MICHEL HACQUE

Localisations et schémas affines

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1970, tome 7, fascicule 2
, p. 1-114
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1970__7_2_A2_0>

LOCALISATIONS ET SCHEMAS AFFINES

Michel HACQUE

INTRODUCTION.

Cet article est consacré à la mise en évidence des possibilités qu'offre la théorie des localisations, en vue de l'étude des schémas affines.

Etant donné un *anneau commutatif* A , si $\mathcal{A}$ = Mod A est la catégorie des A-modules et si X = Spec(A) est le spectre premier de A, muni de la topologie spectrale, tout ouvert U de X détermine une localisation $\tilde{\mathcal{L}}_U$ dans $\mathcal{A}$ (Proposition 2-8). Les foncteurs localisations L_U de ces localisations $\tilde{\mathcal{L}}_U$, permettent la construction d'un *foncteur préfaisceau* P (Définition 3-4), tel que pour tout objet M de $\mathcal{A}$, le foncteur P(•,M) soit un préfaisceau P(M) sur l'espace topologique X et tel que tout ouvert U de X vérifie $P(U,M) = L_U M$.

Le foncteur préfaisceau P étant séparé (Théorème 3-6), la méthode de Čech détermine un *foncteur faisceau* $\check{P}$ (Définition 4-2) et le morphisme fonctoriel canonique $\theta : P \to \check{P}$ est un *mo-*

nomorphisme fonctoriel (Proposition 4-1).

L'intérêt de ces constructions réside en ce que pour tout ouvert *quasi-compact* U de X , les morphismes canoniques $\Theta_M^U : P(U,M) \to \check{P}(U,M)$ sont des *isomorphismes* (Théorème 4-3). Ce résultat, fondamental pour la suite, entraîne que le faisceau d'anneaux $\check{P}(A)$ sur X coïncide avec le faisceau structural $\mathcal{O}_X = \tilde{A}$ du schéma affine $(X, \mathcal{O}_X)$ associé à l'anneau A et que pour tout objet M de $\mathcal{A}$, le faisceau $\check{P}(M)$ sur X est un $\check{P}(A)$-Module qui coïncide avec le $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent $\tilde{M}$ associé de façon classique au A-module M (Corollaire 4-4). Ces résultats montrent donc que le Théorème 4-3 constitue une généralisation du théorème (1-3-7) de [7], qui établit le résultat analogue dans le cas particulier où U est un *ouvert affine spécial* de la forme D(f) avec $f \in A$.

Il en résulte également des caractérisations simples des sections du faisceau structural d'un schéma affine ou d'un Module quasi-cohérent, au-dessus d'un ouvert quasi-compact (Corollaire 4-5). Un cas particulier (Corollaire 4-6) donne une généralisation des premiers résultats obtenus dans cette voie dans [12].

Dans le cas où l'anneau A est *noethérien*, les résultats obtenus prennent une forme simple (Corollaire 4-8) et il en résulte en particulier que pour tout A-module *injectif* N , le $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent $\tilde{N}$ associé, est un *faisceau flasque* (Corollaire 4-9). A titre de curiosité, ce résultat permet d'obtenir une démonstration élémentaire de la trivialité de la cohomologie des Modules quasi-cohérents (Remarque (c)).

Etant donné un schéma affine $(X, \mathcal{O}_X)$ associé à un anneau commutatif A, la suite est consacrée à l'étude du préschéma $(U, \mathcal{O}_U)$ induit sur un *ouvert quasi-compact* U , de X , par le schéma affine $(X, \mathcal{O}_X)$.

Tout d'abord, l'étude des localisations images directes, donne une propriété très utile des localisations du type $\tilde{\mathcal{L}}_U$, vis à vis des images directes (Lemme 5-8) et conduit à une propriété intéressante liant le spectre de A au spectre de l'anneau localisé $A' = A_{\mathcal{F}}$ de A pour une localisation du type $\tilde{\mathcal{L}}_U$ (Théorème 5-9).

Il est alors montré que la catégorie $\mathcal{B}'_U$ des $\mathcal{O}_U$-Modules quasi-cohérents est équivalente à des sous-catégories locales de catégories de modules (Théorème 6-3 et Corollaire 6-4) et il en résulte l'existence d'un "foncteur $\mathcal{O}_U$-Module quasi-cohérent associé" (Corollaire 6-5).

Si $(X', \mathcal{O}'_{X'})$ est le schéma affine associé à l'anneau $A' = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ des sections au-dessus d'un *ouvert quasi-compact* U de X , si ρ est l'homomorphisme canonique de A dans A' déterminé par la restriction à l'ouvert U de X et si φ est l'application continue de X' dans X déterminée par l'homomorphisme ρ , alors l'ouvert $U' = \varphi^{-1}(U)$ de X' est *quasi-compact, partout dense* dans X' et l'homomorphisme canonique de restriction ρ' de $\Gamma'(X', \mathcal{O}'_{X'})$ dans $\Gamma'(U', \mathcal{O}'_{X'})$ est un *isomorphisme*. De plus si $(U', \mathcal{O}'_{U'})$ est le préschéma induit sur l'ouvert $U' = \varphi^{-1}(U)$ de X' par le schéma affine $(X', \mathcal{O}'_{X'})$, l'application continue φ

de X' dans X induit un *homéomorphisme* w de U' sur U , qui détermine un *isomorphisme de préschémas* W de $(U', \mathcal{O}'_{U'})$ sur $(U, \mathcal{O}_U)$ (Théorème 6-8).

Enfin, ces résultats conduisent à diverses caractérisations des *ouverts affines* des schémas affines (Théorème 7-1) et en particulier à une caractérisation cohomologique (Corollaire 7-4) qui généralise le Théorème (1-3-1) de [8].

Dans la suite, les principales références bibliographiques sont indiquées dans le texte, mais de façon générale, la terminologie et les notations relatives aux localisations sont celles de [3] et de [11] et la terminologie relative aux schémas affines et aux préschémas est celle de [7].

1 - PRELIMINAIRES TOPOLOGIQUES

Un espace topologique X est dit *quasi-compact* si, de tout recouvrement ouvert de X , il est possible d'extraire un recouvrement fini de X . Il revient au même de dire que toute famille filtrante décroissante d'ensembles fermés non vides a une intersection non vide. Une partie Y d'un espace topologique X est un ensemble quasi-compact si le sous-espace Y est quasi-compact.

Un espace topologique X est *irréductible* s'il est non vide et s'il n'est pas réunion de deux sous-espaces fermés distincts de X . Il revient au même de dire que $X \neq \emptyset$ et que l'intersection de deux ouverts non vides de X est non vide. Une partie Y d'un espace topologique X est irréductible si le sous-espace Y est irréductible. Pour qu'un sous-espace Y d'un espace topologique X soit irréductible, il faut et il suffit que son adhérence $\overline{Y}$ soit irréductible. En particulier, tout sous-espace qui est l'adhérence $\{x\}$ d'un sous-espace réduit à un point est irréductible.

Dans un espace topologique X , la relation $y \in \overline{\{x\}}$ équivalente à $\overline{\{y\}} \subset \overline{\{x\}}$ se traduit en disant que y est une *spécialisation* de x ou que x est une *générisation* de y . Dans un espace topologique X , un *point générique* d'une partie fermée irréductible Y est un point x tel que $Y = \overline{\{x\}}$.

1-1. LEMME : *Soit* X *un espace topologique quelconque. Toute partie* Y *de* X *, qui admet un système fondamental de voisinages quasi-compacts, est un sous-espace quasi-compact.*

Soit $\{W_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert du sous-espace Y de X . Pour tout $i\in I$, il existe au moins un ouvert U_i de X tel que $W_i = Y\cap U_i$. La partie $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ est un voisinage ouvert de Y dans X et par hypothèse, il existe un voisinage quasi-compact U' de Y tel que $U'\subset U$. En posant $U'_i = U'\cap U_i$ pour tout $i\in I$, ce qui entraîne $W_i = Y\cap U'_i$, la famille $\{U'_i\}_{i\in I}$ constitue un recouvrement ouvert du sous-espace quasi-compact U' . Puisque U' est quasi-compact, il existe une partie finie J de I telle que la famille $\{U'_j\}_{j\in J}$ constitue un recouvrement fini de U'. La relation :

$$\bigcup_{j\in J} W_j = \bigcup_{j\in J} Y\cap U'_i = Y\cap\Big[\bigcup_{j\in J} U'_j\Big] = Y\cap U' = Y$$

montre que la famille $\{W_j\}_{j\in J}$ constitue un recouvrement ouvert fini du sous-espace Y , extrait du recouvrement ouvert $\{W_i\}_{i\in I}$ de Y , ce qui prouve que le sous-espace Y est quasi-compact.

1-2. LEMME : *Soit* X *un espace topologique vérifiant la condition :*

(α) *Tout point de* X *admet un système fondamental de voisinages ouverts quasi-compacts.*

Alors, tout sous-espace quasi-compact Y *de* X *, admet un système fondamental de voisinages ouverts quasi-compacts.*

Soit W un voisinage de Y dans X . Pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage ouvert quasi-compact U_y de y dans X tel que $U_y \subset W$. En posant $U'_y = Y \cap U_y$ pour tout $y \in Y$, la famille $\{U'_y\}_{y \in Y}$ constitue un recouvrement ouvert du sous-espace Y . Puisque Y est quasi-compact, il existe une famille finie $\{y_j\}_{j \in J}$ de points de Y , telle que la famille $\{U'_{y_j}\}_{j \in J}$ constitue un recouvrement fini de Y . Il en résulte que la famille $\{U_{y_j}\}_{j \in J}$ constitue un recouvrement fini de Y par les ouverts quasi-compacts U_{y_j} dans X . La partie $U = \bigcup_{j \in J} U_{y_j}$ est alors un voisinage ouvert et quasi-compact de Y dans X , inclus dans W .

1-3. *LEMME : Soit* X *un espace topologique vérifiant la condition :*

(β) *Dans l'espace* X *, l'application* $x \to \overline{\{x\}}$ *établit une correspondance biunivoque entre* X *et l'ensemble des parties fermées irréductibles de* X *.*

Alors, si $\mathcal{U}$ *est un ensemble filtrant décroissant d'ouverts quasi-compacts, la partie* $Y = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$ *est quasi compacte et* $\mathcal{U}$ *constitue un système fondamental de voisinages de* Y *.*

Soit F' un ensemble fermé dans X, tel que $\mathcal{U}$ induise une base de filtre sur F', c'est-à-dire tel que $U \cap F' \neq \emptyset$ pour tout $U \in \mathcal{U}$.

Soit S l'ensemble non vide des parties fermées F de F', telles que $\mathcal{U}$ induise une base de filtre sur F, c'est-à-dire telles que $U \cap F \neq \emptyset$ pour tout $U \in \mathcal{U}$.

Dans l'ensemble S ordonné par l'inclusion, soit S' une partie non vide et totalement ordonnée. Pour toute partie quasi-compacte $U \in \mathcal{U}$, l'ensemble non vide, totalement ordonné des parties fermées non vides $U \cap F$ de U, pour $F \in S'$, a une intersection non vide. Il en résulte que l'ensemble fermé $F'' = \bigcap_{F \in S'} F$ vérifie $U \cap F'' \neq \emptyset$ pour tout $U \in \mathcal{U}$, ce qui prouve que F'' est un élément de S. L'ensemble S possède donc au moins un élément minimal F_o.

Soient F_1 et F_2 deux parties fermées de X telles que $F_o = F_1 \cup F_2$. Si $F_1 \notin S$ et si $F_2 \notin S$, il existe $U_1 \in \mathcal{U}$ tel que $U_1 \cap F_1 = \emptyset$ et $U_2 \in \mathcal{U}$ tel que $U_2 \cap F_2 = \emptyset$. En choisissant $U \in \mathcal{U}$ avec $U \subset U_1 \cap U_2$, il en résulte

$$U \cap F_o = U \cap (F_1 \cup F_2) = (U \cap F_1) \cup (U \cap F_2) = \emptyset$$

ce qui est absurde. Ainsi F_1 ou F_2 appartient à S et puisque F_o est minimal dans S, il en résulte $F_1 = F_o$ ou $F_2 = F_o$, ce qui montre que F_o est un fermé irréductible.

La condition (β) entraîne qu'il existe un point x de X tel que $F_o = \overline{\{x\}}$, ce qui entraîne en particulier $x \in F'$. Pour tout $U \in \mathcal{U}$, la relation $U \cap F_o \neq \emptyset$ entraîne qu'il existe $y \in U$

avec $y \in \overline{\{x\}}$, ce qui implique $x \in U$ et par suite $x \in Y$.

Ainsi, tout ensemble fermé F' de X , tel que $\mathcal{U}$ induise une base de filtre sur F', vérifie $F' \cap Y \neq \emptyset$.

Pour tout voisinage ouvert U' de Y , l'ensemble fermé $F' = X - U'$ vérifie $F' \cap Y = \emptyset$ et par suite $\mathcal{U}$ n'induit pas une base de filtre sur F', ce qui prouve qu'il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $U \cap F' = \emptyset$ c'est-à-dire tel que $U \subset U'$.

Ainsi, $\mathcal{U}$ constitue un système fondamental de voisinages de Y et le lemme 1-1 montre que Y est quasi-compact.

1-4. *DEFINITION : Dans un espace topologique* X , *une partie* Y *est* stable par générisation *si tout point* x *de* X *qui est une générisation d'un point* y *de* Y , *est un élément de* Y .

1-5. *LEMME : Dans un espace topologique* X, *pour toute partie* Y *de* X , *l'intersection des voisinages de* Y , *notée* $\tilde{Y}$ *et appelée le générisé de* Y , *est la plus petite partie de* X *stable par générisation et contenant* Y .

En particulier pour que Y *soit stable par générisation, il faut et il suffit que* $Y = \tilde{Y}$.

Une partie Z de X est stable par générisation si pour tout $x \in X$, la relation $\overline{\{x\}} \cap Z \neq \emptyset$ implique $x \in Z$, c'est-à-dire si pour tout $x \in X$, la relation $x \notin Z$ implique $\overline{\{x\}} \cap Z = \emptyset$. Il est immédiat que cette dernière condition signifie que tout $x \in X$ qui n'appartient pas à Z , n'appartient pas à un voisinage ouvert U de Z . Il en résulte que pour qu'une partie Z de X soit stable par générisation, il faut et il suffit que $Z = \widetilde{Z}$.

Pour tout partie Y de X , les parties Y et $\widetilde{Y}$ admettent les mêmes voisinages, de sorte que $\widetilde{Y}$ est l'intersection de ses voisinages, ce qui prouve que $\widetilde{Y}$ est stable par générisation. Enfin, pour toute partie Z stable par générisation, la relation $Y \subset Z$ entraîne $\widetilde{Y} \subset \widetilde{Z} = Z$ ce qui montre que $\widetilde{Y}$ est la plus petite partie de X stable par générisation et contenant Y .

1-6. *PROPOSITION : Soit* X *un espace topologique vérifiant les conditions* (α) *et* (β). *Alors pour toute partie* Y *de* X , *il y a équivalence des conditions suivantes :*

(a). Le sous-espace Y *est stable par générisation et quasi-compact.*

(b). La partie Y *est stable par générisation et admet un système fondamental de voisinages ouverts quasi-compacts.*

(c). Il existe un ensemble $\mathcal{U}$ *filtrant décroissant d'ouverts quasi-compacts, tel que* $Y = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$.

De plus, un tel ensemble $\mathcal{U}$ *constitue alors un système fondamental de voisinages de* Y .

Les lemmes 1-1 et 1-2 entraînent l'équivalence des conditions *(a)* et *(b)*.

Si Y vérifie la condition *(b)*, en choisissant pour $\mathcal{U}$ un système fondamental de voisinages ouverts quasi-compacts de Y , le lemme 1-5 entraîne $Y = \widetilde{Y} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$. Ainsi, la condition (*b*) entraîne la condition (*c*).

Si Y vérifie la condition (*c*), le lemme 1-3 montre que Y est quasi-compact et que $\mathcal{U}$ constitue un système fondamental de voisinages de Y . Il en résulte en particulier Y = $\widehat{\widehat{Y}}$ et le lemme 1-5 montre alors que Y est stable par générisation et quasi-compact. Ainsi, la condition (*c*) entraîne la condition (*a*), ce qui achève la démonstration.

1-7. *COROLLAIRE : Soit* X *l'espace topologique sous-jacent à un schéma affine ou à un préschéma.*

Alors, pour toute partie Y *de* X , *il y a équivalence des conditions suivantes :*

(*a*). *Le sous-espace* Y *est stable par générisation et quasi-compact.*

(*b*). *La partie* Y *est stable par générisation et admet un système fondamental de voisinages ouverts quasi-compacts.*

(*c*). *Il existe un ensemble* $\mathcal{U}$ *filtrant décroissant d'ouverts quasi-compacts, tel que* $Y = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$.

De plus, un tel ensemble $\mathcal{U}$ *constitue alors un système fondamental de voisinages de* Y .

D'après la proposition 1-6, il suffit de montrer que l'espace topologique X sous-jacent à un schéma affine ou à un préschéma vérifie les conditions (α) et (β) des lemmes 1-2 et 1-3.

La proposition (1-1-10) de [7] montre que tout ouvert affine est quasi-compact. La proposition (2-1-3) de [7], qui assure que les ouverts affines forment une base de la topologie de X , montre que tout point $x \in X$ admet un système fondamental de voisinages ouverts affines quasi-compacts, c'est-à-dire que X vérifie (α).

Enfin, la proposition (2-1-5) de [7] montre que X vérifie (β), ce qui achève la démonstration.

2 - LOCALISATIONS STABLES.

2-1 - Rappels. Etant donné un *anneau commutatif* A , soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ l'ensemble des *idéaux premiers* de A , appelé aussi le *spectre premier* de A . Pour un $x \in X = \mathrm{Spec}(A)$, il est souvent commode d'écrire $\mathfrak{p}_x$ au lieu de x , ou même simplement $\mathfrak{p} \in X$.

Pour toute partie E de A , la partie V(E) de X désigne l'ensemble des $x \in X$ tels que $E \subset \mathfrak{p}_x$.

Les ensembles de la forme V(E) , dans laquelle E parcourt l'ensemble des parties de A , sont les *ensembles fermés* d'une topologie sur X , appelée la *topologie spectrale* ou la *topologie de Zariski*; sauf mention expresse du contraire, l'ensemble $X = \mathrm{Spec}(A)$ est toujours muni de la topologie spectrale.

Si r(E) désigne la racine de l'idéal de A engendré par la partie E de A , la relation $V(E) = V(r(E))$ montre que lorsque $\mathfrak{a}$ parcourt l'ensemble des idéaux de A , les ensembles de la forme :

$$D(\mathfrak{a}) = X\text{-}V(\mathfrak{a}) = \{x;\ x\in X\ ,\ \mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}_x\} = \{\mathfrak{p}\ ;\ \mathfrak{p}\in X\ ,\ \mathfrak{a}\not\subset \mathfrak{p}\}$$

constituent les *ensembles ouverts* de la topologie spectrale de X .

En posant :

$$D(f) = D(Af) = \{\mathfrak{p}\ ;\ \mathfrak{p}\in X\ ,\ f \notin \mathfrak{p}\}$$

pour $f\in A$, les ouverts de la forme D(f) sont les *ouverts affines spéciaux* de X [2].

En particulier :

$$D(0) = \emptyset \quad \text{et} \quad D(1) = X\ .$$

De plus, pour toute famille $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ d'idéaux de A et pour tout couple $(\mathfrak{a}_1\ ,\ \mathfrak{a}_2)$ d'idéaux de A , les relations :

$$\bigcup_{i\in I} D(\mathfrak{a}_i) = D(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i)$$

et

$$D(\mathfrak{a}_1)\cap D(\mathfrak{a}_2) = D(\mathfrak{a}_1\cap \mathfrak{a}_2) = D(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2)$$

montrent que l'application surjective D de l'ensemble des idéaux de A dans l'ensemble des ouverts de X est compatible avec les bornes supérieures et avec les bornes inférieures finies.

