ALAIN BOUVIER

ALAIN FAISANT

Propriétés des demi-groupes de fractions

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1970, tome 7, fascicule 2
, p. 115-136

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1970__7_2_A3_0>

PROPRIETES DES DEMI-GROUPES DE FRACTIONS

Alain BOUVIER - Alain FAISANT

MM. ZARISKY et SAMUEL, [10] ont étudié l'ensemble des éléments d'un anneau A rendus inversibles dans l'anneau de fractions $A[S^{-1}]$, lorsque A est commutatif, unitaire, et intègre, et S une partie multiplicative de A. En partant de cette idée on étudie pour un demi-groupe D l'application $S \longmapsto J(S)$ où J(S) désigne précisément l'ensemble des éléments de D rendus inversibles dans $D[S^{-1}]$ demi-groupe des fractions de D par rapport à S, [7].On montre comment cette application permet d'étendre aux demi-groupes de fractions d'un demi-groupe quelconque certains résultats connus pour les anneaux dans le cas commutatif intègre : conditions de fermeture de diagrammes, propriétés de transfert pour les homomorphismes, les idéaux, la factorisation ; commutation avec l'équivalence de Rees ; condition suffisante pour que $D[ST^{-1}]$ soi isomorphe à $D[TS^{-1}]$

Les notations et la terminologie utilisées sont celles de [7] dont ce travail constitue une suite.

§1. THEOREME FONDAMENTAL

Si S est un complexe d'un demi-groupe D, on note φ_S l'homomorphsime canonique de D dans $D[S^{-1}]$.

<u>(1-1) Théorème</u> : *Pour tout complexe S d'un demi-groupe D l'homomorphisme $\varphi_S : D \longrightarrow D[S^{-1}]$ **est un épimorphisme** de la catégorie des demi-groupes.*

<u>*Démonstration*</u> : Supposons que $u\circ\varphi_S = v\circ\varphi_S$ et soit e l'élément neutre de $D[S^{-1}]$.

$*$ $u(e) = v(e)$ En effet, S n'étant pas vide, soit $s\in S$; on a :
d'une part : $u(e)v(e)=u(e)v(\varphi_S(s))v(\varphi_S(s))^{-1}=u(e)u(\varphi_S(s))v(\varphi_S(s))^{-1}$

$$=u(\varphi_S(s)).v(\varphi_S(s))^{-1}=v(\varphi_S(s))v(\varphi_S(s))^{-1}=v(e)$$

et d'autre part : $u(e)v(e)=u(\varphi_S(s))^{-1}u(\varphi_S(s))v(e)$

$$= u(\varphi_S(s))^{-1}v(\varphi_S(s))v(e)$$

$$= u(\varphi_S(s))^{-1}v(\varphi_S(s))=u(\varphi_S(s))^{-1}u(\varphi_S(s))$$

$$= u(e)$$

$*$ $\forall$ s, $s\in S$: $u(\varphi_S(s)^{-1}) = v(\varphi_S(s)^{-1})$ En effet puisque $u(e)=v(e)$:

$u(\varphi_S(s)^{-1})u(\varphi_S(s))=v(\varphi_S(s)^{-1})v(\varphi_S(s))$ donc $u(\varphi_S(s)^{-1})u(\varphi_S(s))$

$$= v(\varphi_S(s))^{-1})u(\varphi_S(s))$$

soit encore : $u(\varphi_S(s)^{-1}) = v(\varphi_S(s)^{-1})u(\varphi_S(s)^{-1})u(\varphi_S(s)^{-1}$

$$= v(\varphi_S(s)^{-1})u(e) = v(\varphi_S(s)^{-1}v(e)$$

$$= v(\varphi_S(s))^{-1}$$

* $\forall x, x \in D[S^{-1}]$: $u(x) = v(x)$ En effet x s'écrit

$x = \varphi_S(x_1)^{\alpha_1} \dots \varphi_S(x_n)^{\alpha_n}$ avec $\alpha_i = \pm 1$ et $\alpha_i = 1$

seulement si $x_i \in S$. Donc :

$u(x) = u(\varphi_S(x_1)^{\alpha_1}) \dots u(\varphi_S(x_n)^{\alpha_n}) = v(\varphi_S(x_1)^{1}) \dots v(\varphi_S(x_n)^{\alpha_n}$

$= v(x)$

Remarque : Il est immédiat que φ_S est simplifiable dans la sous-catégorie des demi-groupes avec élément neutre, le résultat ci-dessus est strictement plus fort.

§2. L'APPLICATION J

(2.1) Soit D un demi-groupe : à tout complexe S de D on associe le complexe $J(S) = \{x, x \in D, \varphi_S(x) \in \mathcal{U}(D[S^{-1}])\}$ et l'on désigne par J l'application ainsi définie.

Lorsque $S = \emptyset$ le problème universel (D, S), [6] , admet encore une solution : le couple (D^1, i) où $i : D \longrightarrow D^1$ est l'injection canonique. Ceci permet de prolonger J à l'ensemble $\mathcal{P}(D)$. (il est à remarquer que i n'est pas nécessairement un épimorphisme)

. Il est clair que $J(D) = D$, $J(\emptyset) = \mathcal{U}(D)$ et que $J(S) = \emptyset$ équivaut à $S = \mathcal{U}(D) = \emptyset$

. $\forall S$, $S \in \mathcal{P}(D)$: $S \subseteq J(S)$ et $J(S)$ est une partie stable de D.

<u>(2.2) *Proposition*</u> : *Pour toute partie* S *de* D $J(S)$ *est la plus grande des parties* T *de* D *telles que* $D[T^{-1}] \simeq D[S^{-1}]$ *par un isomorphisme* σ *tel que* $\sigma \circ \varphi_T = \varphi_S$

<u>*Démonstration*</u> : . On a $D[J(S)^{-1}] \simeq D[S^{-1}]$; en effet φ_S rend inversibles les éléments de $J(S)$ et il existe donc un unique homomorphisme σ tel que $\sigma \circ \varphi_{J(S)} = \varphi_S$; d'autre part $S \subseteq J(S)$ donc pour la même raison il existe τ unique homomorphisme tel que $\tau \circ \varphi_S = \varphi_{J(S)}$. On en déduit $\sigma \circ \tau \circ \varphi_S = \varphi_S$ et $\tau \circ \sigma \circ \varphi_{J(S)} = \varphi_{J(S)}$ donc, (d'après (1.1)) : $\sigma \circ \tau = 1$ et $\tau \circ \sigma = 1$.

