiquement : "forme de Killing". Nous dirons aussi qu'une telle forme est équiprojective ; (cf. prop (4) de I). Les formes de Killing ont été introduites par Bochner [1]. Soit M une variété riemannienne de dimension finie, orientée ; si ω est une forme de Killing de degré p, alors $*\omega$ a, en tout point x de M, une différentielle covariante du type $u \to u^b \wedge s$, où s est de degré $p-1$: Les formes qui possèdent cette dernière propriété - qui a un sens même en dimension infinie - seront dites coéquiprojectives.

Dans ce qui suit, on étudie l'équiprojectivité, la coéquiprojectivité, les rapports entre les deux, et quelques notions qui s'y rattachent, sur une variété riemannienne (de dimension finie ou non).

Ce travail se compose de quatre parties.

Dans la première, les formes équiprojectives et jacobiennes sont définies et étudiées. La notion de forme jacobienne s'introduit naturellement dans l'étude des formes équiprojectives ; elle est un peu plus générale. Par exemple, si X est une transformation infinitésimale affine de M, la 1-forme associée, X^b, est jacobienne, mais non nécessairement équiprojective. Sur une variété riemannienne complète, une forme différentielle ω, telle que l'application $x \to \|\omega(x)\|$ soit bornée, est jacobienne, si et seulement si elle est équiprojective. En particulier, sur une variété compacte, les deux notions se confondent.

Des formules de type Bianchi sont établies pour les formes jacobiennes ; par exemple, si ω est une p-forme jacobienne, on a, pour tous champs locaux de vecteurs $X_1, .., X_{p+2}$:

$$\mathfrak{S}\,(R(X_1,X_2)\omega)(X_3,..,X_{p+2}) = 0 ,$$

où le signe $\mathfrak{S}$ indique qu'il faut sommer les termes obtenus par les permutations circulaires :

$$X_1 \to X_2 \to \dots \to X_{p+2} \to X_1 .$$

D'autre part, on démontre que, sur une variété riemannienne à courbure constante, il existe localement une forme équiprojective prenant une valeur donnée en un point. Il résulte alors du caractère "ponctuel" des formules en question, que ces dernières sont valables sur une variété à courbure sectionnelle constante, pour une forme ω quelconque.

Dans la partie II, les formes coéquiprojectives et cojacobiennes sont étudiées, ainsi que leurs relations avec les équiprojectives et les jacobiennes. Quand M est de dimension finie et orientée, une forme ω est équiprojective (resp. jacobienne) si et seulement si $*\omega$ est coéquiprojective (resp. cojacobienne). Pour tout champ de vecteurs X, la forme de degré 1, X^b, associée à X, est coéquiprojective, si et seulement si X est un champ conforme fermé. Il est prouvé, entre autres, que, lorsque $1 \leqslant p < \dim M - 3 \leqslant +\infty$, s'il existe, pour tout point x de M, une p-forme cojacobienne définie sur un voisinage de x et prenant en x une valeur donnée arbitraire, alors la variété est à courbure sectionnelle constante.

Le III concerne les formes différentielles induites sur une sous-variété ombilicale par les formes équiprojectives (resp. coéquiprojectives). On voit, par exemple, que si j est l'injection canonique et si ω est coéquiprojective, alors $j^*\omega$ est coéquiprojective. Les formes équiprojectives et coéquiprojectives sur la sphère d'un espace de Hilbert sont décrites complètement.

Enfin, dans le IV il est prouvé que l'ensemble des zéros d'une forme jacobienne (resp. cojacobienne) est une sous-variété totalement géodésique.

Pour l'étude des formes de Killing, cf. [11]. Pour certaines généralisations, cf. [3] et [8]. Au sujet des variétés banachiques, cf. [4] et [6].

TERMINOLOGIE ET NOTATIONS.

Pour tout $\mathbb{R}$-espace normé E et tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{A}_k(E)$ est l'espace normé des formes k-linéaires alternées continues sur E. On pose $\mathcal{A}_0(E) = \mathbb{R}$ et $E' = \mathcal{A}_1(E)$. $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_k(E)$, munie de la multiplication extérieure est une algèbre graduée, notée $\mathcal{A}(E)$. Pour toute algèbre graduée, les éléments de la sous-algèbre engendrée par les éléments de degré 0 et 1 sont dits polynomiaux. Pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_k(E)$ est l'ensemble des éléments polynomiaux de $\mathcal{A}_k(E)$.

Pour tout $\mathbb{R}$-espace de Hilbert H, b est l'isomorphisme canonique de H sur H' et $\#$ l'isomorphisme réciproque. b définit un isomorphisme de $\wedge H$ sur l'ensemble des éléments polynomiaux de $\mathcal{A}(H)$, que nous notons encore b et dont l'isomorphisme réciproque est noté encore $\#$. Pour tous α, β dans $\mathcal{A}(H)$, avec β polynomial, $\alpha \llcorner \beta$ est la forme $\alpha \llcorner (\beta^{\#})$. Si x et y appartiennent à $\wedge H$, $i_x y$ est l'élément de H défini par $b(i_x y) = i_x(y^b)$.

Dans la suite, M est une variété riemannienne (de dimension finie ou non) de classe C^p, avec p suffisamment grand pour nos besoins. $\mathfrak{X}(M)$ est l'ensemble des champs de vecteurs sur M, $\mathfrak{X}_0(M)$ l'ensemble des champs locaux ; $\Phi(M)$ l'algèbre des formes différentielles sur M ; $\Phi_p(M)$ l'ensemble des formes de degré p. Les opérations $b, \#, \llcorner$ etc, dont il a été question plus haut, définissent des opérations correspondantes sur les champs (de vecteurs, formes, etc...) que nous notons par les mêmes symboles. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, $\mathcal{A}(E)$, $\mathcal{A}_p(E)$, $\Phi(M)$, etc... sont notés parfois $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_p$, Φ etc...

Les chiffres entre ( ) renvoient à la bibliographie.

I - FORMES DIFFERENTIELLES EQUIPROJECTIVES ET JACOBIENNES.

FORMES EQUIPROJECTIVES.

DEFINITION (1)

I) *Un élément* ω *de* $\Phi_p(M)$ *est dit équiprojectif, ou encore forme de Killing, lorsque, pour tout* x *dans* M, $(\nabla\omega)(x)$ *est du type* $u \to i_u t$ *avec* t *dans* $\mathcal{A}_{p+1}(T_xM)$.

II) $\omega \in \Phi(M)$ *est dite équiprojective lorsque ses composantes homogènes le sont.*

PROPOSITION (1)

Soient E *un espace vectoriel normé sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, $L : E \to \mathcal{A}_p(E)$ *une application linéaire continue. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1°) L *est du type* $u \to i_u T$, *avec* $T \in \mathcal{A}_{p+1}(E)$.

2°) $\forall u \in E$, $i_u(L(u)) = 0$.

La démonstration facile, est laissée au lecteur.

On en déduit le :

CRITERE D'EQUIPROJECTIVITE : *Pour que* ω *soit équiprojective il faut et il suffit que* $\forall x \in M$, $\forall u \in T_xM$, $i_u((\nabla_u\omega)(x)) = 0$.

Cette dernière condition équivaut à : pour tout champ local X de vecteurs, $i_X\nabla_X\omega = 0$.

Remarque : Toute forme différentielle parallèle est équiprojective.

Notations : $\mathcal{E}q(M)$ est l'ensemble des éléments équiprojectifs de $\Phi(M)$ et, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}q_p(M) = \mathcal{E}q(M) \cap \Phi_p$.

PROPOSITION (2)

Pour qu'un champ de vecteurs X *sur* M *soit un champ de Killing, il faut et il suffit que* X^b *soit équiprojective.*

En effet : Pour que X soit un champ de Killing il faut et il suffit que, pour tout x dans M, $(\nabla X)(x)$ soit antisymétrique ; et, pour tout A dans $\mathfrak{X}_0(M)$, ∇_A commute avec l'opérateur bémol b.

PROPOSITION (3)

Si $\omega \in \Phi_p$ *est équiprojective :* $\forall x \in X, \forall u \in T_x M, (\nabla_u \omega)(x) = \frac{1}{p+1}\, i_u((d\omega)(x))$.

__Preuve__ : Il résulte immédiatement de l'hypothèse que l'application :

$(u_1,..,u_{p+1}) \to (\nabla_{u_1}\omega)(x)(u_2,..,u_{p+1})$ de $(T_x M)^{p+1}$ dans $\mathbb{R}$ est alternée. Or :

$$(d\omega)(x)(u_1,..,u_{p+1}) = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1}(\nabla_{u_k}\omega)(x)(u_1,..,\check{u}_k,...,u_{p+1}),$$

donc, pour tout x dans M, et tous $u_1,..,u_{p+1}$ dans $T_x M$:

$$(d\omega)(x)(u_1,..,u_{p+1}) = (p+1)(\nabla_{u_1}\omega)(x)(u_2,..,u_{p+1}) \qquad \text{(cqfd).}$$

COROLLAIRE : *Soit* $\omega \in \Phi_p$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1°) ω *est équiprojective et fermée.*

2°) ω *est parallèle.*

PROPOSITION (4)

Soit $\omega \in \Phi_p$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
1°) ω *est équiprojective.*
2°) Pour toute géodésique $\gamma : I \to M$, *l'application*
$t \to i_{\gamma'(t)}\omega(\gamma(t))$ *est parallèle* (i.e. *a une dérivée covariante nulle).*

Preuve : Soient γ une géodésique, φ l'application $t \to i_{\gamma'(t)}\omega(\gamma(t))$. Pour tout t dans I on a

$\frac{\nabla\varphi}{dt}(t) = i_{\gamma'(t)}\big((\nabla_{\gamma'(t)}\omega)(\gamma(t))\big)$; la proposition en découle aussitôt.

Si ω est de degré 1, et si $X = \omega^{\#}$, alors φ est l'application $t \to (X(\gamma(t))|\gamma'(t))$. Le parallélisme de φ signifie dans ce cas que φ est constante, d'où la terminologie de "forme équiprojective".

COROLLAIRE : *L'ensemble des formes différentielles équiprojectives est stable par limite simple dans* Φ .

PROPOSITION (5)

Si ω *est une forme équiprojective et* X *une transformation infinitésimale affine,* $\mathcal{L}_X\omega$ *est équiprojective.*

Preuve : D'après l'hypothèse, pour tout champ local A de vecteurs sur M :

$(\nabla\omega)A = i_A T$, où $T \in \Phi_{p+1}$;

donc, $(\mathcal{L}_X(\nabla\omega))A = i_A(\mathcal{L}_X T)$ et, puisque X est une transformation infinitésimale affine,

$(\nabla(\mathcal{L}_X\omega))A = i_A(\mathcal{L}_X T)$ (cqfd).