Enfin, pour tout $\mathfrak{p}\in X$, les ouverts affines spéciaux D(f) associés aux éléments $f\in A$, tels que $f\notin \mathfrak{p}$, constituent un système fondamental de voisinages ouverts et quasi-compacts de $\mathfrak{p}$ dans X .

2-2. Notations. Etant donné un *anneau commutatif* A , soit X = Spec(A) le *spectre premier* de A et soit $\mathcal{A}$ = Mod A la catégorie des A-modules.

Tout élément $\mathfrak{p} \in X$ détermine une localisation $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathfrak{p}}$ dans $\mathcal{A}$ caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ défini par :

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{p}} = \{I \ ; \ I \not\subset \mathfrak{p}\} .$$

Toute partie Y de X détermine une localisation $\tilde{\mathcal{L}}_Y$, définie par :

$$\tilde{\mathcal{L}}_Y = \bigwedge_{\mathfrak{p} \in Y} \tilde{\mathcal{L}}_{\mathfrak{p}}$$

c'est-à-dire caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F}_Y$ défini par :

$$\mathcal{F}_Y = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathcal{F}_{\mathfrak{p}} .$$

Il en résulte naturellement :

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\{\mathfrak{p}\}} = \tilde{\mathcal{L}}_{\mathfrak{p}} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}_{\{\mathfrak{p}\}} = \mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$$

Inversement, toute localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ dans $\mathcal{A}$, caractérisée par un ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F}$, détermine une partie $Y_{\tilde{\mathcal{L}}} = Y_{\mathcal{F}}$ de X , définie par :

$$Y_{\tilde{\mathcal{L}}} = Y_{\mathcal{F}} = \bigcap_{I \in \mathcal{F}} D(I) .$$

2-3. LEMME : *Avec les notations précédentes, l'application* $Y \to \tilde{\mathcal{L}}_Y$ *de l'ensemble des parties de* X , *dans l'ensemble des localisations dans* $\mathcal{A}$ *et l'application* $\tilde{\mathcal{L}} \to Y_{\tilde{\mathcal{L}}}$ *de l'ensemble des localisations dans* $\mathcal{A}$, *dans l'ensemble des parties de* X , *véri-*

fient les propriétés suivantes :

(a). *Pour toute partie* Y *de* X , *l'ensemble topologisant et idempotent* $\mathfrak{F}_Y$ *est l'image réciproque, par l'application* D, *de l'ensemble des voisinages ouverts de* Y *dans* X . *Autrement dit :*

$$\mathfrak{F}_Y = \{I \ ; \ Y \subset D(I)\} \ .$$

(a'). *Pour toute localisation* $\tilde{\mathcal{L}}$ *dans* $\mathcal{A}$, *caractérisée par un ensemble topologisant et idempotent* $\mathfrak{F}$, *la partie* $Y_{\tilde{\mathcal{L}}} = Y_{\mathfrak{F}}$ *de* X *est constituée par les idéaux premiers de* A *qui n'appartiennent pas à* $\mathfrak{F}$. *Autrement dit :*

$$Y_{\tilde{\mathcal{L}}} = Y_{\mathfrak{F}} = \{\mathfrak{p}; \ \mathfrak{p} \notin \mathfrak{F}\} \ .$$

(b). *La relation* $Y_1 \subset Y_2$ *implique* $\tilde{\mathcal{L}}_{Y_2} < \tilde{\mathcal{L}}_{Y_1}$ *c'est-à-dire :*

$$\mathfrak{F}_{Y_2} \subset \mathfrak{F}_{Y_1} \ .$$

(b'). *La relation* $\tilde{\mathcal{L}}_1 < \tilde{\mathcal{L}}_2$ *équivalente à la relation* $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$, *implique* $Y_{\tilde{\mathcal{L}}_2} \subset Y_{\tilde{\mathcal{L}}_1}$, *c'est-à-dire* $Y_{\mathfrak{F}_2} \subset Y_{\mathfrak{F}_1}$.

(c). *Pour toute famille* $\{Y_j\}_{j\in J}$ *de parties de* X , *en posant* $Y = \bigcup_{j\in J} Y_j$, *alors :*

$$\tilde{\mathcal{L}}_Y = \bigwedge_{j\in J} \tilde{\mathcal{L}}_{Y_j} \ ,$$

c'est-à-dire $\mathfrak{F}_Y = \bigcap_{j\in J} \mathfrak{F}_{Y_j}$

(c'). *Pour toute famille* $\{\tilde{\mathcal{L}}_j\}_{j\in J}$ *de localisations dans* $\mathcal{A}$, *en posant :* $\tilde{\mathcal{L}} = \bigwedge_{j\in J} \tilde{\mathcal{L}}_j$ *c'est-à-dire :* $\mathcal{F} = \bigcap_{j\in J} \mathcal{F}_j$, *alors :* $Y_{\tilde{\mathcal{L}}} = \bigcup_{j\in J} Y_{\tilde{\mathcal{L}}_j}$, *c'est-à-dire :* $Y_{\mathcal{F}} = \bigcup_{j\in \mathcal{F}} Y_{\mathcal{F}_j}$.

(d). *Pour toute partie* Y *de* X , *si* $\tilde{\tilde{Y}}$ *est le générisé de* Y , *c'est-à-dire la plus petite partie de* X *stable par générisation et contenant* Y , *alors :*

$$\tilde{\mathcal{L}}_Y = \tilde{\mathcal{L}}_{\tilde{\tilde{Y}}} ,$$

c'est-à-dire : $\mathcal{F}_Y = \mathcal{F}_{\tilde{\tilde{Y}}}$.

(d'). *Pour toute localisation* $\mathcal{L}$ *dans* $\mathcal{A}$; *caractérisée par un ensemble topologisant et idempotent* $\mathcal{F}$, *la partie* $Y_{\tilde{\mathcal{L}}} = Y_{\mathcal{F}}$ *est stable par générisation, c'est-à-dire vérifie :*

$$Y_{\tilde{\mathcal{L}}} = \tilde{\tilde{Y}}_{\tilde{\mathcal{L}}} \quad \text{et} \quad Y_{\mathcal{F}} = \tilde{\tilde{Y}}_{\mathcal{F}} .$$

La définition de $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathfrak{p}}$ montre que la condition $I \in \mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ équivaut à $\mathfrak{p} \in D(I)$, ce qui entraîne la partie (*a*).

La condition $\mathfrak{p} \in Y_{\tilde{\mathcal{L}}} = Y_{\mathcal{F}}$ se traduit alors par la condition $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$, qui est équivalente à $\mathfrak{p} \notin \mathcal{F}$, ce qui entraîne la partie (*a'*).

Les parties (*b*), (*b'*) et (*c*) sont immédiates.

Avec les notations de la partie (c'), il est évident que la partie $\bigcup_{j\in J} Y_{\mathcal{F}_j}$ est contenue dans $Y_{\mathcal{F}}$ et si $\mathfrak{p} \in Y_{\mathcal{F}}$, alors $\mathfrak{p} \notin \mathcal{F}$ et par suite il existe un indice $j\in J$ tel que $\mathfrak{p} \notin \mathcal{F}_j$, c'est-à-dire tel que $\mathfrak{p} \in Y_{\mathfrak{F}_j}$, ce qui entraîne la partie (c').

Pour toute partie Y de X , la partie $\widetilde{Y}$ est l'intersection des voisinages ouverts de Y dans X , d'après le lemme 1-5. Il en résulte que Y et $\widetilde{Y}$ ont les mêmes voisinages ouverts et la partie (*a*) entraîne la partie (*d*).

La définition de $Y_{\widetilde{\mathcal{L}}} = Y_{\mathfrak{F}}$ montre que cette partie de X est une intersection de parties ouvertes de X et par suite elle est égale à l'intersection de ses voisinages dans X . Le lemme 1-5 montre alors qu'elle est stable par générisation, ce qui entraîne la partie (*d'*).

2-4. *DEFINITION : Avec les notations précédentes, étant donnée une localisation $\widetilde{\mathcal{L}}$ dans $\mathcal{A}$ caractérisée par un ensemble topologisant et idempotent $\mathfrak{F}$, soit $\widetilde{\mathfrak{F}}$ l'ensemble topologisant et idempotent défini par :*

$$\widetilde{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}_Z \quad \textit{avec} \quad Z = Y_{\mathfrak{F}} \ .$$

La localisation $\widetilde{\mathcal{L}}$ de $\mathcal{A}$ est dite stable *si l'ensemble topologisant et idempotent $\mathfrak{F}$ est* stable, *c'est-à-dire vérifie :*

$$\mathfrak{F} = \widetilde{\mathfrak{F}} \ .$$

2-5. *PROPOSITION : Pour toute localisation $\widetilde{\mathcal{L}}$ dans $\mathcal{A}$, caractérisée par un ensemble topologisant et idempotent $\mathfrak{F}$, il y a équivalence des conditions suivantes :*

(a). La localisation $\widetilde{\mathcal{L}}$ est stable, c'est-à-dire vérifie : $\mathfrak{F} = \widetilde{\mathfrak{F}}$.

(b). *L'ensemble* $\mathfrak{F}$ *vérifie* :

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{\{\mathfrak{p} \in X ; \mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_{\mathfrak{p}}\}} \mathfrak{F}_{\mathfrak{p}} .$$

(c). *Pour tout* $I \notin \mathfrak{F}$, *il existe un idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A *tel que* $I \subset \mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{p} \notin \mathfrak{F}$.

(d). *L'ensemble* $\mathfrak{F}$ *vérifie les deux conditions suivantes* :

(α). *Les ouverts dans* X *de la forme* $D(I)$ *avec* $I \in \mathfrak{F}$ *constituent un système fondamental de voisinages de la partie* :

$$Y_{\mathfrak{F}} = \bigcap_{I \in \mathfrak{F}} D(I)$$

(β). *L'ensemble* $\mathfrak{F}$ *est saturé pour la relation d'équivalence associée à l'application* D . *Autrement dit* $I \in \mathfrak{F}$ *et* $D(I) = D(I')$ *entraînent* $I' \in \mathfrak{F}$.

Il est d'abord évident que $\mathfrak{F}$ vérifie toujours :

$$\mathfrak{F} \subset \tilde{\mathfrak{F}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y_{\mathfrak{F}}} \mathfrak{F}_{\mathfrak{p}}$$

En remarquant que $\mathfrak{p} \in Y_{\mathfrak{F}}$ équivaut à $\mathfrak{p} \notin \mathfrak{F}$ ou à $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_{\mathfrak{p}}$ et que $I \notin \mathfrak{F}_{\mathfrak{p}}$ équivaut à $I \subset \mathfrak{p}$, l'équivalence des conditions (*a*), (*b*) et (c) est immédiate.

La partie (*a*) du lemme 2-3 entraîne la relation :

$$\tilde{\mathfrak{F}} = \{I' \ , \ Y_{\mathfrak{F}} \subset D(I')\}$$

qui montre immédiatement que la condition (*a*) implique les parties (α) et (β) de la condition (*d*).

Réciproquement, lorsque la condition (*d*) est vérifiée, pour tout $I' \in \widetilde{\mathfrak{F}}$, vérifiant donc : $Y_{\mathfrak{F}} \subset D(I')$, la condition (α) entraîne qu'il existe $I \in \mathfrak{F}$ tel que $Y_{\mathfrak{F}} \subset D(I) \subset D(I')$. Il en résulte $D(I) = D(I \cap I')$, avec $I \cap I' \subset I'$, et la condition (β) implique $(I \cap I') \in \mathfrak{F}$, ce qui entraîne $I' \in \mathfrak{F}$. Ainsi, $\widetilde{\mathfrak{F}} \subset \mathfrak{F}$ et d'après la remarque initiale, il en résulte : $\mathfrak{F} = \widetilde{\mathfrak{F}}$, ce qui montre que la condition (*d*) implique la condition (*a*).

2-6. LEMME : *Pour tout ouvert* U *de* X, *la localisation* $\check{\mathcal{L}}_U$ *dans* $\mathcal{A}$ *caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent* $\mathfrak{F}_U$, *vérifie les propriétés suivantes :*

(*a*). *Pour tout idéal* $\mathfrak{a}$ *de* A , *tel que* $U = D(\mathfrak{a})$, *l'ensemble* $\mathfrak{F}_U$ *est constitué par les idéaux* I *de* A , *dont la racine* $r(I)$ *contient* $\mathfrak{a}$. *Autrement dit :*

$$\mathfrak{F}_U = \{ I \; ; \mathfrak{a} \subset r(I) \}$$

(*b*). *Si l'ouvert* U *de* X *est quasi-compact, tout idéal* $\mathfrak{a}'$ *de* A *tel que* $U = D(\mathfrak{a}')$, *contient un idéal de type fini* $\mathfrak{a}$, *tel que* $U = D(\mathfrak{a})$ *et l'ensemble* $\mathfrak{F}_U$ *est constitué par les idéaux* I *de* A *qui contiennent une puissance de* $\mathfrak{a}$. *Autrement dit, l'ensemble* $\mathfrak{F}_U$ *admet pour ensemble cofinal, l'ensemble :*

$$\{ \mathfrak{a}^n \; ; n \in \mathbb{N} \}$$

(c). *Si l'ouvert* U *de* X *est quasi-compact et si* $\mathfrak{a}$ *est un idéal de type fini de* A *, tel que* $U = D(\mathfrak{a})$ *toute localisation* $\tilde{\mathcal{L}}$ *dans* $\mathcal{A}$*, caractérisée par un ensemble topologisant et idempotent* $\mathfrak{F}$*, vérifiant* $\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}$ *est plus fine que* $\tilde{\mathcal{L}}_U$ *. En particulier,* $\tilde{\mathcal{L}}_U$ *est la moins fine de ces localisations.*

La partie (*a*) du lemme 2-3 entraîne :

$$\mathfrak{F}_U = \{I \ ; \ D(\mathfrak{a}) \subset D(I)\}$$

La condition $I \in \mathfrak{F}_U$ se traduit donc par la condition : $\mathfrak{p} \notin D(I)$ implique $\mathfrak{p} \notin D(\mathfrak{a})$, c'est-à-dire par la condition : $I \subset \mathfrak{p}$ implique $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. Puisque r(I) est l'intersection des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de A qui contiennent I , la partie (*a*) en résulte immédiatement.

La famille d'ouverts $\{D(f)\}_{f \in \mathfrak{a}'}$ constitue un recouvrement de l'ouvert quasi-compact $U = D(\mathfrak{a}')$. Il existe donc une famille finie $\{f_j\}_{j \in J}$ d'éléments de $\mathfrak{a}'$ telle que la famille $\{D(f)_j\}_{j \in J}$ constitue un recouvrement fini de $U = D(\mathfrak{a}')$. La relation $U = D(\mathfrak{a}') = \bigcup_{j \in J} D(f_j) = D(\sum_j Af_j)$ montre que l'idéal de type fini $\mathfrak{a} = \sum_{j \in J} Af_j$ vérifie $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}'$ et $U = D(\mathfrak{a}') = D(\mathfrak{a})$. Puisque le produit de deux idéaux appartenant à un ensemble topologisant et idempotent est encore un élément de cet ensemble, les puissances de $\mathfrak{a}$ appartiennent à $\mathfrak{F}_U$ puisque $\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}_U$. Pour démontrer la partie (*b*), tout revient à montrer que pour tout $I \in \mathfrak{F}_U$, il existe un entier n tel que $\mathfrak{a}^n \subset I$. Puisque $\mathfrak{a} \subset r(I)$ et que $r(I)$ est l'ensemble des éléments $a \in A$ dont une puissance appartient à I , pour tout $j \in J$, il existe un entier n_j tel que $f_j^{n_j} \in I$. En particulier un entier n' majorant les n_j pour $j \in J$, vérifie $f_j^{n'} \in I$ pour tout $j \in J$. Si p est le nombre d'éléments de J soit $n = n'p$. Tout élément $\alpha \in \mathfrak{a}$ s'écrit sous la forme : $\alpha = \sum_{j \in J} \alpha_j f_j$ et α^n se développe sous la forme d'une somme de termes qui sont des "monômes" par rapport aux p éléments f_j , de "degré total" égal à $n = n'p$, ce qui entraîne que l'un au moins des f_j figure avec un exposant supérieur ou égal à n' . Ainsi chacun de ces termes appartient à I et par suite $\alpha^n \in I$. Il en résulte alors $\mathfrak{a}^n \subset I$, ce qui achève la démonstration de la partie (*b*).

La condition $\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}$ entraîne $\mathfrak{a}^n \in \mathfrak{F}$ pour tout entier n et la partie (*b*) entraîne alors $\mathfrak{F}_U \subset \mathfrak{F}$, ce qui démontre la partie (*c*) puisque $\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}_U$.

2-7. COROLLAIRE : *Dans $\mathcal{A}$, toute localisation de* type fini *$\tilde{\mathcal{L}}$ [et en particulier toute localisation* plate] *est stable.*

Si $\tilde{\mathcal{L}}$ est caractérisée par un ensemble topologisant et idempotent $\mathfrak{F}$, tout idéal I *n'appartenant pas à $\mathfrak{F}$ est contenu dans un idéal maximal pour cette propriété et un tel idéal est premier.*

La localisation $\mathcal{L}$ est de type fini si l'ensemble $\mathfrak{F}$ admet un système cofinal d'idéaux de type fini et toute localisation plate est de type fini [11].

Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de type fini, admettant un famille finie $\{f_j\}_{j\in J}$ de générateurs, la relation $D(\mathfrak{a}) = \bigcup_{j\in J} D(f_j)$ montre que l'ouvert $U = D(\mathfrak{a})$ qui admet un recouvrement fini par des ouverts affines spéciaux qui sont quasi-compacts est quasi-compact. En résumé, ce qui précède et la partie (*b*) du lemme 2-6 montrent que pour qu'un ouvert U de X soit quasi-compact, il faut et il suffit qu'il existe un idéal de type fini $\mathfrak{a}$ tel que $U = D(\mathfrak{a})$. De plus, pour tout idéal $\mathfrak{a}'$ tel que $U = D(\mathfrak{a}')$, il est toujours possible de choisir $\mathfrak{a}$ de sorte que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}'$.

Pour tout $I \in \mathfrak{F}$, il existe un idéal de type fini $\mathfrak{a}' \in \mathfrak{F}$ tel que $\mathfrak{a}' \subset I$, ce qui entraîne $U = D(\mathfrak{a}') \subset D(I)$. Pour tout idéal I' de A tel que $D(I) = D(I')$, il en résulte la relation : $U = D(\mathfrak{a}') = D(\mathfrak{a}' \cap I')$. Puisque l'ouvert U de X est quasi-compact, la partie (*b*) du lemme 2-6 montre qu'il existe un idéal $\mathfrak{a}$ de type fini tel que $U = D(\mathfrak{a})$ et $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}' \cap I' \subset I'$. D'après la partie (*c*) du lemme 2-6, la relation $U = D(\mathfrak{a}') = D(\mathfrak{a})$ dans laquelle $\mathfrak{a}' \in \mathfrak{F}$ entraîne $\mathfrak{F}_U \subset \mathfrak{F}$ et comme $\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}_U$, il en résulte $\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}$. La relation $\mathfrak{a} \subset I'$ entraîne alors $I' \in \mathfrak{F}$, ce qui montre que la localisation $\mathcal{L}$ vérifie la condition (β) de la condition (*d*) de la proposition 2-5.

D'autre part, pour tout $I \in \mathfrak{F}$, il existe un idéal de type fini $\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}$, tel que $\mathfrak{a} \subset I$, ce qui entraîne : $Y_{\mathfrak{F}} \subset D(\mathfrak{a}) \subset D(I)$. Il en résulte que l'ensemble $\mathcal{U}$ des ouverts quasi-compacts $D(\mathfrak{a})$ associés aux idéaux de type fini $\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}$ est un ensemble filtrant décroissant d'ouverts quasi-compacts tels que $Y_{\mathfrak{F}} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$. Le corollaire 1-7 entraîne que $\mathcal{U}$ est un système fondamental de voisinages de $Y_{\mathfrak{F}}$, ce qui montre en particulier que l'ensemble $\mathfrak{F}$ vérifie la condition (α) de la condition (*d*) de la proposition 2-5.