. si $\sigma : D[T^{-1}] \longrightarrow D[S^{-1}]$ est un isomorphisme tel que $\sigma \circ \varphi_T = \varphi_S$

On a $\forall t \in T$ $\varphi_S(t) = \sigma \circ \varphi_T(t) = \sigma(\varphi_T(t)) \in \sigma(\mathcal{U}(D[T^{-1}])) \subseteq \mathcal{U}(D[S^{-1}])$, donc $t \in J(S)$. Ainsi $T \subseteq J(S)$

<u>(2-3) *Corollaire*</u> : *L'application* J *est une fermeture sur* $\mathcal{P}(D)$.

. J est extensive car $S \subseteq J(S)$.

. J est croissante : si $S \subseteq T$ φ_T rend inversibles les éléments de S donc il existe un homomorphisme unique σ tel que $\sigma \circ \varphi_S = \varphi_T$.

Comme σ conserve l'élément neutre, [6] , si $x \in J(S)$ $\varphi_S(x) \in \mathcal{U}(D[S^{-1}])$ d'où $\varphi_T(x) = \sigma_\circ \varphi_S(x) \in \mathcal{U}(D[T^{-1}])$ soit : $x \in J(T)$.

J est idempotente: d'après (2.2) $D[S^{-1}] \simeq D[J(S)^{-1}] \simeq D[J^2(S)^{-1}]$; il résulte alors de (2.2) que $J^2(S) \subseteq J(S)$ donc $J^2(S) = J(S)$.

(2.4.) *Théorème* : *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1) $J(S) = J(T)$

2) $D[S^{-1}] \simeq D[T^{-1}]$ par un isomorphisme σ tel que $\sigma_\circ \varphi_T = \varphi_S$

3) $\varphi_S(T) \subseteq \mathcal{U}(D[S^{-1}])$ et $\varphi_T(S) \subseteq \mathcal{U}(D[T^{-1}])$

Démonstration

1)$\Longrightarrow$2). car d'après (2.2) : $D[S^{-1}] \simeq D[J(S)^{-1}] = D[J(T)^{-1}] \simeq D[T^{-1}]$

2)$\Longrightarrow$3) car $(D[S^{-1}], \varphi_S)$ et $(D[T^{-1}], \varphi_T)$ sont alors solutions du même problème universel

3)$\Longrightarrow$1) Si $\varphi_S(T) \subseteq \mathcal{U}(D[S^{-1}])$ on a $T \subseteq J(S)$ donc $J(T) \subseteq J(S)$ d'après (2.3). De même $J(S) \subseteq J(T)$.

(2.5) Pour tout complexe S de D : $J(S.\mathcal{U}(D^1)) = J(S).\mathcal{U}(D^1) = J(S)$

. $J(S) \subseteq J(S)\,\mathcal{U}(D^1)$ d'une part ; d'autre part si $x = y.u \in J(S).\mathcal{U}(D^1)$ alors $\varphi_S(x) \in \mathcal{U}(D[S^{-1}])$ donc $x \in J(S)$.

. On a $J(S) \subseteq J(S.\mathcal{U}(D^1))$ car $S \subseteq S.\mathcal{U}(D^1)$ et d'après (2.3). Réciproquement $J(S.\mathcal{U}(D^1)) \subseteq J(S)$

car $S.\mathcal{U}(D^1) \subseteq J(S)$ et d'après (2.3).

<u>Définitions</u> : On dit qu'une partie S *est un <u>fermé</u> si* S = J(S).
*Un <u>**ouvert**</u> est le complémentaire d'un fermé.*

(2.6) $\mathfrak{U}(D)$ est le plus petit fermé

En effet $\mathfrak{U}(D)$ est fermé : si $\mathfrak{U}(D) = \emptyset$ on a $J(\emptyset) = \mathfrak{U}(D) = \emptyset$
si $\mathfrak{U}(D) \neq \emptyset$ on a $D[\mathfrak{U}(D)^{-1}] \simeq D$, cf [6]
donc $J(\mathfrak{U}(D)) = \mathfrak{U}(D)$

$\mathfrak{U}(D)$ est le plus petit fermé car pour toute partie $S : \mathfrak{U}(D) \subseteq J(S)$.

On ne connait pas encore la caractérisation des **fermés** dans le cas général. Remarquons toutefois que si $<S>$ est le sous-demi-groupe engendré par S : $\{x,\ x \in D,\ xDx \cap <S> \neq \emptyset\} \subseteq J(S)$ car si $xyx \in xDx$ alors $\varphi_S(xyx) \in \mathfrak{U}(D[S^{-1}])$ donc $\varphi_S(x) \in \mathfrak{U}(D[S^{-1}])$ et $x \in J(S)$.

<u>(2.7) Théorème</u> : Soit S *un complexe d'un demi-groupe commutatif* **D:**

1) $J(S) = \{x,\ x\ \ D,\ xD\ \ <S>\ \ \neq \emptyset\}$
2) *Les fermés de D sont les parties stables consistantes et les ouverts sont les idéaux premiers.*

<u>Démonstration</u> : 1) Si $xy \in <S>$ alors $\varphi_S(xy)$ est inversible donc $\varphi_S(x)$ aussi car D est commutatif et l'on a $x \in J(S)$. Si $x \in J(S)$ il existe $(a, s) \in D \times <S>$ tel que : $\varphi_S(x)\,\varphi_S(a)\,\varphi_S(s)^{-1} = e_{D[S^{-1}]}$
donc il existe $t \in <S>$ tel que $xat = st \in <S>$

) $J(\emptyset) = \mathcal{U}(D)$ est une partie consistante et stable ; si $S \neq \emptyset$: $xy \in J(S)$ entraîne $\varphi_S(x).\varphi_S(y) \in \mathcal{U}(D[S^{-1}])$ donc $x, y \in J(S)$.
Si S est stable et consistant soit $x \in J(S)$; il existe d'après 1) $y \in D$ tel que $xy \in \langle S\rangle = S$ d'où $x \in S$ d'après la consistance de S.