PROPOSITION (6)

Si M *est de dimension finie, toute forme équiprojective sur* M *est cofermée.*

En effet : La trace d'une application bilinéaire alternée est nulle.

FORMES JACOBIENNES.

Soit $\omega \in \Phi_p(M)$. Si ω est équiprojective, on a, par définition, pour tous Y, Z dans $\mathfrak{X}_o(M)$:

$i_Z((\nabla\omega)Y) + i_Y((\nabla\omega)Z) = 0.$

Il en résulte que, pour tous X, Y, Z dans $\mathfrak{X}_o(M)$:

$i_Z((\nabla^2\omega)XY) + i_Y((\nabla^2\omega)XZ) = 0$;

propriété qui est équivalente à : pour tous X, Y dans $\mathfrak{X}_o(M)$,

$i_Y((\nabla^2\omega)XY = 0.$ (1)

DEFINITION (2)

Soit $\omega \in \Phi_p(M)$. ω *est dite jacobienne si elle vérifie* (1).

Cette dénomination a été suggérée par les propositions (8) et (9) ci-dessous et la forme de l'équation (3).

PROPOSITION (7)

Si ω *est jacobienne, pour tous* X, Y, Z dans $\mathfrak{X}_o(M)$:

$$(2) \qquad 2i_Z((\nabla^2\omega)XY)+i_X(R(Y,Z)\omega)-i_Y(R(Z,X)\omega)-i_Z(R(X,Y)\omega) = 0$$

Ainsi, en un point $x \in M$, *la différentielle seconde covariante d'une forme jacobienne est déterminée par* $\omega(x)$ *et la courbure en* x .

Preuve : Pour tous X,Y,Z dans $\mathfrak{X}_o(M)$:

$$i_Z((\nabla^2\omega)XY)-i_Z((\nabla^2\omega)YX) = i_Z(R(X,Y)\omega).$$

En combinant les trois équations obtenues par permutation circulaire $X \to Y \to Z \to X$, avec les coefficients respectifs $-1,+1,+1$, et en tenant compte de (1), on obtient la formule annoncée. (cqfd).

COROLLAIRE : *Si* ω *est jacobienne, pour tous* X,Z *dans* $\mathfrak{X}_o(M)$:

$$(3) \qquad i_Z((\nabla^2\omega)XX)-i_X(R(Z,X)\omega) = 0$$

PROPOSITION (8)

Soit $\omega \in \Phi_p$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

I) ω *est jacobienne*

II) ω *vérifie* (2)

III) ω *vérifie* (3)

Preuve : On a vu que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3). Il est clair que (2) $\Rightarrow$ (1). Démontrons que (3) $\Rightarrow$ (2). Supposons que ω vérifie (3). Il résulte de la formule de Ricci que le premier membre de (2) est symétrique en X,Y ; il est donc, au facteur 2 près, la forme polaire du premier membre de (3) considéré comme fonction de X., d'où le résultat. (cqfd).

PROPOSITION (9)

Pour qu'un champ de vecteurs A *sur* M *soit une transformation infinitésimale affine il faut et il suffit que* A^b *soit jacobienne.*

<u>**Preuve**</u> : Posons $\omega = A^b$. Pour que ω soit jacobienne, il faut et il suffit, d'après la proposition (2), que pour tous X,Z dans $\mathfrak{X}_o(M)$:

$$i_Z((\nabla^2\omega)XX) - i_X(R(ZX)\omega) = 0$$

i.e. $$((\nabla^2 A)XX)|Z - (R(ZX)A)|X = 0$$

$$((\nabla^2 A)XX)|Z + (R(AX)X)|Z = 0$$

i.e. $$\forall X \in \mathfrak{X}_o(M),\ (\nabla^2 A)XX + R(AX)X = 0.$$

Cette propriété équivaut à : pour tous X,Y dans $\mathfrak{X}_o(M)$, $(\nabla^2 A)XY + R(AX)Y = 0.$ (4)

(Car le premier membre de (4) est symétrique en X,Y, d'après la première formule de Bianchi).

Or (4) est une condition nécessaire et suffisante classique pour que A soit une transformation infinitésimale affine, d'où la proposition.

PROPOSITION (9')

Si ω *est une forme jacobienne, et* A *une transformation infinitésimale affine,* $\mathcal{L}_A\omega$ *est jacobienne.*

Ceci résulte de la définition des formes jacobiennes, et du fait que $\mathcal{L}_A$ *commute avec* ∇ .

PROPOSITION (10)

Soit $\omega \in \Phi_p(M)$. *Supposons que* M *est complète et que l'application* $x \to \|\omega(x)\|$ *est bornée. Alors* ω *est jacobienne si et seulement si* ω *est équiprojective.*

<u>Preuve</u> : Supposons ω jacobienne. Soient $\gamma : \mathbb{R} \to M$ une géodésique et, pour tous $i = 1,..,p-1$, v_i un champ de vecteurs parallèle le long de γ. Pour tout t dans $\mathbb{R}$, posons :

$$\varphi(t) = \omega(\gamma(t))(\gamma'(t), v_1(t),..,v_{p-1}(t)).$$

Des hypothèses on déduit que $\varphi'' = 0$ et que φ est bornée ; donc φ est constante, donc $\varphi' = 0$. Ceci étant vrai pour tous choix de γ et des v_i il résulte du critère d'équiprojectivité que ω est équiprojective. (cqfd).

COROLLAIRE : *Sur une variété compacte, les formes jacobiennes sont les formes équiprojectives.*

LEMME (11) : *Soient* M *une variété riemannienne à courbure constante* σ, $\omega \in \Phi$, X, Y *dans* $\mathfrak{X}_0(M)$; *alors :*

$$R(X,Y)\omega = \sigma\,(X^b \wedge i_Y\omega - Y^b \wedge i_X\omega)$$

<u>Preuve</u> : Pour tous $Z_1,\dots,Z_p$ dans $\mathfrak{X}_0(M)$, on a :

$$(R(X,Y)\omega)(Z_1,..,Z_p) = -\sum_{k=1}^{p} \omega(Z_1,..,R(X,Y)Z_k,..,Z_p).$$

Or, d'après l'hypothèse :

$$R(X,Y)\,)(Z_k = \sigma((Y|Z_k)X-(X|Z_k)Y)$$

donc $(R(X,Y)\omega)(Z_1,..,Z_p) = \sigma \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1}(X|Z_k)\omega(Y,Z_1,..,\check{Z}_k,..Z_p)$

$$-\sigma \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1}(Y|Z_k)\omega(X,Z_1,..,\check{Z}_k,..Z_p)$$

d'où le résultat. (cqfd).

PROPOSITION (12)

Soient M *une variété riemannienne à courbure constante* σ, $p\in\mathbb{N}^*$, $\omega\in\Phi_p$ *. Pour que* ω *soit jacobienne il faut et il suffit que pour tous* X,Y *dans* $\mathfrak{X}_o(M)$:

$$(\nabla^2\omega)XY = -\sigma i_Y(X^b\wedge\omega).$$

<u>Preuve</u> : D'après la proposition (7) :

$$2\ i_Z((\nabla^2\omega)XY) = -i_X(R(Y,Z)\omega)+i_Y(R(Z,X)\omega)+i_Z(R(X,Y)\omega).$$

En utilisant le lemme (11) et le fait que, pour tout A dans $\mathfrak{X}_o(M)$, l'opérateur i_A est une dérivation graduée de degré -1, on obtient, après réduction :

$$\begin{aligned} i_Z((\nabla^2\omega)XY) &= \sigma\big((X|Z)i_Y\omega+X^b\wedge i_Yi_Z\omega-(X|Y)i_Z\omega\big) \\ &= \sigma i_Z(X^b\wedge i_Y\omega-(X|Y)\omega) \\ &= -\sigma i_Z(i_Y(X^b\wedge\omega)) \end{aligned}$$

d'où le résultat. (cqfd).

<u>Cas particulier</u> : Si M est un espace de Hilbert H, les p-formes jacobiennes sur H sont les applications $\omega : H \to \mathcal{A}_p(H)$ telles que $D^2\omega = 0$, ie, ce sont les applications affines de

H dans $\mathcal{A}_p(H)$.

PROPOSITION (13)

Soient M *une variété riemannienne à courbure sectionnelle constante* $\sigma, a \in M, p \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathcal{A}_p(T_aM), \beta \in \mathcal{A}_{p+1}(T_aM)$.
Alors il existe, sur un voisinage de a, *une forme différentielle* ω *équiprojective vérifiant* $\omega(a) = \alpha$ *et* $\forall u \in T_aM, (\nabla\omega)u = i_u\beta$. *De plus, les* ω *qui vérifient ces propriétés ont toutes le même germe en* a. (cf. [9], th. (3))

Preuve : Soit $\omega \in \Phi$; posons $\theta = \nabla\omega$. (1)

Si ω est équiprojective, on a, pour tous X,Y dans $\mathfrak{X}_o(M), i_Y\,\theta(X) = -i_X\,\theta(Y)$; (2)

et, puisque ω est à fortiori jacobienne :

$(\nabla\,\theta)XY = -\sigma i_Y(X^b \wedge \omega)$ (3)

Les équations (1) et (3) constituent une équation aux différentielles totales covariantes du 1er ordre, l'inconnue étant le couple (ω, θ), où $\omega \in \Phi_p$ et θ vérifie (2). La condition d'intégrabilité s'écrit :

$$(4) \qquad R(X,Y)\omega = -\sigma i_Y(X^b \wedge \omega) + \sigma i_X(Y^b \wedge \omega)$$

$$(5) \quad (R(X,Z)\,\theta)Y = -\sigma i_Y(Z^b \wedge \theta(X)) + \sigma i_Y(X^b \wedge \theta(Z))$$

Or le deuxième membre de (4) est égal à $\sigma(X^b \wedge i_Y\omega - Y^b \wedge i_X\omega)$ qui n'est autre que $R(X,Y)\omega$, d'après le lemme (11). Donc la condition (4) est vérifiée. D'autre part :

$$\begin{aligned}(R(X,Z)\,\theta)Y &= R(X,Z)\,\theta(Y) - \theta(R(X,Z)Y)\\ &= \sigma(X^b \wedge i_Z\,\theta(Y) - Z \wedge i_X\,\theta(Y))\end{aligned}$$

$$-\theta((Z|Y)X-(X|Y)Z)$$

et, en utilisant (2), on voit que ceci est égal au deuxième membre de (5). Ainsi la condition d'intégrabilité est vérifiée, d'où la proposition.

