PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

HENRI IMMEDIATO

Localisation à la manière de Goldie et applications

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1970, tome 7, fascicule 3
, p. 1-54
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1970__7_3_1_0>

LOCALISATION A LA MANIERE DE GOLDIE
ET APPLICATIONS

par Henri IMMEDIATO

Ce travail présente une nouvelle méthode de localisation dans les anneaux unitaires, relativement à un idéal bilatère. Il est divisé en six chapitres : les quatre premiers développent la théorie générale et les deux derniers sont consacrés aux applications.

L'idée générale de la théorie consiste, à partir d'une famille topologisante idempotente $\mathfrak{F}$ d'idéaux à droite d'un anneau A et d'un idéal bilatère $\mathfrak{F}$-clos I de A, à considérer des "puissances symboliques à droite" H_n, $n \geq 1$ de I par rapport à $\mathfrak{F}$. Ces puissances symboliques à droite forment une suite décroissante d'idéaux bilatères.

On localise chaque anneau A/H_n par rapport à la famille $\mathfrak{F}_n$ image directe de $\mathfrak{F}$ par le morphisme canonique de A dans A/H_n. L'idéal I est alors dit "localisable à droite par rapport à $\mathfrak{F}$" si les localisés $(A/H_n)_{\mathfrak{F}_n}$ forment un système projectif d'anneaux.

En particularisant la famille $\mathfrak{F}$, on obtient les notions d'idéal localisable à droite et d'idéal classiquement localisable à droite. Tout idéal I d'un anneau commutatif unitaire A est classiquement localisable à droite et l'anneau dit "localisé à droite classique de A selon I" est le séparé de l'anneau de fractions généralisé de A selon la partie multiplicative des éléments non diviseurs de zéro modulo I, pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, $\mathfrak{m}$ étant l'idéal engendré par l'image canonique de I.

Les exemples d'applications du sixième chapitre concernent, quant au premier, des ordres d'Asano particuliers et, quant au second, un anneau de polynômes à deux indéterminées non commutatives sur un corps commutatif. Dans ce second exemple, l'anneau considéré n'est jamais noethérien, de sorte que la localisation de Goldie ne peut pas s'appliquer ; le localisé à droite classique obtenu dans cet exemple ne peut, d'autre part, jamais être un localisé de Gabriel, de sorte que les résultats obtenus ne peuvent pas l'être par la méthode de Gabriel. La localisation considérée est cependant importante car elle conduit à des notions de fractions rationnelles et de séries formelles.

CHAPITRE I - PRELIMINAIRES.

1.1 <u>Rappels et notations</u>. Soient A un anneau unitaire, M un A-module à droite et N un sous-module de M. Pour un élément x de M, on note $(N:x)^A$, ou simplement $(N:x)$ l'idéal à droite de A formé des éléments α de A tels que $x\alpha$ appartienne à N.

On dit qu'une famille $\mathfrak{F}$ d'idéaux à droite de A est *topologisante* si :

1° Pour tout idéal à droite J de A, on a

$$I \in \mathfrak{F} \quad \text{et } I \subseteq J \Longrightarrow J \in \mathfrak{F}$$

2° $I \in \mathfrak{F}$ et $J \in \mathfrak{F} \Longrightarrow I \cap J \in \mathfrak{F}$

3° $(\forall J \in \mathfrak{F})(\forall \alpha \in A)((J:\alpha)^A \in \mathfrak{F})$.

On dit que la famille $\mathfrak{F}$ est, de plus, *idempotente*, si l'on a :

4° Pour tout idéal à droite J de A, on a :

$$(\exists I \in \mathfrak{F})(\forall \alpha \in I)((J:\alpha)^A \in \mathfrak{F}) \Longrightarrow J \in \mathfrak{F}.$$

Pour un A-module à droite M et un sous-module N de M, l'ensemble :

$$\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{F}}^{M}(N) = \{x \in M \mid (N:x)^A \in \mathfrak{F}\}$$

où $\mathfrak{F}$ est une famille topologisante d'idéaux à droite de A, est appelé la $\mathfrak{F}$-*clôture* de N dans M. On dit que N est $\mathfrak{F}$-*clos* dans M si

$$\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{F}}^{M}(N) = N$$

On dit que N est $\mathfrak{F}$-*rationnel* dans M si

$$C\ell_{\mathfrak{F}}^{M}(N) = M$$

Le sous-module $C\ell_{\mathfrak{F}}^{M}(0)$ est aussi noté $\mathfrak{F}M$ et appelé le sous-module $\mathfrak{F}$-*singulier* de M.

Pour les définitions des notions de module $\mathfrak{F}$-*injectif* et de $\mathfrak{F}$-*essentialité*, on pourra se reporter, par exemple, à ((11), p.37).

1.2 Image directe d'une famille topologisante et idempotente d'idéaux à droite par un morphisme surjectif d'anneaux.

1.2.1 PROPOSITION : *Soient* A *un anneau unitaire,* J *un idéal bilatère de* A, $f : A \to A/J$ *le morphisme canonique,* $\mathfrak{F}$ *une famille topologisante idempotente d'idéaux à droite de* A, $\mathfrak{F}'$ *la famille topologisante idempotente image directe de* $\mathfrak{F}$ *par* f ((9), p.64). *Alors, pour tout idéal à droite* K *de* A/J, *on a :*

1° $(\forall a \in A)\ \left(f^{-1}\left((K.\cdot f(a))^{A/J}\right) = (f^{-1}(K).\cdot a)^{A}\right)$

2° $K \in \mathfrak{F}' \Longleftrightarrow f^{-1}(K) \in \mathfrak{F}$

3° $K \in \mathfrak{F}' \Longleftrightarrow (\exists F \in \mathfrak{F})(K = f(F))$.

4° $C\ell_{\mathfrak{F}'}^{A/J}(K) = f\{C\ell_{\mathfrak{F}}^{A}(f^{-1}(K))\}$

La première relation est claire. La deuxième s'en déduit immédiatement en tenant compte du fait que tout élément de A/J peut s'écrire sous la forme f(a). Les troisième et quatrième relations viennent de la seconde et du fait que f est surjectif.

1.2.2 *PROPOSITION : Avec les hypothèses et notations de* 1.2.1, *soit* M *un* A/J-*module à droite, muni de la structure de* A-*module induite par* f. *On a :*

1° *Il y a coïncidence entre les* A/J-*sous-modules de* M *et les* A-*sous-modules de* M.

2° $\forall$N *sous-module de* M, *il y a équivalence entre :*

a) N *est essentiel dans* M *en tant que* A-*sous-module.*

b) N *est essentiel dans* M *en tant que* A/J -*sous-module.*

3° $(\forall N \leqslant M)(C\ell_{\mathfrak{F}}^{M}(N) = C\ell_{\mathfrak{F}'}^{M}(N))$.

4° $\forall N < M$, *il y a équivalence entre :*

a) N *est* $\mathfrak{F}$-*essentiel dans* M *en tant que* A-*module*

b) N *est* $\mathfrak{F}'$-*essentiel dans* M *en tant que* A/J-*module.*

La première assertion résulte du fait que tout élément de A/J s'écrit sous la forme f(a) pour un $a \in A$. La seconde résulte de la première. La troisième assertion vient du fait que pour un $x \in M$, on a l'égalité :

$$(N:x)^{A} = f^{-1}\left((N:x)^{A/J}\right)$$

La quatrième assertion résulte de la troisième et du fait que la $\mathfrak{F}$-essentialité est équivalente à l'essentialité, jointe à la $\mathfrak{F}$-rationnalité.

En particulier, pour $N = 0$, la propriété 3° s'écrit $\mathfrak{F}M = \mathfrak{F}'M$.

Avec les notations précédentes, on va s'intéresser maintenant au problème de l'existence d'un prolongement de $f : A \to A/J$ en un morphisme d'anneaux $f' : A_{\mathfrak{F}} \to (A/J)_{\mathfrak{F}'}$, rendant commutatif le diagramme d'anneaux :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & A/J \arrow[d] \\
A_{\mathfrak{F}} \arrow[r, "f'"'] & (A/J)_{\mathfrak{F}'}
\end{tikzcd}$$

$A_{\mathfrak{F}}$ désigne le localisé de Gabriel de A par rapport à $\mathfrak{F}$ [5], et $(A/J)_{\mathfrak{F}'}$ le localisé de Gabriel de A/J par rapport à $\mathfrak{F}'$.

1.2.3 PROPOSITION. *Soit* A *un anneau unitaire,* $\mathfrak{F}$ *une famille topologisante idempotente d'idéaux à droite de* A *telle que* $\mathfrak{F}A = 0$. *Soient* J *un idéal bilatère $\mathfrak{F}$-clos de* A *et* $\mathfrak{F}'$ *la famille image de* $\mathfrak{F}$ *par le morphisme canonique* $f : A \to A/J$.

Pour que f *se prolonge en un morphisme d'anneaux* $f' : A_{\mathfrak{F}} \to (A/J)_{\mathfrak{F}'}$, *il faut et il suffit que l'une des conditions équivalentes suivantes soit réalisée :*

1° L'idéal à droite $C\ell_{\mathfrak{F}}^{A_{\mathfrak{F}}}(J)$ *de* $A_{\mathfrak{F}}$ *est bilatère.*

2° $A_{\mathfrak{F}} J \subseteq C\ell_{\mathfrak{F}}^{A_{\mathfrak{F}}}(J)$.

Comme $\mathfrak{F}A = 0$ et $C\ell_{\mathfrak{F}}^{A}(J) = J$, $A_{\mathfrak{F}}$ est enveloppe $\mathfrak{F}$-injective de A et $(A/J)_{\mathfrak{F}'}$ est enveloppe $\mathfrak{F}'$-injective de A/J ([9] p.106).

A/J est $\mathfrak{F}'$-essentiel dans $(A/J)_{\mathfrak{F}'}$, donc $\mathfrak{F}$-essentiel dans $(A/J)_{\mathfrak{F}'}$ d'après 1.2.2 et l'enveloppe $\mathfrak{F}$-injective de $(A/J)_{\mathfrak{F}'}$ est aussi le localisé de A/J par rapport à $\mathfrak{F}$.

Dans $(A/J)_{\mathfrak{F}}$ l'ensemble X des éléments annulés par J est un A/J-module contenant A/J donc A/J est $\mathfrak{F}$-essentiel dans X et $\mathfrak{F}'$-essentiel dans X d'après 1.2.2. Comme X contient aussi $(A/J)_{\mathfrak{F}'}$ qui est maximal pour la $\mathfrak{F}'$-essentialité, on a $X = (A/J)_{\mathfrak{F}'}$.

Le morphisme $f : A \to A/J$ se prolonge en un morphisme de A -modules à droite $f_{\mathfrak{F}} : A_{\mathfrak{F}} \to (A/J)_{\mathfrak{F}}$. Comme le sous-module $\mathfrak{F}$-singulier de $(A/J)_{\mathfrak{F}}$ est nul, ce prolongement est unique.