Remarque : . La réunion de deux fermés n'est pas nécessairement un fermé car l'intersection de deux idéaux premiers n'est pas nécessairement premier.

(2.8) Corollaire : *Soient* S *et* T *deux complexes d'un demi-groupe commutatif* D. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

a) $J(S) = J(T)$

b) Pour tout ouvert A : $A \cap \langle S\rangle \neq \emptyset \Longleftrightarrow A \cap \langle T\rangle \neq \emptyset$

a)$\Longrightarrow$b) Si $x \in A \cap \langle S\rangle$ comme $\langle S\rangle \subseteq J(S)$ on a $x \in J(S)$ donc $x \in J(T)$ soit, d'après (2.7) il existe $y \in D$ tel que $xy \in \langle T\rangle$ et comme A est un idéal : $xy \in A \cap \langle T\rangle \neq \emptyset$

b)$\Longrightarrow$a) $\complement J(S)$ est un ouvert et $\complement J(S) \cap \langle S\rangle = \emptyset$ d'où $\complement J(S) \cap \langle T\rangle = \emptyset$ c'est à dire que $T \subsetneq J(S)$ donc $J(T) \subseteq J(S)$. De même $J(S) \subsetneq J(T)$.

§3. PROPRIETES DE TRANSFERT POUR LES HOMOMORPHISMES.

Soient D et D' deux demi-groupes, S une partie de D, T une partie de D' et $f : D \longrightarrow D'$ un homomorphisme.

(3.1) Les assertions suivantes sont équivalentes

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_S"'] & D' \arrow[d, "\varphi_T"] \\ D[S^{-1}] \arrow[r, dashed] & D'[T^{-1}] \end{tikzcd}$$

1) il existe un unique homomorphisme $\hat{f}$ conservant l'élément neutre tel que $\hat{f}\circ \varphi_S = \varphi_T\circ f$

2) $f(S) \subseteq J(T)$

Dans ce cas on a $f(J(S)) \subseteq J(T)$

1) $\Longrightarrow$ 2) Soit $x = f(s) \in f(S)$: $\varphi_T(x) = \varphi_T\circ f(s) = \hat{f}\circ\varphi_S(s) \in \mathcal{U}(D'[T^{-1}])$ car $\hat{f}$ conserve l'élément neutre, donc $x \in J(T)$.

2) $\Longrightarrow$ 1) $\varphi_T\circ f$ rend inversibles les éléments de S donc il existe $\hat{f}$ conservant le neutre tel que $\hat{f}\circ \varphi_S = \varphi_T\circ f$. L'unicité de $\hat{f}$ s'en déduit aussitôt. Il est clair que $f(J(S)) \subseteq J(T)$

<u>(3-2) Théorème</u> : *a) si f est un épimorphisme, il en est de même pour* $\hat{f}$

b) Pour toute partie S *de* D $f(J(S)) \subseteq J(f(S))$

c) Si $J(f(S)) = J(T)$ *et si f est rétractable,* $\hat{f}$ *l'est aussi*

d) Si de plus $J(f(S)) = f(J(S))$ *et si f est surjectif [resp. isomorphisme] il en est de même pour f*

<u>*Démonstration*</u> :

a) Immédiat puisque φ_S et φ_T sont des épimorphismes (1.1).

b) On a $f(S) \subseteq J(f(S))$ donc d'après (3.1) $f(J(S)) \subseteq J(f(S))$

c) On a toujours (dès que $\hat{f}$ existe) : $f(J(S)) \subseteq J(f(S)) \subseteq J(T)$.
Si de plus $J(f(S)) = J(T)$ et s'il existe r tel que $r \circ f = 1_D$
on a : $r(T) \subseteq r(J(T)) = r(J(f(S)))$ or d'après b)
$r(J(f(S)) \subseteq J(r \circ f(S)) = J(S)$; donc $r(T) \subseteq J(S)$ et d'après (3.1)
il existe $\hat{r}$ unique tel que $\hat{r} \circ \varphi_T = \varphi_S \circ r$ d'où $\hat{r} \circ \hat{f} = 1_{D[S^{-1}]}$
d'après (1.1)

d) Si f est surjectif il suffit de montrer que les éléments de la forme $\varphi_T(y)$ et $\varphi_T(t)^{-1}$ sont atteints par $\hat{f}$:

. $\varphi_T(y) = \varphi_T(f(x)) = \hat{f}(\varphi_S(x))$ car f est surjectif

. si $t \in T \subseteq J(T) = f(J)(S))$ donc $t = f(s)$, $s \in J(S)$. D'où :
$$\varphi_T(t)^{-1} = [\varphi_T \circ f(s)]^{-1} = [\hat{f} \circ \varphi_S(s)]^{-1} = \hat{f}[\varphi_S(s)^{-1}]$$

Si f est un isomorphisme f est rétractable et surjectif donc $\hat{f}$ aussi.

Remarque : On a le transfert "f injectif $\Longrightarrow \hat{f}$ injectif" dans les cas suivants :

- . S et T simplifiables dans D et D' respectivement, et $f(S) \subseteq J(T)$
- . D et D' commutatifs et $f(J(S)) = J(T)$.

§4. PROPRIETES DE TRANSFERT POUR LES IDEAUX

Nous étudions ici les relations entre les idéaux de D et de $D[S^{-1}]$: si I est un idéal de $D[S^{-1}]$, $\varphi_S^{-1}(I)$ peut être vide ; nous nous limiterons donc au cas où $D|S^{-1}|$ est un demi-groupe de fractions à droite ([6] et [8]) ; dans ce cas tout élément de $D[S^{-1}]$ peut s'écrire $\varphi_S(x)\,\varphi_S(s)^{-1}$ avec $x \in D$, $s \in \langle S\rangle$.