PROPOSITION (14)

Soient $\omega\in\Phi_p, X_1,..,X_{p+2}$ *dans* $\mathfrak{X}_o(M)$ *alors :*

(1) $\sum\varepsilon_\sigma(R(X_{\sigma(1)},X_{\sigma(2)})\omega)(X_{\sigma(3)},...,X_{\sigma(p+2)}) = 0,$
où la somme est étendue aux permutations σ *de* $\{1,2,..p+2\}$ *telles que* $\sigma(1)<\sigma(2)$ *et* $\sigma(3)<...<\sigma(p+2)$.

Preuve : Ceci résulte des formules $d\circ d = 0, (d\omega)(X_1,..,X_{p+1}) = \sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k+1}(\nabla_{X_k}\omega)(X_1,..,\check{X}_k,..X_{p+1})$ et de l'associativité de l'antisymétrisation réduite.

Nous allons voir que, si ω est jacobienne, elle vérifie des relations analogues à (1), mais plus simples.

PROPOSITION (15)

Soient $\omega\in\Phi_p, X_1,..,X_{p+2}$ *dans* $\mathfrak{X}_o(M)$. *Supposons* ω *jacobienne, alors :*

I) $\mathfrak{S}(R(X_1,X_2)\omega)(X_3,..,X_{p+2}) = 0$ *où le signe* $\mathfrak{S}$ *indique qu'il faut sommer les termes obtenus par permutation circulaire :*

$X_1\to X_2\to ...\to X_{p+2}\to X_1$.

II) *Si* h *est un entier pair :*

$\mathfrak{S}\,(R(X_1,X_2)\omega)(X_3,..,X_h,...,X_{p+2}) = 0$;

où $\mathfrak{S}$ *indique, ici, qu'il faut sommer les termes obtenus par les permutations circulaires*
$X_1 \to X_2 \to \ldots \to X_h \to X_1$.

III) *Si* h *est un entier impair :*

$\mathfrak{S}\big((R(X_3X_1)\omega)X_2,..,X_h,..,X_{p+2}+(R(X_3,X_2)\omega)(X_1,..,X_h,..,X_{p+2})\big) = 0$

où $\mathfrak{S}$ *a la même signification qu'en* II).

<u>**Preuve**</u> : Pour tous A,B,C dans $\mathfrak{X}_o(M)$, $i_C(R(A,B)\omega) =$
$i_C((\nabla^2\omega)AB)-i_C((\nabla^2\omega)BA)$

donc, puisque ω est jacobienne :

$$i_C(R(A,B)\omega) = -i_B((\nabla^2\omega)AC+i_A((\nabla^2\omega)BC) \qquad (1)$$

1°) Supposons h pair.

Alors, compte tenu de la formule (1), la somme de II) se réduit à zéro : le premier et le dernier terme s'annulent, et le terme de rang 2k s'annule avec celui de rang 2k+1.

2°) Supposons h impair.

Au lieu de s'annuler deux à deux, les termes sont cette fois égaux deux à deux, et la somme de III) est égale à :

$2\,\mathfrak{S}((\nabla^2\omega)X_1X_2)(X_3,..,X_h,.,X_{p+1})$ étendue aux permutations circulaires :

$X_1 \to X_2 \to . \to X_h \to X_1$. On a donc :

$$\mathfrak{S}\Big(((\nabla^2\omega)X_1X_2)(X_3,..,X_h,..,X_{p+2})+((\nabla^2\omega)X_2X_1)(X_3,..,X_h,..,X_{p+2})\Big) = 0$$

Or, du fait que ω est jacobienne, résulte facilement que :

$$(R(X_3X_1)\omega)(X_2X_4,..,X_{p+2})+(R(X_3X_2)\omega)(X_1X_4,..,X_{p+2})$$
$$= ((\nabla^2\omega)X_1X_2)(X_3X_4...X_{p+2})+((\nabla^2\omega)X_2X_1)(X_3X_4,..,X_{p+2}),$$ d'où III).

3°) Supposons h impair et $h = p+2$.

ω étant jacobienne, il résulte de la proposition (14) et de l'associativité de l'antisymétrisation réduite que :

$$(p+1)\sum_{k=1}^{p+2}(-1)^{k-1}((\nabla^2\omega)X_kX_1)(X_2,..,\check{X}_k,..,X_{p+2}) = 0$$

i.e. du fait que h est impair :

$$\mathfrak{S}((\nabla^2\omega)X_1X_2)(X_3,..,X_h,..,X_{p+2}) = 0$$

étendue aux permutations circulaires

$X_1 \to X_2 \to \dots \to X_{p+2} \to X_1$;

d'où I) d'après 2°). (cqfd).

PROPOSITION (16)

Soit $\omega \in \Phi_2, X_1,..,X_4$ *dans* $\mathfrak{X}_0(M)$.
Supposons ω *jacobienne, alors :*

$$(R(X_1,X_2)\omega)(X_3X_4)+(R(X_3,X_4)\omega)(X_1X_2) = 0$$

<u>Schéma de preuve</u> : La proposition (14) fournit une somme de 6 termes qui est nulle. En utilisant la proposition (15) II) on obtient :

$$3\big((R(X_1,X_2)\omega)(X_3X_4)+(R(X_3,X_4)\omega)(X_1X_2)\big) = 0 \qquad \text{(cqfd)}.$$

COROLLAIRE : *Soit* M *une variété riemannienne à courbure sectionnelle constante* σ . *Alors toutes les formules des propositions* (15) *et* (16) *sont valables pour une forme différentielle* ω *quelconque*.

Preuve : Ceci résulte du caractère "ponctuel" en ω de ces formules, et de la proposition (13). (cqfd).

DEFINITION

Soit M *une variété riemannienne de dimension finie, orientée ;* $\omega \in \Phi_p$. *On appelle sous espace central de* ω *et on note* $\mathcal{C}(\omega)$ *l'ensemble des points critiques de l'application* $x \to (\omega(x)|\omega(x))$ *de* M *dans* $\mathbb{R}$.

PROPOSITION (17)

Si ω *est équiprojective,* $\mathcal{C}(\omega)$ *est l'ensemble des points* x *de* M *tels que :*

$\omega(x)\wedge *(d\omega)(x) = 0$

Preuve : Soit $f : M \to \mathbb{R}$ l'application $x \to (\omega(x)|\omega(x))$. Pour tout x dans M et tout u dans T_xM :

$$Df(x).u = 2(\nabla_u\omega)(x)|\omega(x)$$

$$= \frac{2}{p+1}\, i_u(d\omega)(x)|\omega(x) \qquad \text{(prop. (3))}$$

$$= \frac{2}{p+1}\,(d\omega)(x)|u^b\wedge\omega(x)$$

donc, en désignant par μ la forme volume de M :

$$(Df(x).u)\,\mu = \frac{2}{p+1}\, u^{b} \wedge .\omega(x) \wedge *(d\omega)(x)$$

donc, $x \in \mathcal{C}(\omega) \Longleftrightarrow \omega(x) \wedge *(d\omega)x) = 0$ (cqfd).

II - FORMES DIFFERENTIELLES COEQUIPROJECTIVES ET COJACOBIENNES ; RELATIONS AVEC LES EQUIPROJECTIVES ET LES JACOBIENNES.

FORMES COEQUIPROJECTIVES

DEFINITION (1)

Soit M *une variété riemannienne.*

I) $\omega \in \Phi_p(M)$ *est dite coéquiprojective lorsque, pour tout* x *dans* M, $(\nabla\omega)(x)$ *est du type* $u \to u^b \wedge s$, *avec* $s \in \mathcal{A}_{p-1}(T_xM)$.

II) $\omega \in \Phi$ *est dite coéquiprojective lorsque ses composantes homogènes le sont.*

D'après la proposition (5) de [5] on a le :

CRITERE DE COEQUIPROJECTIVITE : *Pour que* ω *soit coéquiprojective, il faut et il suffit que :* $\forall x \in M$, $\forall u \in T_xM$, $u^b \wedge (\nabla_u\omega)(x) = 0$.

Cette dernière condition équivaut à : pour tout champ local X de vecteurs sur M, $X^b \wedge \nabla_X\omega = 0$.

Notations : $\mathrm{Coeq}(M)$ est l'ensemble des éléments coéquiprojectifs de $\Phi(M)$ et $\forall p \in \mathbb{N}$ $\mathrm{Coeq}_p(M) = \mathrm{Coeq}(M) \cap \Phi_p(M)$.

Soient E un espace vectoriel normé, $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout s dans $\mathcal{A}_{p-1}$, notons $\hat{s}$ l'application linéaire $u \to u \wedge s$ de E'

dans $\mathcal{A}_p$. Désignons par $\mathcal{M}(E',\mathcal{A}_p)$ l'ensemble des $\hat{s}$.

Il résulte du corollaire (2) de la proposition (4) de [5] que l'application $s \to \hat{s}$ de $\mathcal{A}_{p-1}$ sur $\mathcal{M}(E',\mathcal{A}_p)$ est un isomorphisme bicontinu pour les normes. Par suite, à tout élément ω de Coeq_p est associé un unique $S \in \Phi_{p-1}$. Soit c l'application $\omega \to S$ de Coeq_p dans Φ_{p-1}.

PROPOSITION (1)

Coeq *est une sous-algèbre de* Φ *et* c *est une dérivation graduée, de degré* **-1**, *de* Coeq *dans* Φ.

Preuve : Soient $\alpha, \beta \in \mathrm{Coeq}.$; $\forall x \in M$, $\forall u \in T_x M$

$$(\nabla_u \alpha)(x) = u^b \wedge S(x)$$

$$(\nabla_u \beta)(x) = u^b \wedge T(x)$$

donc
$$\begin{aligned}\nabla_u(\alpha\wedge\beta)(x) &= (\nabla_u\alpha)(x)\wedge\beta(x)+\alpha(x)\wedge(\nabla_u\beta)(x)\\ &= u^b\wedge S(x)\wedge\beta(x)+\alpha(x)\wedge u^b\wedge T(x)\\ &= u^b\wedge(S(x)\wedge\beta(x)+(-1)^p\alpha(x)\wedge T(x))\end{aligned}$$
(cqfd).