Si f se prolonge en $f' : A_{\mathfrak{F}} \to (A/J)_{\mathfrak{F}'}$, comme $(A/J)_{\mathfrak{F}'}$ est contenu dans $(A/J)_{\mathfrak{F}}$, f' et $f_{\mathfrak{F}}$ coïncident, de sorte que $\ker f_{\mathfrak{F}}$ est un idéal bilatère puisque f' est, par hypothèse, un morphisme d'anneaux.

Réciproquement si $\ker f_{\mathfrak{F}}$ est un idéal bilatère de $A_{\mathfrak{F}}$, l'image $\mathrm{Im} f_{\mathfrak{F}}$ de $f_{\mathfrak{F}}$ est un $A_{\mathfrak{F}}$-module annulé par $\ker f_{\mathfrak{F}}$: c'est donc aussi un A-module annulé par J, donc on a

$$\mathrm{Im} f_{\mathfrak{F}} \subseteq (A/J)_{\mathfrak{F}'}.$$

$\mathrm{im} f_{\mathfrak{F}}$, isomorphe à $A_{\mathfrak{F}}/\ker f_{\mathfrak{F}}$, peut être muni d'une structure d'anneau. La multiplication dans $\mathrm{Im} f_{\mathfrak{F}}$ coïncide avec la multiplication induite par celle de $(A/J)_{\mathfrak{F}'}$, de sorte que $\mathrm{Im} f_{\mathfrak{F}}$ est sous-anneau de $(A/J)_{\mathfrak{F}'}$ et $f_{\mathfrak{F}}$ est un morphisme d'anneaux de $A_{\mathfrak{F}}$ dans $(A/J)_{\mathfrak{F}'}$ prolongeant f.

Donc, pour que $f : A \to A/J$ se prolonge en un morphisme d'anneaux $f' : A_{\mathfrak{F}} \to (A/J)_{\mathfrak{F}'}$, il faut et il suffit que $\ker f_{\mathfrak{F}}$ soit un idéal bilatère de $A_{\mathfrak{F}}$.

Or, il est facile de voir que :

$$\ker f_{\mathfrak{F}} = C\ell_{\mathfrak{F}}^{A_{\mathfrak{F}}}(J)$$

et que :

$$A_{\mathfrak{F}} \cdot C\ell_{\mathfrak{F}}^{A_{\mathfrak{F}}}(J) \subseteq C\ell_{\mathfrak{F}}^{A_{\mathfrak{F}}}(J) \iff A_{\mathfrak{F}}.J \subseteq C\ell_{\mathfrak{F}}^{A_{\mathfrak{F}}}(J)$$

de sorte que la proposition est démontrée.

1.2.4 COROLLAIRE. *Soient* A *un anneau unitaire,* M *une partie multiplicative de* A, $\mathfrak{F}$ *la famille topologisante idempotente des idéaux à droite* J *de* A *tels que*

$$(\forall a \in A)((J\cdot\!\!: a)^{A} \cap M \neq \emptyset).$$

Supposons que A *possède un anneau de fractions à droite classique par rapport à* M : *c'est le localisé* $A_{\mathfrak{F}}$(1). *Soit* J *un idéal bilatère* $\mathfrak{F}$*-clos de* A. *Pour que le morphisme canonique* $f : A \to A/J$ *se prolonge en un morphisme d'anneaux* $f' : A_{\mathfrak{F}} \to (A/J)_{\mathfrak{F}'}$, $\mathfrak{F}'$ *désignant la famille topologisante idempotente image de* $\mathfrak{F}$ *dans* A/J, *il faut et il suffit que l'une des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée :*

1° *Dans* $A_{\mathfrak{F}}$ *toute fraction à gauche à numérateur dans* J *peut s'écrire comme fraction à droite à numérateur dans* J.

2° $(\forall x \in A)(\forall c \in M)(cx \in J \Rightarrow x \in J)$

3° $\forall c \in M$, f(c) *est non diviseur de* 0 *dans* A/J.

4° A/J *possède un anneau de fractions à droite classique selon la partie multiplicative* f(M).

$\mathfrak{F}$ est formé des idéaux à droite de A dont l'intersection avec M n'est pas vide. Si J est $\mathfrak{F}$-clos dans A, il est clair que les éléments de f(M) sont non diviseurs de 0 à droite dans A/J.

D'après 1.2.3, pour que $f : A \to A/J$ se prolonge en un morphisme d'anneaux $f' : A_{\mathfrak{F}} \to (A/J)_{\mathfrak{F}'}$, il faut et il suffit que $C\ell_{\mathfrak{F}}^{A_{\mathfrak{F}}}(J)$ soit idéal bilatère de $A_{\mathfrak{F}}$. Compte tenu de la relation $C\ell_{\mathfrak{F}}^{A_{\mathfrak{F}}}(J) \cap A = J$, cette condition peut s'exprimer par la relation 1°. Il est aisé de vérifier que les relations 2° et 3° sont chacune équivalente à 1°.

D'autre part, si $A_{\mathfrak{F}}$ est anneau de fractions à droite de A selon M, A/J vérifie la condition de Ore à droite selon f(M) et l'on a vu que les éléments de f(M) sont non diviseurs de 0 à droite. Donc le fait que A/J possède un anneau de fractions à droite classique selon f(M) est équivalent au fait que les éléments de f(M) sont non diviseurs de 0 à gauche dans A/J. Donc 4° est équivalent à 3°.

On peut remarquer que si les conditions équivalentes de 1.2.4 sont vérifiées, le prolongement $f' : A_{\mathfrak{F}} \to (A/J)_{\mathfrak{F}'}$ de f est le morphisme qui, à une fraction ac^{-1} dans $A_{\mathfrak{F}}$, $a \in A$, $c \in M$, fait correspondre la fraction $(a+J)(c+J)^{-1}$ dans $(A/J)_{\mathfrak{F}'}$. Ce prolongement est donc, ici, surjectif.

CHAPITRE 2 - PUISSANCES SYMBOLIQUES A DROITE ET IDEAL BILATERE LOCALISABLE A DROITE PAR RAPPORT A UNE FAMILLE TOPOLOGISANTE IDEMPOTENTE D'IDEAUX A DROITE.

2.1 Puissances symboliques à droite par rapport à une famille topologisante idempotente d'idéaux à droite d'un anneau A.

2.1.1 *DEFINITION. Soient* A *un anneau unitaire,* $\mathfrak{F}$ *une famille topologisante idempotente d'idéaux à droite de* A , I *un idéal bilatère* $\mathfrak{F}$*-clos de* A. *On appelle puissances symboliques à droite de* I *par rapport à* $\mathfrak{F}$, *les idéaux bilatères* H_n , $n \geq 1$, *définis par récurrence par*

$$H_1 = Cl_{\mathfrak{F}}^A(I) = I$$

$$H_{n+1} = Cl_{\mathfrak{F}}^A(H_n I) \text{ pour } n \geq 1.$$

2.1.2 Il est clair que les idéaux H_n, $n \geq 1$, forment une suite décroissante d'idéaux bilatères $\mathfrak{F}$-clos de A et que, pour tout $n \geq 1$, I^n est contenu dans H_n.

2.1.3 *PROPOSITION. Si* A *est commutatif,* H_n *est égal à* $Cl_{\mathfrak{F}}^A(I^n)$.

En effet $I^n \subseteq H_n \Longrightarrow Cl_{\mathfrak{F}}^A(I^n) \subseteq Cl_{\mathfrak{F}}^A(H_n) = H_n$. Réciproquement, on a $H_1 = I = Cl_{\mathfrak{F}}^A(I)$. Supposons $H_n \subseteq Cl_{\mathfrak{F}}^A(I^n)$. Soit $x \in H_{n+1}$; on a :

$$K = (H_n I \cdot x)^A \in \mathfrak{F}$$

donc $xK \subseteq H_n I$, donc

$$(\forall k \in K)(\exists a_1, \ldots, a_m \in H_n)(\exists b_1, \ldots, b_m \in I)(xk = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i)$$

Par hypothèse de récurrence, $(I^n \cdot a_i)^A \in \mathfrak{F}$, donc

$$H = \bigcap_{i=1}^{m} (I^n \cdot a_i)^A \in \mathfrak{F}.$$

Pour tout $i = 1, \ldots, m$, on a $a_i H \subseteq I^n$, donc $xkH = (\Sigma a_i b_i) H \subseteq \Sigma b_i (a_i H) \subseteq I^{n+1}$ et $xk \in C\ell_{\mathfrak{F}}{}^A(I^{n+1})$, d'où $xK \subseteq C\ell\,{}^A(I^{n+1})$.

On a donc, puisque K appartient à $\mathfrak{F}$,

$$x \in C\ell_{\mathfrak{F}}{}^A\left(C\ell_{\mathfrak{F}}{}^A(I^{n+1})\right) = C\ell_{\mathfrak{F}}{}^A(I^{n+1}).$$

2.2 Idéal bilatère localisable à droite par rapport à une famille topologisante idempotente d'idéaux à droite d'un anneau unitaire A.

Soient A un anneau unitaire, $\mathfrak{F}$ une famille topologisante idempotente d'idéaux à droite de A, I un idéal bilatère $\mathfrak{F}$-clos de A, H_n, $n \geq 1$, les puissances symboliques à droite de I par rapport à $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_n$ la famille topologisante idempotente image de $\mathfrak{F}$ dans A/H_n, au sens de 1.2.1.

On notera u_n le morphisme canonique $A \to A/H_n$ et f_n le morphisme canonique $A/H_{n+1} \to A/H_n$. Comme H_n est $\mathfrak{F}$-clos, l'idéal $\mathfrak{F}_n$-singulier de A/H_n est nul.

De plus, la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "u_{n+1}"'] \arrow[dr, "u_n"] & \\ A/H_{n+1} \arrow[rr, "f_n"'] & & A/H_n \end{tikzcd}$$

entraîne que $\mathcal{F}_n$ est l'image de $\mathcal{F}_{n+1}$ par f_n et l'on a, de plus :

$$Cl_{\mathcal{F}_{n+1}}^{A/H_{n+1}}(H_n/H_{n+1}) = H_n/H_{n+1} = u_{n+1}\left(Cl_{\mathcal{F}}^{A}(H_n)\right)$$

d'après 1.2.2 et 1.2.1.

2.2.1 *DEFINITION. Soient* A *un anneau unitaire,* $\mathcal{F}$ *une famille topologisante idempotente d'idéaux à droite de* A, I *un idéal bilatère de* A *. On dit que* I *est localisable à droite par rapport à la famille* $\mathcal{F}$ *si :*

1° I *est* $\mathcal{F}$*-clos dans* A.