On note $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{B}$) l'ensemble des idéaux à droite (resp. bilatère) de D, et $\mathcal{D}_S$, $\mathcal{B}_S$ les ensembles analogues pour $D[S^{-1}]$. Lorsque $I \in \mathcal{D}_S$ $\varphi_S^{-1}(I)$ n'est pas vide puisque :
$\varphi_S(x)\,\varphi_S(s)^{-1} \in I \Longrightarrow x \in \varphi_S^{-1}(I)$.

Nous avons à utiliser les applications suivantes :
$r : \mathcal{D}_S \longrightarrow \mathcal{D}$ définie par $r(I) = \varphi_S^{-1}(I)$; $\delta : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}_S$ définie par $\delta(I) = \varphi_S(I).D[S^{-1}]$; et $\beta : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_S$ définie par
$\beta(I) = D[S^{-1}]\,\varphi_S(I).D[S^{-1}]$.

L'application r est appelée <u>restriction</u>, δ et β sont appelées <u>extensions</u>. Remarquons que $\delta(I) = \{\varphi_S(i).\varphi_S(s)^{-1},\ i \in I, s \in \langle S\rangle\}$ et que $\beta(I) = D[S^{-1}] \bullet \delta(I)$.
Les applications r, δ, β sont des applications croissantes d'ensembles ordonnés par inclusion. De plus :

(4.1) $\delta \circ r = 1_{\mathcal{D}_S}$ et $\beta \circ r = 1_{\mathcal{B}_S}$

ce qui montre que r est injective, δ et β sont surjectives et que : card $\mathcal{B}_S \leqslant$ card $\mathcal{D}_S \leqslant$ card $\mathcal{D}$; en général ces applications ne sont pas bijectives.

<u>*(4.2) Théorème*</u> : *Si* $D[S^{-1}]$ ***est un demi-groupe** de fractions à droite et si* **D** *vérifie l'une des conditions suivantes :*

. D *est noëthérien*

. D *est noëthérien à droite*

. D *est artinien*
. D *est artinien à droite*
. D *est simple*
. D *est simple à droite*

alors $D[S^{-1}]$ *vérifie la même propriété*

La démonstration se déduit aisément de (4.1). Il résulte également de (4.1) que $r \circ \delta$ et $r \circ \beta$ sont des fermetures dans $\mathcal{D}$ et $\mathcal{B}$. Si $\bar{\mathcal{D}}$ et $\bar{\mathcal{B}}$ désignant les ensembles d'idéaux fermés pour $r \circ \delta$ et $r \circ \beta$ on a :

<u>(4.3) Théorème</u> : *r et la restriction de δ à $\bar{\mathcal{D}}$ (resp. r et la restriction de β à $\bar{\mathcal{B}}$) sont des isomorphismes réciproques entre les ensembles ordonnés $\bar{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{D}_S$ (resp. $\bar{\mathcal{B}}$ et $\mathcal{B}_S$)*

(4.4) Si T est un sous-demi-groupe de $D[S^{-1}]$ contenant $\varphi_S(S)$ et si $R = \varphi_S^{-1}(T)$ alors : $D[R^{-1}]$ est isomorphe à $D[S^{-1}][T^{-1}]$

<u>*Démonstration*</u>

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "\varphi_R"] \arrow[dr, "\varphi_S"'] & & D[R^{-1}] \arrow[dd, dashed, "\sigma"] \\
& D[S^{-1}] \arrow[dr, "\varphi_T"'] & \\
& & D[S^{-1}][T^{-1}]
\end{tikzcd}$$

- $\varphi_T \circ \varphi_S$ rend inversibles les éléments de R car si $x \in R$ on a $\varphi_S(x) \in T$; il existe donc un homomorphisme σ tel que $\sigma \circ \varphi_R = \varphi_T \circ \varphi_S$
- φ_R rend inversibles les éléments de S, car si $s \in S$ $\varphi_S(s) \in T$ donc $s \in R$; donc il existe θ tel que $\theta \circ \varphi_S = \varphi_R$

. θ rend inversibles les éléments de T : si $t \in T$ on a $t = \varphi_S(x) . \varphi_S(s)^{-1}$; or $\varphi_S(s) \in T$ donc $\varphi_S(x) \in T$ ie $x \in R$; alors : $\theta(t) = \varphi_R(x) . \theta[_S(s)^{-1}]$ inversible.
Il existe donc λ tel que $\lambda \circ \varphi_T = \theta$.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "S"] \arrow[dr, "\varphi_R"'] & D[S^{-1}] \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\theta"] & D[S^{-1}][T^{-1}] \arrow[dl, dashed, "\lambda"] \\ & D[R^{-1}] & \end{tikzcd}$$

Il résulte alors de (1.1) que $\sigma = \lambda^{-1}$ est un isomorphe.

Lorsque P est un idéal premier on note D_P au lieu de $D[(D-P)^{-1}]$: <u>demi-groupe localisé de D en P</u>

<u>(4-5) *Théorème*</u> : *Soit* P *un idéal premier et propre de* $D[S^{-1}]$ *et* $P' = r(P)$. ***Alors*** $D_{P'}$ *est isomorphe à* $D[S^{-1}]_P$

<u>*Démonstration*</u> : P étant un idéal premier propre, $T = D[S^{-1}]-P$ est un sous-demi-groupe de $D[S^{-1}]$; comme $P \cap \varphi_S(S) = \emptyset$ on a $\varphi_S^{-1}(T) = D-r(P)$ et l'on applique (4.4)

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des idéaux bilatères premiers de D ne coupant pas <S>, et $\mathcal{P}_S$ l'ensemble des idéaux bilatères premiers et propres de $D|S^{-1}|$.

<u>(4.6) *Théorème*</u> : *Lorsque* S *est simplifiable dans* D, *ou lorsque* D *est commutatif,* β *et* r *sont des isomorphismes entre les ensembles ordonnés* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P}_S$.

<u>*Démonstration*</u> : a) Supposons S simplifiable dans D

. si $P \in \mathcal{P}$ P est fermé : soit $x \in r \circ \beta$ (P), d'où $\varphi_S(x)=\varphi_S(a)\varphi_S(s)^{-1}$.