Cette proposition 2-5 entraîne alors que la localisation de type fini $\tilde{\mathcal{L}}$ est stable, ce qui achève la démonstration de la première partie du corollaire 2-7.

Il convient de remarquer au passage que le corollaire 1-7 entraîne également que $Y_{\mathfrak{F}}$ est une partie de X stable par générisation et quasi-compacte.

Lorsque la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ est de type fini, il est immédiat que l'ensemble des idéaux de A n'appartenant pas à $\mathfrak{F}$ est inductif. Il en résulte que tout $I \notin \mathfrak{F}$ est contenu dans un idéal $I' \notin \mathfrak{F}$ et maximal pour cette propriété. Puisque la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ est stable, la condition (c) de la proposition 2-5, appliquée à I' montre que l'idéal I' est premier.

Il convient de remarquer qu'il est possible d'obtenir une démonstration directe de ce résultat, de sorte que la proposition 2-5 fournit alors une nouvelle démonstration de la première partie du corollaire 2-7.

2-8. *PROPOSITION : Avec les notations précédentes, l'application* $Y \to \tilde{\mathcal{L}}_Y$ *et l'application* $\tilde{\mathcal{L}} \to Y_{\tilde{\mathcal{L}}}$, *caractérisent des correspondances* bijectives réciproques *entre l'ensemble des parties de* X, stables par générisation *et l'ensemble des* localisations stables *dans* $\mathcal{A}$.

Ces correspondances possèdent les propriétés suivantes :

(*a*). *Pour deux parties* Y_1 *et* Y_2 , *stables par géné-*

risation, la relation $Y_1 \subset Y_2$ *implique* : $\tilde{\mathcal{L}}_{Y_2} < \tilde{\mathcal{L}}_{Y_1}$,
c'est-à-dire : $\mathcal{F}_{Y_2} \subset \mathcal{F}_{Y_1}$,
(*b*). *Pour toute famille* $\{Y_j\}_{j\in J}$ *de parties stables par générisation, la partie* : $Y = \bigcup_{j\in J} Y_j$ *est stable par générisation et vérifie* :

$$\tilde{\mathcal{L}}_Y = \bigwedge_{j\in J} \tilde{\mathcal{L}}_{Y_j} ,$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{F}_Y = \bigcap_{j\in J} \mathcal{F}_{Y_j} .$$

Soit φ l'application caractérisée par $\varphi(Y) = \tilde{\mathcal{L}}_Y$ pour toute partie Y de X et soit s l'application caractérisée par $s(\tilde{\mathcal{L}}) = Y_{\tilde{\mathcal{L}}}$ pour toute localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ dans $\mathcal{A}$.

La partie (*a*) du lemme 2-3 montre que $s \circ \varphi(Y)$ est l'intersection des voisinages ouverts de Y et le lemme 1-5 montre que :

$$\tilde{\hat{Y}} = s \circ \varphi(Y) .$$

Alors, la partie (*d*) du lemme 2-3 entraîne la relation :

$$(1) \qquad \varphi = \varphi \circ s \circ \varphi$$

et la partie (*d'*) du lemme 2-3 entraîne la relation :

$$(2) \qquad s = s \circ \varphi \circ s .$$

Les parties Y de X , stables par générisation sont caractérisées par :

$$(3) \qquad Y = s \circ \varphi(Y)$$

et les localisations stables $\tilde{\mathcal{L}}$ dans $\mathcal{A}$, sont caractérisées par :

$$(4) \qquad \tilde{\mathcal{L}} = \varphi \circ s(\tilde{\mathcal{L}}) .$$

Pour toute partie Y de X , la relation (1) montre donc que la localisation $\varphi(Y)$ dans $\mathcal{A}$, est stable et pour toute localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ dans $\mathcal{A}$, la relation (2) montre donc que la partie

$s(\widetilde{\mathcal{L}})$ de X , est stable par générisation.

Les relations (3) et (4) montrent enfin que φ et s caractérisent des correspondances bijectives réciproques entre l'ensemble des parties de X , stables par générisation et l'ensemble des localisations stables dans $\mathcal{A}$.

Le lemme 1-5 montre que la réunion d'une famille de parties stables par générisation est stable par générisation et les propriétés (*a*) et (*b*) résultent alors du lemme 2-3.

2-9. *PROPOSITION* : *Avec les notations précédentes, l'application* : $Y \to \widetilde{\mathcal{L}}_Y$ *et l'application* $\widetilde{\mathcal{L}} \to Y_{\widetilde{\mathcal{L}}}$, *caractérisent des correspondances* bijectives réciproques *entre l'ensemble des parties de* X , stables par générisation *et* quasi-compactes *et l'ensemble des* localisations *de type fini dans* $\mathcal{A}$.

Ces correspondances possèdent les propriétés suivantes :

(*a*). *Pour deux parties* Y_1 *et* Y_2 *stables par générisation et quasi-compactes, la relation* $Y_1 \subset Y_2$ *implique* : $\widetilde{\mathcal{L}}_{Y_2} < \widetilde{\mathcal{L}}_{Y_1}$, *c'est-à-dire* : $\mathcal{F}_{Y_2} \subset \mathcal{F}_{Y_1}$.

(*b*). *Pour toute famille* finie $\{Y_j\}_{j\in J}$ *de parties stables par générisation et quasi-compactes, la partie* $Y = \bigsqcup_{j\in J} Y_j$ *est stable par générisation et quasi-compacte, et vérifie* :

$$\widetilde{\mathcal{L}}_Y = \bigwedge_{j\in J} \widetilde{\mathcal{L}}_{Y_j} \text{ , c'est-à-dire } \mathcal{F}_Y = \bigcap_{j\in J} \mathcal{F}_{Y_j}$$

(*c*). *Pour deux parties* Y_1 *et* Y_2 *stables par généri-*

sation et quasi-compactes, la partie $Y = Y_1 \cap Y_2$ *est stable par générisation et quasi-compacte, et vérifie :* $\tilde{\mathcal{L}}_Y = \tilde{\mathcal{L}}_{Y_1} \vee \tilde{\mathcal{L}}_{Y_2}$ *, c'est-à-dire :* $\mathfrak{F}_Y = \mathfrak{F}_{Y_1} \vee \mathfrak{F}_{Y_2}$.

(*d*). *Pour tout ensemble* $\mathcal{U}$ *filtrant décroissant d'ou-ouverts quasi-compacts, la partie* $Y = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$ *est stable par générisation et quasi-compacte, et vérifie :* $\tilde{\mathcal{L}}_Y = \bigvee_{U \in \mathcal{U}} \tilde{\mathcal{L}}_U$ *, avec* $\mathfrak{F}_Y = \bigvee_{U \in \mathcal{U}} \mathfrak{F}_U = \bigsqcup_{U \in \mathcal{U}} \mathfrak{F}_U$.

Avec les données et les notations de la partie (*d*), le corollaire 1-7 monte que Y est stable par générisation et quasi-compacte, et que de plus $\mathcal{U}$ constitue un système fondamental de voisinages ouverts et quasi-compacts de Y .

La partie (*a*) du lemme 2-3 donne la relation :

$$\mathfrak{F}_Y = \{I \ ; \ Y \subset D(I)\}$$

et il en résulte que pour tout $I \in \mathfrak{F}_Y$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que : $Y \subset U \subset D(I)$. D'après la partie (*b*) du lemme 2-6, il existe un idéal $\mathfrak{a}'$ de type fini tel que $U = D(\mathfrak{a}')$, ce qui entraîne $U = D(\mathfrak{a}') \cap D(I) = D(\mathfrak{a}' \cap I)$, et il existe également un idéal $\mathfrak{a}$ de type fini tel que $U = D(\mathfrak{a})$ avec $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}' \cap I \subset I$. Cette relation entraîne donc $I \in \mathfrak{F}_U$ et par suite :

$$\mathfrak{F}_Y \subset \bigsqcup_{U \in \mathcal{U}} \mathfrak{F}_U .$$

Pour tout $U \in \mathcal{U}$, la relation $Y \subset U$ implique $\mathfrak{F}_U \subset \mathfrak{F}_Y$ et il en résulte alors la relation:

$$\mathfrak{F}_Y = \bigsqcup_{U \in \mathcal{U}} \mathfrak{F}_U .$$

Comme tout ensemble topologisant et idempotent $\mathfrak{F}$ vérifiant

$\mathcal{F}_U \subset \mathcal{F}$ pour tout $U \in \mathcal{U}$, vérifie naturellement $\mathcal{F}_Y \subset \mathcal{F}$, il en résulte la relation :

$$\mathcal{F}_Y = \bigvee_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{F}_U$$

ce qui achève la démonstration de la partie (*d*).

De plus, la partie (*b*) du lemme 2-6 montre que les localisations $\tilde{\mathcal{L}}_U$ sont de type fini et la caractérisation de $\mathcal{F}_Y$ entraîne que la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_Y$ est de type fini.

Cette remarque entraîne que pour toute partie Y de X, stable par générisation et quasi-compacte, la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_Y = \varphi(Y)$ est de type fini. En effet, pour une telle partie, le corollaire 1-7 montre qu'il existe un ensemble $\mathcal{U}$ filtrant décroissant d'ouverts quasi-compacts, tel que $Y = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$.

Aussi, avec les notations précédentes, pour toute partie Y de X, stable par générisation et quasi-compacte, la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_Y = \varphi(Y)$ est de type fini.

Inversement, d'après le corollaire 2-7, toute localisation de type fini $\tilde{\mathcal{L}}$ dans $\mathcal{A}$ est stable et au cours de la démonstration de ce corollaire 2-7, il a été montré que la partie $Y_{\tilde{\mathcal{L}}} = s(\tilde{\mathcal{L}})$ de X est stable par générisation et quasi-compacte.

La proposition 2-8 entraîne alors la première partie de la proposition 2-9, ainsi que les propriétés (*a*) et (*b*).

Avec les données et les notations de la partie (*c*), si $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ sont les ensembles constitués par les voisinages ouverts et quasi-compacts de Y_1 et de Y_2, le corollaire 1-7 entraîne :

$$Y_1 = \bigcap_{U_1 \in \mathcal{U}_1} U_1 \quad \text{et} \quad Y_2 = \bigcap_{U_2 \in \mathcal{U}_2} U_2$$

Si $\mathcal{U}$ est l'ensemble filtrant décroissant des ouverts quasi-compacts de la forme $U = U_1 \cap U_2$, avec $U_1 \in \mathcal{U}_1$ et $U_2 \in \mathcal{U}_2$, il en résulte la relation :

$$Y = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$$

et la partie (d) entraîne alors :

$$\mathfrak{F}_Y = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \mathfrak{F}_U$$

ainsi que :

$$\mathfrak{F}_{Y_1} = \bigcup_{U_1 \in \mathcal{U}_1} \mathfrak{F}_{U_1} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{F}_{Y_2} = \bigcup_{U_2 \in \mathcal{U}_2} \mathfrak{F}_{U_2} \ .$$

Pour tout $I \in \mathfrak{F}_Y$, il existe donc $U \in \mathcal{U}$ tel que $I \in \mathfrak{F}_U$. Puisque $U = U_1 \cap U_2$ avec $U_1 \in \mathcal{U}_1$ et $U_2 \in \mathcal{U}_2$, il existe des idéaux de type fini $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ tels que $U_1 = D(\mathfrak{a}_1)$ et $U_2 = D(\mathfrak{a}_2)$, ce qui entraîne en particulier $\mathfrak{a}_1 \in \mathfrak{F}_{U_1} \subset \mathfrak{F}_{Y_1}$ et $\mathfrak{a}_2 \in \mathfrak{F}_{U_2} \in \mathfrak{F}_{Y_2}$. L'idéal de type fini $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2$ vérifie $U = U_1 \cap U_2 = D(\mathfrak{a}_1) \cap D(\mathfrak{a}_2) = D(\mathfrak{a})$. D'après la partie (b) du lemme 2-6, les relations $I \in \mathfrak{F}_U$ et $U = D(\mathfrak{a})$ entraînent l'existence d'un entier n tel que $\mathfrak{a}^n \subset I$.

Si $\mathfrak{F}$ est un ensemble topologisant et idempotent vérifiant $\mathfrak{F}_{Y_1} \subset \mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}_{Y_2} \subset \mathfrak{F}$, les considérations précédentes impliquent $\mathfrak{a}_1 \in \mathfrak{F}$ et $\mathfrak{a}_2 \in \mathfrak{F}$, ce qui entraîne $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \in \mathfrak{F}$ et par suite $\mathfrak{a}^n \in \mathfrak{F}$. Puisque $\mathfrak{a}^n \subset I$, il en résulte $I \in \mathfrak{F}$, ce qui démontre la relation : $\mathfrak{F}_Y \subset \mathfrak{F}$.

Comme d'autre part les relations $Y \subset Y_1$ et $Y \subset Y_2$ impliquent $\mathfrak{F}_{Y_1} \subset \mathfrak{F}_Y$ et $\mathfrak{F}_{Y_2} \subset \mathfrak{F}_Y$, il en résulte la relation :

$$\mathfrak{F}_Y = \mathfrak{F}_{Y_1} \vee \mathfrak{F}_{Y_2}$$

ce qui achève la démonstration.

Remarques.

(a) La proposition 2-9 exprime en particulier que le treillis des parties de X , stables par générisation et quasi-compactes, ordonné par l'inverse de l'inclusion est isomorphe au treillis des localisations de type fini dans $\mathcal{A}$.

(b) Toute localisation stable $\tilde{\mathcal{L}}$ dans $\mathcal{A}$ est une borne inférieure de localisations plates (donc de type fini) et réciproquement les propositions 2-8 et 2-9 montrent que toute borne inférieure de localisations de type fini (ou de localisations plates) est une localisation stable dans $\mathcal{A}$. Les localisations stables dans $\mathcal{A}$ sont donc assez voisines des localisations de type fini et des localisations plates.

3 - LE FONCTEUR PREFAISCEAU.

3-1 - Notations. Etant donné un *anneau commutatif* A , soit X = Spec(A) le *spectre premier* de A et soit $\mathcal{A}$ = Mod A la catégorie des A-modules.

Tout ouvert U de l'espace topologique X détermine une localisation $\tilde{\mathscr{L}}_U$ dans $\mathscr{A}$, caractérisée par l'une des données suivantes :

(a) Un ensemble topologisant et idempotent $\mathfrak{F}_U$ d'idéaux de A déterminé par :

$$\mathfrak{F}_U = \{I \ ; \ U \subset D(I)\} \ .$$

(b) Une sous-catégorie localisante $\mathscr{C}_U$ de $\mathscr{A}$.

(c) Une mono-sous-catégorie $\mathscr{M}_U$ de $\mathscr{A}$.

(d) Une sous-catégorie locale $\mathscr{L}_U$ de $\mathscr{A}$.

(e) Un système localisant $(L_U \ , \ \psi^U)$ dans $\mathscr{A}$.

Dans un tel système localisant, le foncteur localisation L_U peut être choisi de façon canonique et caractérisé par la condition suivante: pour tout objet M de $\mathscr{A}$:

$$L_U M = \varinjlim_{I \in \mathfrak{F}_U} \operatorname{Hom}(I \ , \ M/\mathfrak{F}_U M) \ .$$

Sauf mention expresse du contraire, dans la suite, L_U désigne ce *foncteur localisation canonique* [11].

3-2. *LEMME : Avec les données et les notations précédentes, pour tout couple d'ouverts* U *et* U' *de* X, *vérifiant* $U \supset U'$, *la localisation* $\tilde{\mathscr{L}}_{U'}$ *est plus fine que la* *localisation* $\tilde{\mathcal{L}}_U$ *et il existe un morphisme fonctoriel canonique :*

$$\psi^{U',U} : L_U \to L_{U'}$$

possédant les propriétés suivantes :

(a) Pour tout ouvert U *de* X, *le morphisme fonctoriel* $\psi^{U,U}$ *est le morphisme fonctoriel identique du foncteur* L_U

(b) Pour trois ouverts U, U' et U" *de* X, *vérifiant* $U \supset U' \supset U''$, *alors*

$$\psi^{U'',U} = \psi^{U'',U'} \circ \psi^{U'U}$$

Le lemme 2-3 montre que la relation $U \supset U'$ entraîne $\tilde{\mathcal{L}}_U < \tilde{\mathcal{L}}_{U'}$, c'est-à-dire $\mathfrak{F}_U \subset \mathfrak{F}_{U'}$.

Pour tout objet M de $\mathcal{A}$, la relation $\mathfrak{F}_U M \subset \mathfrak{F}_{U'} M$ permet de considérer le morphisme canonique $\mu_M^{U',U}$ de $M/\mathfrak{F}_U M$ sur $M/\mathfrak{F}_{U'} M$.

Pour tout ouvert U de X, soit L'_U le foncteur caractérisé par la condition suivante : pour tout objet M de $\mathcal{A}$:

$$L'_U M = \varinjlim_{I \in \mathfrak{F}_U} \mathrm{Hom}(I , M) .$$

Si deux ouverts U et U' de X vérifient $U \supset U'$, ce qui entraîne $\mathfrak{F}_U \subset \mathfrak{F}_{U'}$, la caractérisation de L'_U et de $L'_{U'}$ montre qu'il existe un morphisme fonctoriel canonique, défini de façon évidente :

$$\psi'^{U',U}_M : L'_U M \to L'_{U'} M .$$

Pour tout objet M de $\mathcal{A}$, en posant $N = M/\mathfrak{F}_U M$ et $N' = M/\mathfrak{F}_{U'} M$, les relations :

$$L_U M = L'_U N \quad \text{et} \quad L_{U'} M = L'_{U'} N'$$

montrent que la relation :

$$\psi^{U',U}_M = \psi'^{U',U}_{N'} \circ L'_U (\mu^{U',U}_M)$$

caractérise un morphisme de $L_U M$ dans $L_{U'} M$, qui provient d'un morphisme fonctoriel :

$$\psi^{U',U} : L_U \to L_{U'}$$

Les propriétés (*a*) et (*b*) sont alors immédiates.

3-3. LEMME : *Avec les données et les notations précédentes, si* Ouv(X) *est l'ensemble des ouverts de* X *ordonné par l'inverse de l'inclusion, il existe un foncteur* P *de la catégorie produit* $\mathrm{Ouv}(X)\times\mathcal{A}$ *dans la catégorie* $\mathcal{A}$ *caractérisé par les conditions suivantes :*

(a) *Pour tout objet* (U,M) *de* $\mathrm{Ouv}(X)\times\mathcal{A}$ *, l'objet* $P(U,M)$ *de* $\mathcal{A}$ *est défini par :*

$$P(U,M) = L_U\, M\ .$$

(b) *Pour tout morphisme* (λ,g) *dans* $\mathrm{Ouv}(X)\times\mathcal{A}$ *défini par un morphisme* $\lambda : U \to U'$ *dans* $\mathrm{Ouv}(X)$ *(lorsque* $U\supset U'$*) et par un morphisme* $g : M \to M'$ *dans* $\mathcal{A}$ *, le morphisme* $P(\lambda,g)$ *de* $P(U,M)$ *dans* $P(U',M')$ *est défini par :*

$$P(\lambda,g) = L_{U'}(g)\circ\psi^{U',U}_{M} = \psi^{U'U}_{M}\circ L_U(g)\ .$$

C'est une conséquence immédiate du lemme 3-2.

3-4. *DEFINITION : Etant donné un* anneau commutatif A , *si* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *est le* spectre premier *de* A *et si* $\mathcal{A} = \mathrm{Mod}\ A$ *est la catégorie des* A*-modules, le* foncteur préfaisceau P , *déterminé par* A , *est le* bifoncteur :

$$P(\cdot,\cdot)\quad \mathrm{Ouv}(X)\times\mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

caractérisé par le lemme 3-3.