Remarque : Les éléments parallèles de Φ forment une sous-algèbre de Coeq.

PROPOSITION (2)

Toute forme coéquiprojective est fermée.

Preuve : Soit $\alpha \in \mathrm{Coeq}_p$. Il suffit de prouver que pour tout x dans M et toute suite orthogonale $u_o, u_1, .., u_p$ d'éléments de T_xM :

$(d\alpha)(x)(u_o, u_1, .., u_p) = 0$

or $$(d\alpha)(x)(u_o, u_1, .., u_p) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k (\nabla_{u_k} \alpha)(x)(u_o, .., \check{u}_k, .., u_p)$$
$$= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k (u_k^b \wedge S(x))(u_o, .., \check{u}_k, .., u_p)$$
$$= 0. \qquad \text{(cqfd)}.$$

PROPOSITION (3)

Soit $\omega \in \Phi_p$. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1°) ω *est équiprojective.*

2°) Pour toute géodésique $\gamma : I \to M$ *l'application* $t \to (\gamma'(t))^b \wedge \omega(\gamma(t))$ *est parallèle.*

Preuve : Elle est semblable à celle de la proposition (4) de I. On utilise cette fois le critère de coéquiprojectivité.

COROLLAIRE : *L'ensemble des formes différentielles coéquiprojectives est stable par limite simple dans* Φ.

PROPOSITION (4)

Soient ω *une forme coéquiprojective sur* M, *et* X *un* *champ de Killing, alors* $\mathcal{L}_X\omega$ *est coéquiprojective.*

Preuve : D'après l'hypothèse, pour tout champ local A de vecteurs sur M :

$(\nabla\omega)A = A^b \wedge S$, où $S \in \Phi_{p-1}$.

Comme X est un champ de Killing :

$\mathcal{L}_X(A^b) = (\mathcal{L}_X A)^b$ et $\mathcal{L}_X(\nabla\omega) = \nabla(\mathcal{L}_X\omega)$,

donc $(\nabla(\mathcal{L}_X\omega))A = A^b \wedge \mathcal{L}_X S$. (cqfd).

PROPOSITION (5)

$\mathcal{E}$q.$\cap$ Coeq. *est l'ensemble des formes différentielles parallèles.*

Preuve : Une forme parallèle est équiprojective et coéquiprojective. La réciproque résulte du :

LEMME : *Soit* E *un espace de Hilbert.*

Si $L : E \to \mathcal{A}_p$ *est à la fois du type* $u \to u^b \wedge S$ *avec* $S \in \mathcal{A}_{p-1}$ *et du type* $u \to i_u T$, avec $T \in \mathcal{A}_{p+1}$, *alors* $L = 0$.

En effet : Si $p > \dim E$, alors $L = 0$.

Supposons $p \leqslant \dim E$.

D'après l'hypothèse, $\forall u \in E$, $i_u T = u^b \wedge S$

donc, $\forall u \in E$, $0 = (u|u)S - u^b \wedge i_u S$

donc, $\forall u \in E$, $0 = (u|u)u^b \wedge S$

donc, $\forall u \in E$, $0 = u^b \wedge S$, or $\deg S < \dim E$, donc $S = 0$. (cqfd).

PROPOSITION (6)

Soit M *une variété riemannienne de dimension finie* n *et orientée ;* $\omega \in \Phi_p$. *Pour que* ω *soit coéquiprojective il faut et il suffit que* $*\omega$ *soit équiprojective et, dans ce cas :*

$$\forall\, x \in M,\ \ \forall u \in T_x M,\ \ (\nabla_u \omega)(x) = -u^b \wedge \frac{(\delta\omega)(x)}{n-(p-1)}\ .$$

<u>**Preuve**</u> : $(\nabla_u \omega)(x) = u \wedge S(x)$ est équivalent à :

$$*(\nabla_u \omega)(x) = (-1)^{p-1} i_u(*S(x)).$$

i.e. $\nabla_u(*\omega)(x) = i_u((-1)^{p-1} *S(x))$.

De plus, d'après la proposition (3) de I, si $*\omega$ est équiprojective : $\forall\, x \in M$, $\forall u \in T_x M$,

$$\nabla_u(*\omega)(x) = i_u\left(\frac{1}{n-p+1}\, d*\omega\right)(x)$$

donc $(-1)^{p-1} *S = \dfrac{1}{n-p+1}\, d*\omega$

d'où $S = -\dfrac{1}{n-p+1}\, \delta\omega$ (cqfd).

COROLLAIRE : *Lorsque* M *est de dimension finie* n *et orientée, la famille des* $\dfrac{1}{n-p+1}\delta$: $\mathrm{Coeq}_p \to \Phi_{p-1}$ *est une dérivation graduée de degré* -1.

Ceci résulte des propositions (1) et (6).

COROLLAIRE : *Soient* M *riemannienne orientée de dimension finie* $\omega \in \Phi$. *Les conditions suivantes sont équivalentes*

1°) ω *est coéquiprojective et cofermée.*

2°) ω *est parallèle.*

FORMES COJACOBIENNES

Soit $\omega \in \Phi_p(M)$. Si ω est coéquiprojective on a, par définition, pour tous Y,Z dans $\mathfrak{X}_0(M)$:

$((\nabla\omega)Y)\wedge Z^b+((\nabla\omega)Z)\wedge Y^b = 0$

Il en résulte que, pour tous X,Y,Z dans $\mathfrak{X}_0(M)$:

$((\nabla^2\omega)XY)\wedge Z^b+((\nabla^2\omega)XZ)\wedge Y^b = 0$

propriété qui est équivalente à : pour tous X,Y dans $\mathfrak{X}_0(M)$,

$((\nabla^2\omega)XY)\wedge Y^b = 0.$ (1)

DEFINITION

Soit $\omega \in \Phi_p(M)$. ω *est dite cojacobienne si elle vérifie (1).*

PROPOSITION (7)

Soient M *une variété riemannienne de dimension finie et orientée,* $\omega \in \Phi_p$. *Pour que* ω *soit jacobienne il faut et il suffit que* $*\omega$ *soit cojacobienne.*

Preuve : Pour tous X,Y dans $\mathfrak{X}_0(M)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

$$i_Y((\nabla^2\omega)XY) = 0$$

$$*i_Y((\nabla^2\omega)XY) = 0$$

$$Y^b \wedge *((\nabla^2\omega)XY) = 0$$

$$Y^b \wedge (\nabla^2(*\omega)XY) = 0 \qquad \text{(cqfd).}$$

PROPOSITION (8)

Soient M *une variété riemannienne,* $X \in \mathfrak{X}(M)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1°) X *est conforme et fermé.*

2°) X^b *est coéquiprojective.*

Preuve : Immédiate.

PROPOSITION (8')

Si ω *est une forme cojacobienne et* X *un champ de Killing,* $\mathcal{L}_X\omega$ *est cojacobienne.*

Preuve : Ceci résulte de la définition des formes cojacobiennes et du fait que $\mathcal{L}_X$ commute avec b et ∇.

Les démonstrations des propositions (9) et (10) suivantes sont analogues à celles des propositions (7) et (8) de I :

PROPOSITION (9)

Si ω *est cojacobienne, pour tous* X,Y,Z *dans* $\mathfrak{X}_o(M)$:

(2) $2(\nabla^2\omega)XY)\wedge Z^b+(R(YZ)\omega)\wedge X^b-(R(Z,X)\omega)\wedge Y^b-(R(X,Y)\omega)\wedge Z^b = 0$

COROLLAIRE : *Si* ω *est cojacobienne, pour tous* X,Z *dans* $\mathfrak{X}_0(M)$:

(3) $((\nabla^2\omega)XX)\wedge Z^b - R(Z,X)\omega)\wedge X^b = 0$

PROPOSITION (10)

Soit $\omega\in\Phi_p$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

I) ω *est cojacobienne.*

II) ω *vérifie* (2).

III) ω *vérifie* (3).

PROPOSITION (11)

Soit $\omega\in\Phi_p$. *Supposons que* M *est complète et que l'application* $x\to\|\omega(x)\|$ *est bornée. Alors* ω *est cojacobienne si et seulement si* ω *est coéquiprojective.*

__Preuve__ : Elle est similaire à celle de la proposition (10) de I. Etant donnés une géodésique γ , et des champs de vecteurs parallèles le long de γ : $v_1,..,v_{p+1}$, on pose, cette fois,

$\phi(t) = (\gamma'(t)^b\wedge\omega(\gamma(t))(v_1(t),..,v_{p+1}(t))$,

et on utilise le critère de coéquiprojectivité.

COROLLAIRE : *Sur une variété compacte les formes cojacobiennes sont les formes coéquiprojectives.*

PROPOSITION (12)

Soient ω, ϕ *dans* Φ. *Si* ω *est équiprojective et si* ϕ *est coéquiprojective et polynomiale, alors* $\omega \llcorner \phi$ *est équiprojective.*

Preuve : Supposons $\omega \in \Phi_p, \phi \in \Phi_q$. Pour tout X dans $\mathcal{X}_0(M), \nabla_X(\omega L\phi) = (\nabla'_X\omega)L\phi + \omega L\nabla_X\phi$.

D'après l'hypothèse :

$$\nabla_X\omega = \frac{1}{p+1}\, i_X d\omega \quad \text{et} \quad \nabla_X\phi = X^b \wedge C(\phi).$$

Par conséquent :

$$\nabla_X(\omega L\phi) = i_X\left[\frac{(-1)^q}{p+1}\,(d\omega)L\phi + (-1)^{q-1}\omega L(C(\phi))\right]$$

d'où le résultat. (cqfd).

PROPOSITION (13)

Soient M *une variété riemannienne à courbure sectionnelle constante* σ ; $\omega \in \Phi_p$ *telle que* $\deg \omega < \dim M \leqslant +\infty$. *Pour que* ω *soit cojacobienne il faut et il suffit que, pour tous* X, Y *dans* $\mathcal{X}_0(M)$: $(\nabla^2\omega)XY = -\sigma Y^b \wedge i_X\omega$

Preuve : D'après la proposition (9), pour tous X, Y, Z dans $\mathcal{X}_0(M)$:

$$2((\nabla^2\omega)XY) \wedge Z^b = -(R(Y,Z)\omega) \wedge X^b + (R(Z,X)\omega) \wedge Y^b + (R(XY)\omega) \wedge Z^b$$

d'où, après réduction, en utilisant le lemme (11) de I :

$$((\nabla^2\omega)XY) \wedge Z^b = -\sigma Y^b \wedge (i_X\omega) \wedge Z^b,$$

d'où la proposition.