2° Pour tout $n \geq 1$ *, le morphisme canonique* $f_n : A/H_{n+1} \to A/H_n$ *se prolonge en un morphisme d'anneaux*

$$f'_n : (A/H_{n+1})_{\mathcal{F}_{n+1}} \to (A/H_n)_{\mathcal{F}_n}$$

Dans ce cas les anneaux $(A/H_n)_{\mathcal{F}_n}$ forment un système projectif dont on note $A_{I,\mathcal{F}}$ la limite projective.

L'application canonique de A dans $A_{I,\mathfrak{F}}$ est alors un morphisme d'anneaux dont le noyau est $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} H_n$. L'unicité du prolongement de f_n supprime toute ambiguité de la définition.

D'après 1.2.3 pour qu'un idéal bilatère $\mathfrak{F}$-clos I soit localisable à droite par rapport à $\mathfrak{F}$ il faut et il suffit que, pour tout $n \geqslant 1$, les idéaux à droite

$$\ker\left((f_n)_{\mathfrak{F}_{n+1}}\right) = C\ell_{\mathfrak{F}_{n+1}}^{(A/H_{n+1})_{\mathfrak{F}_{n+1}}} (H_n/H_{n+1})$$

soient, en fait, des idéaux bilatères dans $(A/H_{n+1})_{\mathfrak{F}_{n+1}}$.

2.2.2 <u>Exemples</u>.

1° $\mathfrak{F}A$ est égal à chacune de ses puissances symboliques à droite par rapport à $\mathfrak{F}$, donc $\mathfrak{F}A$ est localisable à droite par rapport à $\mathfrak{F}$ et l'on a

$$A_{\mathfrak{F}A,\mathfrak{F}} = A_{\mathfrak{F}}$$

2° Si I est un idéal bilatère idempotent, d'après 2.1.2, I est égal à chacune de ses puissances symboliques à droite par rapport à une famille topologisante idempotente $\mathfrak{F}$ telle que I soit $\mathfrak{F}$-clos, donc I est localisable à droite par rapport à $\mathfrak{F}$ et l'on a :

$$A_{I,\mathfrak{F}} = (A/I)_{\mathfrak{F}_1}$$

3° Si A est commutatif, tout idéal $\mathcal{F}$-clos I est localisable à droite par rapport à $\mathcal{F}$ car les localisés $(A/H_n)_{\mathcal{F}_n}$ sont commutatifs et les idéaux $\ker\left((f_n)_{\mathcal{F}_{n+1}}\right)$ sont bilatères.

2.2.3 PROPOSITION. *Soient* A *un anneau unitaire,* $\mathcal{F}$ *une famille topologisante idempotente d'idéaux à droite de* A, I *un idéal bilatère localisable à droite par rapport à* $\mathcal{F}$, H_n, $n \geq 1$, *les puissances symboliques à droite de* I *par rapport à* $\mathcal{F}$.
Alors $I/\bigcap_1^\infty H_n$ *est localisable à droite dans* $A/\bigcap_1^\infty H_n$ *par rapport à la famille topologisante idempotente* $\mathcal{F}'$ *image de* $\mathcal{F}$ *dans* $A/\bigcap_1^\infty H_n$, *et l'on a :*

$$(A/\bigcap_1^\infty H_n)_{I/\bigcap_1^\infty H_n,\mathcal{F}'} = A_{I,\mathcal{F}}$$

La démonstration est élémentaire, une fois que l'on a remarqué que

$$Cl_{\mathcal{F}}^A(H_n I + \bigcap_1^\infty H_n) = H_{n+1}$$

Ce résultat montre que l'on peut toujours supposer, en passant éventuellement aux quotients par $\bigcap_1^\infty H_n$, que l'intersection des H_n est réduite à 0.

CHAPITRE 3 - IDEAL BILATERE LOCALISABLE A DROITE.

3.1 LEMME. *Soient* A *un anneau unitaire,* M *un* A-*module à droite unitaire,* E(M) *une enveloppe injective de* M *. On sait déjà* ([10], *lemme* 1.3.2, *p.*15) *que la famille* $\mathfrak{F}_M$ *des idéaux à droite* J *de* A *vérifiant*

$$\mathrm{Hom}_A(A/J, E(M)) = 0$$

est la plus grande des familles topologisantes idempotentes $\mathfrak{F}$ *telles que* $\mathfrak{F}M = 0$.

On a :

$$J \in \mathfrak{F}_M \iff (\forall a \in A)(\forall x \in M)\left((J:a)^A \subseteq (0:x)^A \Longrightarrow x = 0\right) \qquad (1)$$

Soit $\mathfrak{F}$ la famille des idéaux à droite de A vérifiant la relation (1).

1° <u>$\mathfrak{F}_M$ *est contenu dans* $\mathfrak{F}$</u> :

En effet, soient $J \in \mathfrak{F}_M$, $a \in A$, $x \in M$, tels que $(J:a)^A \subseteq (0:x)^A$. Comme $J \in \mathfrak{F}_M$, on a $(J:a)^A \in \mathfrak{F}_M$, donc $(0:x)^A \in \mathfrak{F}_M$, donc $x \in \mathfrak{F}_M M = 0$ et $x = 0$, donc $J \in \mathfrak{F}$.

2° <u>$\mathfrak{F}$ *est topologisante idempotente*</u> :

a) Soient $J \in \mathfrak{F}$, $J \subseteq J'$, $a \in A$, $x \in M$, tels que $(J':a)^A \subseteq (0:x)^A$. On a $J \subseteq J' \Longrightarrow (J:a)^A \subseteq (J':a)^A \subseteq (0:x)^A$. $J \in \mathfrak{F} \Longrightarrow x = 0$. Donc $J' \in \mathfrak{F}$.

b) Soient $J \in \mathfrak{F}$, $b \in A$, $a \in A$, $x \in M$ tels que

$$\left((J:b)^A : a\right)^A \subseteq (0:x)^A$$

on a $\left((J:b)^A : a\right)^A = (J:ba)^A$ donc $(J:ba)^A \subseteq (0:x)^A$ comme J appartient à $\mathfrak{F}$, cette relation entraîne que $x = 0$, donc $(J:b)^A \in \mathfrak{F}$.

c) Soient $J \in \mathfrak{F}$ et $J' \leqslant A$ tel que

$$(\forall b \in J)\left((J':b)^A \in \mathfrak{F}\right)$$

Soient $a \in A$, $x \in M$ tels que $(J':a)^A \subseteq (0:x)^A$. Pour tout $b \in (J:a)^A$ on a $(J':ab)^A \subseteq (0:xb)^A$ et $ab \in J$ donc $(J:ab)^A \in \mathfrak{F}$. Ceci entraîne $xb = 0$ et $b \in (0:x)^A$. On a donc $(J:a)^A \subseteq (0:x)^A$. Alors $J \in \mathfrak{F} \Longrightarrow x = 0$ de sorte que $J' \in \mathfrak{F}$.

3° $\underline{\mathfrak{F}M = 0}$.

En effet $x \in \mathfrak{F}M \Longrightarrow (0:x)^A \in \mathfrak{F}$. Alors la relation (1) appliquée avec $J = (0:x)^A$ et $a = 1$ entraîne que x est nul donc $\mathfrak{F}M = 0$.

De 2° et 3°, il résulte que $\mathfrak{F}$ est une famille topologisante idempotente telle que $\mathfrak{F}M = 0$; la propriété de $\mathfrak{F}_M$ rappelée dans l'énoncé du lemme montre alors que $\mathfrak{F}$ est contenu dans $\mathfrak{F}_M$. D'après 1° on a donc $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_M$.

3.2 COROLLAIRE. *Soient* A *un anneau unitaire,* I *un idéal bilatère de* A.

1° *La famille $\mathfrak{F}_{A/I}$ définie par le* A-*module à droite* A/I *au sens de 3.1 est formée des idéaux à droite* J *de* A *vérifiant :* $(\forall a\in A)(\forall x\in A)((J:a)^A \subseteq (I:x)^A \Longrightarrow x\in I)$

2° *La famille image directe de $\mathfrak{F}_{A/I}$ par le morphisme canonique* $f : A \to A/I$ *est l'ensemble des idéaux à droite rationnels de* A/I.

Simple vérification, compte tenu de 3.1.

On peut remarquer aussi que $\mathfrak{F}_{A/I}$ est la plus grande des familles topologisantes $\mathfrak{F}$ d'idéaux à droite de A telles que I soit $\mathfrak{F}$-clos dans A.

3.3 Cas particulier. Soient A un anneau unitaire noethérien à droite et à gauche, P un idéal bilatère premier de A, C la partie multiplicative $\{c\in A \mid (\forall x\in A)(xc\in P \Longrightarrow x\in P)\}$, $\mathfrak{F}(C)$ la famille topologisante idempotente des idéaux à droite J de A vérifiant

$$(\forall a\in A)((J:a)^A \cap C \neq \emptyset)$$

alors $\mathfrak{F}_{A/P} = \mathfrak{F}(C)$.

Les hypothèses faites sont celles de Goldie [6]. Goldie montre que P est $\mathfrak{F}(C)$-clos donc $\mathfrak{F}(C) \subseteq \mathfrak{F}_{A/P}$. Réciproquement, pour $J\in\mathfrak{F}_{A/P}$ et $a\in A$ on a $(J:a)^A \in \mathfrak{F}_{A/P}$. D'après 3.2 et 1.2.1, si $f : A \to A/P$ est le morphisme canonique, $f\left((J:a)^A\right)$ est rationnel, donc essentiel dans A/P. Comme A/P est un anneau premier noethérien à droite et à gauche, tout idéal essentiel contient un élément non diviseur de 0, donc appartenant à f(C). Donc

$$(\exists c\in C)(\exists x\in P)(c+x\in (J:a)^A)$$

Or $c + x\in C$ donc $(J:a)^A \cap C \neq \emptyset$ et $J\in\mathfrak{F}(C)$.
Donc $\mathfrak{F}_{A/P} \subseteq \mathfrak{F}(C)$ et on a l'égalité.

Le résultat reste vrai si l'on remplace l'idéal premier P par un idéal Q tel que A/Q soit semi-premier, puisque tout idéal à droite essentiel d'un anneau semi-premier noethérien à droite contient un élément non diviseur de 0.

3.4 *DEFINITION. Soient* A *un anneau unitaire,* I *un idéal bilatère de* A. *On dit que* I *est* <u>*localisable à droite*</u> *s'il est localisable à droite par rapport à la famille* $\mathfrak{F}_{A/I}$.

3.5 *PROPOSITION. Soient* A *un anneau unitaire,* I *un idéal bilatère localisable à droite,* $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_{A/I}$, H_n, $n\geq 1$, *les puissances symboliques à droite de* I *par rapport à* $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_n$ *la famille image de* $\mathfrak{F}$ *dans* A/H_n. *Alors, pour tout* $n\geq 1$, *on a*

$$\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}_{(A/H_n)/(I/H_n)}, \text{ famille d'idéaux}$$

à droite de A/H_n *définie par le* A/H_n*-module à droite* A/I.