En particulier, pour tout objet M *de* $\mathcal{A}$, *le foncteur :*

$$P(\cdot,M)\ :\ \mathrm{Ouv}(X) \to \mathcal{A}$$

est le préfaisceau associé à M , *noté également* $P(M)$, *et pour tout ouvert* U *de* X, *le foncteur :*

$$P(U,\cdot) \; : \; \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

est le foncteur localisation canonique L_U *de la localisation* $\tilde{\mathcal{L}}_U$ *dans* $\mathcal{A}$ *, associée à* U .

3-5. <u>Rappels et notations</u> - Etant donné un espace topologique Y quelconque et une catégorie $\mathcal{B}$, la *catégorie des préfaisceaux* sur Y à valeurs dans $\mathcal{B}$ est la catégorie des foncteurs F de la catégorie Ouv(Y) des ouverts de Y ordonnés par l'inverse de l'inclusion, dans la catégorie $\mathcal{B}$.

Etant donné un ouvert U de Y et un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de U , le recouvrement ouvert *saturé* $\bar{\mathcal{U}}$ associé à $\mathcal{U}$ est constitué par les ouverts de Y contenus dans au moins un élément de $\mathcal{U}$.

Avec ces notations, pour tout préfaisceau F sur Y à valeurs dans $\mathcal{B}$, soit $F(\mathcal{U})$ la restriction de F à la sous-catégorie $\bar{\mathcal{U}}$ de Ouv(Y) .

Le préfaisceau F est un *faisceau* si pour tout ouvert U de Y et pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de U , l'objet F(U) et le "cône projectif" de "sommet" F(U) et de "base" $P(\mathcal{U})$, déterminé par F, caractérisent dans $\mathcal{B}$, une *limite projective* de $F(\mathcal{U})$.

Si la catégorie $\mathcal{B}$ est *avec limites projectives*, pour tout préfaisceau F sur Y à valeurs dans $\mathcal{B}$, pour tout ouvert U de Y et pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de U , soit $\check{F}(\mathcal{U})$ une *limite projective* du foncteur $F(\mathcal{U})$. Si de plus la catégorie $\mathcal{B}$ est *avec limites inductives filtrantes*, soit $\check{F}(U)$ une *limite inductive* des $\check{F}(\mathcal{U})$ suivant l'ensemble filtrant décroissant des recouvrements ouverts saturés $\bar{\mathcal{U}}$ de U . Il est facile de vérifier que ces objets $\check{F}(U)$ et les morphismes évidents de $\check{F}(U)$ dans $\check{F}(U')$ lorsque $U \supset U'$, caractérisent un préfaisceau $\check{F}$ sur Y à valeurs dans $\mathcal{B}$, appelé le *préfaisceau de Čech* associé au préfaisceau F . Enfin, les morphismes canoniques de F(U) dans $\check{F}(U)$ caractérisent un morphisme $\Theta(F)$ du préfaisceau F dans le préfaisceau $\check{F}$. [4]

Avec ces hypothèses, un préfaisceau F sur Y à valeurs dans $\mathcal{B}$ est *séparé* [4] si le morphisme $\Theta(F) : F \to \check{F}$ est un *monomorphisme*.

Toujours avec les mêmes hypothèses, il est facile de vérifier qu'il existe un foncteur $\check{\Gamma}$ de la catégorie des préfaisceaux sur Y à valeurs dans $\mathcal{B}$, dans elle-même , tel que pour tout préfaisceau F sur Y à valeurs dans $\mathcal{B}$, le préfaisceau de Čech $\check{F}$ associé soit caractérisé par $\check{F} = \check{\Gamma} F$.

3-6. *THEOREME : Etant donné un* anneau commutatif A , *si* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *est le* spectre premier *de* A *et si* $\mathcal{A} = \mathrm{Mod}\ A$ *est la catégorie des* A-*modules, le foncteur préfaisceau* P , *déterminé par* A , *est* séparé, *ce qui signifie que pour tout objet* M *de* $\mathcal{A}$, *le* préfaisceau $P(M) = P(\cdot, M)$ *sur* X *à valeurs dans* $\mathcal{A}$, associé *à* M , *est* séparé.

Il faut vérifier que pour tout objet M de $\mathcal{A}$ et pour tout ouvert U de X , le morphisme canonique :

$$P(U,M) \rightarrow \check{P}(U,M) = \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{P}(\mathcal{U},M)$$

est un monomorphisme.

Puisque dans $\mathcal{A}$ les limites inductives filtrantes sont exactes, il suffit de vérifier que pour tout objet M de $\mathcal{A}$, pour tout ouvert U de X et pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de U , le morphisme canonique

$$P(U,M) \rightarrow \check{P}(\mathcal{U},M) = \varprojlim_{U' \in \mathcal{U}} P(U',M)$$

est un monomorphisme.

Si $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$, en posant provisoirement $L = L_U$ et $L_j = L_{U_j}$ pour tout $j \in J$, compte tenu de la définition du foncteur P , tout revient à vérifier que le morphisme canonique :

$$\omega : L\,M \rightarrow \prod_{j \in J} L_j\,M$$

déterminé par les morphismes canoniques :

$$\psi^j = \psi_M^{U_j,U} : L\,M \rightarrow L_j\,M$$

est un monomorphisme.

En posant également $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}_U$ et $\tilde{\mathcal{L}}_j = \tilde{\mathcal{L}}_{U_j}$ pour tout $j \in J$, les localisations $\tilde{\mathcal{L}}_j$ sont plus fines que la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$, ce qui entraîne que les sous-catégories locales $\mathcal{L}_j$ des localisations $\tilde{\mathscr{L}}_j$ sont contenues dans la sous-catégorie locale $\mathscr{L}$ de la localisation $\tilde{\mathscr{L}}$. [11]

Pour tout objet N de $\mathscr{A}$, les diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\psi_M^U"'] \arrow[dr, "\psi_M^{U_j}"] & \\ LM \arrow[r, "\psi^j"'] & L_j M \end{tikzcd}$$

déterminent des diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(M,N) & \\ \mathrm{Hom}(LM,N) \arrow[u, "\mathrm{Hom}(\psi_M^U,N)"] & \mathrm{Hom}(L_j M,N) \arrow[l, "\mathrm{Hom}(\psi^j,N)"] \arrow[ul, "\mathrm{Hom}(\psi_M^{U_j},N)"'] \end{tikzcd}$$

Pour tout $j \in J$ et pour tout objet N de $\mathscr{L}_j$, qui est à fortiori un objet de $\mathscr{L}$, les définitions de L et de L_j entraînent que les morphismes $\mathrm{Hom}(\psi_M^U, N)$ et $\mathrm{Hom}(\psi_M^{U_j}, N)$ sont des isomorphismes. Il en résulte que le morphisme $\mathrm{Hom}(\psi^j,N)$ est un isomorphisme, ce qui entraîne que l'objet $L_j M$ et le morphisme ψ^j caractérisent un localisé de l'objet L M de $\mathscr{A}$ pour la localisation $\mathscr{L}_j$. Autrement dit :

$$L_j M \simeq L_j L M \quad \text{et} \quad \psi^j \simeq \psi_{LM}^{U_j} .$$

En posant également $\mathscr{F} = \mathscr{F}_U$ et $\mathscr{F}_j = \mathscr{F}_{U_j}$ pour tout $j \in J$, il en résulte alors les relations :

$$\mathrm{Ker}\ \psi^j = \mathrm{Ker}\ \psi_{LM}^{U_j} = \mathscr{F}_j\ LM .$$

La relation $\omega = \prod_{j\in J} \psi^j$ entraîne donc :

$$\operatorname{Ker} \omega = \bigcap_{j\in J} \mathfrak{F}_j \, LM = (\bigcap_{j\in J} \mathfrak{F}_j) \, LM .$$

D'après la proposition 2-8, la relation

$$U = \bigcup_{j\in J} U_j$$

implique la relation :

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{j\in J} \mathfrak{F}_j$$

qui entraîne alors :

$$\operatorname{Ker} \omega = \mathfrak{F}\, LM = 0$$

ce qui achève la démonstration.

3-7. Remarque : Soit Ann la catégorie des anneaux commutatifs et soit Mod la catégorie des modules "sur un anneau commutatif variable". Le foncteur canonique : $p : \underline{\text{Mod}} \to \underline{\text{Ann}}$, qui associe à tout B-module N l'anneau "de base" B est *bi-fibrant* [2].

Avec les données et les notations précédentes, pour tout ouvert U de X , le A-module $P(U,A) = L_U A$ est aussi le A-module sous-jacent à l'*anneau localisé* $A_{\mathfrak{F}_U}$ de A pour la localisation $\tilde{\mathscr{L}}_U$, noté alors $P_o(U,A)$ et pour tout objet M de $\mathscr{A}$, le A-module $P(U,M)$ détermine un $P_o(U,A)$-module noté $P_o(U,M)$. Pour deux ouverts U et U' de X vérifiant $U \supset U'$, le morphisme $\psi_A^{U'U}$ peut être considéré comme un homomorphisme de l'anneau

$P_o(U,A)$ dans l'anneau $P_o(U',A)$ de telle sorte que le morphisme de A-modules $\psi_M^{U'U} : P(U,M) \to P(U',M)$ peut être considéré comme un morphisme de $P_o(U,A)$-modules de $P_o(U,M)$ dans $(\psi_A^{U'U})_* P_o(U',M)$, qui caractérise donc un morphisme dans $\underline{\text{Mod}}$, noté encore $\psi_M^{U'U}$ de $P_o(U,M)$ dans $P_o(U',M)$.

Ces remarques montrent que le bi-foncteur :

$$P(\cdot,\cdot) : \text{Ouv}(X) \times \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

détermine un bi-foncteur :

$$P_o(\cdot,\cdot) : \text{Ouv}(X) \times \mathcal{B} \to \underline{\text{Mod}}$$

vérifiant en particulier la relation :

$$P(U,M) = (\psi_A^U)_* P_o(U,M)$$

pour tout ouvert U de X et pour tout objet M de $\mathcal{A}$.

De plus, le préfaisceau $P_o(A) = P_o(\cdot,A)$ est un *préfaisceau d'anneaux* sur X et pour tout objet M de $\mathcal{A}$, le préfaisceau $P_o(M) = P_o(\cdot,M)$ est un préfaisceau sur X à valeurs dans $\underline{\text{Mod}}$ vérifiant : $P_o(A) = p \circ P_o(M)$.

Comme $\mathcal{A}$ est la "fibre" de $\underline{\text{Mod}}$ au-dessus de A , en fait, tout objet A de $\underline{\text{Ann}}$ détermine donc un foncteur P_o de la fibre de $\underline{\text{Mod}}$ au-dessus de A , dans la catégorie des préfaisceaux sur le spectre premier X de A , à valeurs dans $\underline{\text{Mod}}$.

En général, le foncteur noté ici P_o est noté simplement P et il suffit alors de préciser que le foncteur P est "considéré comme à valeurs dans $\underline{\text{Mod}}$ " .

4 - LE FONCTEUR FAISCEAU.

4-1. *PROPOSITION : Etant donné un* anneau commutatif A , *si* X = Spec(A) *est le* spectre premier *de* A *et si* $\mathcal{A}$ = Mod A *est la catégorie des* A-*modules, alors :*

(a) *Le foncteur préfaisceau* P , *déterminé par* A *et caractérisé par le bi-foncteur :*

$$P(\cdot,\cdot) : \mathrm{Ouv}(X)\times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

détermine un foncteur préfaisceau de Čech $\check{P}$ *caractérisé par un bi-foncteur :*

$$\check{P}(\cdot,\cdot) : \mathrm{Ouv}(X)\times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

tel que pour tout objet M *de* $\mathcal{A}$, *le préfaisceau* $\check{P}(M) = \check{P}(\cdot,M)$ *sur* X *est le* préfaisceau de Čech *associé au préfaisceau* $P(M) = P(\cdot,M)$ *sur* X .

(b) *Il existe un morphisme fonctoriel canonique :*

$$\Theta : P(\cdot,\cdot) \to \check{P}(\cdot,\cdot)$$

caractérisé par les morphismes canoniques :

$$\Theta_M^U : P(U,M) \to \check{P}(U,M)$$

pour tout ouvert U *de* X *et pour tout objet* M *de* $\mathcal{A}$.

De plus, Θ *est un* monomorphisme fonctoriel.

(c) *Pour tout objet* M *de* $\mathcal{A}$, *le préfaisceau de* Čech $\check{P}(M) = \check{P}(\cdot,M)$ *est le* faisceau associé *au préfaisceau* $P(M) = P(\cdot,M)$.

Puisque la catégorie $\mathcal{A}$ est avec limites projectives et avec limites inductives filtrantes exactes, tout objet M de $\mathcal{A}$ détermine un préfaisceau de Čech $\check{P}(M) = \check{P}(\cdot,M)$. Comme le préfaisceau P(M) dépend fonctoriellement de M , il en résulte que le préfaisceau $\check{P}(M)$ dépend fonctoriellement de M , ce qui établit la propriété (*a*) et la première partie de la propriété (*b*).

Le théorème 3-6 montre alors que Θ est un monomorphisme fonctoriel.

Enfin, pour tout objet M de $\mathcal{A}$, d'après le théorème 3-6 le préfaisceau P(M) sur X est séparé et il est connu que dans ce cas, le faisceau associé à P(M) est le préfaisceau de Čech $\check{P}(M)$ associé à P(M) [4].

4-2. *DEFINITION : Etant donné un* anneau commutatif A , *si* X = Spec(A) *est le* spectre premier *de* A *et si* $\mathcal{A}$ = Mod A *est la catégorie des* A-*modules, le* foncteur faisceau $\check{P}$, *déterminé par* A , *est le bi-foncteur* :

$$\check{P}(\cdot,\cdot) : \mathrm{Ouv}(X) \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

caractérisé par la proposition 4-1.

En particulier, pour tout objet M de $\mathcal{A}$, *le foncteur* :

$$\check{P}(M) = \check{P}(\cdot,M) : \mathrm{Ouv}(X) \to \mathcal{A}$$

est le faisceau associé *à* M *et c'est aussi le faisceau associé au préfaisceau* P(M) = P(·,M) .

D'après la remarque 3-7, le foncteur préfaisceau P , déterminé par A , peut être "considéré comme à valeurs dans Mod " . Lorsqu'il en est ainsi, le théorème 7 (p. 178) de [2] et le théorème 5-4-4 de [9] montrent qu'une construction analogue à celle du foncteur faisceau $\check{P}$ permet d'obtenir un bifoncteur à valeurs dans Mod qui détermine alors de façon canonique le foncteur faisceau $\check{P}$, déterminé par A .

Ainsi, il convient de remarquer que le foncteur préfaisceau P et le foncteur faisceau $\check{P}$, déterminés par A , peuvent être considérés comme à valeurs dans Mod " et que cette identification est compatible avec la construction de $\check{P}$ à partir de P .

4-3. *THEOREME : Etant donné un* anneau commutatif A , *si* X = Spec(A) *est le* spectre premier *de* A , *si* $\mathcal{A}$ = Mod A *est la catégorie des* A-*modules, si* P *est le foncteur préfaisceau et si* $\check{P}$ *est le foncteur faisceau, déterminés par* A , *alors pour tout objet* M *de* $\mathcal{A}$ *et pour tout* ouvert quasi-compact U *de* X , *le morphisme* :

$$\Theta_M^U : P(U,M) \to \check{P}(U,M)$$

est un isomorphisme.

La proposition 4-1 assure que Θ_M^U est un monomorphisme. Il suffit donc de montrer que Θ_M^U est un épimorphisme et puisque dans $\mathcal{A}$, les limites inductives filtrantes sont exactes, tout revient à montrer qu'il existe des recouvrements ouverts $\mathcal{U}$ de U , arbitrairement fins, tels que le morphisme canonique :

$$P(U,M) \to \check{P}(\mathcal{U},M)$$

soit un épimorphisme.

Comme U est un ouvert quasi-compact de X et que les ouverts affines spéciaux constituent une base de la topologie de X , il est toujours possible de supposer que $\mathcal{U}$ est constitué par une famille finie $\{U_j\}_{j\in J}$ d'ouverts affines spéciaux formant un recouvrement de U .

Pour tout couple $(j,k)\in J\times J = J^2$, soit $U_{jk} = U_{kj} = U_j \cap U_k$. En posant provisoirement $L = L_U$, $L_j = L_{U_j}$ pour tout $j\in J$ et $L_{jk} = L_{kj} = L_{U_{jk}}$ pour tout $(j,k)\in J^2$, ainsi que : $\psi^j = \psi_M^{U_j U}$ pour tout $j\in J$ et $\psi^{kj} = \psi_M^{U_{jk}\, U_j}$, il est d'abord immédiat que $\check{P}(\mathcal{U},M)$ est aussi une limite projective du système projectif représenté par le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} L_j\, M & \xrightarrow{\psi^{kj}} & \\ & & L_{jk}\, M = L_{kj}\, M \\ L_k\, M & \xrightarrow[\psi^{jk}]{} & \end{array}$$

dans lequel $j\in J$ et $(j,k)\in J^2$.

Un élément $\xi\in\check{P}(\mathcal{U},M)$ est donc représenté par une famille $\xi = (\xi_j)_{j\in J}$ d'éléments $\xi_j \in L_j\, M$ pour tout $j\in J$, telle que tout

$(j,k)\in J^2$ entraîne la relation :

$$(1) \qquad \psi^{kj}(\xi_j) = \xi_{kj} = \xi_{jk} = \psi^{jk}(\xi_k) \ .$$

Tout revient donc à montrer que pour tout élément $\xi\in\check{P}(\mathcal{U},M)$ caractérisé de cette façon, il existe au moins un élément $\eta\in P(U,M) = LM$ vérifiant pour tout $j\in J$, la relation :

$$(2) \qquad \xi_j = \psi^j(\eta) \ .$$

En posant provisoirement $\mathfrak{F}_j = \mathfrak{F}_{U_j}$ pour tout $j\in J$ et $\mathfrak{F}_{jk} = \mathfrak{F}_{U_{jk}}$ pour tout $(j,k)\in J^2$, les relations : $\mathfrak{F}_j\, M \subset \mathfrak{F}_{jk}\, M$ permettent la considération des morphismes canoniques :

$$\mu_{k,j} : M'_j = M/_{\mathfrak{F}_j M} \to M'_{jk} = M/_{\mathfrak{F}_{jk} M} = M'_{kj} \ .$$

Soit $\xi\in\check{P}(\mathcal{U},M)$ un élément représenté par une famille $\xi = (\xi_j)_{j\in J}$ d'éléments $\xi_j\in L_j\, M$, vérifiant les relations (1).

L'élément $\xi_j\in L_j\, M = \varinjlim_{I\in\mathfrak{F}_j} \mathrm{Hom}(I,M'_j)$ est représenté par un homomorphisme : $\varphi''_j : Af''_j \to M'_j$, dans lequel f''_j est le générateur d'un idéal monogène Af''_j , élément de $\mathfrak{F}_j$, c'est-à-dire vérifiant : $U_j = D(f''_j)$ et pour lequel $\xi_j = \overline{\varphi''_j}$, en désignant systématiquement par la lettre "sur lignée", l'image d'un homomorphisme, dans la limite inductive où il figure.

L'élément $\xi_{k,j}\in L_{jk}\, M = \varinjlim_{I\in\mathfrak{F}_{jk}} \mathrm{Hom}(I,M'_{jk})$ image de ξ_j par ψ^{kj} , est représenté par la restriction à l'idéal $Af''_j f''_k$

du composé : $\mu_{kj} \circ \varphi''_j : Af''_j \to M'_{jk}$ et l'élément $\xi_{j,k} \in L_{kj}\, M = \varinjlim_{I \in \mathfrak{F}_k} \mathrm{Hom}(I, M'_{jk})$ image de ξ_k par ψ^{jk}, est représenté par la restriction à l'idéal $Af''_j f''_k$ du composé : $\mu_{jk} \circ \varphi''_k : Af''_k \to M'_{jk}$.