PROPOSITION (14)

Soit M *une variété riemannienne à courbure sectionnelle constante* σ. *Si* ω *est une forme coéquiprojective telle que :*
$\deg \omega < \dim M \leq +\infty$, *alors, pour tout* X *dans* $\mathfrak{X}_0(M)$:
$\nabla_X c(\omega) = -\sigma i_X \omega$.

En particulier $c(\omega)$ *est équiprojective.*

Preuve : De l'hypothèse on déduit que, pour tous X,Y dans $\mathfrak{X}_0(M)$:
$(\nabla^2\omega)XY = Y^b \wedge \nabla_X(c(\omega))$,
i.e., d'après la proposition (13) :
$-\sigma Y^b \wedge i_X\omega = Y^b \wedge \nabla_X(c(\omega))$,
d'où : $-\sigma i_X\omega = \nabla_X(c(\omega))$. (cqfd).

PROPOSITION (15)

Soient M *une variété riemannienne à courbure sectionnelle constante* σ ; $p \in \mathbb{N}^*$. *Si* ω *est une forme équiprojective de degré* $p > 0$, *alors, pour tout* X *dans* $\mathfrak{X}_0(M)$:
$\nabla_X d\omega = -(p+1)\sigma X^b \wedge \omega$.

En particulier $d\omega$ *est coéquiprojective.*

Preuve : D'après l'hypothèse, pour tout Y dans $\mathfrak{X}_0(M)$,
$(p+1)(\nabla\omega)Y = i_Y d\omega$, donc, pour tous X,Y dans $\mathfrak{X}_0(M)$:
$(p+1)(\nabla^2\omega)XY = i_Y\nabla_X d\omega$,

i.e., d'après la proposition (12) de I :

$-(p+1)\sigma i_Y(X^b \wedge \omega) = i_Y \nabla_X d\omega,$

d'où le résultat.

PROPOSITION (16)

Soient M *une variété riemannienne à courbure sectionnelle constante* σ, $a \in M$, $p \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathcal{A}_p(T_aM)$, $\beta \in \mathcal{A}_{p-1}(T_aM)$.. *Alors il existe, sur un voisinage de* a, *une forme* ω *coéquiprojective vérifiant* $\omega(a) = \alpha$ *et* $\forall u \in T_aM$, $(\nabla\omega)u = u^b \wedge \beta$. *De plus, les* ω *qui vérifient ces propriétés ont toutes le même germe en* a.

<u>Preuve</u> : Soit $\omega \in \Phi$, posons $\theta = \nabla\omega$. (1)

Si ω est coéquiprojective, pour tout X dans $\mathfrak{X}_0(M)$:

$\theta(X) = X^b \wedge c(\omega)$ (2)

et, puisque ω est à fortiori cojacobienne :

$(\nabla\theta)XY = -\sigma Y^b \wedge i_X\omega.$ (3)

Les équations (1) et (3) constituent une équation aux différentielles totales covariantes du 1er ordre, l'inconnue étant le couple (ω,θ) où $\omega \in \Phi_p$ et θ vérifie (2).

La condition d'intégrabilité s'écrit :

(4) $R(X,Y)\omega = -\sigma Y^b \wedge i_X\omega + \sigma X^b \wedge i_Y\omega$

(5) $(R(X,Y)\theta)Z = -\sigma Z^b \wedge i_Y\theta(X) + \sigma Z^b \wedge i_X\theta(Y)$

La condition (4) est vérifiée d'après le lemme (11) de I. D'autre part :

$$(R(X,Y)\theta)Z = R(X,Y)(\theta(Z))-\theta(R(X,Y)Z)$$

$$= \sigma(X^b\wedge i_Y\theta(Z)-Y^b\wedge i_X\theta(Z))-\theta(\sigma((Y|Z)X-(X|Z)Y))$$

et, en utilisant (2), on voit que ceci est égal au deuxième membre de (5). Ainsi, la condition d'intégrabilité est vérifiée, d'où la proposition (cqfd).

Nous allons maintenant établir une caractérisation fort utile des variétés à courbure sectionnelle constante.

LEMME (17) : *Soient* E *un espace de Hilbert ;* $h : E\times E \to \mathcal{L}(E)$ *une application bilinéaire altermée telle que, pour tous* x,y,a,b *dans* E

$$(h(x,y)a)|b = (h(a,b)x)|y.$$

Supposons que, pour tous a,b,x *dans* $E, h(a,b)x$ *appartienne à l'espace vectoriel engendré par* a *et* b.

Alors il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ *tel que :* $h(a,b)x = \lambda((b|x)a-(a|x)b)$.

__Preuve__ : Pour tous a,b linéairement indépendants dans E, notons $P_{a,b}$ le plan engendré par a et b. D'après l'hypothèse, $h(a,b)$ induit un endomorphisme antisymétrique du plan euclidien $P_{a,b}$. Or, l'endomorphisme $x \to (b|x)a-(a|x)b$ de $P_{a,b}$ est antisymétrique et non nul, et l'espace vectoriel des endomorphismes antisymétriques de $P_{a,b}$ est de dimension 1, donc il existe $\lambda_{a,b}\in\mathbb{R}$ tel que : $\forall x\in P_{a,b}$,

(1) $$h(a,b)x = \lambda_{a,b}((b|x)a-(a|x)b).$$

Les deux membres de (1) sont linéaires en x ; de plus, si $x \in (P_{a,b})^{\perp}$, le deuxième membre est nul et, $\forall y \in E$,

$(h(a,b)x)|y = -(h(a,b)y)|x$

i.e. $(h(a,b)x)|y = 0$

d'où $h(a,b)x = 0$.

Il en résulte que (1) est vraie pour tout x dans E. On a donc, pour tous x,y dans E :

$$(h(a,b)x)|y = \lambda_{a,b}(b|x)(a|y)-(a|x)(b|y)$$
$$= -\lambda_{a,b}(a^b \wedge b^b)(x,y)$$

Donc, si x et y sont linéairement indépendants, on a, d'après l'hypothèse :

$$\lambda_{a,b}(a^b \wedge b^b)(x,y) = \lambda_{x,y}(x^b \wedge y^b)(a,b)$$

Par conséquent, pour tous x,y vérifiant $(a^b \wedge b^b)(x,y) \neq 0$, on a $\lambda_{a,b} = \lambda_{x,y}$.

Supposons que $(a^b \wedge b^b)(x,y) = 0$, avec x et y linéairement indépendants. Comme $(x^b \wedge y^b)(x,y) \neq 0$ il existe des voisinages $V(x)$ et $V(y)$ de x et y respectivement tels que :

$$\forall (x_1,y_1) \in V(x)\times V(y), (x^b \wedge y^b)(x_1,y_1) \neq 0$$

(ce qui implique l'indépendance linéaire de x_1 et y_1). De plus il existe $(x_2,y_2) \in V(x)\times V(y)$ tel que $(a \wedge b)(x_2,y_2) \neq 0$.

(sinon $a^b \wedge b^b$ serait nulle). Il en résulte :

$\lambda_{x,y} = \lambda_{x_2,y_2} = \lambda_{a,b}$.

Ainsi $\lambda_{x,y}$ est une constante. (cqfd).

PROPOSITION (18)

Soit M *une variété riemannienne de dimension supérieure ou égale à trois. Pour que* M *soit à courbure sectionnelle constante il faut et il suffit que, pour tout* m *dans* M *et tous* a,b,x *dans* $T_m M, R_m(a,b).x$ *appartienne à l'espace vectoriel engendré par* a *et* b.

<u>Preuve</u> : Ceci résulte du lemme précédent et du lemme de Schur.

LEMME (19) : *Soient* M *une variété riemannienne et* $p \in \mathbb{N}$ *tels que* $1 \leq p \leq \dim M-3 \leq +\infty$.

Supposons que, pour tout ω *dans* Φ_p *et tous* A,B *dans* $\mathfrak{X}_o(M)$: $(R(A,B)\omega) \wedge A^b \wedge B^b = 0$.

Alors M *est à courbure sectionnelle constante.*

<u>Preuve</u> : Soit $\omega_1 \in \Phi_{p-1}$, posons $\omega = X^b \wedge \omega_1$; $R(A,B)\omega$

$(R(A,B)X^b) \wedge \omega_1 + X^b \wedge R(A,B)\omega_1$, donc d'après l'hypothèse :

(1) $(R(A,B)X^b) \wedge \omega_1 \wedge A^b \wedge B^b + X^b \wedge (R(A,B)\omega_1) \wedge A^b \wedge B^b = 0$

donc $X^b \wedge (R(A,B)X^b \wedge \omega_1 \wedge A^b \wedge B^b = 0$.

Ceci étant vrai pour tout ω_1 dans Φ_{p-1} :

(2) $X^b \wedge R(A,B)X^b \wedge A^b \wedge B^b = 0$

1°) Supposons $(A|X)(m) = 0$ et $(B|X)(m) = 0$.
En appliquant i_X aux deux membres de (2) on obtient :
$\left((X|X)(R(A,B)X^b)\wedge A^b\wedge B^b\right)(m) = 0$
donc $\left((R(A,B)X)^b\wedge A^b\wedge B^b\right)(m) = 0$.

2°) Supposons que $X(m)$ est dans le plan engendré par $A(m)$ et $B(m)$. Alors :
$(X^b\wedge A^b\wedge B^b)(m) = 0$
donc, d'après (1) : $\left((R(A,B)X^b)\wedge\omega_1\wedge A^b\wedge B^b\right)(m) = 0$, et ce pour tout ω_1 dans Φ_{p-1},
donc $((R(A,B)X)^b\wedge A^b\wedge B^b)(m) = 0$.
Ainsi, dans tous les cas, $(R(A,B)X)(m)$ est dans le plan engendré par $A(m)$ et $B(m)$; donc, d'après la proposition (18), M est à courbure sectionnelle constante. (cqfd).

Nous sommes maintenant en mesure de prouver que si, localement,il y a suffisamment de formes cojacobiennes, alors la variété est nécessairement à courbure constante.