Soit u_n l'épimorphisme canonique $A \to A/H_n$.

$H_n \subseteq I \Rightarrow (\forall b\in A)(u_n((I:b)^A) = (u_n(I):u_n(b))^{A/H_n})$.

Pour un idéal à droite K de A/H_n on a, de plus :

$(\forall a\in A)(u_n((u_n^{-1}(K):a)^A) = (K:u_n(a))^{A/H_n})$

Or $u_n^{-1}(K)\in\mathfrak{F} \Leftrightarrow (\forall a\in A)(\forall b\in A)((u_n^{-1}(K):a)^A \subseteq (I:b)^A \Rightarrow b\in I)$ d'après 3.2 1°.

Donc comme $K\in\mathfrak{F}_n \Leftrightarrow u_n^{-1}(K)\in\mathfrak{F}$ (1.2.1. 2°), on a

$K\in\mathfrak{F}_n \Leftrightarrow (\forall a\in A)(\forall b\in A)(u_n((u_n^{-1}(K):a)^A) \subseteq u_n((I:b)^A)$

$\Rightarrow u_n(b)\in u_n(I))$ car $H_n \subseteq (u_n^{-1}(K):a)^A$ et $H_n \subseteq (I:b)^A$.

Donc $\mathfrak{F}_n$ est l'ensemble des idéaux à droite K de A/H_n vérifiant, pour tous éléments a et b de A, la relation :

$$(K:u_n(a))^{A/H_n} \subseteq ((I/H_n):u_n(b))^{A/H_n} \Longrightarrow u_n(b)\in u_n(I)$$

D'après 3.2, on voit donc que $\mathfrak{F}_n$ est la famille $\mathfrak{F}_{u_n(A)/u_n(I)}$.

L'intérêt de la notion introduite dans ce chapitre réside dans le fait que le localisé $(A/I)_{\mathfrak{F}_1}$ est l'anneau maximal de fractions au sens de Utumi de A/I ([4],p.66 ligne 8) alors que, dans le chapitre précédent, les $(A/H_n)_{\mathfrak{F}_n}$ étaient bien des anneaux de fractions au sens de Utumi, mais il pouvait n'y en avoir aucun de maximal.

3.6 Exemples.

1° Dans un anneau commutatif, tout idéal est localisable à droite. Cela résulte de 2.2.2,3°.

2° Dans un anneau unitaire semi-simple, tout idéal bilatère est localisable à droite car il est idempotent.

3° Pour toute famille topologisante idempotente $\mathfrak{F}$ d'idéaux à droite d'un anneau unitaire A, $\mathfrak{F}A$ est localisable à droite.

CHAPITRE 4 - IDEAL BILATERE CLASSIQUEMENT LOCALISABLE A DROITE.

Dans ce chapitre A désigne un anneau unitaire, I un idéal bilatère de A, C la partie multiplicative $\{c\in A \mid (\forall x\in A)(xc\in I \Longrightarrow x\in I)\}$, $\mathfrak{F}(C)$ la famille topologisante idempotente des idéaux à droite J de A vérifiant $(\forall a\in A)((J:a)^{A}\cap C \neq \emptyset)$.

L'idéal I est $\mathfrak{F}(C)$-clos dans A. En effet :
$(\forall x\in A)((I:x)^{A}\in\mathfrak{F}(C) \Longrightarrow (\exists c\in C)(xc\in I))$
et $xc\in I$ et $c\in C \Longrightarrow x\in I$.
Donc $(I:x)^{A}\in\mathfrak{F}(C) \Longrightarrow x\in I$.

On note H_n, $n\geqslant 1$, les puissances symboliques à droite de I par rapport à $\mathfrak{F}(C)$; $u_n : A \to A/H_n$ le morphisme canonique ; $f_n : A/H_{n+1} \to A/H_n$ le morphisme canonique ; $C_n = u_n(C)$; $\mathfrak{F}(C_n)$ la famille topologisante idempotente des idéaux à droite K de A/H_n vérifiant :

$$(\forall\alpha\in A/H_n)((K:\alpha)^{A/H_n}\cap C_n \neq \emptyset).$$

Alors $\mathfrak{F}(C_n)$ est aussi l'image directe de $\mathfrak{F}(C)$ par le morphisme u_n.

4.1 DEFINITION. *On dit que* I *est* <u>*classiquement localisable à droite*</u> *si, pour tout* $n\geqslant 1$, A/H_n *admet un anneau de fractions à droite classique selon* C_n.

Cela veut dire que les éléments de C_n sont non diviseurs de zéro dans A/H_n et que A/H_n vérifie la condition de Ore à droite selon C_n.

4.2 *PROPOSITION. Si* I *est classiquement localisable à droite, il est localisable à droite par rapport à la famille* $\mathfrak{F}(C)$. *On note* A_I *l'anneau* $\varprojlim_{n\geq 1}((A/H_n)_{\mathfrak{F}(C_n)})$.

En effet, les localisés $(A/H_n)_{\mathfrak{F}(C_n)}$ sont les anneaux de fractions à droite des A/H_n par rapport aux C_n. Comme C_n est l'image de C_{n+1} par f_n, le corollaire 1.2.4 montre que I est localisable à droite par rapport à $\mathfrak{F}(C)$.

4.3 <u>Exemple</u>. Dans un anneau commutatif unitaire, tout idéal est classiquement localisable à droite.

En effet, la condition de Ore à droite selon C_n est trivialement vérifiée dans A/H_n et pour a et b dans A, $b \in C$, on a

$$ab \in H_n \Longrightarrow b \in (H_n : a)^A$$

donc $(H_n : a)^A \cap C \neq \emptyset$ et $(H_n : a)^A \in \mathfrak{F}(C)$, donc $a \in Cl^A_{\mathfrak{F}(C)}(H_n) = H_n$, ce qui montre que les éléments de C_n sont non diviseurs de 0.

4.4 <u>Remarque</u>. Comme pour 2.2.3, on peut voir que si I est classiquement localisable à droite dans A, $I/\bigcap_1^\infty H_n$ est classiquement localisable à droite dans $A/\bigcap_1^\infty H_n$ et l'on a

$$A_I = (A/\bigcap_1^\infty H_n)_{I/\bigcap_1^\infty H_n}$$

Ceci permet de supposer, en passant éventuellement aux quotients par $\bigcap_1^\infty H_n$, que l'intersection des puissances symboliques de I est réduite à 0.

4.5 *PROPOSITION. Si I est classiquement localisable à droite dans A et si $\bigcap_1^\infty H_n = 0$, on a :*
1° A est sous-anneau de A_I.
2° Les éléments de C sont inversibles dans A_I.

1° Le noyau du morphisme canonique $A \to A_I$ est $\bigcap_1^\infty H_n = 0$ (2.2.1).

2° Pour $c \in C$ soit $q_n = (c+H_n)^{-1}$ l'inverse de $c + H_n$ dans $(A/H_n)_{\mathfrak{F}(C_n)}$. Alors $q = (q_n)_{n \geq 1} \in A_I$ et $qc = cq = 1$.

4.6 *DEFINITION. Si I est classiquement localisable à droite dans A et si $f : A \to A_I$ est le morphisme canonique, on appelle <u>localisé à</u>*

droite classique de A en I *le sous-anneau* $A_{(I)}$ *de* A_I *engendré par* $f(A)$ *et l'ensemble des inverses des éléments de* $f(C)$ *dans* A_I.

4.7 *PROPOSITION. Soit* I *un idéal classiquement localisable à droite de* A *tel que* $\bigcap_1^\infty H_n = 0$, *et soit* M' *le noyau du morphisme canonique* $A_I \to (A/I)_{\mathcal{F}(C_1)}$.

1° Les éléments de M'^n *ont leurs* n *premières composantes nulles.*

2° M' *est contenu dans le radical de Jacobson* $\mathcal{R}(A_I)$ *de* A_I.

3° A_I/M' *est isomorphe à* $(A/I)_{\mathcal{F}(C_1)}$.

4° $H_n = M'^n \cap A$.

5° $\bigcap_1^\infty M'^n = 0$.

1° Soit M_n le noyau de l'épimorphisme canonique

$$(A/H_n)_{\mathcal{F}(C_n)} \to (A/I)_{\mathcal{F}(C_1)}$$

Les éléments de M_n s'écrivent $(A+H_n)(c+H_n)^{-1}$ avec $a \in I$ et $c \in C$. Comme $I^n \subseteq H_n$, on a $M_n{}^n = 0$ et $M_n{}^p = 0$ pour $p \geqslant n$.

M' est l'ensemble $\{q = (q_n)_{n \geqslant 1} \in A_I \mid q_1 = 0\}$

Or $q_1 = 0 \iff q_n \in M_n$. Donc $(\forall p \geqslant 1)(M'^p \subseteq \prod_{n \geqslant 1} M_n{}^p)$

Comme $M_n{}^p = 0$ pour $p \geqslant n$, les éléments de M'^p ont leurs p premières composantes nulles.

2° Soit $m = (m_n)_{n\geqslant 1} \in M'$.

Considérons $q = (q_n)_{n\geqslant 1}$ défini par

$$q_1 = 1 \ ; \ q_n = 1 + m_n + \ldots + m_n^{n-1} \text{ pour } n\geqslant 2.$$

Si f'_n est le morphisme canonique

$(A/H_{n+1})_{\mathcal{F}(C_{n+1})} \to (A/H_n)_{\mathcal{F}(C_n)}$ on a

$f'_n(q_{n+1}) = 1 + m_n + \ldots + m_n^{n-1} + m_n^n$

$m_n \in M_n$ et $M_n^n = 0 \Longrightarrow m_n^n = 0$ et $f'_n(q_{n+1}) = q_n$

donc $q \in A_I$. On vérifie aisément que

$(1-m)q = q(1-m) = 1$, donc $1 - m$ est inversible

dans A_I, donc M' est contenu dans $\mathcal{R}(A_I)$.

3° résulte du fait que $A_I \to (A_I)_{\mathcal{F}(C_1)}$ est surjectif.

4° $a = (a+H_n)_{n\geqslant 1} \in M'^n \cap A \Longrightarrow a + H_n = 0$ donc $a \in H_n$.

On a donc $M'^n \cap A \subseteq H_n$.

Réciproquement on a $M' \cap A = I$. Si H_n est contenu

dans $M'^n \cap A$, soit $a \in H_{n+1}$; $(H_n I \overset{A}{:} a) \in \mathcal{F}(C)$, donc

$\exists c \in C$, $ac \in H_n I$; c est inversible dans A_I donc

$a \in H_n I\, A_I \subseteq M'^n M' A_I = M'^{n+1}$. Donc $a \in M'^{n+1} \cap A$ et

$H_{n+1} \subseteq M'^{n+1} \cap A$.