La définition de $L_{jk}\, M$, la relation $U_{jk} = U_j \cap U_k = D(f''_j) \cap D(f''_k) = D(f''_j f''_k)$ et le fait que $\mathfrak{F}_{jk}$ admet pour système cofinal les puissances de l'idéal $Af''_j f''_k$, montrent que les relations (1) entraînent l'existence d'entiers $m_{j,k}$ tels que les restrictions de $\mu_{kj} \circ \varphi''_j$ et de $\mu_{jk} \circ \varphi''_k$ à l'idéal $A(f''_j f''_k)^{m_{j,k}}$, coïncident.

Puisque l'ensemble J^2 est fini, si m est un entier qui majore les entiers $m_{j,k}$ pour tout $(j,k) \in J^2$, il en résulte que pour tout $(j,k) \in J^2$, les restrictions de $\mu_{kj} \circ \varphi''_j$ et de $\mu_{jk} \circ \varphi''_k$ à l'idéal $Af''^m_j f''^m_k$, coïncident.

En posant $f'_j = f''^m_j$ pour tout $j \in J$, ce qui entraîne en particulier $U_j = D(f'_j)$, si φ'_j est la restriction de φ''_j à l'idéal Af'_j, ce qui entraîne donc $\xi_j = \overline{\varphi}'_j$, pour tout $(j,k) \in J^2$, les restrictions de $\mu_{kj} \circ \varphi'_j$ et de $\mu_{jk} \circ \varphi'_k$ à l'idéal $Af'_j f'_k$, coïncident.

Pour tout $j \in J$, l'homomorphisme $\varphi'_j : Af'_j \to M'_j$ peut être caractérisé par un élément $y_j \in M$, dont l'image y'_j dans M'_j vérifie :

$$\varphi'_j(f'_j) = y'_j \;.$$

Puisque les restrictions de $\mu_{kj} \circ \varphi'_j$ et de $\mu_{jk} \circ \varphi'_k$ à l'idéal $Af'_jf'_k$ coïncident, il en résulte la relation :

$$\mu_{kj} \circ \varphi'_j(f'_kf'_j) = \mu_{jk} \circ \varphi'_k(f'_jf'_k)$$

qui donne alors la relation :

$$\mu_{kj}(f'_ky'_j) = \mu_{jk}(f'_jy'_k) \ .$$

Les deux membres de cette relation sont les images dans $M'_{jk} = M/_{\mathfrak{F}_{jk}M}$ des éléments f'_ky_j et f'_jy_k de M et cette relation entraîne donc la relation :

$$(f'_jy_k - f'_ky_j) \in \mathfrak{F}_{jk} M \ .$$

La relation $U_{jk} = D(f'_jf'_k)$, la définition de $\mathfrak{F}_{jk} M$ et le fait que $\mathfrak{F}_{jk}$ admet pour système cofinal les puissances de l'idéal $Af'_jf'_k$, montrent que la relation précédente entraîne l'existence d'entiers $p_{j,k}$ pour tout $(j,k) \in J^2$, tels que :

$$(f'_jf'_k)^{p_{j,k}} (f'_jy_k - f'_ky_j) = 0 \ .$$

Puisque l'ensemble J^2 est fini, si p est un entier qui majore les entiers $p_{j,k}$ pour tout $(j,k) \in J^2$, il en résulte les relations :

$$(3) \qquad (f'_jf'_k)^p (f'_jy_k - f'_ky_j) = 0$$

pour tout $(j,k) \in J^2$.

En posant $f_j = f'^{\,p+1}_j$ pour tout $j \in J$, ce qui entraîne en particulier $U_j = D(f_j)$, si φ_j est la restriction de φ'_j à l'idéal $Af_j = Af'^p_j\, f'_j$, ce qui entraîne donc $\xi_j = \overline{\varphi}_j$, elle est caractérisée par :

$$\varphi_j(f_j) = \varphi'_j(f'^p_j\, f'_j) = f'^p_j\, \varphi'_j(f'_j) = f'^p_j\, y'_j$$

et en posant $x_j = f'^p_j\, y_j$ pour tout $j \in J$, les images x'_j dans M'_j , vérifient :

$$\varphi_j(f_j) = x'_j\ .$$

La relation (3) se met sous la forme :

$$f'^{p+1}_j (f'^p_k\, y_k) - f'^{p+1}_k (f'^p_j\, y_j) = 0$$

ce qui donne alors :

$$f_j\, x_k - f_k\, x_j = 0\ .$$

En résumé, pour tout élément $\xi \in \check{P}(\mathcal{U},M)$ déterminé par une famille $\xi = (\xi_j)_{j\in J}$ d'éléments $\xi_j \in L_j\, M$, vérifiant les relations (1), il existe une famille $(f_j)_{j\in J}$ d'éléments de A , vérifiant :

$$(4) \qquad U_j = D(f_j)$$

une famille $(\varphi_j)_{j\in J}$ d'homomorphismes :

$$(5) \qquad \varphi_j : Af_j \to M'_j$$

vérifiant :

$$(6) \qquad \xi_j = \bar{\varphi}_j$$

et une famille $(x_j)_{j\in J}$ d'éléments de M , tels que si x'_j désigne l'image canonique de x_j dans $M'_j = M/\mathfrak{F}_j M$, les homomorphismes φ_j soient caractérisés par les relations :

$$(7) \qquad \varphi_j(f_j) = x'_j$$

et que de plus :

$$(8) \qquad f_j\, x_k - f_k\, x_j = 0$$

pour tout $(j,k)\in J$.

Puisque $U = \bigcup_{j\in J} U_j$, les relations (4) entraînent que l'idéal :

$$\mathfrak{a} = \sum_{j\in J} Af_j$$

vérifie $U = D(\mathfrak{a})$ et par suite $\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}$.

Si r est le nombre d'éléments de J , en posant : $\Lambda = A^r$, soit g l'homomorphisme surjectif de Λ sur $\mathfrak{a}$ défini par la condition suivante : pour tout $\lambda \in \Lambda$, caractérisé par une famille $\lambda = (\lambda_j)_{j\in J}$ d'éléments de A :

$$g(\lambda) = \sum_{j\in J} \lambda_j\, f_j\ .$$

Il en résulte une suite exacte :

$$0 \to K \to \Lambda \xrightarrow{g} \mathfrak{a} \to 0$$

dans laquelle le noyau K de g est constitué par les éléments $\lambda = (\lambda_j)_{j\in J}$, vérifiant :

$$\sum_{j\in J} \lambda_j f_j = 0 .$$

Si $\lambda = (\lambda_j)_{j\in J}$ vérifie $\lambda\in K$, pour tout indice $k\in J$, en posant $J_k = J - \{k\}$, il en résulte la relation :

$$- \lambda_k f_k = \sum_{j\in J_k} \lambda_j f_j$$

qui entraîne :

$$- \lambda_k f_k x_k = \sum_{j\in J_k} \lambda_j f_j x_k$$

et les relations (8) impliquent :

$$- \lambda_k f_k x_k = \sum_{j\in J_k} \lambda_j f_k x_j$$

ce qui donne :

$$f_k(\sum_{j\in J} \lambda_j x_j) = 0 .$$

Puisque la famille $(f_k)_{k\in J}$ engendre l'idéal $\mathfrak{a}$, il en résulte que tout $\alpha \in \mathfrak{a}$, vérifie :

$$\alpha \cdot (\sum_{j\in J} \lambda_j x_j) = 0$$

et puisque $\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}$, il en résulte la relation :

$$(\sum_{j\in J} \lambda_j x_j) \in \mathfrak{F}M .$$

Ainsi, la condition $\lambda \in K$ implique :

$$\left(\sum_{j\in J} \lambda_j\, x_j\right) \in \mathfrak{F}M .$$

Soit μ l'homomorphisme canonique de M sur $M' = M/_{\mathfrak{F}M}$ et soit φ_o l'homomorphisme de Λ dans M défini par :

$$\varphi_o(\lambda) = \sum_{j\in J} \lambda_j\, x_j .$$

Ce qui précède montre donc que la condition $\lambda \in K$ implique :

$$\mu \circ \varphi_o(\lambda) = 0$$

ce qui montre qu'il existe un homomorphisme unique :

$$\varphi : \mathfrak{a} \to M'$$

vérifiant :

$$\varphi \circ g = \mu \circ \varphi_o .$$

De façon précise, cet homomorphisme φ peut être caractérisé par la condition suivante : pour tout élément $\alpha \in \mathfrak{a}$ mis sous la forme :

$$\alpha = \sum_{j\in J} \alpha_j\, f_j$$

l'élément $\varphi(\alpha)$ de M' est caractérisé par :

$$\varphi(\alpha) = \sum_{j \in J} \alpha_j \, \mu(x_j)$$

et il est indépendant de la décomposition de α .

Pour tout $j \in J$, il en résulte en particulier :

$$\varphi(f_j) = \mu(x_j)$$

et comme l'image de $\mu(x_j)$ par l'homomorphisme canonique $\mu'_j : M' \to M'_j$ est x'_j , il en résulte les relations :

$$(9) \qquad \mu'_j \circ \varphi(f_j) = x'_j$$

Puisque $\mathfrak{a} \in \mathcal{F}$, l'homomorphisme $\varphi : \mathfrak{a} \to M'$ détermine un élément $\eta = \bar{\varphi}$ de LM et pour tout $j \in J$, les relations (6), (7) et (9) entraînent les relations :

$$\xi_j = \psi^j(\eta)$$

ce qui achève la démonstration.

4-4. *COROLLAIRE : Etant donné un* anneau commutatif A , *si* X = Spec(A) *est le* spectre premier *de* A , *le foncteur faisceau* $\check{P}$ *déterminé par* A , *possède les propriétés suivantes :*

(a) Le faisceau d'anneaux $\check{P}(A)$ *sur* X *coïncide avec le* faisceau structural $\mathcal{O}_X = \tilde{A}$ *du* schéma affine $(X, \mathcal{O}_X)$ *défini par* A .

(b) Pour tout A*-module* M , *le faisceau* $\check{P}(M)$ *sur* X *est un* $\check{P}(A)$*-Module qui coïncide avec le* $\mathcal{O}_X$*-Module* $\tilde{M}$ *associé de façon classique au* A*-module* M .

La remarque qui suit la définition 4-2 montre que le faisceau $\check{P}(M)$ sur X est un $\check{P}(A)$-Module, c'est-à-dire que pour tout ouvert U de X , l'objet $\check{P}(U,M)$ de Mod est un $\check{P}(U,A)$-module et que pour deux ouverts U et U' de X vérifiant : $U \supset U'$, le morphisme canonique $\check{P}(U,M) \to \check{P}(U',M)$ dans Mod se projette dans Ann suivant le morphisme canonique : $\check{P}(U,A) \to \check{P}(U',A)$.

Pour tout élément $f \in A$, l'ouvert affine spécial D(f) est quasi-compact et le théorème 4-3 entraîne les relations :

$$\check{P}(D(f),A) = P(D(f),A) = L_{D(f)}A = A_f$$

et

$$\check{P}(D(f),M) = P(D(f),M) = L_{D(f)}M = M_f$$

dans lesquelles A_f [resp. M_f] est l'anneau [resp. le module] localisé de l'anneau A [resp. du A-module M] pour la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_f$ dans la catégorie des A-modules, caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F}_f$ des idéaux de A qui contiennent une puissance de f .

Comme la construction classique [7] [2] du faisceau structural $\mathcal{O}_X = \tilde{A}$ [respectivement du $\mathcal{O}_X$-Module $\tilde{M}$] le caractérise par les conditions $\Gamma(D(f),\mathcal{O}_X) = A_f$ [resp. : $\Gamma(D(f),\tilde{M}) = M_f$] pour tout élément $f \in A$, le corollaire 4-4 en résulte immédiatement.

4-5. *COROLLAIRE : Etant donné un* anneau commutatif A , *si* X = Spec(A) *est le* spectre premier *de* A , *si* P *est le foncteur préfaisceau et si* $\check{P}$ *est le foncteur faisceau déterminés par* A , *pour tout* ouvert quasi-compact U *de* X *et pour tout* idéal de type fini $\mathfrak{a}$ *de* A , *vérifiant* $U = D(\mathfrak{a})$, *alors* :

(*a*) *Le faisceau structural* $\mathcal{O}_X = \tilde{A}$ *du schéma affine* $(X, \mathcal{O}_X)$ *défini par* A , *vérifie*

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \check{P}(U,A) = P(U,A) = L_U\, A\ .$$

En particulier, si $\mathfrak{F}_U\, A$ *est l'idéal de* A *constitué par les éléments de* A *dont l'annulateur appartient à* $\mathfrak{F}_U$, *c'est-à-dire contient un idéal de la forme* $\mathfrak{a}^n$, *avec* $n\ \mathbb{N}$, *alors* :

$$\Gamma(U,\mathcal{O}_X) = \varinjlim_{D(I)=U} \mathrm{Hom}(I, A/\mathfrak{F}_U A) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}^n, A/\mathfrak{F}_U A)$$

(*b*) *Pour tout* A-*module* M , *le* $\mathcal{O}_X$-*Module* $\tilde{M}$ *associé à* M , *vérifie* :

$$\Gamma(U,\tilde{M}) = \check{P}(U,M) = P(U,M) = L_U\, M\ .$$

En particulier, si $\mathfrak{F}_U\, M$ *est le sous-module constitué par les éléments de* M *dont l'annulateur appartient à* $\mathfrak{F}_U$, *c'est-à-dire contient un idéal de la forme* $\mathfrak{a}^n$, *avec* $n \in \mathbb{N}$, *alors* :

$$\Gamma(U,\tilde{M}) = \varinjlim_{D(I)=U} \mathrm{Hom}(I, M/\mathfrak{F}_U M) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}^n, M/\mathfrak{F}_U M)\ .$$

La caractérisation de $\mathfrak{F}_U$ résulte du lemme 2-6 et elle entraîne alors les caractérisations de $\mathfrak{F}_U\, A$ et de $\mathfrak{F}_U\, M$.

Ce corollaire 4-5 est alors une conséquence immédiate des définitions de P et de $\check{P}$, ainsi que du théorème 4-3 et du corollaire 4-4.

4-6. *COROLLAIRE : Etant donné un* anneau commutatif A , *si* X = Spec(A) *est le* spectre premier *de* A , *alors* :

(a) Pour tout ouvert quasi-compact U *de* X *tel que tout idéal* I *de* A , *vérifiant* U = D(I) *ait un annulateur nul et pour tout* idéal de type fini $\mathfrak{a}$ *de* A *vérifiant* U = D($\mathfrak{a}$) , *le faisceau structural* $\mathcal{O}_X = \tilde{A}$ *du schéma affine* (X, $\mathcal{O}_X$) *défini par* A , *vérifie* :

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \varinjlim_{D(I)=U} \operatorname{Hom}(I,A) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Hom}(\mathfrak{a}^n,A) .$$

(b) Pour tout A-*module* M *et pour tout* ouvert quasi-compact U *de* X *tel que tout idéal* I *de* A , *vérifiant* U = D(I) , *ne soit contenu dans aucun des annulateurs des éléments non nuls de* M *et pour tout* idéal de type fini $\mathfrak{a}$ *de* A , *vérifiant* U = D($\mathfrak{a}$) , *le* $\mathcal{O}_X$-*Module* $\tilde{M}$ *associé à* M , *vérifie* :

$$\Gamma(U,\tilde{M}) = \varinjlim_{D(I)=U} \operatorname{Hom}(I,M) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Hom}(\mathfrak{a}^n,M) .$$

Les hypothèses entraînent respectivement $\mathfrak{F}_U A = 0$ et $\mathfrak{F}_U M = 0$. Le corollaire 4-6 est alors une conséquence immédiate du corollaire 4-5.

4-7. *LEMME : Etant donné un* anneau commutatif noethérien A , *soit* $\mathcal{A}$ = Mod A *la catégorie des* A-*modules. Pour toute localisation* $\tilde{\mathcal{L}}$ *dans* $\mathcal{A}$, *caractérisée par un ensemble topologisant et idempotent* $\mathfrak{F}$ *d'idéaux de* A , *le foncteur localisation* L *peut être caractérisé par la condition suivante : pour tout objet* M *de* $\mathcal{A}$:

$$LM = \varinjlim_{I \in \mathfrak{F}} \mathrm{Hom}(I,M) \ .$$

En effet, si $\mathcal{C}$ est la sous-catégorie localisante de $\mathcal{A}$ associée à $\tilde{\mathcal{L}}$, la proposition 10 (p. 428) de [3] montre que $\mathcal{C}$ est stable par enveloppes injectives et le lemme 4-7 résulte alors du corollaire 1. (p. 413) de [3].

4-8. *COROLLAIRE : Etant donné un* anneau commutatif noethérien A , *si* X = Spec(A) *est le* spectre premier *de* A , *pour tout* ouvert U *de* X *et pour tout idéal* $\mathfrak{a}$ *de* A , *vérifiant* U = D($\mathfrak{a}$) , *alors* :

(a) *Le faisceau structural* $\mathcal{O}_X = \tilde{A}$ *du schéma affine défini par* A , *vérifie* :

$$\Gamma(U,\mathcal{O}_X) = \varinjlim_{D(I)=U} \mathrm{Hom}(I,A) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}^n,A)$$

(b) *Pour tout* A-*module* M , *le* $\mathcal{O}_X$-*Module* $\tilde{M}$ *associé à* M , *vérifie* :

$$\Gamma(U,\tilde{M}) = \varinjlim_{D(I)=U} \mathrm{Hom}(I,M) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}^n,M) \ .$$

Comme tout ouvert U de X est quasi-compact et que tout idéal $\mathfrak{a}$ de A , est de type fini, le corollaire 4-8 est une conséquence du corollaire 4-5 et du lemme 4-7.

4-9. *COROLLAIRE : Etant donné un* anneau commutatif noethérien A , *si* X = Spec(A) *est le* spectre premier *de* A *et si* $\mathcal{O}_X = \tilde{A}$ *est le faisceau structural du schéma affine défini par* A , *alors pour tout* A-*module* injectif N *le* $\mathcal{O}_X$-*Module* $\tilde{N}$ *est un* faisceau flasque.

Puisque N est injectif, pour tout idéal I de A , l'application canonique de Hom(A,N) dans Hom(I,N) est surjective et par suite pour tout ouvert U de X , il en est de même pour l'application canonique :

$$N \to \varinjlim_{D(I)=U} \mathrm{Hom}(I,N)$$

Ainsi, d'après le corollaire 4-8, l'application canonique

$$\psi_N^U : \Gamma(X,\tilde{N}) \to \Gamma(U,\tilde{N})$$

est surjective, ce qui prouve que le $\mathcal{O}_X$-Module N est un faisceau *flasque* [5].

Remarques.

(a) Compte tenu du corollaire 4-4, le théorème 4-3 exprime que pour tout A-module M et pour tout *ouvert quasi-compact* U de X , le morphisme canonique :

$$\Theta_M^U : L_U\, M = P(U,M) \to \Gamma(U,\tilde{M})$$

est un isomorphisme. Ainsi, le théorème 4-3 est une généralisation du théorème (1-3-7) de [7] qui établit le résultat analogue dans le cas particulier où U est un *ouvert affine spécial* de la forme D(f) avec $f \in A$.

(b) L'étude des ouverts affines dans les spectres des anneaux intègres noethériens a été abordée dans [12]. Comme il était indiqué que les hypothèses faites étaient trés restrictives, pour aborder un problème analogue dans le cas du schéma affine $(X, \mathcal{O}_X)$ défini par un anneau commutatif A quelconque, il convient en particulier d'étudier les anneaux de sections $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ au-dessus d'un ouvert quasi-compact U de X .

La proposition 5-10 et le corollaire 5-11 de [12] qui constituaient des résultats dans cette voie, sont donnés par la partie (*a*) du corollaire 4-6, qui montre que des résultats analogues subsistent pour tout $\mathcal{O}_X$-Module $\tilde{M}$ associé à un A-module M .