$\varphi_S(p)\ \varphi_S(t)$

avec $p \in P$, soit $\varphi_S(xt) = \varphi_S(a)\ \varphi_S(s)^{-1} . \varphi_S(p)=\varphi_S(a)\varphi_S(b)\varphi_S(u)^{-1}$

avec $sb = pu \in P$ donc $b \in P$. Alors : $\varphi_S(xtu) = \varphi_S(ab)$ donc $xtu = ab \in P$ et $x \in P$.

Il suffit de montrer d'après (4.3) que $P \in \mathcal{P} \Longrightarrow \beta(P) \in \mathcal{P}_S$ et que $P \in \mathcal{P}_S \Longrightarrow r(P) \in \mathcal{P}$.

- si $P \in \mathcal{P}_S$ $r(P)$ est premier et $r(P) \cap \langle S \rangle = \emptyset$ sinon $\beta \circ r(P) = P = D[S^{-1}]$
- si $P \in \mathcal{P}$ $\beta(P)$ est propre sinon $P = r \circ \beta\ (P) = D$; $\beta(P)$ est premier : si $\xi . \eta = \varphi_S(a)\, \varphi_S(s)^{-1} . \varphi_S(b) . \varphi_S(t)^{-1} \in \beta(P)$ alors $\varphi_S(ac) \in \beta(P)$, avec $sc = bt$; donc $ac \in r \circ \beta\ (P) = P$ et l'on a soit $a \in P$, d'où $\xi \in \beta(P)$, soit $c \in P$ d'où $sc = bt \in P$ et $b \in P$, donc $\eta \in \beta(P)$.

b) Supposons D commutatif et posons $\beta = \delta = e$

. si $P \in \mathcal{P}$ P est fermé : soit $x \in r \circ e(P)$, d'où $\varphi_S(x) = \varphi_S(p) \varphi_S(s)^{-1}$ avec $p \in P$; donc $\varphi_S(xs) = \varphi_S(p)$ et il existe $t \in \langle S \rangle$ tel que $xst = pt \in P$ d'où $x \in P$.

. - si $P \in \mathcal{P}_S$ $r(P) \in \mathcal{P}$ pour la même raison qu'en a)

- si $P \in \mathcal{P}$ $e(P)$ est propre (même raison qu'en a) ; $e(P)$ est premier : si $\xi \eta = \varphi_S(a) . \varphi_S(s)^{-1} . \varphi_S(b) . \varphi_S(t)^{-1} \in e(P)$ alors $\varphi_S(ab) \in e(P)$ donc $ab \in r \circ e(P) = P$ donc $a \in P$ ou $b \in P$ soit $\xi \in e(P)$ ou $\eta \in e(P)$.

§5. COMPOSITION DES DEMI-GROUPES DE FRACTIONS

Soit $\alpha \in D$ un élément fixé ; on pose $\mathcal{S}_\alpha(D) = \{S \in \mathcal{S}(D), S \cap \langle\alpha\rangle \neq \emptyset\}$ et l'on munit $\mathcal{S}_\alpha(D)$ des deux lois $(S,T) \longmapsto S.T$ et $(S,T) \longmapsto S \cup T$

qui font de $\mathcal{S}_\alpha(D)$ un demi-anneau. La loi $\cup$ est idempotente et admet l'élément D pour zéro. $\mathcal{S}_\alpha(D)$ est préordonné par la relation $\leqslant$ définie par $S \leqslant T$ si $J(S) \subseteq J(T)$.

On pose $D_\alpha = \{D[S^{-1}],\ S \in \mathcal{S}_\alpha(D)\}$ et l'on définit une application f_α de $\mathcal{S}_\alpha(D)$ dans D_α par $f_\alpha(S) = D[S^{-1}]$; f_α étant bijective on peut transporter sur D_α la structure de $\mathcal{S}_\alpha(D)$:

$$D[S^{-1}] . D[T^{-1}] = D[(ST)^{-1}]$$

$$D[S^{-1}] \quad D[T^{-1}] = D[(S \quad T)^{-1}]$$

$$D[S^{-1}] \quad D[T^{-1}] \text{ si } J(S) \subseteq J(T)$$

Soit $\mathcal{R}$ l'équivalence sur D_α associée au préordre $\leqslant$: $D[S^{-1}] \mathcal{R} D[T^{-1}]$ si $J(S) = J(T)$ Il résulte de (2.4) que $\underline{D[S^{-1}]} \quad D[T^{-1}]$ si $D[S^{-1}] \simeq D[T^{-1}]$. Posons $\Delta_\alpha = D_\alpha / \mathcal{R}$ et notons $\overline{D[S^{-1}]}$ la classe de $D[S^{-1}]$ modulo .

<u>(5.1) Théorème</u> : *Pour tout $\alpha \in D$ on a les propriétés suivantes :*

a) $\mathcal{R}$ est compatible avec les deux lois de D_α

b) Dans Δ_α les deux lois . et $\cup$ coïncident

c) Δ_α est une bande commutative ayant $\overline{D[D^{-1}]}$ pour zéro et $\overline{D[\langle\alpha\rangle^{-1}]}$ pour élément neutre.

<u>*Démonstration*</u> :

. Compatibilité avec la loi $\cup$: supposons $D[S^{-1}] \simeq D[T^{-1}]$ et montrons que pour tout $X \in \mathcal{S}_\alpha(D)$ $D[(S \cup X)^{-1}] \simeq D[(T \cup X)^{-1}]$: il

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\varphi_S"] \arrow[d, "\varphi_{T \cup X}"'] \arrow[dr, "\varphi_T"] & D[S^{-1}] \arrow[d, "\theta"] \\
D[(T \cup X)^{-1}] & D[T^{-1}] \arrow[l, dashed]
\end{tikzcd}$$

existe par hypothèse un isomorphisme θ tel que $\theta\circ\varphi_S = \varphi_T$, d'autre part $\varphi_{T\cup X}$ rend inversibles les éléments de T, donc il existe σ tel que $\sigma\circ\varphi_T = \varphi_{T\cup X}$. Il s'ensuit que $\varphi_{T\cup X}$ rend inversibles les éléments de $S\cup X$: c'est évident pour les éléments de X, et si $s \in S$ $\varphi_{T\cup X}(s) = \sigma\circ\theta\circ\varphi_S(s)$ est inversible. De même $\varphi_{S\cup X}$ rend inversibles les éléments de $T\cup X$ d'où l'isomorphisme d'après (2.4)

