PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

A. HUDRY

Une remarque sur la décomposition primaire de O. Goldman

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1971, tome 8, fascicule 1
, p. 63-68
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1971__8_1_63_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1971 t.8-1

UNE REMARQUE SUR LA DECOMPOSITION PRIMAIRE

DE O. GOLDMAN

A. HUDRY

O. Goldman a introduit la notion de module primaire sur un anneau quelconque non nécessairement commutatif, [2] , et a démontré que tout sous-module propre d'un module noëthérien est une intersection réduite de sous-modules primaires. Ici on considère la classe des modules possédant cette propriété de décomposition primaire. Il est démontré dans ce qui suit que cette classe (qui contient strictement celle des modules noëthériens) est localisante (pour la définition voir [1]). Il en résulte en particulier que tout module contient un plus grand sous-module possédant la propriété de décomposition primaire.

0. Terminologie : Dans tout ce qui suit Mod_A désigne la catégorie des A-modules à droite sur l'anneau A unitaire mais non nécessairement commutatif. Pour tout A-module à droite M d'enveloppe injective $\hat{M}$ le noyau du foncteur $\mathrm{Hom}_A(.,\hat{M})$ est une sous-catégorie localisante qui définit une localisation $\tilde{\mathscr{L}}_M$ de Mod_A dite associée à M ; de plus les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) La coréflexion de M dans la catégorie quotient associée à $\tilde{\mathscr{L}}_M$ est un objet simple ;

(ii) Le module M est co-irréductible et de plus il coïncide avec son coeur C(M) ;

(iii) Le module M est extension rationnelle de tous ses sous-modules non nuls.

Un module satisfaisant à l'une quelconque des conditions précédentes a été appelé module homogène dans [3] .

Avec cette terminologie les modules primaires de O. Goldman sont les modules M satisfaisant aux deux conditions suivantes :

(p1) - Pour tout sous-module non nul N de M les localisations $\tilde{\mathscr{L}}_N$ et $\tilde{\mathscr{L}}_M$ coïncident.

(p2) - Il existe un module homogène pour lequel la localisation qui lui est associée coïncide avec $\tilde{\mathscr{L}}_M$.

Les modules primaires de Goldman ont été caractérisés dans [3] par la propriété suivante :

Proposition 0 : *Le module* M *est primaire au sens de O. Goldman si et seulement s'il est extension essentielle d'une somme directe de modules homogènes de même type (c.a.d. admettant des enveloppes injectives isomorphes).*

Un sous-module N de M est dit primaire dans M si M/N est un module primaire.

1. **Proposition** 1 : *Les propriétés suivantes sont équivalentes pour un* A-*module à droite quelconque* M :

(a) Tout module quotient non nul de M contient un module homogène;

(b) *Tout sous-module non nul d'un module quotient de* M *contient un module homogène ;*

(c) *Tout sous-module propre de* M *est intersection réduite de sous-modules primaires au sens de O. Goldman.*

(a) $\Longrightarrow$ (b).

1er point : Montrons tout d'abord que tout sous-module non nul X de M contient un module homogène. Si X est essentiel dans M d'après (a) le module M contient un module homogène H et par suite X contient le module homogène $X \cap H$. Si X n'est pas essentiel dans M il existe un complément relatif non nul X' de X dans M. La relation $X \oplus X' \vartriangle M$ implique alors $X \simeq X \oplus X'/X' \vartriangle M/X'$ et comme précédemment X contient un module homogène.

2ème point : Soit N un module quotient non nul de M. Il est clair que N possède la propriété (a); d'après le 1er point tout sous-module non nul de N contient un module homogène.

(b) $\Longrightarrow$ (c).

1er point : montrons que 0 est intersection réduite de sous-modules primaires dans M. D'après (b) il résulte en particulier qu'il existe une somme directe $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} H_\alpha$ de sous-modules homogènes H_α de M essentielle dans M. Il existe alors une partition $(\Lambda_i)_{i \in I}$ de Λ de telle sorte que :

1) pour tout $i \in I$ les localisations associées aux modules H_α pour $\alpha \in \Lambda_i$ coïncident ;

2) pour tout $i \neq j$ les localisations associées aux modules H_α pour tout $\alpha \in \Lambda_i$ et H_β pour tout $\beta \in \Lambda_j$ soient distinctes. Posons alors $S_i = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda_i} H_\alpha$ pour tout $i \in I$ et $S_i^o = \bigoplus_{j \neq i} S_j$; soit alors M_i une extension essentielle maximale de S_i^o dans M. Il résulte alors de la relation $S_i \oplus M_i \vartriangle M$ la relation $S_i \simeq S_i \oplus M_i/M_i \vartriangle M/M_i$ par suite d'après la proposition O, M_i est un sous-module primaire dans M. Posons $N = \bigcap_{i \in I} M_i$.