Comme ce corollaire 4-6 n'est évidemment qu'un cas particulier du corollaire 4-5, il en résulte que les hypothèses relatives aux annulateurs ne sont pas indispensables, à condition de formuler les résultats sous une forme adaptée.

De plus, dans le cas *noethérien*, le corollaire 4-8 montre que les formulations simples des résultats restent valables sans hypothèses sur les annulateurs.

(c) Etant donné un *anneau commutatif* A , soit $\mathcal{A}$ = Mod A la catégorie des A-modules et si $\mathcal{O}_X = \tilde{A}$ est le faisceau structural du schéma affine $(X, \mathcal{O}_X)$ défini par A , soit $\mathcal{B}_o$ la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules (non nécessairement quasi-cohérents) et soit $\mathcal{B}$ la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules *quasi-cohérents*.

D'après le corollaire 4-4, le théorème (1-4-1) de [7] montre que le foncteur $\check{P}$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ et la restriction à $\mathcal{B}$ du foncteur $\Gamma = \Gamma(X,\cdot)$ de $\mathcal{B}_o$ dans $\mathcal{A}$, établissent une équivalence entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

Pour tout objet M de $\mathcal{A}$, il est possible de construire une résolution cohomologique *injective* de M dans $\mathcal{A}$, de la forme :

(1) $$0 \to M \to N_o \to N_1 \to \cdots \to N_p \to \cdots$$

La proposition (1-3-5) de [7] montre que l'image de cette résolution par le foncteur $\check{P}$ est une résolution cohomologique de $\check{P}(M) = \tilde{M}$, dans $\mathcal{B}_o$, de la forme :

(2) $$0 \to \tilde{M} \to \tilde{N}_o \to \tilde{N}_1 \to \cdots \to \tilde{N}_p \to \cdots$$

et par application du foncteur $\Gamma = \Gamma(X,\cdot)$ il en résulte un complexe augmenté, dans $\mathcal{A}$, de la forme :

(3) $$0 \to \Gamma\tilde{M} \to \Gamma\tilde{N}_o \to \Gamma\tilde{N}_1 \to \cdots \to \Gamma\tilde{N}_p \to \cdots$$

qui, d'après ce qui précède, est équivalent à la résolution (1) et par suite est *acyclique*.

Si l'anneau commutatif A est *noethérien*, le corollaire 4-9 entraîne que la résolution (2) est une *résolution cohomologique* de $\tilde{M}$ dans $\mathcal{B}_o$ par des *faisceaux flasques*.

Le théorème 4-7-1 de [5] entraîne que la cohomologie $H^*(X,\tilde{M})$ du $\mathcal{O}_X$-Module $\tilde{M}$ peut être calculée au moyen d'une résolution flasque de $\tilde{M}$.

Il en résulte que la *cohomologie* $H^*(X,\tilde{M})$ du $\mathcal{O}_X$-Module $\tilde{M}$ est la cohomologie du complexe augmenté (3) et puisqu'il est acyclique, il en résulte :

$$H^p(X,\tilde{M}) = 0$$

pour tout $p > 0$.

Cette méthode permet donc d'établir facilement que pour tout *schéma affine noethérien* $(X, \mathcal{O}_X)$ déterminé par un *anneau commutatif noethérien* A , et pour tout $\mathcal{O}_X$-Module *quasi-cohérent* $\tilde{M}$, alors :

$$H^p(X,\tilde{M}) = 0$$

pour tout $p > 0$.

Ainsi, le corollaire 4-9 conduit à une démonstration élémentaire *dans le cas des schémas affines noethériens*, du résultat établi dans le théorème (1-3-1) de [8] pour les schémas affines quelconques, mais dont la démonstration fait appel à une technique beaucoup plus élaborée.

5 - LOCALISATIONS IMAGES DIRECTES.

5-1 - Notations. Etant donnés deux anneaux (non nécessairement commutatifs) A et A' , soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ les catégories de modules (à gauche) sur A et sur A' .

Pour tout homomorphisme d'anneaux $\rho : A \to A'$, le foncteur restriction des scalaires ρ_* de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}$, est un adjoint à droite au foncteur extension des scalaires ρ^* de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}'$.

Pour toute localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ dans $\mathcal{A}$, caractérisée par une sous-catégorie localisante $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ ou par un ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F}$, puisque le foncteur ρ_* est exact et commute aux limites inductives, il est facile de vérifier que la sous-catégorie pleine $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{A}'$ caractérisée par les objets dont l'image par ρ_* est un objet de $\mathcal{C}$, constitue une sous-catégorie localisante de $\mathcal{A}'$, appelée l'*image* $\mathcal{C}' = \rho(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ par ρ . L'ensemble topologisant et idempotent associé à $\mathcal{C}'$ est appelé l'*image* $\mathcal{F}' = \rho(\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$ par ρ . Il est constitué par les idéaux (à gauche) I' de A' , tels que $\rho_*(A'/_{I'})$ soit un objet de $\mathcal{C}$. Ainsi, la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ dans $\mathcal{A}$ détermine une localisation $\tilde{\mathcal{L}}'$ dans $\mathcal{A}'$, appelée l'*image* $\tilde{\mathcal{L}}' = \rho(\tilde{\mathcal{L}})$ de $\tilde{\mathcal{L}}$ par ρ et caractérisée par la sous-catégorie localisante $\mathcal{C}' = \rho(\mathcal{C})$ ou par l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F}' = \rho(\mathcal{F})$.

5-2. LEMME : *Avec les données et les notations précédentes, si l'une ou l'autre des conditions suivantes est réalisée :*

(α) *Les anneaux* A *et* A' *sont* commutatifs.

(β) *L'anneau* A' *est le* localisé $A_{\mathfrak{F}}$ *de* A *pour la localisation* $\tilde{\mathcal{L}}$ *et* ρ *est l'homomorphisme canonique de* A *dans* $A_{\mathfrak{F}}$;

Alors, l'ensemble $\mathfrak{F}'$ *est consitué par les idéaux (à gauche) de* A' *dont l'image réciproque par* ρ , *appartient à l'ensemble* $\mathfrak{F}$.

La conclusion est immédiate sous la condition (α) et elle est facile à vérifier sous la condition (β) (voir par exemple la partie h) de l'exercice 19 (p. 161) de [1]).

5-3. LEMME : *Avec les données et les notations précédentes, soient* $\mathcal{L}$ *et* $\mathcal{L}'$ *les sous-catégories locales de* $\tilde{\mathcal{L}}$ *et de* $\tilde{\mathcal{L}}'$, *soient* S *et* S' *les foncteurs canoniques d'injection de* $\mathcal{L}$ *dans* $\mathcal{A}$ *et de* $\mathcal{L}'$ *dans* $\mathcal{A}'$, *et soient* T *et* T' *des foncteurs canoniques de* $\mathcal{A}$ *dans* $\mathcal{L}$ *et de* $\mathcal{A}'$ *dans* $\mathcal{L}'$, *tels que les foncteurs localisation* L *et* L' *associés à* $\tilde{\mathcal{L}}$ *et à* $\tilde{\mathcal{L}}'$ *soient caractérisés par :*

$$L = ST \quad \textit{et} \quad L' = S'T'$$

Alors :

(a) *Il existe un foncteur canonique :*

$$\rho_o : \mathscr{L}' \to \mathscr{L}$$

caractérisé par la condition :

(1) $\rho_o\, T' = T\, \rho_*$

(b) *Si l'anneau* A' *est le* localisé $A_{\mathfrak{F}}$ *de* A *pour la localisation* $\tilde{\mathscr{L}}$ *et si* ρ *est l'homomorphisme canonique de* A *dans* $A_{\mathfrak{F}}$, *le foncteur* ρ_o *est caractérisé par la condition :*

(1') $S\, \rho_o = \rho_*\, S'$

et il existe un foncteur canonique :

$$\rho_1 : \mathscr{L} \to \mathscr{L}'$$

caractérisé par les conditions :

(2) $S = \rho_*\, S'\, \rho_1$ et (3) $T' = \rho_1\, T\, \rho_*$

De plus, les foncteurs ρ_o *et* ρ_1 *établissent une* équivalence *entre la catégorie* $\mathscr{L}$ *et la catégorie* $\mathscr{L}'$.

La définition de la localisation $\tilde{\mathscr{L}}'$ montre que le foncteur exact $T\, \rho_*$ de $\mathscr{A}'$ dans $\mathscr{L}$ s'annule sur la sous-catégorie localisante $\mathscr{C}'$ associée à $\tilde{\mathscr{L}}'$. Puisque la catégorie quotient $\mathscr{A}'/_{\mathscr{C}'}$ est équivalente à la catégorie $\mathscr{L}'$ et que le foncteur canonique de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}'/_{\mathcal{C}'}$ correspond, dans cette équivalence, au foncteur canonique T' de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{L}'$, le corollaire 2 (p. 368) de [3] montre qu'il existe un foncteur unique ρ_o de $\mathcal{L}'$ dans $\mathcal{L}$ vérifiant la relation :

$$(1) \qquad \rho_o\, T' = T\, \rho_* \quad .$$

Sous la condition (*b*), la proposition 3 (p. 413) de [3] montre qu'il existe un foncteur S_1 de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{A}'$, induit par le foncteur localisation L , tel que $\rho_*\, S_1$ soit adjoint à droite à T , ce qui entraîne $S = \rho_*\, S_1$ et tel que $S_1\, T\, \rho_*$ induise le foncteur localisation L' , ce qui entraîne l'existence d'un foncteur ρ_1 de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{L}'$, caractérisé par :

$$S_1 = S'\, \rho_1 \qquad \text{et} \qquad S'T' = S'\, \rho_1\, T\, \rho_* \, .$$

Puisque S' est pleinement fidèle, la seconde relation est équivalente à la relation (3) et, compte tenu de la relation $S = \rho_*\, S_1$, la première relation se traduit par la relation (2).

La relation $T'S' = I_{\mathcal{L}'}$ entraîne en particulier :

$$\rho_o = \rho_o\, T'S' = T\, \rho_*\, S'$$

et il en résulte alors les relations :

$$\rho_o\, \rho_1 = T\, \rho_*\, S'\, \rho_1 = TS = I_{\mathcal{L}}$$

et

$$\rho_1\, \rho_o = \rho_1\, T\, \rho_*\, S' = T'S' = I_{\mathcal{L}'}$$

qui montrent que ρ_o et ρ_1 établissent une équivalence entre la catégorie $\mathcal{L}$ et la catégorie $\mathcal{L}'$.

La relation $\rho_1\ \rho_o = I_{\mathcal{L}'}$ et la relation (2) entraînent :

$$S\ \rho_o = \rho_*\ S'\ \rho_1\ \rho_o = \rho_*\ S'$$

c'est-à-dire la relation (1') et réciproquement la relation (1') entraîne :

$$S\ \rho_o\ T' = \rho_*\ S'T' = \rho_*\ S'\ \rho_1\ T\ \rho_* = ST\ \rho_*$$

et puisque S est pleinement fidèle, il en résulte la relation (1), ce qui achève la démonstration.

5-4. *DEFINITION : Etant donné un anneau (non nécessairement commutatif)* A *, soit* $\mathcal{A}$ = Mod A *la catégorie des* A-*modules (à gauche) et soit* $\tilde{\mathcal{L}}$ *une localisation dans* $\mathcal{A}$ *caractérisée par un ensemble topologisant et idempotent* $\mathcal{F}$ *d'idéaux (à gauche) de* A .

Un sous-objet N *d'un objet* M *de* $\mathcal{A}$ *est* $\mathcal{F}$-clos *dans* M *si* $\mathcal{F}(M/_N) = 0$, *c'est-à-dire si* $M/_N$ *est un objet de la mono-sous-catégorie* $\mathcal{M}$ *associée à la localisation* $\tilde{\mathcal{L}}$.

Un tel objet N *est un* sous-objet clos *de* M *pour la localisation* $\tilde{\mathcal{L}}$.

5-5. *LEMME : Etant donné un anneau (non nécessairement commutatif)* A *, soit* $\mathcal{A}$= Mod A *la catégorie des* A-*modules (à gauche), soit* $\tilde{\mathcal{L}}$ *une localisation dans*

$\mathcal{A}$, caractérisée par un ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F}$ d'idéaux (à gauche) de A et soit $\psi : I_{\mathcal{A}} \to L$ le morphisme fonctoriel canonique du foncteur identique de $\mathcal{A}$ dans le foncteur localisation L de la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$.

Pour tout objet M de $\mathcal{A}$, l'application : $N \to LN$ et l'application $N' \to \psi_M^{-1}(N')$ caractérisent des correspondances bijectives réciproques *entre l'ensemble des sous-objets $\mathcal{F}$-clos dans M et l'ensemble des sous-objets $\mathcal{F}$-clos dans LM .*

Soit $\mathcal{C}$ la sous-catégorie localisante de $\mathcal{A}$ associée à la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ et soit $\mathcal{M}$ la mono-sous-catégorie de $\mathcal{A}$ associée à la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ [10].

Pour simplifier les notations, le morphisme canonique : $\psi_M : M \to LM$ sera provisoirement noté : $u : M \to M' = LM$.

Tout d'abord, il sera supposé que u est un monomorphisme, c'est-à-dire que $\mathcal{F}M = 0$.

Pour tout sous-objet N' de M' (et à fortiori de M), la caractérisation d'une $\mathcal{C}$-enveloppe donnée dans la démonstration de la proposition 4 (p. 372) de [3], montre que le localisé LN' de N' est l'image réciproque dans M' du sous-objet $\mathcal{F}(M'/_{N'})$ de $M'/_{N'}$.

Il en résulte en particulier que pour que N' soit $\mathcal{F}$-clos dans M' , il faut et il suffit que N' = LN' .

Pour tout sous-objet N de M , puisque $(LN)/_N$ est un objet de $\mathcal{C}$ [3], le sous-objet $(M \cap LN)/_N$ est également un objet de $\mathcal{C}$. Si N est $\mathcal{F}$-clos dans M , ce qui signifie que $M/_N$ est un objet de $\mathcal{M}$, le sous-objet $(M \cap LN)/_N$ est également un objet de $\mathcal{M}$ et puisqu'il appartient aussi à $\mathcal{C}$, il est nul, ce qui entraîne $N = M \cap LN$. Réciproquement, si un sous-objet N de M vérifie $N = M \cap LN$, ce qui entraîne la relation : $M/_N = M/_{(M \cap LN)} = (M + LN)/_{LN} \subset M'/_{LN}$, la relation $\mathcal{F}(M'/_{LN}) = 0$, qui résulte de la caractérisation de LN , montre alors que $\mathcal{F}(M/_N) = 0$, c'est-à-dire que N est $\mathcal{F}$-clos dans M .

Ainsi, pour qu'un sous-objet N de M soit $\mathcal{F}$-clos dans M, il faut et il suffit que N vérifie : $N = M \cap LN$.

Il en résulte alors que pour tout sous-objet N de M qui est $\mathcal{F}$-clos dans M , le sous-objet LN de M' est $\mathcal{F}$-clos dans M' et de plus : $u^{-1}(LN) = M \cap LN = N$.

Soit N' un sous-objet de M' qui est $\mathcal{F}$-clos dans M' , c'est-à-dire qui vérifie : $N' = LN'$. En posant $N = M \cap N'$, puisque $M'/_M$ est un objet de $\mathcal{C}$, la relation : $N'/_N = N'/_{(M \cap N')} = (N' + M)/_M \subset M'/_M$ montre que $N'/_N$ est un objet de $\mathcal{C}$, ce qui entraîne $LN = LN'$. Il en résulte la relation : $N = M \cap LN$ qui montre que N est $\mathcal{F}$-clos dans M et la relation : $N' = LN$.

Ainsi, pour tout sous-objet N' de M' qui est $\mathcal{F}$-clos dans M' , le sous-objet $u^{-1}(N') = M \cap N'$ de M est $\mathcal{F}$-clos dans M et de plus : $L(u^{-1}(N')) = N'$.

La conclusion du lemme 5-5 est donc démontrée lorsque u est un monomorphisme.

Pour passer au cas général, il convient de remarquer que si N est un sous-objet de M qui est $\mathfrak{F}$-clos dans M , la suite exacte :

$$0 \to N \to M \to M/_N \to 0$$

donne la suite exacte :

$$0 \to \mathfrak{F}N \to \mathfrak{F}M \to \mathfrak{F}(M/_N)$$

dans laquelle $\mathfrak{F}(M/_N) = 0$, ce qui entraîne $\mathfrak{F}M \subset N$ et par suite : $M/_N = u(M)/_{u(N)}$.

Il en résulte que l'application : $N \to u(N)$ et l'application : $N'' \to u^{-1}(N'')$ caractérisent des correspondances bijectives réciproques entre l'ensemble des sous-objets N qui sont $\mathfrak{F}$-clos dans M et l'ensemble des sous-objets N" qui sont $\mathfrak{F}$-clos dans u(M) .

En remarquant que $LN = L(u(N))$ pour tout sous-objet N de M et que $u^{-1}(N') = u^{-1}(N' \cap u(M))$ pour tout sous-objet N' de M' , la combinaison des deux résultats précédents entraîne immédiatement la conclusion du lemme 5-5 dans le cas général.

5-6. *COROLLAIRE : Etant donné un anneau (non nécessairement commutatif)* A , *soit* $\mathcal{A}$= Mod A *la catégorie des* A-*modules et soit* $\tilde{\mathcal{L}}$ *une localisation dans* $\mathcal{A}$, *caractérisée par un ensemble topologisant et idempo-*

tent $\mathfrak{F}$ *d'idéaux (à gauche) de* A .

Soit $\rho : A \to A'$ *l'homomorphisme canonique de* A *dans l'anneau* localisé. $A' = A_{\mathfrak{F}}$ *de* A *pour la localisation* $\tilde{\mathcal{L}}$, *soit* $\mathcal{A}'$ = Mod A' *la catégorie des* A'*-modules, soit* $\tilde{\mathcal{L}}' = \rho(\tilde{\mathcal{L}})$ *la localisation dans* $\mathcal{A}'$, image *par* ρ *de la localisation* $\tilde{\mathcal{L}}$ *et soit* $\mathfrak{F}' = \rho(\mathfrak{F})$ *l'ensemble topologisant et idempotent d'idéaux (à gauche) de* A , image *par* ρ *de l'ensemble* $\mathfrak{F}$.

Alors, l'application : $I \to I_{\mathfrak{F}}$ *et l'application* : $I' \to \rho^{-1}(I)$ *caractérisent des correspondances* bijectives réciproques *entre l'ensemble des idéaux (à gauche)* I *de* A *qui sont* $\mathfrak{F}$-clos *dans* A *et l'ensemble des idéaux (à gauche)* I' *de* A' *qui sont* $\mathfrak{F}'$-clos *dans* A' .

Pour tout objet M' de $\mathcal{A}'$ et pour tout élément $y \in M'$, l'annulateur dans A de y considéré comme un élément de $\rho_* M'$ est l'image réciproque par ρ de l'annulateur dans A' de y considéré comme un élément de M' . Puisque le lemme 5-2 montre que $I' \in \mathfrak{F}'$ équivaut à $\rho^{-1}(I') \in \mathfrak{F}$, il en résulte la relation :

$$\mathfrak{F} \rho_* M' = \rho_* \mathfrak{F}' M' .$$

Pour tout objet M' de $\mathcal{A}'$ et pour tout sous-objet N' de M' , cette relation et l'exactitude du foncteur ρ_* montrent que pour que N' soit $\mathfrak{F}'$-clos dans M' , il faut et il suffit que ρ_* N' soit $\mathfrak{F}$-clos dans ρ_* M' .

La relation : $\rho_*(M_{\mathfrak{F}}) = LM$ pour tout objet M de $\mathcal{A}$, montre alors que le corollaire 5-6 résulte du lemme 5-5.