. compatibilité avec la loi . : notons d'abord que pour tout $S \in \mathcal{P}_\alpha(D)$ on a $\alpha \in J(S)$ car $S \in \mathcal{P}_\alpha(D) \Longrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha^n \in S$ donc $\varphi_S(\alpha^n)$ est inversible dans $D[S^{-1}]$ et $\varphi_S(\alpha)$ aussi, ie $\alpha \in J(S)$. Pour montrer la compatibilité de la loi. nous allons prouver que $\forall S, T \in \mathcal{P}_\alpha(D)$: $D[(ST)^{-1}] \simeq D[(S\cup T)^{-1}]$ ce qui démontrera aussi b).

- $\varphi_{S\cup T}$ rend inversibles les éléments de ST donc $J(ST) \subseteq J(S\cup T)$
- φ_{ST} rend inversibles les éléments de $S\cup T$: $T \in \mathcal{P}_\alpha(D) \Longrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*$ $\alpha^n \in T$

si $s \in S$ on a $\varphi_{ST}(s) = \varphi_{ST}(s\alpha^n)\,\varphi_{ST}(\alpha^n)^{-1}$ inversible. De même $S \in \mathcal{P}_\alpha(D)$ donc $\exists p \in \mathbb{N}^*$ $\alpha^p \in S$ et si $t \in T$ on a $\varphi_{ST}(t) = \varphi_{ST}(\alpha^p)^{-1}$.

$\varphi_{ST}(\alpha^p t)$ **inversibl**

L'isomorphisme résulte alors de (2.4).

La propriété c) s'en déduit aisément. Notons la conséquence suivante de b) :

<u>*(5.2) Corollaire*</u> : *Si* S *et* T *sont deux complexes de* D *et s'il existe* **a** *dans* D *tel que* S *et* T *appartiennent à* $\mathcal{P}_\alpha(D)$ *alors* $D[(ST)^{-1}]$ *est isomorphe à* $D[(TS)^{-1}]$

§6. DEMI-GROUPES DE FRACTIONS D'UN DEMI-GROUPE ATOMIQUE

Soit D un demi-groupe commutatif, $\mathcal{R}$ l'équivalence de Green sur D, [5] ; on dit que $p \in D - \mathcal{U}(D)$ est irréductible si $a | p$ ("a divise p") implique soit $a \in \mathcal{U}(D)$, soit $a \mathcal{R} p$. On note $D^* = D - \{0\}$ si D possède un zéro, et $D^* = D$ sinon. D est atomique si tout élément de D^* admet une factorisation complète c'est-à-dire peut s'écrire $d = p_1^{\alpha_1}\ p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ avec $\forall i$ p_i irréductible et $\alpha_i \in \mathbb{N}$. On appelle base de D un système représentatif d'éléments irréductibles, si B est une base d'un demi-groupe atomique D tout élément $d \in D$ s'écrit $u \prod_{p \in B} p^{p}$ avec $u \in \mathcal{U}(D^1)$, $n_p \in \mathbb{N}$ presque tous m : S est un complexe de D on pose $M(S) = J(S) \cap B$ et $P(S) = \langle M(S) \rangle$. Remarquons que $M(S) \subseteq P(S) \subseteq J(S)$.

(6.1) Soit D un demi-groupe atomique et S un complexe de D^* .
On a : $S \subseteq P(S)^1 . \mathcal{U}(D^1)$

Soit $s \in S$ et B une base de D ; comme $s \in D^*$ on a $s = up_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ donc : $\varphi_S(s) = \varphi_S(u)\varphi_S(p_1)^{\alpha_1} \dots \varphi_S(p_n)^{\alpha_n} \in \mathcal{U}(D[S^{-1}])$ et $\forall i\ \varphi_S(p_i)$ inversible, soit $p_i \in J(S)$ donc $p_i \in J(S) \cap B$ et $s = u.p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n} \in P(S)^1 . \mathcal{U}(D^1)$.

(6.2) Proposition : *Soit* D *un demi-groupe atomique et* S *un complexe de* D^*. *Les demi-groupes* $D[S^{-1}]$, $D[J(S)^{-1}]$, $D[N(S)^{-1}]$, $D[P(S)^{-1}]$ *sont isomorphes.*

Démonstration :

d'après (2.2) $D[S^{-1}] \simeq D[J(S)^{-1}]$

d'après (2.5) et (6.1) : $S \subseteq P(S)^1 . \mathcal{U}(D^1) \subseteq J(S)^1 . \mathcal{U}(D^1)$

$$= J(S) . \mathcal{U}(D^1) \cup \mathcal{U}(D^1) = J(S)$$

J étant croissante et idempotente : $J(S) \subseteq J(P(S)^1 . \mathcal{U}(D^1)) \subseteq J(S)$ soit $J(S) = J(P(S)^1 . \mathcal{U}(D^1))$.

Appliquons à nouveau (2.5) : $J(S) = J(P(S)^1 . \mathcal{U}(D^1)) = J(P(S)^1)$

$= J(P\ (S))$ d'après [6] .

Par conséquent $D[S^{-1}] \simeq D[P(S)^{-1}]$ (d'après (2.4)). Comme $P(S) = \langle M(S) \rangle$ on a : $D[M(S)^{-1}] \simeq D[P(S)^{-1}]$

Notations : $\mathcal{P}^*(B) = \mathcal{P}(B) - \{\emptyset\}$; avec les notations du §5 : $\mathcal{F}(D) = \{D[S^{-1}]$; $S - \mathcal{U}(D) \neq \emptyset\}$ On dit que $p \in D - \mathcal{U}$ est premier si $p \mid ab \Longrightarrow p \mid i$ ou $p \mid b$.