5° résulte de 1°.

4.8 THEOREME. *Soient* I *un idéal bilatère classiquement localisable à droite de* A *tel que*

$\bigcap_1^\infty H_n = 0$, et M l'idéal bilatère de $A_{(I)}$ engendré par I. Alors :

1° $H_n = M^n \cap A$

2° $\forall n \geq 1$, $\forall x \in A_{(I)}$, $\exists a \in A$, $\exists c \in C$, $\exists m_n \in M^n$

$$x = ac^{-1} + m_n$$

3° $A_{(I)}/M^n$ *est isomorphe à* $(A/H_n)_{\mathfrak{F}(C_n)}$.

1° Avec les notations de 4.7, $I \subseteq M' \Longrightarrow M \subseteq M'$. Donc $M^n \subseteq M'^n$ et $M^n \cap A \subseteq M'^n \cap A = H_n$. Réciproquement, si $H_n \subseteq M^n$, soit $x \in H_{n+1}$: $(\exists c \in C)(xc \in H_n I \subseteq M^n M = M^{n+1})$. Comme c est inversible dans $A_{(I)}$, on en déduit $x \in M^{n+1}$ donc $H_{n+1} \subseteq M^{n+1}$.

2° A/H_n vérifie la condition de Ore à droite selon C_n et $H_n \subseteq M^n$, donc tout élément $c^{-1}a$, $c \in C$, $a \in A$, de $A_{(I)}$ peut s'écrire sous la forme $a_\circ c_\circ^{-1}$ modulo M^n, avec $a_\circ \in A$ et $c_\circ \in C$.

Par récurrence sur p tout élément $a_1 c_1^{-1} \ldots a_p c_p^{-1}$ de $A_{(I)}$ peut s'écrire bc^{-1} modulo M^n avec $b \in A$, $c \in C$. Donc tout élément de $A_{(I)}$ peut se mettre sous forme d'une somme finie $\sum_i b_i c_i^{-1}$, $b_i \in A$, $c_i \in C$, et d'un élément de M^n.

Considérons une somme $b_1 c_1^{-1} + bc^{-1}$, b et b_1 dans A, c et c_1 dans C.

$(\exists e_1 \in C)(\exists e_2 \in A)(c_1 e_1 - c e_2 \in H_n)$.

Soit $x \in A$ tel que $xe_2 \in I$. On a $xe_2 + H_n \in I/H_n$.

$$e_2 + H_n = (c+H_n)^{-1}(c_1e_1+H_n)$$

$$xe_2 + H_n = (x+H_n)(c+H_n)^{-1}(c_1e_1+H_n)$$

$$c_1e_1 + H_n \in C_n \Longrightarrow (x+H_n)(c+H_n)^{-1} \in C\ell_{\mathfrak{F}(C_n)}^{(A/H_n)_{\mathfrak{F}(C_n)}}(I/H_n)$$

donc $x + H_n \in \left[C\ell_{\mathfrak{F}(C_n)}^{(A/H_n)_{\mathfrak{F}(C_n)}}(I/H_n)\right] \cap (A/H_n) =$

$$C\ell_{\mathfrak{F}(C_n)}^{A/H_n}(I/H_n) = I/H_n$$

donc $x \in I$ et $e_2 \in C$. Donc e_2 est inversible dans $A_{(I)}$ et l'on a :

$e_1^{-1}c_1^{-1}(c_1e_1-ce_2)e_2^{-1}c^{-1} \in M^n$ car $H_n \subseteq M^n$,

donc $e_1^{-1}c_1^{-1} - e_2^{-1}c^{-1} \in M^n$.

Or :

$$\begin{aligned} b_1c_1^{-1}+bc^{-1} &= b_1c_1^{-1}+b_1e_1e_2^{-1}c^{-1} + b_1e_1e_2^{-1}c^{-1}+ \\ &\quad + be_2e_2^{-1}c^{-1} \\ &= b_1e_1(e_1^{-1}c_1^{-1}-e_2^{-1}c^{-1})+(b_1e_1+be_2)e_2^{-1}c^{-1} \end{aligned}$$

On a donc mis $b_1c_1^{-1} + bc^{-1}$ sous forme d'une somme d'un élément de M^n et d'un élément de la forme $b'c'^{-1}$. Par récurrence, on voit donc que tout élément de $A_{(I)}$ peut se mettre, pour tout $n \geqslant 1$, sous la forme ac^{-1}, modulo M^n.

3° Pour $a \in A$ et $c \in C$, $ac^{-1} + M^n$ ne dépend que de $(a+H_n)(c+H_n)^{-1}$. En effet

$(b+H_n)(d+H_n)^{-1} = (a+H_n)(c+H_n)^{-1}$

$\Longrightarrow (\exists e_1, e_2 \in C)(ce_1 - de_2 \in H_n)$ et l'on a alors :

$(e_1+H_n)^{-1}(c+H_n)^{-1} = (e_2+H_n)^{-1}(d+H_n)^{-1}$

$(ae_1 - be_2 + H_n)(e_1+H_n)^{-1}(c+H_n)^{-1} = 0$

$ae_1 - be_2 \in H_n \subseteq M^n$

donc : $(ce_1)^{-1}(ce_1 - de_2)(de_2)^{-1} \in M^n$

$(ae_1 - be_2)(de_2)^{-1} \in M^n$

$(ae_1)((de_2)^{-1} - (ce_1)^{-1}) \in M^n$

$(ae_1 - be_2)(de_2)^{-1} - (ae_1)((de_2)^{-1} - (ce_1)^{-1}) \in M^n$

$(ae_1)(ce_1)^{-1} - (be_2)(de_2)^{-1} \in M^n$

$ac^{-1} - bd^{-1} \in M^n$

$ac^{-1} + M^n = bd^{-1} + M^n$

Alors on a une application $(A+H_n)(c+H_n)^{-1} \to ac^{-1} + M^n$ de $(A/H_n)_{\mathfrak{S}(C_n)}$ dans $A_{(I)}/M^n$. Cette application est un morphisme d'anneaux unitaires, qui est surjectif d'après 2° et injectif car $M^n \cap A = H_n$. C'est donc un isomorphisme.

4.9 COROLLAIRE. *Avec les hypothèses et les notations de 4.8 on a :*

1° $\bigcap_{n=1}^{\infty} M^n = 0$

2° A_I *est le complété de* $A_{(I)}$ *pour la topologie* M*-adique.*

3° $\forall n \geqslant 1$, $M^n = M'^n \cap A_{(I)}$.

4° Le morphisme canonique $A \to A_{(I)}$ *est un épimorphisme d'anneaux.*

1° On a vu, en montrant 4.8 1° que $M^n \subseteq M'^n$. Donc $\bigcap_1^{\infty} M^n \subseteq \bigcap_1^{\infty} M'^n = 0$.

2° La topologie M-adique est séparée donc le complété est la limite projective des $A_{(I)}/M^n$, $n \geqslant 1$. D'après 4.8. 3° et la définition de A_I, ce complété est l'anneau A_I.

3° On a déjà $M^n \subseteq M'^n \cap A_{(I)}$. Réciproquement tout $x \in M'^n \cap A_{(I)}$ s'écrit $ac^{-1} + m_n$ $a \in A$, $c \in C$, $m_n \in M^n$. $a = (x - m_n)c \in M'^n \cap A = H_n = M^n \cap A$. Donc $ac^{-1} \in M^n$ et $x \in M^n$.

4° Si u_1 et u_2 sont des morphismes de source $A_{(I)}$ coïncidant sur A, on a pour $x = \Sigma a_1 c_1^{-1} \ldots a_p c_p^{-1} \in A_{(I)}$

$$\begin{aligned} u_1(x) &= u_1(\Sigma a_1 c_1^{-1} \ldots a_p c_p^{-1}) \\ &= \Sigma u_1(a_1) u_1(c_1)^{-1} \ldots u_1(a_p) u_1(c_p)^{-1} \\ &= \Sigma u_2(a_1) u_2(c_1)^{-1} \ldots u_2(a_p) u_2(c_p)^{-1} \end{aligned}$$

$= u_2(\Sigma a_1 c_1^{-1} \ldots a_p c_p^{-1})$

$= u_2(x)$

donc $u_1 = u_2$ et $A \to A_{(I)}$ est un épimorphisme.

On verra dans le chapitre 6, un exemple dans lequel A n'est pas essentiel dans $A_{(I)}$, de sorte que l'épimorphisme $A \to A_{(I)}$ peut ne pas être plat. Néanmoins, comme tout élément de $\mathfrak{F}(C)$ contient un élément de C, la famille topologisante idempotente image directe de $\mathfrak{F}(C)$ dans $A_{(I)}$ est réduite à $A_{(I)}$.

4.10 *PROPOSITION. Soit* I *un idéal bilatère de* A *tel que,* $\forall c \in C$, $\forall n \geq 1$, $\forall a \in A$,

$$ca \in H_n \Longrightarrow a \in H_n.$$

Supposons $\bigcap_1^\infty H_n = 0$. *Alors si* A *possède un anneau de fractions à droite selon* C, I *est classiquement localisable à droite et* $A_{(I)}$ *est l'anneau de fractions à droite de* A *selon* C.

En effet par hypothèse, les éléments de C_n sont non diviseurs de zéro à gauche. Il est clair que A/H_n vérifie la condition de Ore à droite selon C_n. Il en résulte que les éléments de C_n sont aussi non diviseurs de 0 à droite, donc I est classiquement localisable à droite. A est donc sous-anneau de $A_{(I)}$.

Comme A vérifie la condition de Ore à droite selon C, on voit que tout élément de $A_{(I)}$ s'écrit sous la forme ac^{-1} donc $A_{(I)}$ est anneau de fractions à droite de A selon C.

4.11 PROPOSITION. *Si l'idéal bilatère classiquement localisable à droite* I *est complètement premier (i.e.* A/I *sans diviseur de* 0*), alors :*

1° A_I est un anneau local d'idéal maximum $M' = \mathfrak{R}(A_I)$ et M' est maximal en tant qu'idéal à droite et en tant qu'idéal à gauche.

2° L'idéal M engendré par I dans $A_{(I)}$ est maximal en tant qu'idéal à droite et en tant qu'idéal à gauche.

En effet, comme I est complètement premier, C est le complémentaire de I et A/I a un corps de fractions à droite $(A/I)_{\mathfrak{F}(C_1)}$.

Comme A_I/M' et $A_{(I)}/M$ sont isomorphes à $(A/I)_{\mathfrak{F}(C_1)}$, M et M' sont maximaux en tant qu'idéaux à droite et en tant qu'idéaux à gauche. Il en résulte que l'on a $M' = \mathfrak{R}(A_I)$ et A_I est local.

CHAPITRE 5 - APPLICATIONS AU CAS COMMUTATIF.