5-7. *COROLLAIRE :* *Avec les données et les notations du corollaire* 5-6, *si l'anneau* A *est* commutatif *(ce qui entraîne que l'anneau* $A' = A_{\mathfrak{F}}$ *est* commutatif*), alors, l'application* $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}_{\mathfrak{F}}$ *et l'application* $\mathfrak{p}' \to \rho^{-1}(\mathfrak{p}')$ *caractérisent des correspondances* bijectives réciproques *entre l'ensemble des idéaux* premiers $\mathfrak{p}$ *de* A *qui n'appartiennent pas à* $\mathfrak{F}$ *et l'ensemble des idéaux* premiers $\mathfrak{p}'$ *de* A' *qui n'appartiennent pas à* $\mathfrak{F}'$.

Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A , l'annulateur de tout élément non nul du A-module $A/\mathfrak{p}$ est égal à $\mathfrak{p}$, ce qui entraîne que $\mathfrak{F}(A/\mathfrak{p}) = A/\mathfrak{p}$ si $\mathfrak{p} \in \mathfrak{F}$ et que $\mathfrak{F}(A/\mathfrak{p}) = 0$ si $\mathfrak{p} \notin \mathfrak{F}$. En particulier, pour que $\mathfrak{p}$ soit $\mathfrak{F}$-clos dans A , il faut et il suffit que $\mathfrak{p} \notin \mathfrak{F}$. De même, pour qu'un idéal premier $\mathfrak{p}'$ de A' soit $\mathfrak{F}'$-clos dans A' , il faut et il suffit que $\mathfrak{p}' \notin \mathfrak{F}'$.

Compte tenu du corollaire 5-6, il en résulte que pour démontrer le corollaire 5-7, tout revient à montrer que les deux correspondances transforment un idéal premier en un idéal premier.

Il est bien connu que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}'$ de A', l'idéal $\mathfrak{p} = \rho^{-1}(\mathfrak{p}')$ de A est premier.

La construction classique d'un anneau localisé permet de montrer que le localisé d'un anneau intègre est un anneau intègre. Puisque le foncteur localisation est exact à gauche, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, la suite exacte :

$$0 \to \mathfrak{p} \to A \to A/\mathfrak{p} \to 0$$

donne une suite exacte :

$$0 \to \mathfrak{p}_{\mathfrak{F}} \to A_{\mathfrak{F}} \to (A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{F}}$$

qui montre que $A_{\mathfrak{F}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{F}}$ est un sous-anneau de l'anneau intègre $(A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{F}}$. Si $\mathfrak{p} \notin \mathfrak{F}$, ce qui entraîne $\mathfrak{p}_{\mathfrak{F}} \neq A_{\mathfrak{F}}$, il en résulte que $\mathfrak{p}_{\mathfrak{F}}$ est un idéal premier de $A' = A_{\mathfrak{F}}$, ce qui achève la démonstration.

5-8. *LEMME* : *Etant donnés deux anneaux* commutatifs A *et* A', *si* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *et* $X' = \mathrm{Spec}(A')$ *sont les* spectres premiers *de* A *et de* A' *munis de la topologie spectrale, si* $\mathcal{A} = \mathrm{Mod}\, A$ *et* $\mathcal{A}' = \mathrm{Mod}\, A'$ *sont les catégories des* A*-modules et des* A'*-modules et si* $\rho : A \to A'$ *est un homomorphisme d'anneaux, soit* $\varphi : X' \to X$ *l'application continue déterminée par* ρ.

Alors, pour tout ouvert U *de* X, *en posant* $U' = \varphi^{-1}(U)$, *la localisation* $\tilde{\mathcal{L}}_{U'}$ *dans* $\mathcal{A}'$, *associée à l'ouvert* U' *de* X, *est l'*image *par* ρ *de la* *localisation* $\tilde{\mathcal{L}}_U$ *dans* $\mathcal{A}$, *associée à l'ouvert* U *de* X .

Soient $\mathcal{F}_U$ et $\mathcal{F}_{U'}$ les ensembles topologisants et idempotents associés aux localisations $\tilde{\mathcal{L}}_U$ et $\tilde{\mathcal{L}}_{U'}$ et soit $\mathcal{F}' = \rho(\mathcal{F}_U)$ l'ensemble topologisant et idempotent associé à la localisation $\tilde{\mathcal{L}}' = \rho(\tilde{\mathcal{L}}_U)$ image par ρ de la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_U$.

Pour tout idéal I de A , en posant $\bar{\rho}(I) = A'\rho(I)$, la définition de l'application continue $\varphi : X' \to X$ entraîne la relation :

$$\varphi^{-1}(D(I)) = D(\bar{\rho}(I)) \ .$$

D'après le lemme 5-2, l'ensemble $\mathcal{F}' = \rho(\mathcal{F}_U)$ est constitué par les idéaux I' de A' dont l'image réciproque $\rho^{-1}(I')$ appartient à $\mathcal{F}_U$.

En particulier, pour tout $I' \in \mathcal{F}'$, il existe $I \in \mathcal{F}_U$ tel que $\rho(I) \subset I'$, ce qui est équivalent à $\bar{\rho}(I) \subset I'$. Puisque la condition $I \in \mathcal{F}_U$ se traduit par la relation : $U \subset D(I)$, il en résulte la relation :

$$U' = \varphi^{-1}(U) \subset \varphi^{-1}(D(I)) = D(\bar{\rho}(I)) \subset D(I')$$

qui entraîne $I' \in \mathcal{F}_{U'}$.

Ainsi, les ensembles $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}_{U'}$ vérifient la relation :

$$\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}_{U'} \ .$$

Si cette inclusion n'est pas une égalité, il existe un idéal I" de A' vérifiant :

$$I'' \in \mathfrak{F}_{U'} \quad \text{et} \quad I'' \notin \mathfrak{F}'$$

c'est-à-dire :

$$U' \subset D(I'') \quad \text{et} \quad \rho^{-1}(I'') \notin \mathfrak{F}_U$$

ou encore :

$$U' \subset D(I'') \quad \text{et} \quad U \not\subset D(\rho^{-1}(I'')) \quad .$$

L'idéal $I' = r(I'')$, racine de l'idéal I" , vérifie :

$$\rho^{-1}(I') = \rho^{-1}(r(I'')) = r(\rho^{-1}(I''))$$

ce qui entraîne : $D(I'') = D(I')$ et $D(\rho^{-1}(I'')) = D(\rho^{-1}(I'))$. Ainsi, il existe un idéal I' de A' , tel que $I' = r(I')$ et $\rho^{-1}(I') = r(\rho^{-1}(I'))$, et vérifiant :

$$U' \subset D(I') \quad \text{et} \quad U \not\subset D(\rho^{-1}(I')) \ .$$

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A , vérifiant $U = D(\mathfrak{a})$ et par suite :

$$U' = \varphi^{-1}(U) = \varphi^{-1}(D(\mathfrak{a})) = D(\bar{\rho}(\mathfrak{a}))$$

La condition $U \not\subset D(\rho^{-1}(I'))$ entraîne $\mathfrak{a} \not\subset \rho^{-1}(I')$ et par suite $\rho(\mathfrak{a}) \not\subset I'$ et $\bar{\rho}(\mathfrak{a}) \not\subset I'$. Puisque l'idéal I' est égal à sa racine, il existe donc un idéal premier $\mathfrak{p}'$ de A' , vérifiant $\bar{\rho}(\mathfrak{a}) \not\subset \mathfrak{p}'$ et $I' \subset \mathfrak{p}$; c'est-à-dire $\mathfrak{p}' \in D(\bar{\rho}(\mathfrak{a})) = U'$ et $\mathfrak{p}' \notin D(I')$, ce qui est absurde en vertu de la condition : $U' \subset D(I')$. Ainsi, il en résulte l'égalité :

$$\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}_{U'}$$

ce qui achève la démonstration.

5-9. *THEOREME* : *Etant donné un anneau* commutatif A , *soit* X = Spec(A) *le* spectre premier *de* A *muni de la topologie spectrale et soit* $\mathcal{A}$ = Mod A *la catégorie des* A-*modules*.

Pour tout ouvert U *de l'espace topologique* X , *soit* $\tilde{\mathcal{L}}_U$ *la localisation dans* $\mathcal{A}$, *associée à l'ouvert* U *de* X *et caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent* $\mathcal{F}_U$, *soit* $\rho = \psi_A^U : A \to A'$ *l'homomorphisme canonique de* A *dans l'anneau* localisé $A' = A_{\mathcal{F}_U}$ *de* A *pour la localisation* $\tilde{\mathcal{L}}_U$, *soit* X' = Spec(A') *le* spectre premier *de* A' *muni de la topologie spectrale et soit* $\varphi : X' \to X$ *l'application continue déterminée par l'homomorphisme* ρ .

Alors, l'application continue $\varphi : X' \to X$ *induit un* homéomorphisme w *de l'ouvert* $U' = \varphi^{-1}(U)$ *de* X' *sur l'ouvert* U *de* X .

Soit $\mathcal{A}'$ = Mod A' la catégorie des A'-modules. D'après le lemme 5-8, la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_{U'}$ dans $\mathcal{A}'$, associée à l'ouvert $U' = \varphi^{-1}(U)$ de X' et caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F}_{U'}$, est l'image par ρ de la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_U$ dans $\mathcal{A}$, associée à l'ouvert U de X . Comme les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de A qui n'appartiennent pas à $\mathcal{F}_U$ sont les éléments de l'ouvert U de X et comme les idéaux premiers $\mathfrak{p}'$ de A' qui n'appartiennent pas à $\mathcal{F}_{U'}$ sont les éléments de l'ouvert $U' = \varphi^{-1}(U)$

de X' , le corollaire 5-7 montre que l'application $\mathfrak{p}' \to \rho^{-1}(\mathfrak{p}') = \varphi(\mathfrak{p}')$ caractérise une correspondance bijective de $U' = \varphi^{-1}(U)$ sur U .

Ainsi, l'application continue $\varphi : X' \to X$ induit une application continue bijective w de l'ouvert $U' = \varphi^{-1}(U)$ de X' sur l'ouvert U de X , caractérisée par la condition : $w(\mathfrak{p}') = \varphi(\mathfrak{p}') = \rho^{-1}(\mathfrak{p}')$ pour tout $\mathfrak{p}' \in U'$ et dont l'application inverse w^{-1} est caractérisée par la condition : $w^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}_{\mathfrak{F}_U}$ pour tout $\mathfrak{p} \in U$.

Tout revient à montrer que w est un homéomorphisme.

Pour tout ouvert U'_o de U' , il existe au moins un idéal $\mathfrak{a}'_o$ de A' tel que : $U'_o = U' \cap D(\mathfrak{a}'_o)$. En posant :

$$Y' = U' - U_o$$

tout $\mathfrak{p}' \in Y'$ vérifie $\mathfrak{p}' \in U'$ et $\mathfrak{p}' \notin D(\mathfrak{a}'_o)$, c'est-à-dire : $\mathfrak{a}'_o \subset \mathfrak{p}'$. L'idéal $\mathfrak{a}' = \bigcap_{\mathfrak{p}' \in Y'} \mathfrak{p}'$ de A' , vérifie donc $\mathfrak{a}'_o \subset \mathfrak{a}'$ et par suite : $D(\mathfrak{a}'_o) \subset D(\mathfrak{a}')$. Puisque tout $\mathfrak{p}' \in Y'$ vérifie naturellement $\mathfrak{p}' \notin D(\mathfrak{a}')$, il en résulte la relation :

$$(1) \qquad U'_o = U' \cap D(\mathfrak{a}'_o) = U' \cap D(\mathfrak{a}')$$

qui entraîne la caractérisation :

$$(1') \qquad Y' = \{ \mathfrak{p}' \in U' \ ; \ \mathfrak{a}' \subset \mathfrak{p}' \} .$$

Puisque les éléments $\mathfrak{p}' \in Y'$ sont des idéaux premiers n'appartenant pas à $\mathfrak{F}_{U'}$, ils sont $\mathfrak{F}_{U'}$-clos dans A' et il en résulte facilement que l'idéal $\mathfrak{a}' = \bigcap_{\mathfrak{p}' \in Y'} \mathfrak{p}'$ est $\mathcal{F}_{U'}$-clos dans A' . Le corollaire 5-6 entraîne alors que l'idéal $\mathfrak{a} = \rho^{-1}(\mathfrak{a}')$ de A , vérifie : $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}_{\mathcal{F}_U}$.

L'ouvert U_o de U caractérisé par :

$$(2) \qquad U_o = U \cap D(\mathfrak{a})$$

détermine la partie Y de U définie par :

$$Y = U - U_o$$

et elle admet la caractérisation :

$$(2') \quad Y = \{ \mathfrak{p} \in U \ ; \ \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \} .$$

Pour tout $\mathfrak{p}' \in Y'$, la relation (1') entraîne $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{p}'$, ce qui implique $\mathfrak{a} = \rho^{-1}(\mathfrak{a}') \subset \rho^{-1}(\mathfrak{p}')$ et la relation (2') montre que l'élément :

$$\mathfrak{p} = \varphi(\mathfrak{p}') = w(\mathfrak{p}') = \rho^{-1}(\mathfrak{p}') \quad \text{vérifie } \mathfrak{p} \in Y .$$

Ainsi :

$$(3) \qquad w(Y') \subset Y .$$

Pour tout $\mathfrak{p} \in Y$, la relation (2') entraîne $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, ce qui implique $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}_{\mathcal{F}_U} \subset \mathfrak{p}_{\mathcal{F}_U}$ et la relation (1') montre que l'élément : $\mathfrak{p}' = w^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}_{\mathcal{F}_U}$ vérifie $\mathfrak{p}' \in Y'$. Ainsi :

$$(4) \qquad w^{-1}(Y) \subset Y' .$$

Puisque w est bijective, les relations (3) et (4) entraînent $w(Y') = Y$ et par suite :

$$(5) \qquad w(U'_o) = U_o \ .$$

La relation (5) montre que l'application continue bijective w de U' sur U est ouverte, c'est-à-dire que w est un homéomorphisme de U' sur U , induit par l'application continue $\varphi : X' \to X$, ce qui achève la démonstration.

6 - OUVERTS QUASI-COMPACTS DES SCHEMAS AFFINES.

6-1 - Hypothèses et notations. Etant donné un anneau *commutatif* A , soit $(X, \mathcal{O}_X)$ le *schéma affine* associé à A , pour lequel X = Spec(A) est le *spectre premier* de A muni de la topologie spectrale et $\mathcal{O}_X = \tilde{A}$ le *faisceau structural* vérifiant en particulier : $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(X, \tilde{A})$

Etant donné un *ouvert quasi-compact* U de X , soit $(U, \mathcal{O}_U)$ le *préschéma* induit sur U par le schéma affine $(X, \mathcal{O}_X)$.

L'anneau A' des sections du faisceau structural $\mathcal{O}_X = \tilde{A}$, au-dessus de l'ouvert quasi-compact U de X est défini par :

$$A' = \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \Gamma(U, \tilde{A})$$

et la restriction à U détermine un homomorphisme canonique d'anneaux :

$$\rho : A \to A'$$

Soient $\mathcal{A}$ = Mod A et $\mathcal{A}'$ = Mod A' les catégories de A-modules et de A'-modules.

Soit $\mathcal{B}$ la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules quasi-cohérents et soit Γ la restriction à $\mathcal{B}$ du foncteur sections $\Gamma(X,\cdot)$ défini sur la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules.

Si $\check{P}$ est le foncteur faisceau associé à l'anneau A , le théorème 4-3, le corollaire 4-4 et théorème (1-4-1) de [7] montrent que les foncteurs :

$$\check{P} : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \qquad \text{et} \qquad \Gamma : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$$

établissent une équivalence entre les catégories $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, ce qui entraîne les relations :

$$(1) \quad \Gamma \check{P} = I_{\mathcal{A}} \qquad \text{et} \qquad (1') \quad \check{P} \Gamma = I_{\mathcal{B}} .$$

Soit $\mathcal{B}'_U$ la catégorie des $\mathcal{O}_U$-Modules quasi-cohérents et soit $\Gamma' : \mathcal{B}'_U \to \mathcal{A}'$ la restriction à $\mathcal{B}'_U$ du foncteur sections $\Gamma'(U,\cdot)$ défini sur la catégorie des $\mathcal{O}_U$-Modules.

Soit $\Gamma_U : \mathcal{B} \to \mathcal{A}'$ la resctriction à $\mathcal{B}$ du foncteur sections $\Gamma(U,\cdot)$ défini sur la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules.

La proposition (9-4-2) de [7] montre que le morphisme quasi-compact j défini par l'injection canonique de U dans X , détermine un foncteur image directe : $j_* : \mathcal{B}'_U \to \mathcal{B}$ et un foncteur image réciproque : $j^* : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'_U$, vérifiant :

$$(2) \quad j^* j_* = I_{\mathcal{B}'_U}$$

Si $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}_U$ est la localisation dans $\mathcal{A}$, associée à l'ouvert U de X et caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F} = \mathcal{F}_U$ et si $\mathcal{L} = \mathcal{L}_U$ est la sous-catégorie locale de $\mathcal{A}$, associée à $\tilde{\mathcal{L}}_U$, soit S le foncteur canonique d'injection de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{A}$ et soit T le foncteur canonique de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{L}$, tel que le foncteur localisation $L = L_U$ de la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$, soit caractérisé par :

$$(3) \quad L_U = ST \qquad \text{et} \qquad (3') \quad TS = I_{\mathcal{L}} \; .$$

Enfin, soit S_1 le foncteur utilisé dans la démonstration du lemme 5-3 .

6-2. *LEMME : Avec les hypothèses précédentes, les données vérifient les relations suivantes :*

(a) $\Gamma \, j_* = \rho_* \, \Gamma'$ $\qquad$ (a') $\Gamma_U = \Gamma' \, j^*$

(b) $\rho_* \, \Gamma_U = L_U \, \Gamma$ $\qquad$ (b') $\Gamma_U = S_1 \, T \, \Gamma$

(c) $L_U = \Gamma \, j_* \, j^* \, \check{P}$ $\qquad$ (c') $j_* \, j^* = \check{P} \, L_U \, \Gamma$.

Les relations (a) et (a') résultent immédiatement de la construction des foncteurs j_* et j^* [7] .

Pour tout objet M de $\mathcal{A}$, la définition du foncteur Γ_U entraîne la relation : $\Gamma_U \, \check{P}(M) = \check{P}(U,M)$. Puisque U est quasi-compact, le théorème 4-3 entraîne : $\check{P}(U,M) = P(U,M)$ et le corollaire 4-4 entraîne : $A' = \Gamma_U \, \check{P}(A) = P(U,A) = A_{\mathcal{F}}$. La partie (b)

du lemme 5-3 est donc applicable. La construction du foncteur préfaisceau P associé à A , implique alors la relation :

$$\Gamma_U \check{P}(M) = P(U,M) = S_1\ TM$$

pour tout objet M de $\mathcal{A}$, ce qui entraîne les relations :

$$\Gamma_U \check{P} = S_1\ T \quad \text{et} \quad \rho_* \Gamma_U \check{P} = \rho_* S_1\ T = ST = L_U\ .$$

Par composition avec Γ , la relation (1') implique alors les relations (*b'*) et (*b*).

Les relations (*a*), (*a'*) et (*b*) entraînent la relation :

$$\Gamma\ j_* j^* \check{P} = \rho_* \Gamma'\ j^* \check{P} = \rho_* \Gamma_U \check{P} = L_U\ \Gamma\ \check{P}$$

et la relation (1) implique alors la relation (*c*).

Enfin, compte tenu des relations (1) et (1'), la relation (*c*) implique facilement la relation (*c'*).

6-3. *THEOREME : Etant donné un* schéma affine $(X, \mathcal{O}_X)$, *associé à un anneau* commutatif A , *soit* $\mathcal{A}$ = Mod A *la catégorie des* A-*modules*.

Pour tout ouvert quasi-compact U *de* X , *soit* $(U, \mathcal{O}_U)$ *le* préschéma *induit sur* U *par le schéma affine* $(X, \mathcal{O}_X)$.