(6.3) *Théorème* : *Soit* D *un demi-groupe atomique simplifiable de base* B *dans lequel tout élément irréductible est premier. Alors* $\mathcal{P}^*(B)$ *et* $\mathcal{F}(D)$ *sont équipotents.*

Démonstration : . On définit $\psi : \mathcal{F}(D) \longrightarrow \mathcal{P}^*(B)$ par

$$\psi(D[A^{-1}]) = J(A) \cap B = M(A)$$

C'est bien une application car $D[A^{-1}] = D[C^{-1}] \Longleftrightarrow J(A) = J(C)$ donc $J(A) = J(C) \cap B$; $J(A) \cap B \in \mathcal{P}^*(B)$ car par définition de $\mathcal{F}(D)$: $A - \mathcal{U}(D) \neq \emptyset$; soit $x \in A - \mathcal{U}(D)$ donc $x = u p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$ et du moins l'un des α_i est distinct de zéro donc $p_i \in J(A) \cap B$ et $J(A) \cap B \neq \emptyset$.

. soit $\varphi : \mathcal{P}^*(B) \longrightarrow \mathcal{F}(D)$ définie par $\varphi(A) = D[A^{-1}]$. On a bien $\varphi(A) \in \mathcal{F}(D)$ car $B \cap \mathcal{U}(D) = \emptyset$ donc $A - \mathcal{U}(D) = A \neq \emptyset$.

. d'après (6.2) : $\varphi\circ\psi(\overline{D[A^{-1}]}) = \varphi(\overline{J(A)\ B})$
$= D[M(A)^{-1}] = \overline{D[A^{-1}]}$

. $\psi\circ\varphi(A) = \psi(D[A^{-1}]) = J(A)\cap B$. Montrons que $A=J(A)\cap B$: il est immédiat que $A \subseteq J(A)\cap B$; soit $p \in J(A)\cap B$ donc $p \in B$ et d'après (2.7) il existe $y \in D$ tel que $py \in \langle A\rangle$. Donc $py=q_1q_2\cdots q_n$ avec $q_i \in A$. p est irréductible donc premier. Par conséquent : $\exists i\ p|q_i$. D'où $p\mathcal{R}q_i$. Comme $p \in B$ et $q_i \in B$ on a $p = q_i \in A$.

Donc $\psi\circ\varphi(A) = A$.

§7. DEMI-GROUPES A FACTORISATION UNIQUE

Soit B une base d'un demi-groupe atomique D : on dit que D est à factorisation unique si : $\forall d \in D^* : d=up_1p_2\cdots p_m=vq_1q_2\cdots q_n$ implique $n = m$ et $\forall i\ p_i\mathcal{R}q_i$

Dans ce cas tout élément d de D^* peut s'écrire $d = u \prod_{p\in B} p^{v_p(d)}$ avec $v_p(d) \in \mathbb{N}$ et dans ce produit seul un nombre fini de $v_p(d)$ n'est pas nul. [3] On démontre, cf [3], que : $xy \neq 0 \Longrightarrow v_p(xy) = v_p(x)+v_p(y)$.

(7.1) *Théorème* : *Soit* D *un demi-groupe à factorisation unique. Alors pour tout sous-demi-groupe* S *de* D $D[S^{-1}]$ *est à factorisation unique.*

Démonstration

. d'après [3] il suffit de trouver un sous-ensemble A de $D[S^{-1}]$ tel que tout élément de $D[S^{-1}]$ s'écrive de façon unique à "une unité près" comme produit fini d'éléments de A. Si card

$D[S^{-1}] = 1$ le résultat est évident. Supposons donc card $D[S^{-1}] > 1$.

. Soit B une base de D, $B_\circ = \{p \in B,\ \exists s \in S \quad ps = 0\}$ et $B' = B-(B_\circ \cup J(S))$

. par définition de B et J(S) : $\forall s \in S \quad s = u \prod_{p \in B \cap J(S)} p^{v_p(s)}$

. Cherchons les unités de $D[S^{-1}]$ (on note $\frac{d}{s}$ au lieu de $\varphi_S(d)\varphi_S(s)^{-1}$). Si $\frac{d}{s}$ est inversible il existe $\frac{b}{t}$ tel que $\frac{d}{s}.\frac{b}{t} = \frac{s}{s}$ donc $\exists \sigma \in S$ tel que $\sigma dbs = \sigma s^2 t$ S. Comme card $D[S^{-1}]>1$ on a $S \subsetneq D^*$ donc $\sigma s^2 t \neq 0$ donc si $p \in B$: $v_p(d)+v_p(b)=v_p(s)+v_p(t)$; et si $p \notin J(S)$: $v_p(d) = v_p(b) = 0$. Donc si $\frac{d}{s}$ est une unité : $\forall p \notin J(S)$ $v_p(d) = 0$. Réciproquement si $\forall p \notin J(S)$ $v_p(d) = 0$:

$\varphi_S(d) = \varphi_S(u) \;{}_{p \in B \cap J(S)}\; \varphi_S(p)^{v_p(d)}$ donc $\frac{d}{s}$ est inversible.

Les unités de $D[S^{-1}]$ sont donc les fractions de la forme

$$\frac{d}{s} = \varphi_S(u) \prod_{p \in B \cap J(S)} \varphi_S(p)^{v_p(d)-v_p(s)} \quad \text{avec } u \in \mathcal{U}(D^1).$$

. Soit $\frac{d}{s} \in D[S^{-1}]$ donc $d \neq 0$ et $s \neq 0$ et l'on peut écrire

$$\frac{d}{s} = \varphi_S(u)\, \varphi_S(v)^{-1} \prod_{p \in B} \varphi_S(p)^{v_p(d)-v_p(s)} \quad \text{avec } u, v \in \mathcal{U}(D^1).$$

Puisque $\frac{d}{s} \neq 0$ et que $s \in S$: $\forall p \in B_\circ$ $\quad v_p(d) = v_p(s) = 0$ et l'on peut écrire $\frac{d}{s} = \omega \prod_{p \in B'} \varphi_S(p)^{v_p(d)-v_p(s)}$ avec

$u, v \in \mathcal{U}(D^1)$. Puisque $\frac{d}{s} \neq 0$ et que $s \in S$: $\forall p \in B_\circ$ $v_p(d)=v_p(s)=0$ et l'on peut écrire $\frac{d}{s} = \omega \prod_{p \in B'} \varphi_S(p)^{v_p(d)-v_p(s)}$ avec