PROPOSITION (20)

Soient M *une variété riemannienne et* $p\in\mathbb{N}$ *tels que* $1\leqslant p\leqslant \dim M-3$. *Supposons que* $\forall x\in M, \forall\alpha\in\mathcal{A}_p(T_xM)$, *il existe une forme cojacobienne* ω *définie sur un voisinage de* x *et telle que* $\omega(x) = \alpha$. *Alors* M *est à courbure sectionnelle constante.*

PROPOSITION (20)

Soient M *une variété riemannienne et* $p \in \mathbb{N}$ *tels que* $1 \leq p \leq \dim M-3$. *Supposons que* $\forall x \in M, \forall \alpha \in \mathcal{A}_p(T_xM)$, *il existe une forme cojacobienne* ω *définie sur un voisinage de* x *et telle que* $\omega(x) = \alpha$. *Alors* M *est à courbure sectionnelle constante.*

<u>**Preuve**</u> : D'après le corollaire de la proposition (9), pour tout ω dans Φ_p et tous X,Z dans $\mathfrak{X}_o(M)$:

$$(\nabla^2\omega)XX)\wedge Z^b-(R(Z,X)\omega)\wedge X^b = 0$$

d'où $(R(X,Z)\omega)\wedge X^b\wedge Z^b = 0$

d'où le résultat d'après le lemme (19).

PROPOSITION (21)

Soit $\omega \in \Phi_p(M)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

I) ω *est jacobienne et cojacobienne.*

II) $\nabla^2\omega = 0$.

Preuve : II) entraîne I) d'après les définitions. Supposons I). Pour tous X,Y dans $\mathfrak{X}_o(M)$:

$$i_Y((\nabla^2\omega)XY) = 0 \tag{1}$$

$$\text{et} \quad ((\nabla^2\omega)XY)\wedge Y^b = 0 \tag{2}$$

(2) implique :

$$(i_Y((\nabla^2\omega)XY))\wedge Y^b+(-1)^p((\nabla^2\omega)XY)(Y|Y) = 0$$

d'où, en tenant compte de (1) : $(\nabla^2\omega)XY = 0$ (cqfd).

DEFINITIONS : *Une variété différentielle munie d'une connexion linéaire sera dite variété connectée.*

Soient M *une variété connectée,* $m \in M, p \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathcal{A}_p(T_mM)$: *Notons* $R_m(\alpha)$ *l'application bilinéaire alternée définie par, pour tous* u,v *dans* T_mM : $(R_m(\alpha))(u,v) = R_m(u,v)\alpha$.

I) M *est dite p-injective lorsque,* $\forall m \in M$, *l'application* $\alpha \to R_m(\alpha)$ *est injective.*

II) M *est dite injective lorsque, pour tout* $p \in \mathbb{N}$ *vérifiant* $0 < p < \dim M \leqslant +\infty$, M *est p-injective.*

Il résulte aussitôt de la définition que si M *est p-injective :* $(\omega \in \Phi_p$ et $\nabla^2\omega = 0) \Rightarrow \omega = 0$.

PROPOSITION (22)

Soit M *une variété riemannienne à courbure sectionnelle constante* <u>*non nulle*</u> σ. *Alors* M *est injective.*

<u>Preuve</u> : Soient $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 < p < \dim M \leqslant +\infty$, et $\alpha \in \Phi_p$.
Supposons $R_m(\alpha) = 0$, i.e. pour tous u,v dans T_mM :
$R_m(u,v)\alpha = 0$.
D'après le lemme (11) de I ceci s'écrit :
$\sigma(u^b \wedge i_v\alpha - v \wedge i_u\alpha) = 0$,

d'où $u \wedge v \wedge i_u \alpha = 0$,

donc, pour tout u dans $T_m M$:

$u \wedge i_u \alpha = 0$,

d'où $(u|u) i_u \alpha = 0$,

donc $\alpha = 0$. (cqfd).

PROPOSITION (23)

Soient M_1 et M_2 *deux variétés connectées,* $p \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $p < \mathrm{Min}\,(\dim M_1, \dim M_2)$. *Supposons que* M_1 et M_2 *soient p-injectives èt que, pour tout* k *vérifiant* $0 < k < p$, *l'une des deux variétés soit k-injective. Alors* $M_1 \times M_2$ *est p-injective.*

<u>Preuve</u> : laissée au lecteur.

COROLLAIRE : *Soient* M_1 et M_2 *deux variétés riemanniennes de dimensions infinies ayant chacune une courbure sectionnelle constante non nulle. Alors* $M_1 \times M_2$ *est injective.*

Ainsi, une variété peut être injective, sans être à courbure sectionnelle constante.

Pour qu'une variété riemannienne M soit 1-injective, il faut et il suffit que : $\forall m \in M, \forall u \in T_m M$, l'application $u \to R(u,.)$ soit injective : ceci résulte immédiatement de la formule : $(R(u,v)a)|b = (R(a,b)u)|v$.

On en déduit aussitôt des définitions que :

I) Si M est une variété dont toutes les courbures sectionnelles sont non nulles, M est 1-injective.

II) Toute variété d'Einstein à courbure scalaire non nulle est 1-injective.

D'après la proposition (21) on a :

PROPOSITION (24)

Soient M *une variété riemannienne,* $p \in \mathbb{N}$ *tel que* $0 < p < \dim M \leqslant +\infty$ *;* $\omega \in \Phi_p$. *Supposons que* M *est p-injective ; alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

I) ω *est jacobienne et cojacobienne.*

II) $\omega = 0$.

PROPOSITION (25)

Soient M *une variété riemannienne de dimension finie* n, *orientée ;* $\omega \in \mathrm{Coeq}_p$. *Alors* $\mathcal{C}(\omega)$ *est l'ensemble des points* $x \in M$ *tels que* $(\delta\omega)(x) \wedge *\omega(x) = 0$

<u>Preuve</u> : Soit $f : M \to \mathbb{R}$ l'application $x \to \omega(x)|\omega(x)$. Pour tout u dans T_xM :

$$Df(x).u = 2(\nabla_u\omega)(x)|\omega(x)$$

$$= -2(u^b \wedge \frac{(\delta\omega)(x)}{n-(p-1)}|\omega(x)$$

donc, en désignant par μ la forme volume de M :

$$(Df(x)u)\mu = -2u^b \wedge \frac{(\delta\omega)(x)}{n-(p-1)} \wedge *\omega(x)$$

donc, d'après la non dégénérescence de $\wedge$,

$x \in \mathcal{C}(\omega) \Longleftrightarrow (\delta\omega)(x) \wedge *\omega(x) = 0$ (cqfd).

Soient H un espace affine euclidien sur $\mathbb{R}$, de dimension finie, $\omega \in \mathrm{Coeq}_p(H)$; d'après la proposition (13) ω est affine et son application linéaire associée est du type $u \to u^b \wedge S$. Désignons par $\langle S \rangle$ l'ensemble des $u \in \vec{H}$ tels que $u^b \wedge S = 0$. Alors on a la :

PROPOSITION (26)

$\mathcal{C}(\omega)$ est un sous-espace affine fermé de H de direction $\langle S \rangle$.

Ceci résulte du :

LEMME : *Soient E un espace affine normé, F un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, $h : E \to F$ une application affine continue, $\tilde{h}$ son application linéaire associée. Supposons que $\mathfrak{Im}\, h$ soit fermée. Alors l'ensemble des points de E où la fonction $x \to \|h(x)\|$ atteint son minimum est un sous-espace affine de E, de direction $\mathrm{Ker}\, \tilde{h}$, qui est aussi l'ensemble des points critiques de $x \to \|h(x)\|^2$.*

La preuve est laissée au lecteur.

FORMES COEQUIPROJECTIVES DE DEGRE 2 :

Soient M une variété riemannienne, $\omega \in \mathrm{Coeq}_2$. Sous l'hypothèse dim M finie, $\mathcal{C}(\omega)$ est défini et $\mathcal{C}(\omega)$ est l'ensemble des points x de M tels que :

$$(\delta\omega)(x) \wedge *\omega(x) = 0 \tag{1}$$

Cette condition équivaut à :

$$c(\omega)(x) \wedge *\omega(x) = 0 \tag{2}$$

Posons $X = (c(\omega))^{\#}$, (2) est alors équivalente à :

$$i_{X(x)}\omega(x) = 0 \tag{3}$$

Or cette condition a un sens même <u>si M est de dimension infinie</u>. On peut donc <u>étendre la définition de $\mathcal{C}(\omega)$</u>, dans ce cas, en posant :

$$\mathcal{C}(\omega) = \{x / x \in M, i_{X(x)}\omega(x) = 0\}$$

Soient H un espace affine hilbertien sur $\mathbb{R}, \omega \in \mathrm{Coeq}_2(H)$; d'après la proposition (13) ω est affine et il existe $S \in E'$ tel que :

$\forall x \in M, c(\omega)(x) = S$. Soit $S_1 = S^{\#}$, alors on a la :

PROPOSITION (27)

Si ω n'est pas constante, $\mathcal{C}(\omega)$ est une droite affine de direction S_1.

<u>Preuve</u> : par définition

$$\mathcal{C}(\omega) = \{x / x \in H, \; i_{S_1}\omega(x) = 0\}$$

Soit $x_o \in H$; $\forall x \in H : \omega(x) = \omega(x_o) + (x-x_o)^b \wedge S$

donc $i_{S_1}\omega(x) = i_{S_1}\omega(x_o) + S_1 | (x-x_o) - (x-x_o)^b S(S_1)$

Comme ω n'est pas constante, S est non nul. Soit $\vec{H}_1$ l'hyperplan orthogonal à S_1, et soit H_1 l'hyperplan affine passant par x_o, de direction $\vec{H}_1$. $x \in H_1 \cap \mathcal{C}(\omega)$ équivaut à

$$0 = i_{S_1}\omega(x_o) - (x-x_o)^b \| S_1 \|^2$$

i.e. $$x - x_o = \frac{\left(i_{S_1}\omega(x_o)\right)^{\#}}{\| S_1 \|^2}$$

donc $H_1 \cap \mathcal{C}(\omega)$ est réduit à un point. Comme $\mathcal{C}(\omega)$ est visiblement une réunion de droites affines de direction S_1, il en résulte que $\mathcal{C}(\omega)$ est une droite affine de direction S_1.

(cqfd).

Remarque : Soit H un espace affine euclidien orienté, de dimension 3, V un champ équiprojectif sur $H, \omega = *(V^b)$. Alors $\mathcal{C}(\omega)$ n'est autre que l'axe central classique de V.

III - FORMES INDUITES.

Dans la suite, N est une variété riemannienne, M une sous-variété de N, j l'injection canonique de M dans N, ∇' (resp ∇) la dérivation covariante relative à N (resp M). On désigne par $\Phi_o(N\ ;\ M)$ les sections, au-dessus de M, du fibré des p-formes sur N.