Si $N \neq o$ il existe une partie finie minimale I_o de I $(I_o = \{i_1, \ldots, i_n\})$ telle que $N \cap (\bigoplus_{1 \leq k \leq n} S_{i_k}) \neq o$. Pour tout $i \in I$ on a $N \subset M_i$ avec S_i^o essentiel dans M_i et par suite il vient $N \cap S_i^o \neq o$ et $N \cap S_i^o$ essentiel dans N. Il en résulte la relation : $N \cap (\bigcap_{1 \leq k \leq n} S_{i_k}^o) \Delta N$. Il vient alors $N \cap (\bigcap_{1 \leq k \leq n} S_{i_k}^o) \cap (\bigoplus_{1 \leq k \leq n} S_{i_k}) \neq O$ donc $(\bigcap_{1 \leq k \leq n} S_{i_k}^o) \cap (\bigoplus_{1 \leq k \leq n} S_{i_k}) \neq o$ ce qui est contradictoire donc $N = o$ c.a.d. $O = \bigcap_{i \in I} M_i$. Montrons que cette intersection est réduite ; si pour $i \in I$ on a $\bigcap_{j \neq i} M_j \subset M_i$ alors il vient $\bigcap_{j \neq i} S_j^o \subset M_i$ et $S_i \subset M_i$ d'où $S_i \cap M_i = S_i = O$ ce qui n'est pas ; donc pour tout $i \in I$ on a $\bigcap_{j \neq i} M_j \not\subset M_i$.

2ème point : Soit N un sous-module propre quelconque de M. Alors M/N satisfait à la condition (b) ; on a donc d'après le 1er point une inter-décomposition réduite du type $o = \bigcap_{i \in I} M_i/N$ avec M_i/N sous-module primaire de M/N . Il en résulte que l'interdécomposition $N = \bigcap_{i \in I} M_i$ est réduite et de plus $M/M_i \simeq M/N \big/ M_i/N$ est primaire donc M_i est primaire dans M.

(c) $\Longrightarrow$ (a)

Soit M/N un module quotient quelconque de M non nul. Si N est un sous-module primaire de M alors M/N est primaire donc contient un module homogène d'après la proposition O. Si N n'est pas primaire dans M d'après (c) on a $N = M_i \cap M_i^o$ avec $N \neq M_i$, $N \neq M_i^o$ et M/M_i primaire. Il existe un monomorphisme de M_i^o/N dans $M/M_i \simeq M/N \big/ M_i/N$. D'après la proposition O il résulte que M_i^o/N contient un module homogène par suite il en est de même de M/N.

Définition : *Un module* M *possède la propriété de décomposition primaire (en abrégé on écrit propriété D.P.) si* M *satisfait à l'une des conditions équivalentes de la proposition 1.*

2. Soit $\mathcal{P}$ la classe des modules possédant la propriété D.P. Dans [4] on a étudié les anneaux pour lesquels $\mathcal{P} = \mathrm{Mod}_A$.

Proposition 2 : *La sous-catégorie pleine $\mathscr{P}$ de* Mod_A *constituée par les modules admettant la propriété D.P. est localisante. En particulier tout module admet un plus grand sous-module possédant la propriété de décomposition primaire.*

a) $\mathscr{P}$ est stable par objets-quotients. Cela résulte immédiatement de la caractérisation (a) de la Proposition 1.

b) $\mathscr{P}$ est stable par sous-objets. Soit N un sous-module quelconque d'un module M objet de $\mathscr{P}$. Soit N/N' un module quotient non nul de N. Alors N/N' est un sous-module non nul de M/N' donc d'après la caractérisation (b) de la Proposition 1, N/N' contient un module homogène. Le fait que N est un objet de $\mathscr{P}$ résulte alors de la caractérisation (a) de la Proposition 1.

c) Montrons que $\mathscr{P}$ est stable par sommes directes:

Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille de modules appartenant à $\mathscr{P}$. Posons $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$. Soit $f : M \to N$ un épimorphisme quelconque non nul: Il vient $N = \sum_{i \in I} f(M_i)$. Il existe $i \in I$ tel que $f(M_i) \neq 0$. Donc d'après la caractérisation (a) de la Proposition 1, $f(M_i)$ contient un module homogène, il en est donc de même pour N. Par suite M est un objet de $\mathscr{P}$.

d) Montrons que $\mathscr{P}$ est épaisse :

soit $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{s} M'' \longrightarrow 0$ une suite exacte.

D'après a) et b) on sait que si M est un objet de $\mathscr{P}$ il en est de même pour M' et M": Supposons que M' et M" soient des objets de $\mathscr{P}$. On considère alors un épimorphisme quelconque f non nul de source M et de but N.

Si $fi \neq 0$ $fi(M')$ contient un module homogène et il en est alors de même pour N.

Si $f_i = o$ alors $i(M') \subset \mathrm{Ker} f$ et par suite il existe $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_A(M'', N)$ tel que $\bar{f} \circ s = f$. Il en résulte que N est un module quotient non nul de M'' donc d'après la Proposition 1 (a) N contient un module homogène.
En définitive M est un objet de $\mathcal{P}$.

$\mathcal{P}$ est localisante.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. GABRIEL Bull. Soc. Math. Fr., 90, 1962, p. 323-448

[2] O. GOLDMAN J. of Algebra, p. 10-47, Septembre 1969.

[3] A. HUDRY C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, p. 925-928 (13 avril 1970).

[4] " C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, p. 1214-1217 (21 décembre 1970).

Manuscrit remis le 16 novembre 1971

A. HUDRY
Assistant
Département de Mathématiques
43, bd du 11 nov. 1918
69 - VILLEURBANNE