5.1 Localisation dans un anneau commutatif unitaire quelconque.

On a vu que, dans un anneau commutatif unitaire A, pour toute famille topologisante idempotente d'idéaux de A, tout idéal I $\mathfrak{F}$-clos est localisable à droite par rapport à $\mathfrak{F}$ (2.2.2. 3°) et les puissances symboliques à droite H_n de I par rapport à $\mathfrak{F}$ sont données par :

$$H_n = C\ell_{\mathfrak{F}}^{A}(I^n) \qquad (2.1.3)$$

5.1.1 PROPOSITION. *Si* I *est* $\mathfrak{F}$*-clos, l'anneau* $A_{I,\mathfrak{F}} = \varprojlim_{n\geq 1} \left((A/C\ell_{\mathfrak{F}}^{A}(I^n))_{\mathfrak{F}_n}\right)$ *est isomorphe à l'anneau* $\varprojlim_{n\geq 1} \left((A/I^n)_{\mathfrak{F}'_n}\right)$ *où* $\mathfrak{F}'_n$ *est la famille image directe de* $\mathfrak{F}$ *dans* A/I^n.

Ceci résulte du fait que, pour tout $n\geq 1$, $(A/C\ell_{\mathfrak{F}}^{A}(I^n))_{\mathfrak{F}_n}$ est isomorphe à $(A/I^n)_{\mathfrak{F}'_n}$.

On a vu que tout idéal I de A est classiquement localisable à droite (4.3). Notons encore C la partie multiplicative $\{c\in A \mid (\forall x\in A)(xc\in I \Rightarrow x\in I)\}$, et $\mathfrak{F}(C)$ la famille des idéaux de A contenant un élément de C.

5.1.2 *PROPOSITION. Soient* $A_C = A_{\mathfrak{F}(C)}$ *l'anneau de fractions généralisé de* A *selon* C ((13) *p. 44) et* $M_\circ$ *l'idéal de* A_C *engendré par l'image canonique de* I. *Alors* $A_{(I)} = A_C / \bigcap_1^\infty M_\circ{}^n$.

La correspondance

$$\left(a + C\ell^A_{\mathfrak{F}(C)}(0)\right)\left(c + C\ell^A_{\mathfrak{F}(C)}(0)\right)^{-1} \longmapsto$$

$$\left(a + \bigcap_1^\infty C\ell^A_{\mathfrak{F}(C)}(I^n)\right)\left(c + \bigcap_1^\infty C\ell^A_{\mathfrak{F}(C)}(I^n)\right)^{-1}$$

définit un morphisme surjectif de A_C dans $A_{(I)}$. Son noyau est l'ensemble des fractions de A_C dont le numérateur est dans

$$\bigcap_1^\infty \left(C\ell^A_{\mathfrak{F}(C)}(I^n)/C\ell^A_{\mathfrak{F}(C)}(0)\right)$$

Par récurrence sur n, on voit que $M_\circ{}^n$ est l'idéal engendré par $C\ell^A_{\mathfrak{F}(C)}(I^n)/C\ell^A_{\mathfrak{F}(C)}(0)$ car on a :

$$M_\circ = \left(C\ell^A_{\mathfrak{F}(C)}(I)/C\ell^A_{\mathfrak{F}(C)}(0)\right).A_C$$

$$\left(C\ell^A_{\mathfrak{F}(C)}(I^n)/C\ell^A_{\mathfrak{F}(C)}(0)\right).\left(I/C\ell^A_{\mathfrak{F}(C)}(0)\right).\ A_C =$$

$$\left\{\left(C\ell^A_{\mathfrak{F}(C)}(I^n).I + C\ell^A_{\mathfrak{F}(C)}(0)\right)/C\ell^A_{\mathfrak{F}(C)}(0)\right\}.A_C \subseteq$$

$$\left(C\ell^A_{\mathfrak{F}(C)}(I^{n+1})/C\ell^A_{\mathfrak{F}(C)}(0)\right).A_C$$

et $C\ell_{\mathfrak{F}(C)}^{A/C\ell_{\mathfrak{F}(C)}^{A}(0)}\left((I^{n+1}+C\ell_{\mathfrak{F}(C)}^{A}(0)/C\ell_{\mathfrak{F}(C)}^{A}(0)\right) =$

$C\ell_{\mathfrak{F}(C)}^{A}(I^{n+1})/C\ell_{\mathfrak{F}(C)}^{A}(0)$.

La proposition 5.1.2 montre que $A_{(I)}$ est le quotient de A_C par l'adhérence de 0 pour la topologie M_0-adique. La proposition 4.9. 2° montre que A_I est le séparé complété de A_C pour cette topologie.

Si I est primaire ou premier, on peut apporter des précisions supplémentaires sur la structure de $A_{(I)}$ et de A_I.

Dans la fin de ce paragraphe, A désigne un anneau unitaire commutatif, I un idéal de A, $C = \{c \in A \mid (\forall x \in A)(xc \in I \Longrightarrow x \in I)\}$, $\mathfrak{F}(C)$ la famille topologisante idempotente des idéaux de A contenant un élément de C, $I^{(n)}$ l'idéal $C\ell_{\mathfrak{F}(C)}^{A}(I^n)$, n-ième puissance symbolique à droite de I par rapport à $\mathfrak{F}(C)$.

5.1.3 PROPOSITION. *Si* I *est* P-*primaire on a les propriétés suivantes :*

1° C *est le complémentaire de* P.

2° $\forall n \geq 1$, $I^{(n)}$ *est* P-*primaire.*

3° $\forall n \geq 1$, $(A/I^{(n)})_{\mathfrak{F}(C_n)}$ *est anneau total de fractions de* $A/I^{(n)}$. *C'est un anneau primaire.*

4° $A_{(I)}$ et A_I sont des anneaux locaux. L'idéal maximum de $A_{(I)}$ est la trace sur $A_{(I)}$ de l'idéal maximum de A_I.

1° C ne rencontre pas I donc ne rencontre pas P. Réciproquement, il est clair que tout élément n'appartenant pas à P appartient à C.

2° La racine de $I^{(n)}$ est P et pour des idéaux X et Y de A, on a :
$XY \subseteq I^{(n)}$ et $Y \not\subseteq P \Longrightarrow Y \in \mathfrak{F}(C)$ et $X \subseteq C\ell^{A}_{\mathfrak{F}(C)}(I^{(n)}) = I^{(n)}$.

3° On vérifie aisément que C_n est l'ensemble des éléments non diviseurs de 0 de $A/I^{(n)}$. Le fait que $(A/I^{(n)})_{\mathfrak{F}(C_n)}$ est un anneau primaire est alors bien connu, il résulte du fait que $P/I^{(n)}$ est idéal premier minimal de $A/I^{(n)}$. L'idéal maximum M'_n de $(A/I^{(n)})_{\mathfrak{F}(C_n)}$ est alors un nilidéal.

4° Soit M'_o l'image réciproque de l'idéal maximum M'_1 de $(A/I)_{\mathfrak{F}(C_1)}$ par le morphisme canonique $A_I \to (A/I)_{\mathfrak{F}(C_1)}$; M'_o est l'ensemble des éléments de A_I dont la première composante est une fraction à numérateur dans P/I.

Si N est un idéal maximal de A_I, N contient le radical de Jacobson de A_I, donc il contient le noyau du morphisme

$$A_I \to (A/I)_{\mathfrak{F}(C_1)}$$

d'après 4.7. 2°. Donc l'image de N dans $(A/I)_{\mathfrak{F}(C_1)}$ est un idéal propre, différent de $(A/I)_{\mathfrak{F}(C_1)}$, donc contenu dans M'_1, de sorte que N est contenu dans M'_0 donc égal à M'_0 ; M'_0 est donc le seul idéal maximal de A_I et A_I est local.

$A_{(I)}$ est anneau de fractions de $A/\bigcap_1^\infty I^{(n)}$ selon la partie multiplicative C_0 complémentaire de l'idéal premier $P/\bigcap_1^\infty I^{(n)}$, c'est donc un anneau local et son idéal maximum M_0 est formé des fractions à numérateur dans $P/\bigcap_1^\infty I^{(n)}$. Comme M_0 est le radical de Jacobson de $A_{(I)}$, on voit immédiatement que $M_0 = M'_0 \cap A_{(I)}$.

5.2 Localisation dans un anneau commutatif unitaire noethérien.

Les notations sont les mêmes que dans le paragraphe précédent. On suppose de plus que l'anneau A est noethérien.

5.2.1 PROPOSITION. *Si* I *est semi-premier, on a les propriétés suivantes :*

1° La famille $\mathfrak{F}_{A/I}$ *définie par* I (3.2) *est égale à* $\mathfrak{F}(C)$.

2° Les anneaux de fractions $(A/I^{(n)})_{\mathfrak{F}(C_n)}$ *sont semi-primaires.*

3° *Le noyau* M' *du morphisme canonique* $A_I \to (A/I)_{\mathfrak{F}(C_1)}$ *est le radical de Jacobson de* A_I.

$\bigcap_1^\infty M'^n = 0$ *et* A_I/M' *est semi-simple artinien.*

4° *L'idéal* M *de* $A_{(I)}$ *engendré par l'image canonique de* I *est un idéal semi-premier.*

1° Résulte de ce que l'on a remarqué à la suite de 3.3.

2° $(A/I)_{\mathfrak{F}(C_1)}$, anneau de fractions d'un anneau semi-premier noethérien, est semi-simple artinien ([4], cor.7, p.84).

Le noyau M_n de l'épimorphisme canonique

$$(A/I^{(n)})_{\mathfrak{F}(C_n)} \to (A/I)_{\mathfrak{F}(C_1)}$$

est le radical de Jacobson de $(A/I^{(n)})_{\mathfrak{F}(C_n)}$,

c'est un idéal nilpotent tel que $(A/I^{(n)})_{\mathfrak{F}(C_n)}/M_n \simeq (A/I)_{\mathfrak{F}(C_1)}$ est artinien. Donc $(A/I^{(n)})_{\mathfrak{F}(C_n)}$ est semi-primaire.

3° $M' = A_I \cap (\prod_{n\geq 1} M_n) = A_I \cap \mathcal{R}(\prod_{n\geq 1} (A/I^{(n)})_{\mathfrak{F}(C_n)})$ donc $\mathcal{R}(A_I) \subseteq M'$. D'après 4.7. 2°, on a donc $M' = \mathcal{R}(A_I)$; $\bigcap_{n\geq 1} M'^n = 0$ d'après 4.7. 5° et

$A_I/M' \simeq (A/I)_{\mathcal{F}(C_1)}$ est semi-simple artinien.

4° Pour $x \in A_{(I)}$, on a $x.A_{(I)}.x \subseteq M \Longrightarrow x \in M$ car $M \cap A = I$ et I est semi-premier.