Soit α la deuxième forme fondamentale de M ; pour tous X,Y dans $\mathfrak{X}_o(M)$:

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y+\alpha(X,Y) \tag{1}$$

Soit $\omega \in \Phi_p(N\ ;\ M)$, il résulte des définitions et de la formule (1) que, pour tous $X,Y_1,..,Y_p$ dans $\mathfrak{X}_o(M)$:

$$(\nabla_X(j^*\omega))(Y_1,.,Y_p) = (\nabla'_X\omega)(Y_1,.,Y_p)+\sum_{k=1}^{p} \omega(Y_1,..,\alpha(X,Y_k),..,Y_p) \tag{2}$$

Rappelons que M est dite sous-variété ombilicale de N lorsqu'il existe sur M un champ de vecteurs normaux ν tel que, pour tous X,Y dans $\mathfrak{X}_o(M)$:

$\alpha(X,Y) = (X|Y)\nu$.

Dans ce cas, on vérifie aussitôt que la formule (2) s'écrit :

$$\nabla_X(j^*\omega) = j^*(\nabla'_X\omega)+X^b\wedge j^*(i_\nu\omega). \tag{3}$$

Nous allons déduire quelques conséquences de cette formule. Dans les deux propositions suivantes, qui découlent directement de (3), M est une sous-variété ombilicale de N et $\omega\in\Phi^p(N)$.

PROPOSITION (1)

Si ω *est coéquiprojective, alors* $j^*\omega$ *est une forme coéquiprojective sur* M.

PROPOSITION (2)

Si ω *est équiprojective et si* $i_\nu \omega = 0$, *alors* $j^*\omega$ *est équiprojective.*

En particulier, si M *est totalement géodésique et* ω *équiprojective, alors* $j^*\omega$ *est équiprojective.*

Pour la suite nous avons besoin de quelques préliminaires. Soient H un espace de Hilbert, $p \in \mathbb{N}^*$. On sait que l'application :

$\theta_1,..,\theta_p \to \theta_1 \wedge .. \wedge \theta_p$

de $(H')^p$ dans $\mathcal{G}_p(H^p,\mathbb{R})$ est un produit extérieur. Il en résulte que l'isomorphisme $b : H \to H'$ définit un isomorphisme de ${}^p\wedge H$ sur $\mathcal{G}_p$, et, par suite, une injection canonique de ${}^p\wedge H$ dans $\mathcal{A}_p(H)$, que nous noterons encore b.

Soit V une variété riemannienne. En appliquant ce qui précède à chaque espace tangent, on peut associer à toute section s du fibré ensembliste des p-vecteurs, une section, qu'on notera encore b(s), du fibré des p-formes.

Soit $X \in \mathfrak{X}_0(V)$; dans le cas où b(s) est différentiable et $\nabla_X(b(s))$ polynomial, on note $\nabla_X s$ l'élément défini par :

$b(\nabla_X s) = \nabla_X(b(s))$; ce qui étend la formule connue pour $p = 1$.

Dans la suite, pour tout espace de Hilbert H, on munira, sauf mention du contraire, ${}^p\!\wedge H$ de son produit scalaire canonique.

Supposons que M est une sous-variété de codimension finie h de N. On désigne par n une section de $\wedge^h N$ au-dessus d'un ouvert U de M, telle que :

1°) $b(n)$ est continue

2°) $\forall x \in U, n(x)$ est l'un des deux h-vecteurs unitaires asscciés à l'espace normal en x.

De telles sections existent localement. Si n' est une autre section ayant les mêmes propriétés, et si U est connexe ; alors $n' = \pm n$.

LEMME 3 : *Soit* M *une sous-variété ombilicale de codimension finie de* N. *Alors, pour tout* X *dans* $\mathfrak{X}(U) : \nabla'_X n = -X \wedge i_\nu(n)$.

<u>Preuve</u> : Localement n est de la forme $n_1 \wedge .. \wedge n_h$, où $n_1, .., n_h$ sont des champs de vecteurs formant en chaque point une base orthonormée de l'espace normal. D'après l'hypothèse, pour tous X, Y tangents : $\alpha(X,Y) = (X|Y)\nu$,

donc, $-(Y|\nabla'_X n_k) = (X|Y)\nu|n_k$;

donc, pour tous $k = 1, .., h$:

$\nabla'_X n_k + (\nu|n_k)X = Z_k$,

où Z_k est normal à la sous-variété. De plus, comme n_k est unitaire et X tangent : $Z_k | n_k = 0$. Donc Z_k se décompose sur $n_1, \ldots, \check{n}_k, \ldots, n_h$.

Or $\quad \nabla'_X n = \sum_{k=1}^{h} n_1 \wedge \ldots \wedge \nabla'_X n_k \wedge \ldots \wedge n_h,$

donc $\quad \nabla'_X n = -\sum_{k=1}^{h} (\nu | n_k) n_1 \wedge \ldots \wedge X \wedge \ldots \wedge n_h$

$$\nabla'_X n = -\sum_{k=1}^{h} (-1)^{k-1} (\nu | n_k) X \wedge n_1 \wedge \ldots \wedge \check{n}_k \wedge . \wedge n_h$$

$$\nabla'_X n = -X \wedge i_\nu n \qquad \text{(cqfd)}.$$

PROPOSITION 4

Soient M *une sous-variété ombilicale de codimension finie de* $N, \omega \in \Phi_p(N)$. *Supposons* ω *équiprojective. Alors* $j^*(\omega \llcorner n)$ *est équiprojective.*

<u>**Preuve**</u> : Comme $n \wedge \nu = 0$, on a :

$i_\nu(\omega \llcorner n) = 0$, donc, d'après (3) :

$\nabla_X(j^*(\omega \llcorner n)) = j^*(\nabla'_X(\omega \llcorner n))$.

Or, en utilisant une décomposition $n = n_1 \wedge \ldots \wedge n_h$ comme dans le lemme précédent, on voit que

$\nabla'_X(\omega \llcorner n) = (\nabla'_X \omega) \llcorner n + \omega \llcorner \nabla'_X n$. D'après l'hypothèse : $\nabla'_X \omega = i_X T$, avec $T \in \Phi_{p+1}$, donc, en posant $S = -i_\nu n$, et en utilisant le lemme 3 :

$\nabla'_X(\omega \llcorner n) = i_X((-1)^h T \llcorner n + (-1)^{h-1} \omega \llcorner S)$, d'où le résultat. (cqfd).

Cas de la sphère d'un espace de Hilbert H.

Soit M la sphère unité de H ; on désigne par n le champ de vecteurs normaux unitaires sortants.
i.e. : $\forall x \in M, n(x) = x$.

PROPOSITION 5

Les formes coéquiprojectives sur la sphère M *sont les* $j^*\omega$, *où* ω *décrit l'ensemble des formes différentielles constantes sur* H.

Preuve :

1°) Soient ω une forme différentielle constante de degré p sur H, ϕ l'élément de $\mathcal{A}_p(H,\mathbb{R})$ défini par : $\forall x \in H, \omega(x) = \phi$.
ω étant constante, pour tout X dans $\mathfrak{X}_0(M)$: $\nabla'_X \omega = 0$,
donc, d'après (3) :

$\nabla_X(j^*\omega) = X^b \wedge j^*(i_\nu \omega)$.

Or, pour la sphère unité, $\nu = -n$, donc :

$$\nabla_X(j^*\omega) = -X^b \wedge j^*(i_n \omega) \tag{4}$$

2°) Soient $x_0 \in M, \omega_0 \in \mathcal{A}_p(T_{x_0}M), S_0 \in \mathcal{A}_{p-1}(T_{x_0}M)$. Alors il existe une forme différentielle constante ω unique, sur H, telle que : $(j^*\omega)(x_0) = \omega_0$ (5)

et $\forall u \in T_{x_o}M, \nabla_u(j^*\omega)(x_o) = u^b \wedge S_o$ (6)

En effet : Soit P la projection orthogonale de H sur $T_{x_o}M$. Pour tous k dans $\mathbb{N}^*$, et θ dans $\mathcal{A}_k(T_{x_o}M)$, notons $\tilde{\theta}$ l'élément de $\mathcal{A}_k(H)$ défini par, pour tous $z_1,\ldots,z_k$ dans H :

$\tilde{\theta}(z_1,\ldots,z_k) = \theta(P(z_1),\ldots,P(z_k))$.

Une forme différentielle constante ω sur H, de valeur constante $\phi \in \mathcal{A}_p(H)$, vérifie les conditions (5) et (6) si et seulement si :

$\phi|(T_{x_o}M)^p = \omega_o$

et $(i_{x_o}\phi)|(T_{x_o}M)^{p-1} = -S_o$.

Or ces conditions sont équivalentes à :

$\phi = -x_o{}^b \wedge \tilde{S}_o + \tilde{\omega}_o$., d'où le résultat.

Comme, d'autre part, il existe au plus une forme coéquiprojective α sur M telle que $\alpha(x_o)$ et $(\nabla\alpha)(x_o)$ soient donnés, la proposition (5) en résulte. (cqfd).

PROPOSITION 6

Les formes équiprojectives sur la sphère sont les $i_n\omega$ *où* ω *décrit l'ensemble des formes différentielles constantes sur* H.

Preuve :

1°) D'après (3), comme $i_\nu i_n\omega = 0$:

$\nabla_X j^*(i_n\omega) = j^* \nabla'_X(i_n\omega))$.

Or, ω étant constante :

$$\nabla'_X(i_n\omega) = \omega(\nabla'_X n, \ldots),$$

i.e. $\nabla'_X(i_n\omega) = \omega(X, \ldots.),$

donc $\nabla_X j^*(i_n\omega) = i_X(j^*\omega).$

2°) Soient $x_o \in M, \omega_o \in \mathcal{A}_p(T_{x_o}M), T_o \in \mathcal{A}_{p+1}(T_{x_o}M)$. Alors il existe une forme différentielle constante ω unique, sur H, telle que $\alpha = j^*(i_n\omega)$ vérifie $\alpha(x_o) = \omega_o$ et

$$\forall u \in T_{x_o}M, (\nabla_u\alpha)(x_o) = i_u T_o.$$

En effet : le raisonnement est similaire à celui de la proposition précédente et la valeur constante de ω est donnée par

$\phi = x_o{}^b \wedge \tilde{\omega}_o + \tilde{T}_o$ (cqfd).

IV - ZEROS DES FORMES JACOBIENNES ET COJACOBIENNES.