$\omega = \frac{u}{v} \prod_{p \in B \cap J(S)} \varphi_S(p)^{v_p(d)-v_p(s)} \in \mathcal{U}(D[S^{-1}])$

Pour $p \in B'$ $\alpha_p = v_p(d)-v_p(s) = v_p(d) \geqslant 0$ donc $\frac{d}{s} = \omega \prod_{p \in B'} \varphi_S(p)^{\alpha_p}$

. L'écriture précédente est unique à une unité près : si

$\frac{d}{s} = \omega' \prod_{p \in B'} \varphi_S(p)^{\beta_p}$, ω' unité, alors $\omega' = \frac{a}{t}$ avec $\forall p \notin B \cap J(S)$ $v_p(a) = 0$. Si $d' = \prod_{p \in B'} p^{\beta_p}$ on a $\frac{d}{s} = \frac{ad'}{t}$ donc il existe $\sigma \in S$ tel que $\sigma dt = \sigma ad's$. Mais $\frac{d}{s} \neq 0$ et $\sigma t \in S \Longrightarrow \sigma dt \neq 0$, donc si $p \in B$: $v_p(d)+v_p(t) = v_p(a) + v_p(d')+v_p(s)$; si $p \notin J(S)$: $v_p(d) = v_p(d') = \beta_p$, d'où le résultat.

Remarque : On a démontré que $\frac{d}{s} = \frac{d'}{s'} \Longrightarrow \forall p \in B'$ $v_p(d) = v_p(d')$

§8. AUTRES PROPRIETES

(8.1) Proposition : *Soit D un demi-groupe commutatif avec élément neutre e_D, et S un sous-demi-groupe de D^*. Si (D,S) est de type (R)[2], les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $S \subseteq \mathcal{U}(D)$

b) φ_S *est un isomorphisme*

c) φ_S *est surjectif*

Démonstration : a) $\Longrightarrow$ b) d'après [6]

b) $\Longrightarrow$ c) évident

c) $\Longrightarrow$ a) $e_D \in S$ car si $s \in S$ $se_D = s$ et comme $S \subsetneq D^*$ et (D, S) est de type (R) on en déduit $e_D = e_S \in S$. Soit $s \in S$; comme φ_S est surjectif, $\exists x \in D$: $\varphi_S(x) = \varphi_S(s)^{-1}$, donc il existe $t \in S$ tel que $txs = te_D = t$; (D, S) étant de type (R) on a $xs = e_D = e_S$, puisque $S \subseteq D^*$; donc $s \in \mathcal{U}(D)$.

(8.2) Commutation avec l'équivalence de Rees

Soit D un demi-groupe commutatif, I un idéal et S un complexe de D ; $\alpha : D \longrightarrow D/I$, $: D \longrightarrow D[S^{-1}]$, $\varphi' : D/I \longrightarrow D/I[\alpha(S)^{-1}]$ les homomorphismes canoniques. Alors les demis-groupes $D/I[\alpha(S)^{-1}]$ et $D[S^{-1}]/e(I)$ sont isomorphes.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & D/I \arrow[d, "\varphi'"] \\ D[S^{-1}] \arrow[r, dashed, "\bar{\alpha}"] & D/I[\alpha(S)^{-1}] \end{tikzcd}$$

Démonstration : D'après (3.2) il existe $\bar{\alpha}$ surjectif tel que $\bar{\alpha} \circ \varphi = \varphi' \circ \alpha$. Montrons que l'équivalence d'homomorphisme de $\bar{\alpha}$ est l'équivalence de Rees dans $D[S^{-1}]$ modulo $e(I)$:

. Si $x = \varphi(a)\,\varphi(s)^{-1}$, $y = \varphi(b)\,\varphi(t)^{-1}$ et $\bar{\alpha}(x) = \bar{\alpha}(y)$ on a $\varphi'(\alpha(at)) = \varphi'(\alpha(bs))$ donc il existe $u \in \langle \alpha(S) \rangle = (\langle S \rangle)$ tel que $u \circ \alpha(at) = u \circ \alpha(bs)$; si $u = \alpha(\sigma)$ avec $\sigma \in \langle S \rangle$: $\alpha(\sigma at) = \alpha(\sigma bs)$ donc ou bien $\sigma at = \sigma bs$ d'où $x = y$

ou bien $\sigma at, \sigma bs \in I$ d'où $x, y \in e(I)$

. De même si $x \equiv y \bmod e(I)$: $\bar{\alpha}(x) = \bar{\alpha}(y)$ D'où le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI : Algèbre commutative - Ch. 2 - Hermann

[2] A. BOUVIER : Demi-groupes de type (R) - C.R. Acad. Sc. Paris t 268 (1969) p. 372 - 375

[3] A. BOUVIER : Demi-groupes de type (R) - Thèse de 3èmeCycle-Lyon

[4] A. BOUVIER et A. FAISANT : Quelques propriétés des demi-groupes de fractions - Séminaire P. Lefebvre (Lyon 1968/69)Exp. 14

[5] A.G. CLIFFORD and G.B. PRESTON : The algebraic theory of semi-groups - Math. Surveys Amer. Math. Soc.

[6] A. FAISANT : Sur les demi-groupes de fractions - Publications du dép. de Math. de Lyon 1969 T 6-1 p. 73-85

[7] A. FAISANT : Sur les demi-groupes de quotients - C.R. Acad. Sc. Paris t. 268 (1969) p. 521-523

[8] P. LEFEBVRE : Semi-groups and rings of fractions - University of Tenessee (1968) Knoxville U.S.A.

[9] P. SAMUEL : Anneaux factoriels - Soc. de Math. de Sâo-Paulo

[10] ZARISKY and P. SAMUEL : Commutative algebra - Von Nostrand

---

Manuscrit remis en janvier 1970

A. BOUVIER Maître-assistant
A. FAISANT Assistant
Département de Mathématiques
Université Claude-Bernard
43, boulevard du 11 novembre 1918
VILLEURBANNE