Si I est premier, le localisé à droite classique $A_{(I)}$ coïncide avec l'anneau local associé à A selon I par Goldie : c'est donc l'anneau de fractions de $A/\bigcap_1^\infty I^{(n)}$ par rapport au complémentaire de l'idéal premier $I/\bigcap_1^\infty I^{(n)}$.

5.2.2 *PROPOSITION. Soit* $I = \bigcap_1^n Q_i$ *une décomposition noethérienne d'un idéal* I *en idéaux* P_i-*primaires* Q_i.

1° $C = \bigcap_{i=1}^n \complement_A P_i$; C *est la plus grande des parties multiplicatives* C' *de* A *telles que* I *soit* $\mathcal{F}(C')$-*clos.*

2° Si $\mathfrak{R}(I)$ *est la racine de* I*, l'intersection des puissances symboliques à droite de* $\mathfrak{R}(I)$ *par rapport à* $\mathcal{F}(C)$ *est* $\bigcap_{n \geq 1} I^{(n)} = C\ell^A_{\mathcal{F}(C)}(0)$.

3° $A_{(I)}$ *est l'anneau de fractions généralisé* $A_{\mathcal{F}(C)}$ *de* A *selon* C*. Il ne dépend que des idéaux premiers de* I.

1° Dans A/I, le complémentaire de la réunion des idéaux premiers de 0 est l'ensemble C_1 des éléments non diviseurs de 0, donc le complémentaire de la réunion des P_i, $1 \leq i \leq n$, est contenu dans C.

Réciproquement, il résulte de (13) p.17 que toute partie multiplicative C' telle que I est $\mathfrak{F}(C')$-clos est contenue dans l'intersection des complémentaires des P_i, ce qui achève la démonstration.

2° I et $\mathfrak{R}(I)$ ont les mêmes idéaux premiers, ils définissent donc la même partie multiplicative C.

Comme I contient une puissance de $\mathfrak{R}(I)$, on a

$\bigcap_{m\geqslant 1} I^{(m)} = \bigcap_{m\geqslant 1} C\ell^{A}_{\mathfrak{F}(C)}(\mathfrak{R}(I)^m)$.

Soit $H = \bigcap_{m\geqslant 1} I^{(m)}$.

Soit $HI = Q'_1 \cap \ldots \cap Q'_r$ une décomposition noethérienne de HI en idéaux P'_i-primaires Q'_i.

$HI \subseteq Q'_i \Longrightarrow H \subseteq Q'_i$ ou $I \subseteq P'_i$.

$I \subseteq P'_i \Longrightarrow (\exists s \geqslant 1)(P'^{s}_i \subseteq Q'_i)$. Alors $I^s \subseteq Q'_i$ et

$H \subseteq I^{(s)} = C\ell^{A}_{\mathfrak{F}(C)}(I^s) \subseteq C\ell^{A}_{\mathfrak{F}(C)}(Q'_i)$.

$I \not\subseteq P'_i \Longrightarrow H \subseteq Q'_i \subseteq C\ell^{A}_{\mathfrak{F}(C)}(Q'_i)$.

Dans tous les cas, on a $H \subseteq C\ell^{A}_{\mathfrak{F}(C)}(Q'_i)$.

Donc

$$H \subseteq \bigcap_{i=1}^{r} C\ell^{A}_{\mathfrak{F}(C)}(Q'_i) = C\ell^{A}_{\mathfrak{F}(C)}\left(\bigcap_{i=1}^{r} Q'_i\right) = C\ell^{A}_{\mathfrak{F}(C)}(HI)$$

Comme A est noethéorien, H est engendré par des éléments $h_1, \ldots, h_p$. Pour tout $i = 1, \ldots, p$, $h_i \in C\ell^{A}_{\mathfrak{F}(C)}(HI)$ donc $\exists c_i \in C$ tel que

$$h_i c_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} h_j$$

avec des $a_{ij} \in I$. Soit $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq j \\ 1 & \text{pour } i = j \end{cases}$

On a $\sum_{j=1}^{p} (c_i \delta_{ij} - a_{ij}) h_j = 0 \qquad 1 \leqslant i \leqslant p.$

Si D est le déterminant des coefficients $(c_i \delta_{ij} - a_{ij})$, on a donc $Dh_j = 0$ pour tout $j = 1, \ldots, p$. Or D, somme d'un élément de C et d'un élément de I, est dans C et les h_j, annulés par un élément de C, appartiennent à $C\ell^{A}_{\mathfrak{I}(C)}(0)$ et $H \subseteq C\ell^{A}_{\mathfrak{I}(C)}(0)$.

L'inclusion en sens inverse étant triviale, on a l'égalité.

3° $A_{(I)}$, anneau de fractions de $A/\bigcap_{1}^{\infty} I^{(m)}$ selon l'image de C est anneau de fractions généralisé de A selon C d'après 2°.

Il en résulte, notamment, que si I est P-primaire, $A_{(I)}$ est l'anneau local associé à A selon P.

CHAPITRE 6 - APPLICATIONS AU CAS NON COMMUTATIF.

6.1 Localisation à droite classique dans les ordres d'Asano.

6.1.1 Rappelons la définition suivante ([14], § 1).

Un sous-anneau unitaire A d'un anneau unitaire Q est appelé ordre à droite d'Asano dans Q si :

1° Q est anneau de fractions à droite de A selon la partie multiplicative des éléments de A inversibles dans Q.

2° Les A-idéaux bilatères de Q forment un groupe multiplicatif.

6.1.2 PROPOSITION. *Soit* A *un ordre à droite d'Asano noethérien à droite et à gauche dans un anneau unitaire* Q.

1° Tout idéal premier P *de* A *est classiquement localisable à droite.*

2° L'anneau $A_{(P)}$ *(4.6) coïncide avec l'anneau local associé à* A *selon* P *par Goldie ([6]p.99).*

Si C est la partie multiplicative $\{c \in A \mid (\forall x \in A)(xc \in P \Rightarrow x \in P)\}$, on note $\mathfrak{F}(C)$ (resp. $\mathfrak{G}(C)$) la famille topologisante idempotente d'idéaux à droite J (resp. à gauche) de A tels que, $\forall a \in A$, $\exists c \in C$,

$ac\in J$ (resp. $ca\in J$).

Les puissances symboliques de P de Goldie sont définies par

$$P^{(n)} = Cl^{A}_{\mathcal{G}(C)}(Cl^{A}_{\mathcal{F}(C)}(P^{(n-1)}P))$$

Par récurrence, on a donc $H_n \subseteq P^{(n)}$, en appelant H_n les puissances symboliques à droite de P par rapport à $\mathcal{F}(C)$. De ([12], prop.2.5) et de 2.1.2.2°, on déduit

$$P^n \subseteq H_n \subseteq P^{(n)} = P^n \quad \text{donc } H_n = P^n = P^{(n)}$$

De ([6], théorème 4.3, p.95) et de 4.1, il résulte alors que P est classiquement localisable à droite et la deuxième assertion est claire compte tenu de l'égalité $H_n = P^{(n)} = P^n$ (cf [6] p.99).

6.1.3 *PROPOSITION. Avec les hypothèses de 6.1.2, tout idéal* P*-primaire* I *est classiquement localisable à droite et on a* $A_{(I)} = A_{(P)}$.

En effet les seuls idéaux P-primaires sont les puissances de P ([12], prop.2.5, démonstration). Donc il existe $n\geq 1$ tel que $I = P^n$.

Soit $C(I) = \{c\in A \mid (\forall x\in A)(xc\in I \Rightarrow x\in I)\}$

$C(P) = \{c\in A \mid (\forall x\in A)(xc\in P \Rightarrow x\in P)\}$

Il résulte de ([6], théorème 4.3. 3°, démonstration p.95) que $C(I) = C(P)$. De sorte que les puissances symboliques à droite de I par rapport à $\mathfrak{F}(C(I))$ sont des puissances de P d'après la démonstration de 6.1.2 et comme A/P^m possède un anneau de fractions à droite selon l'image de C(P), pour tout $m \geq 1$, I est classiquement localisable à droite.

Comme $\bigcap_{m \geq 1} P^m = 0$ ([12], prop.4,b), la limite projective des anneaux de fractions des A/I^m est aussi la limite projective des anneaux de fractions des A/P^m. Alors de $C(I) = C(P)$, on déduit $A_{(I)} = A_{(P)}$.

6.1.4 *LEMME. Soit* I *un idéal bilatère d'un anneau unitaire* A. *Il y a équivalence entre :*

1° I *est un* h-*idéal à droite* (*[10], déf.2.4.2, p.43*).

2° I *est complètement premier et* $\bigcap$*-irréductible à droite.*

3° A/I *est un anneau homogène à droite* (*[10], déf.2.4.1, p.40*)

4° A/I *possède un anneau total de fractions à droite qui est un corps.*

L'équivalence de 3° et 4° est connue car homogène à droite = coirréductible à droite + non singulier à droite.

<u>1° $\Longrightarrow$ 2°</u> : Si I est un h-idéal à droite et si $xy \in I$ et

$y \notin I$ on a $yA + I \in \mathfrak{F}_{A/I}$ ([10], lemme 24.1 p.40). Alors $x(yA+I) \subseteq I \Longrightarrow x \in C\ell^{A}_{\mathfrak{F}_{A/I}}(I) = I$. De plus A/I est un A-module à droite homogène donc coirréductible et I est $\cap$-irréductible ([10], remarque 2, p.42).

2°$\Longrightarrow$1° : Si I est complètement premier et $\cap$-irréductible à droite, l'anneau A/I est sans diviseur de 0 et c'est un A-module à droite coirréductible. Comme tout A-sous-module non nul de A/I est rationnel dans A/I, A/I est un A-module à droite homogène et I est un h-idéal à droite.

L'équivalence de 1° et 3° est claire.

6.1.5 LEMME. *Soit* A *un ordre à droite d'Asano dans un anneau artinien simple* Q *et soit* P *un idéal premier propre non nul de* A. *Pour toute famille topologisante et idempotente* $\mathfrak{F}$ *d'idéaux à droite de* A, *telle que* P *soit* $\mathfrak{F}$*-clos, les puissances symboliques à droite* H_n *de* P *par rapport à* $\mathfrak{F}$ *coïncide avec les puissances* P^n .

On a toujours $H_1 = P$. Supposons $H_n = P^n$. Alors $H_{n+1} = C\ell^{A}_{\mathfrak{F}(C)}(P^{n+1})$. On a $P^{n+1} \subseteq H_{n+1} \subseteq H_n = P^n$.

Soit $H_{n+1} = P_1^{n_1} \dots P_r^{n_r}$ la décomposition de H_{n+1} en produit d'idéaux premiers ([14], cor.2.2). Comme tout idéal premier est maximal, il résulte de $P^{n+1} \subseteq H_{n+1}$ que H_{n+1} est une puissance de P.