Pour étudier l'ensemble des zéros d'une forme jacobienne (resp. cojacobienne) nous aurons besoin de la proposition suivante, qui généralise un théorème classique de Sturm sur les équations $x''(t)+q(t)x(t) = 0$, (cf. [10] p. 363) où x est une fonction réelle d'une variable réelle.

PROPOSITION (1)

Soient E *un espace de Banach,* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *;* A_0, A_1 *des applications continues de* I *dans* $\mathcal{L}(E)$, $c \in \mathbb{R}_*^+$ *. On considère l'équation différentielle :*

(1) $\phi''(t) = A_0(t).\phi(t)+A_1(t).\phi'(t)$,

et on suppose que pour tout t *dans* I *:*

$\|A_0(t)\| \leq c$ et $\|A_1(t)\| \leq c$.

Soit ϕ *une solution non nulle de* (1) *;* t_0, t_1 *dans* I *tels que* $t_0 \neq t_1$ et $\phi(t_0) = \phi(t_1) = 0$.

Alors $\dfrac{\text{Log } 2}{c+1} \leq |t_1 - t_0|$.

<u>**Preuve**</u> : Soient ϕ une solution non nulle de (1) telle que $\phi(t_0) = 0$. Posons $x'_0 = \phi'(t_0)$. Soit R la résolvante du système du premier ordre associé à l'équation (1) : pour tout t dans I : $(\phi(t),\phi'(t)) = R(t,t_0).(o,x'_0)$

Ceci s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} \phi(t) \\ \\ \phi'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{oo}(t,t_o) & R_{o1}(t,t_o) \\ \\ R_{1o}(t,t_o) & R_{11}(t,t_o) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \\ x'_o \end{pmatrix}$$

où les $R_{ij}(t,t_o)$ sont des éléments de $\mathcal{L}(E)$. On a donc, pour t dans I : $\phi(t) = R_{o1}(t,t_o).x'_o$. Nous allons prouver que pour

$|t-t_o|<\frac{\text{Log } 2}{c+1}$, $R_{o1}(t,t_o)$ est un automorphisme de E. Comme x'_o est non nul (car ϕ est non nulle) il en résultera que pour $|t-t_o|<\frac{\text{Log } 2}{c+1}$, $\phi(t)$ est non nul.

Dans la suite de la démonstration, pour alléger l'écriture $R(t)$ sera mis pour $R(t,t_o)$ et $R'(t)$ désignera la dérivée au point t de l'application $t \to R(t,t_o)$. Et de même pour les R_{ij}. Pour tout t dans I : $R_{11}(t) = R'_{o1}(t)$. De plus $R(t_o)$ est l'application identique de $E\times E$, donc $R_{11}(t_o) = 1_E$ et $R_{o1}(t_o) = 0$.

$(\phi'(t),\phi''(t)) = A(t).(\phi(t),\phi'(t))$ où $A(t)$ est l'endomorphisme de $E\times E$ dont la représentation matricielle est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1_E \\ A_o(t) & A_1(t) \end{pmatrix}.$$

Supposons que, $\forall t \in I, \|A(t)\| \leq d$. D'après le théorème des accroissements finis :

$$\left\|\frac{R_{o1}(t)-R_{o1}(t_o)}{t-t_o} - R'_{o1}(t_o)\right\| \leq \sup_{\lambda \in]t_o,t[} \left\|R'_{o1}(\lambda)-R'_{o1}(t_o)\right\|$$

$$\text{i.e.} \left\| \frac{R_{o1}(t)}{t-t_o} - 1_E\right\| \leq \sup_{\lambda \in]t_o,t[} \left\|R_{11}(\lambda)-R_{11}(t_o)\right\|$$

$$\leq \sup_{\lambda \in]t_o,t[} \|R(\lambda)-R(t_o)\|$$

Or $t \to R(t)$ est la solution de $R'(t) = A(t)oR(t)$ qui prend la valeur 1_{ExE} pour $t = t_o$.

On en déduit, en utilisant une formule de majoration classique, que pour tout t dans I :

$$\|R(t)-1_{ExE}\| \leq e^{d|t-t_o|}-1$$

Donc, si $|t-t_o|<\eta$, on a :

$$\left\|\frac{R_{o1}(t)}{t-t_o} - 1_E\right\| \leq e^{d\eta} - 1$$

Donc, en choisissant $\eta < \frac{1}{d}$ Log 2, on a, pour tout t tel que $|t-t_o|<\eta$:

$$\left\|\frac{R_{o1}(t)}{t-t_o} - 1_E\right\| < 1$$

d'où il résulte que $R_{01}(t)$ est inversible. Plaçons sur $E\times E$ la norme $\| \|_1$. Les hypothèses entraînent aussitôt que : $\forall t\in I, \|A(t)\| \leq c+1$. On peut donc choisir $d = c+1$, d'où le résultat.

PROPOSITION (2)

Soient M *une variété riemannienne,* $p\in \mathbb{N}$, ω *une p-forme jacobienne, (resp. cojacobienne). Supposons* $p>0$, *(resp.* $p<\dim M\leq +\infty$). *Alors l'ensemble des zéros de* ω *est une sous-variété* N, *totalement géodésique, de* M, *telle que* $\forall x\in N, T_xN = \mathrm{Ker}((\nabla\omega)x)$.

<u>**Preuve**</u> : Fixons d'abord quelques notations valables pendant la durée de la démonstration.

I) Pour tout espace vectoriel E et tout $\phi\in\mathcal{A}_p$, $\tilde{\phi}$ est l'application linéaire $u\to i_u\phi$.

II) Soient M une variété, $\omega\in\Phi(M), X\in\mathfrak{X}(M)$; alors $\tilde{\omega}$ est défini par : $\forall x\in M, \tilde{\omega}(x) = (\omega(x))^{\sim}$.

Supposons que ω est jacobienne.

Soit $\gamma : I\to M$ une géodésique. Posons $f = \omega\circ\gamma$. Il résulte du corollaire de la proposition (1) de I que, pour tous X,Z dans $\mathfrak{X}(M)$: $((\nabla^2\tilde{\omega})XX)Z = (R(Z,X)\tilde{\omega})X$; donc

(1) $(\nabla^2\tilde{\omega})XX = (R(.,X)\tilde{\omega})X$ où le second membre est défini par :

$\forall x\in M, \forall u\in T_xM, ((R(.,X)\tilde{\omega})X)(x).u = (R(x)(u,X(x))\tilde{\omega}(x))X(x)$.

Posons $f = \tilde{\omega}\circ\gamma$. D'après (1) :

$$(2) \quad \frac{\nabla^2 f}{dt^2}(t) = (R(\gamma(t))(.,\gamma'(t))f(t))\gamma'(t).$$

Supposons que $\omega(\gamma(t_o)) = 0$ et que $(\nabla\omega)(\gamma(t_o)).\gamma'(t_o) = 0$. On a alors $f(t_o) = 0$ et $\frac{\nabla f}{dt}(t_o) = 0$. Comme (2) est une équation linéaire du second ordre : $f = 0$, i.e. : $\tilde{\omega}\circ\gamma = 0$; donc, puisque $\deg \omega > 0, \omega\circ\gamma = 0$.
Donc si $\omega(x_o) = 0$, alors, pour tout x appartenant à $\exp_{x_o}(\mathrm{Ker}(\nabla\omega)(x_o))$, on a $\omega(x) = 0$. De plus il résulte de la continuité de R et de la proposition (1) qu'il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall u \in T_{x_o}M$ vérifiant $\|u\| = 1$ et $u \notin \mathrm{Ker}((\nabla\omega)(x_o))$, l'application $t \to \omega(\exp_{x_o} tu)$ ne s'annule pas sur $]o,\eta[$.
Il en résulte que l'ensemble des zéros de ω est une sous-variété totalement géodésique N telle que $\forall x \in N, T_xN = \mathrm{Ker}((\nabla\omega)x)$.

Pour une forme cojacobienne la même démonstration est valable à condition de poser cette fois $\tilde{\omega}(x).u = \omega(x)\wedge u^b$.

(cqfd).

COROLLAIRE

Soient M *une variété riemannienne ;* $p \in \mathbb{N}$ *tel que* $0 < p < \dim M \leq +\infty, X_1, .., X_p$ *des champs conformes fermés sur* M. *Alors l'ensemble des points* x de M où $X_1(x), .., X_p(x)$ *sont* *linéairement dépendants est une sous-variété totalement géodésique de* M.

En effet : On a vu qu'un champ X est conforme fermé si et seulement si X^b est coéquiprojective. Or les formes coéquiprojectives forment une sous-algèbre, donc $\omega = X_1{}^b \wedge \ldots \wedge X_p{}^b$ est coéquiprojective. De plus, l'ensemble des zéros de ω est précisément l'ensemble des points x de M où $X_1(x), \ldots, X_p(x)$ sont linéairement dépendants, d'où le résultat.

BIBLIOGRAPHIE.

(1) S. BOCHNER : Curvature and Betti numbers.
Annals of Math. Vol. 49, n : 2, 1948

(2) Y. BAMBERGER
J.P. BOURGUIGNON : Torseurs sur un espace affine
Centre de Math. Ecole Polytechnique 1970.

(3) T. KASHIWADA : On conformal Killing tensor.
Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. Tokyo.
Vol. 19, n : 2, 1968.

(4) S. LANG : Introduction to differentiable manifolds.
(Interscience Publishers).

(5) H. MAILLOT : Sur les applications du type $\alpha \to \alpha \wedge \beta$
Pub. Dep. Math. Lyon 1972.

(6) R. OUZILOU : Variétés symplectiques banachiques
(cours de DEA). Notes de Lecture.
Dep. Math. Lyon 1972.

(7) J.M. SOURIAN : Calcul linéaire, tome second.
Presses Universitaires de France.

(8) S. TACHIBANA : On projective Killing tensor. Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. Tokyo. Vo. 21, n : 2, 1970.

(9) S. TACHIBANA, T. KASHIWADA : On the integrability of Killing-Yano's equation, J. Math. Soc. Japan, Vol. 21 n : 2, 1969.

(10) G. VALIRON : Cours d'analyse mathématique. Equations fonctionnelles. Applications. (Masson).

(11) K. YANO : Integral formulas in riemannian geometry. Marcel Kekker Inc. 1970.

Manuscrit remis en janvier 1972

H. MAILLOT
Département de Mathématiques
Université de Lyon I
43, bd du 11 novembre 1918
69 - VILLEURBANNE