Comme tout idéal non nul est inversible, on a donc

$$H_{n+1} = P^{n+1} \quad \text{ou} \quad H_{n+1} = P^n$$

Si l'on avait $H_{n+1} = P^n$ on aurait $C\ell^{A}_{\mathfrak{F}}(P^{n+1}) = P^n$. Or $C\ell^{A}_{\mathfrak{F}}(P^{n+1})$ est idéal à gauche de type fini ([14] cor.2.2) donc engendré par des éléments $a_1,..,a_s$ de P^n. On a $J = \bigcap_1^s (P^{n+1} \cdot a_i) \in \mathfrak{F}$, donc $P^n J \subseteq P^{n+1}$, donc $J \subseteq P$ et $P \in \mathfrak{F}$. Comme P est $\mathfrak{F}$-clos, on a $P \in \mathfrak{F} \Longrightarrow P = A$ ce qui contredit l'hypothèse que P est propre. Donc $H_{n+1} = P^{n+1}$.

6.1.6 *PROPOSITION. Soit* A *un ordre (bilatère) d'Asano dans un anneau artinien simple* Q *et soit* P *un* h-*idéal bilatère de* A.

1° $C = \{c \in A \mid (\forall x \in A)(xc \in P \Rightarrow x \in P)\}$ *est le complémentaire de* P.

2° $\forall n \geq 1$, *la puissance symbolique à droite* H_n *de* P *par rapport à* $\mathfrak{F}(C)$ *coïncide avec* P^n.

3° *L'image canonique* C_n *de* C *dans* A/P_n *est l'ensemble des éléments non diviseurs de* 0 *de* A/P^n.

A/P a un corps de fractions à droite et à gauche d'après 6.1.4. 4°, donc il vérifie la condition de Ore à droite et à gauche. Les puissances symboliques de P par rapport à $\mathcal{F}(C)$ et par rapport à $\mathcal{G}(C)$ (à gauche) coïncident avec les puissances de P. Il en résulte que les éléments de C_n sont non diviseurs de 0 à droite et à gauche.

Réciproquement si $c \in A$ vérifie $(\forall x \in A)(xc \in P^n \Longrightarrow x \in P^n)$ alors, $(\forall y \in A)(yc \in P \Longrightarrow P^{n-1}yc \subseteq P^n)$ donc $P^{n-1}y \subseteq P^n$ et comme P est inversible, $y \in P$ et $c \in C$ donc les éléments non diviseurs de 0 de A/P^n sont dans C_n.

Si l'on remarque qu'on a les égalités :

$$\mathcal{F}_{A/P^n} = \mathcal{F}_{A/P} = \mathcal{F}(C) = \mathcal{F}(C(P^n)),$$

on voit que pour tout $n \geq 1$, le localisé $(A/P^n)_{\mathcal{F}(C_n)}$ est extension rationnelle maximale de A/P^n, ou anneau maximal de fractions au sens de Utumi de A/P^n.

6.1.7 PROPOSITION. *Soit* A *un ordre d'Asano dans un anneau artinien simple* Q, *vérifiant la condition de chaîne ascendante pour les* A *-idéaux à droite entiers contenant un* A *-idéal bilatère entier fixé. Alors tout* h *-idéal bilatère* I *de* A *est classiquement localisable à droite et localisable à droite.*

Après 6.1.6 il reste seulement à vérifier que A/I^n vérifie la condition de Ore à droite. C'est vrai pour

$n = 1$ puisque A/I a un corps de fractions. Supposons-le vrai pour n. Soient $a\in A$, $c\in C$. Il existe $a'\in A$, $c'\in C$, $h\in I^n$ tels que $ac' = ca' + h$.

Notons avec des indices $n+1$ les images canoniques dans A/I^{n+1}. On pose $X_{n+1} = (C_{n+1}A_{n+1} \therefore h_{n+1})^{A_{n+1}}$.

$h_{n+1}\, I_{n+1} = 0 \Longrightarrow I_{n+1} \subseteq X_{n+1}$.

1° Si $I_{n+1} \neq X_{n+1}$, $\exists c''_{n+1} \in C_{n+1} \cap X_{n+1}$ et l'on a

$ac'c'' - ca'c'' - hc'' = 0$ avec $hc'' \in cA + I^{n+1}$, ce que l'on voulait obtenir.

2° Si $I_{n+1} = X_{n+1}$, on a $h \notin I^{n+1}$ sinon $h_{n+1} = 0$ et $X_{n+1} = A_{n+1}$, ce qui contredit le fait que I est un idéal propre.

$X_{n+1} = I_{n+1} \Longrightarrow h_{n+1}A_{n+1} \cap c_{n+1}A_{n+1} = 0$.

Or $A_{n+1} = A/I^{n+1}$ est noethérien à droite par hypothèse, donc tout idéal à droite de A/I^{n+1} contenant un élément non diviseur de 0 est essentiel, de sorte que $c_{n+1}A_{n+1}$ est essentiel, contredisant $h_{n+1}A_{n+1} \neq 0$.

6.2 <u>Localisation à droite classique dans un anneau de polynômes.</u>

Dans ce paragraphe, K désigne un corps commutatif de caractéristique 0, $A = K(X,Y)$ l'anneau des polynômes à deux indéterminées non commutatives sur K. On note I l'idéal bilatère de A formé des polynômes dont le terme constant est nul. On va montrer que I est classiquement localisable à droite.

6.2.1 *LEMME.*

1° $XA \cap YA = 0$

2° A *est sans diviseur de* 0

3° A/I *est un corps*

4° I *est complètement premier,*
$C = \{c \in A \mid (\forall x \in A)(xc \in I \Longrightarrow x \in I)\}$
est le complémentaire de I *et les puissances symboliques à droite de* I *par rapport à* $\mathfrak{S}(C)$ *coïncident avec les puissances de* I.

1° résulte du fait que X et Y ne commutent pas. A/I isomorphe à K, est un corps, donc I est complètement premier.

On voit, par récurrence, que le produit de deux polynômes homogènes non nuls est un polynôme homogène non nul, ce qui entraîne que A est sans diviseur de zéro.

Comme I est complètement premier, C est le complémentaire de I. I^n est l'ensemble des polynômes dont tous les monômes de degré $\leqslant n-1$ sont nuls. Donc I^n est $\mathfrak{F}(C)$-clos. Par récurrence on voit donc que les puissances symboliques à droite de I coïncident avec les puissances de I.

6.2.2 *PROPOSITION. Soit* C_n *l'image de* C *dans* A/I^n.

1° C_n est l'ensemble des éléments non diviseurs de 0 de A/I^n.

2° Tout élément de C_n est inversible dans A/I^n.

3° I est classiquement localisable à droite.

4° A_I est le complété de A pour la topologie I-adique : c'est l'anneau des séries formelles à deux indéterminées non commutatives sur K.

1° Comme A/I est un corps commutatif, il vérifie la condition de Ore à droite et à gauche et il en résulte que les éléments de C_n sont non diviseurs de O. Réciproquement, si $c \in A$ vérifie

$$(\forall x \in A)(x\,c \in I^n \Longrightarrow x \in I^n)$$

le terme constant de c n'est pas nul et $c \in C$.

2° C'est facile à vérifier.

3° D'après 2° , A/I^n est son propre anneau de fractions à droite. Comme $\mathfrak{F}_{A/I} = \mathfrak{F}(C)$ puisque A/I est un corps, I est aussi localisable à droite (4.2 et 3.4).

6.2.3 <u>Remarques</u>.

1° $(1+X)A \cap YA = 0$. Donc $(1+X)A$ n'est pas essentiel, A n'est donc pas un anneau de Goldie puisqu'il est, d'autre part, sans diviseur de 0. Donc l'anneau A *n'est pas noethérien*.

2° A ne vérifie pas la condition de Ore à droite selon C sinon on aurait $(1+X)A \in \mathfrak{F}(C)$ et $((1+X)A:Y)^A \in \mathfrak{F}(C)$ ce qui contredit $(1+X)A \cap YA = 0$.

3° D'après 4.11, A_I est un anneau local dont l'idéal maximal unique est le radical de Jacobson.

4° $[(1+X)^{-1}YA] \cap A = 0$, donc A n'est pas essentiel dans A_I, ni dans $A_{(I)}$, de sorte que l'épimorphisme $A \to A_{(I)}$ n'est pas plat.
D'autre part $A_{(I)}$ ne peut pas être un localisé de Gabriel de A pour une famille topologisante idempotente $\mathfrak{F}$ d'idéaux à droite de A.

Cet exemple montre donc que notre théorie peut conduire à des résultats que ne donnent ni la localisation de Goldie, ni celle de Gabriel.

-:-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

(1) N. BOURBAKI : *Algèbre commutative*. Chap. 2, Hermann. PARIS.

(2) N. BOURBAKI : *Algèbre commutative*. Chap. 3, Hermann. PARIS.

(3) N. BOURBAKI : *Algèbre*. Chap. 2, Hermann. PARIS

(4) C. FAITH : *Lectures on injectives modules and quotient rings.* Springer 1967.

(5) P. GABRIEL : *Des catégories abéliennes.* Bull. Soc. Math. France 90(1962) 323-448.

(6) A.W. GOLDIE : *Localizations in non commutative noetherian rings.* J. Algebra 5 (1967) 89-105.

(7) A.W. GOLDIE : *The structure of prime rings under ascending chain conditions.* Proc. London Math. Soc. (3) 8 (1958) 589-608.

(8) M. HACQUE : *Localisations exactes et localisations plates.* Publ. Dép. Math. LYON (1969)-T.6-2, 97-117.

(9) M. HACQUE : *Eléments de la théorie de la localisation.* Cours de D.E.A. 1969-1970 LYON.

BIBLIOGRAPHIE

(suite et fin)

[10] A. HUDRY : *Applications de la théorie de la localisation aux anneaux et aux modules.* Thèse de 3e cycle n° 498 - Fac. Sc. LYON 1971

[11] G. MAURY : *Σ-compléments.* Publ. Dep. Math. LYON (1968) -5-1, p.37-62.

[12] G.O. MICHLER : *Asano orders.* Proc. London Math. Soc. (3) 19 (1969) 421-443.

[13] D.G. NORTHCOTT : *Ideal theory.* Cambridge Univ. Press. 1965.

[14] J.C. ROBSON : *Non commutative Dedekind rings.* J. Algebra 9 (1968) 249-265.

[15] J.C. ROBSON : *Orders in artinian rings.* Proc. London Math. Soc. (3) 17 (1967) 600-616.

[16] L. SILVER : *Non commutative localizations and applications.* J. Algebra. 7 (1967) 47-76.

Manuscrit remis en avril 1971

H. IMMEDIATO
Assistant
Département de Mathématiques
Université Claude-Bernard
43, boulevard du 11-Novembre-1918
VILLEURBANNE