Alors, la catégorie $\mathcal{B}'_U$ *des* $\mathcal{O}_U$-*Modules quasi-cohérents est* équivalente *à la sous-catégorie locale* $\mathcal{L}_U$ *de* $\mathcal{A}$, *déterminée par la localisation* $\tilde{\mathcal{L}}_U$ *dans* $\mathcal{A}$, *associée à l'ouvert* U *de* X .

De façon précise, avec les notations précédentes, cette équivalence est caractérisée par les foncteurs :

$$\lambda : \mathcal{B}'_U \to \mathcal{L}_U \quad \text{et} \quad \mu : \mathcal{L}_U \to \mathcal{B}'_U$$

définis par les relations :

$$\lambda = T\,\Gamma\, j_* \quad \text{et} \quad \mu = j^*\,\check{P}\,S\,.$$

La relation (c) du lemme 6-2 entraîne la relation :

$$\lambda\,\mu = T\,\Gamma\, j_*\, j^*\,\check{P}\,S = T\,L_U\,S$$

et les relations (3) et (3') impliquent alors :

$$\lambda\,\mu = I_{\mathcal{L}}\,.$$

La relation (3) entraîne la relation :

$$\mu\,\lambda = j^*\,\check{P}\,S\,T\,\Gamma\, j_* = j^*\,\check{P}\,L_U\,\Gamma\, j_*$$

et la relation (c') du lemme 6-2 et la relation (2) impliquent alors :

$$\mu\,\lambda = I_{\mathcal{B}'_U}$$

Les relations :

$$\lambda\,\mu = I_{\mathcal{L}} \quad \text{et} \quad \mu\,\lambda = I_{\mathcal{B}'_U}$$

montrent que λ et μ caractérisent une équivalence entre la catégorie $\mathcal{B}'_U$ et la catégorie $\mathcal{L}_U$.

6-4. COROLLAIRE : *Avec les données et les notations du théorème 6-3, en posant* $A' = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, *soit* $\mathcal{A}' = \text{Mod } A'$ *la catégorie des* A'-*modules et soit :*

$$\rho : A \to A'$$

l'homomorphisme canonique d'anneaux déterminé par la restriction à l'ouvert U *de* X .

Alors, la catégorie $\mathcal{B}'_U$ *des* $\mathcal{O}_U$-*Modules quasi-cohérents est* équivalente *à la sous-catégorie locale* $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{A}'$, *déterminée par la localisation* $\tilde{\mathcal{L}}'$ *dans* $\mathcal{A}'$, image *par* ρ *de la localisation* $\tilde{\mathcal{L}}_U$ *dans* $\mathcal{A}$, *associée à l'ouvert* U de X .

De façon précise, avec les notations antérieures et en considérant le foncteur :

$$\check{P}'_U : \mathcal{A}' \to \mathcal{B}'_U$$

défini par :

$$\check{P}'_U = j^* \check{P} \rho_*$$

cette équivalence est caractérisée par les foncteurs :

$$\lambda' : \mathcal{B}'_U \to \mathcal{L}' \quad \textit{et} \quad \mu' : \mathcal{L}' \to \mathcal{B}'_U$$

définis par les relations :

$$\lambda' = T' \Gamma' \quad \textit{et} \quad \mu' = \check{P}'_U S'$$

dans lesquelles S' *est le foncteur canonique de* $\mathcal{L}'$ *dans* $\mathcal{A}'$ *et* T' *le foncteur canonique de* $\mathcal{A}'$ *dans* $\mathcal{L}'$, *tel que le foncteur localisation* L' *de la localisa-*

tion $\widetilde{\mathcal{L}'}$, *soit caractérisé par* :

$$L' = S'\ T' \quad \textit{avec} \quad T'\ S' = I_{\mathcal{L}'}\ .$$

Puisque l'ouvert U de X est quasi-compact, le théorème 4-3 et le corollaire 4-4 montrent que l'anneau A' est le localisé de l'anneau A pour la localisation $\widetilde{\mathcal{L}}_U$ dans $\mathcal{A}$. Les conclusions de la partie (*b*) du lemme 5-3 sont donc applicables, compte tenu de la concordance des notations.

Comme les foncteurs :

$$\rho_o : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}_U \quad \text{et} \quad \rho_1 : \mathcal{L}_U \to \mathcal{L}'$$

caractérisent une équivalence entre la catégorie $\mathcal{L}_U$ et la catégorie $\mathcal{L}'$, le théorème 6-3 entraîne que les foncteurs :

$$\lambda' = \rho_1\ \lambda : \mathcal{B}'_U \to \mathcal{L}' \quad \text{et} \quad \mu' = \mu\ \rho_o : \mathcal{L}' \to \mathcal{B}'_U$$

caractérisent une équivalence entre la catégorie $\mathcal{B}'_U$ et la catégorie $\mathcal{L}'$.

Tout revient à démontrer les formules définissant les foncteurs λ' et μ' dans l'énoncé du corollaire 6-4.

La relation (*a*) du lemme 6-2 entraîne la relation :

$$\lambda' = \rho_1\ \lambda = \rho_1\ T\ \Gamma\ j_* = \rho_1\ T\ \rho_*\ \Gamma'$$

et la relation (3) du lemme 5-3 implique alors :

$$\lambda' = T'\ \Gamma'\ .$$

La relation (1') du lemme 5-3 entraîne la relation :

$$\mu' = \mu\,\rho_o = j^*\,\check{P}\,S\,\rho_o = j^*\,\check{P}\,\rho_*\,S'$$

et la définition du foncteur $\check{P}'_U$ implique alors :

$$\mu' = \check{P}'_U\,S'$$

ce qui achève la démonstration.

6-5. *COROLLAIRE : Avec les données et les notations du corollaire 6-4, alors :*

(a) *le* "foncteur *$\mathcal{O}_U$-Module quasi-cohérent* associé" :

$$\mu\,T = j^*\,\check{P} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}'_U$$

est exact *et admet pour* adjoint à droite *le foncteur* pleinement fidèle :

$$S\,\lambda = \rho_*\,\Gamma' : \mathcal{B}'_U \to \mathcal{A}\ .$$

En particulier, tout $\mathcal{O}_U$-Module quasi-cohérent G *est déterminé par le* A-*module* $\rho_*\,\Gamma'G = \rho_*\,\Gamma'(U,G)$ *de ses sections au-dessus de* U *et pour qu'un objet* M *de* $\mathcal{A}$ *soit le* A-*module des sections au-dessus de* U, *d'un $\mathcal{O}_U$-Module quasi-cohérent, il faut et il suffit que* M *soit un objet de la sous-catégorie locale* $\mathcal{L}_U$ *de la localisation* $\tilde{\mathcal{L}}_U$ *dans* $\mathcal{A}$, *associée à* U .

(b) *le* foncteur " *$\mathcal{O}_U$-Module quasi-cohérent* associé" :

$$\mu'\,T' = \check{P}'_U : \mathcal{A}' \to \mathcal{B}'_U$$

est exact *et admet pour* adjoint à droite *le foncteur* pleinement fidèle :

$$S' \lambda' = \Gamma' : \mathcal{B}'_U \to \mathcal{A}' .$$

En particulier, tout $\mathcal{O}_U$*-Module cohérent* G *est déterminé par le* A'*-module* $\Gamma' G = \Gamma'(U,G)$ *de ses sections au-dessus de* U *et pour qu'un objet* M' *de* $\mathcal{A}'$ *soit le* A'*-module des sections au-dessus de* U *, d'un* $\mathcal{O}_U$*-Module quasi-cohérent, il faut et il suffit que* M' *soit un objet de la sous-catégorie locale* $\mathcal{L}'$ *de la localisation* $\widetilde{\mathcal{L}}'$ *dans* $\mathcal{A}'$, image *par* ρ *de* $\widetilde{\mathcal{L}}_U$.

Les relations (3) et (1) entraînent la relation :

$$\mu\, T = j^* \check{P}\, S\, T = j^* \check{P}\, L_U = j^* \check{P}\, L_U\, \Gamma\, \check{P}$$

et la relation (c') du lemme 6-2, implique alors :

$$\mu\, T = j^*\, j_*\, j^* \check{P}$$

et d'après la relation (2), il en résulte la relation :

$$\mu\, T = j^* \check{P}$$

La relation (3) entraîne la relation :

$$S\, \lambda = S\, T\, \Gamma\, j_* = L_U\, \Gamma\, j_*$$

et les relations (*b*) et (*a'*) du lemme 6-2, impliquent alors :

$$S\, \lambda = \rho_*\, \Gamma_U\, j_* = \rho_*\, \Gamma'\, j^*\, j_*$$

et d'après la relation (2), il en résulte la relation :

$$S\ \lambda = \rho_*\ \Gamma' \ .$$

La démonstration du corollaire 6-4 a établi la relation :

$$\mu' = \mu\ \rho_o \ .$$

La relation (1) du lemme 5-3 entraîne alors la relation :

$$\mu'\ T' = \mu\ \rho_o\ T' = \mu\ T\ \rho_* \ .$$

La relation $\mu\ T = j^*\ \check{P}$ démontrée ci-dessus et la définition du foncteur $\check{P}'_U$ impliquent donc la relation :

$$\mu'\ T' = \check{P}'_U \ .$$

La démonstration du corollaire 6-4 a établi la relation :

$$\lambda' = \rho_1\ \lambda$$

et compte tenu de la relation : $\rho_o\ \rho_1 = I_{\mathscr{L}}$, elle est équivalente à la relation :

$$\lambda = \rho_o\ \lambda' \ .$$

La relation : $S_1 = S'\ \rho_1$ établie dans la démonstration du lemme 5-3, entraîne alors la relation :

$$S'\ \lambda' = S'\ \rho_1\ \lambda = S_1\ \lambda = S_1\ \rho_o\ \lambda' \ .$$

La relation : $\lambda' = T'\ \Gamma'$ du corollaire 6-4 entraîne donc

$$S'\ \lambda' = S_1\ \rho_o\ T'\ \Gamma'$$

et la relation (1) du lemme 5-3 et les relations (a), (b') et *(a')* du lemme 6-2 impliquent la relation :

$$S' \lambda' = S_1 \, T \, \rho_* \, \Gamma' = S_1 \, T \, \Gamma \, j_* = \Gamma_U \, j_* = \Gamma' \, j^* \, j_* .$$

La relation (2) entraîne alors la relation :

$$S' \lambda' = \Gamma' .$$

Ces relations étant démontrées, il en résulte facilement les relations :

$$(S\lambda)(\mu T) = ST = L_U \quad \text{et} \quad (\mu T)(S\lambda) = \mu \, I_{\mathcal{L}} \, \lambda = \mu\lambda = I_{\mathcal{B}'_U}$$

ainsi que les relations :

$$(S'\lambda')(\mu'T') = S'T' = L' \quad \text{et} \quad (\mu'T')(S'\lambda') = \mu' I_{\mathcal{L}'} \lambda' = \mu'\lambda' = I_{\mathcal{B}'_U} .$$

Les affirmations complémentaires du corollaire 6-5, résultent alors immédiatement des propriétés générales d'une localisation.

6-6. *LEMME : Etant donné un anneau (non nécessairement commutatif)* A *, soit* $\mathcal{A}$ = Mod A *la catégorie des* A-*modules (à gauche).*

Etant données deux localisations $\tilde{\mathcal{L}}$ *et* $\tilde{\mathcal{L}}_o$ *dans* $\mathcal{A}$*, si* $\mathcal{L}$ *et* $\mathcal{L}_o$ *sont les sous-catégories locales de* $\mathcal{A}$ *déterminées par* $\tilde{\mathcal{L}}$ *et* $\tilde{\mathcal{L}}_o$ *, soient* S *et* S_o *les foncteurs canoniques d'injection de* $\mathcal{L}$ *dans* $\mathcal{A}$ *et de* $\mathcal{L}_o$ *dans* $\mathcal{A}$*, et soient* T *et* T_o *les foncteurs canoniques* *de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{L}$ et de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{L}_o$ tels que les foncteurs localisations* L *et* L_o *des localisations* $\tilde{\mathcal{L}}$ *et* $\tilde{\mathcal{L}}_o$ *soient caractérisés par :*

$$L = ST \qquad \text{et} \qquad L_o = S_o\, T_o$$

avec :

$$TS = I_{\mathcal{L}} \qquad \text{et} \qquad T_o\, S_o = I_{\mathcal{L}_o} \quad .$$

Alors, si la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_o$ *est* plus fine *que la localisation* $\tilde{\mathcal{L}}$*, il existe des foncteurs uniques :*

$$\sigma : \mathcal{L}_o \to \mathcal{L} \qquad et \qquad \tau : \mathcal{L} \to \mathcal{L}_o$$

tels que :

$$S_o = S\, \sigma \qquad et \qquad T_o = \tau\, T \ .$$

De plus le foncteur pleinement fidèle σ *est* adjoint à droite *au foncteur* exact τ .

L'hypothèse entraîne que la sous-catégorie localisante $\mathcal{C}$ de $\tilde{\mathcal{L}}$ est une sous-catégorie de la sous-catégorie localisante $\mathcal{C}_o$ de $\tilde{\mathcal{L}}_o$. Le corollaire 4-4 de [10] montre alors que $\mathcal{L}_o$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{L}$, ce qui assure l'existence et l'unicité du foncteur pleinement fidèle σ vérifiant $S_o = S\,\sigma$. Comme le foncteur exact T_o s'annule sur $\mathcal{C}_o$ et par suite sur $\mathcal{C}$, puisque la catégorie $\mathcal{L}$ est équivalente à la catégorie quotient $\mathcal{A}/_{\mathcal{C}}$, les corollaires 2 et 3 (p. 368 et 369) de [3] montrent qu'il existe un foncteur exact unique τ de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{L}_o$, vérifiant $T_o = \tau\, T$.

Le foncteur S_o étant un adjoint à droite au foncteur T_o , il existe un isomorphisme fonctoriel canonique :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_o}(T_o\, S\, \cdot\ ,\ \cdot) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\,S\, \cdot\ ,\ S_o\, \cdot)\ .$$

Puisque le foncteur S est pleinement fidèle, la relation $T_o\; S = \tau\; TS = \tau\; I\; = \tau$ et la relation $S_o = S\sigma$ donnent alors un isomorphisme fonctoriel :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_o}(\tau\ \cdot\ ,\ \cdot) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(\cdot, \sigma\ \cdot)$$

ce qui achève la démonstration.

6-7. LEMME : *Etant donné un anneau (non nécessairement commutatif)* A , *soit* $\mathcal{A}$ = Mod A *la catégorie des* A-*modules (à gauche)*.

Etant donnée une localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ *dans* $\mathcal{A}$, *caractérisée par un ensemble topologisant et idempotent* $\mathfrak{F}$, *soit*

$$\rho : A \to A'$$

l'homomorphisme canonique de A *dans l'anneau* localisé $A' = A_{\mathfrak{F}}$ *de* A *pour la localisation* $\tilde{\mathcal{L}}$, *soit* $\mathcal{A}'$ *la catégorie des* A'-*modules (à gauche) et soit* F *le foncteur de* $\mathcal{A}$ *dans* $\mathcal{A}'$ *tel que le foncteur localisation canonique* L *de* $\tilde{\mathcal{L}}$ *soit caractérisé par :*

$$L = \rho_*\, F\ .$$

Pour toute localisation $\widetilde{\mathscr{L}}_o$ *dans* $\mathscr{A}$, plus fine *que la localisation* $\widetilde{\mathscr{L}}$ *et caractérisée par un ensemble topologisant et idempotent* $\mathfrak{F}_o$, *soit* $\widetilde{\mathscr{L}}'_o = \rho(\widetilde{\mathscr{L}}_o)$ *la localisation dans* $\mathscr{A}'$, image *par* ρ *de* $\widetilde{\mathscr{L}}_o$ *et caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent* $\mathfrak{F}'_o = \rho(\mathfrak{F}_o)$, image *par* ρ *de* $\mathfrak{F}_o$ *, alors* :

(*a*) *L'anneau* localisé $A'_{\mathfrak{F}'_o}$ *de* A' *pour* $\widetilde{\mathscr{L}}'_o$ *coïncide avec l'anneau* localisé $A_{\mathfrak{F}_o}$ *de* A *pour* $\widetilde{\mathscr{L}}_o$ *et les homomorphismes canoniques* :

$$\rho' : A' \to A'' = A'_{\mathfrak{F}_o} \quad \textit{et} \quad \rho'' : A \to A'' = A_{\mathfrak{F}_o}$$

vérifient la relation :

$$\rho'' = \rho' \rho .$$

(*b*) *Si* $\mathscr{A}''$ = Mod A'' *est la catégorie des* A''*-modules (à gauche) et si* F_o *et* F'_o *sont les foncteurs de* $\mathscr{A}$ *dans* $\mathscr{A}''$ *et de* $\mathscr{A}'$ *dans* $\mathscr{A}''$ *tels que les foncteurs localisations* L_o *et* L'_o *de* $\widetilde{\mathscr{L}}_o$ *et* $\widetilde{\mathscr{L}}'_o$ *soient caractérisés par* :

$$L_o = \rho''_* F_o \quad \textit{et} \quad L'_o = \rho'_* F'_o$$

alors :

$$F_o = F'_o F \quad \textit{et} \quad F'_o = F_o \rho_*$$

Il est immédiat que la localisation $\widetilde{\mathscr{L}}'_o = \rho(\widetilde{\mathscr{L}}_o)$ est plus fine que la localisation $\widetilde{\mathscr{L}}' = \rho(\widetilde{\mathscr{L}})$ dans $\mathscr{A}'$, image par ρ de $\widetilde{\mathscr{L}}$. Le lemme 6-6 est donc applicable et avec des notations évidentes déduites de celles du lemme 6-6, il existe des foncteurs uniques :

$$\sigma' : \mathcal{L}'_o \to \mathcal{L}' \quad \text{et} \quad \tau' : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}'_o$$

tels que :

$$S'_o = S' \sigma' \quad \text{et} \quad T'_o = \tau' T' .$$

De plus, le foncteur pleinement fidèle σ' est adjoint à droite au foncteur exact τ' .

Avec les notations du lemme 5-3 et de sa démonstration, le foncteur F introduit dans le lemme 6-7 est caractérisé par :

$$F = S_1 T = S' \rho_1 T .$$

Le foncteur T_o de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{L}'_o$ défini par :

$$T_o = T'_o F$$

vérifie donc :

$$T_o = \tau' T' S' \rho_1 T$$

et comme $T'S' = I_{\mathcal{L}'}$, il en résulte la relation :

$$T_o = \tau' \rho_1 T .$$

Compte tenu du lemme 6-6, cette relation montre que le foncteur T_o est exact et admet pour adjoint à droite, le foncteur pleinement fidèle S_o de $\mathcal{L}'_o$ dans $\mathcal{A}$ défini par :

$$S_o = S \rho_o \sigma' .$$

Soient $\mathcal{C}_o$ et $\mathcal{C}'_o$ les sous-catégories localisantes de $\tilde{\mathcal{L}}_o$ et de $\tilde{\mathcal{L}}'_o$.

Pour tout objet M de $\mathscr{A}$, la condition $T_o M = 0$ signifie que $FM = S' \rho_1 TM$ est un objet de $\mathscr{C}'_o$, c'est-à-dire que $\rho_* S' \rho_1 TM$ est un objet de $\mathscr{C}_o$ et d'après le lemme 5-3 cette condition signifie que STM est un objet de $\mathscr{C}_o$. Comme la localisation $\widetilde{\mathscr{L}}_o$ est plus fine que la localisation $\widetilde{\mathscr{L}}$, il est facile de vérifier que pour que STM soit un objet de $\mathscr{C}_o$, il faut et il suffit que M soit un objet de $\mathscr{C}_o$.

Ainsi, la sous-catégorie localisante $\mathscr{C}_o$ est le noyau du foncteur T_o .

La proposition 5 (p. 374) de [3] montre alors que le foncteur T_o induit une équivalence entre la catégorie quotient $\mathscr{A}/\mathscr{C}_o$ et la catégorie $\mathscr{L}'_o$. De plus, le foncteur localisation L_o vérifie :

$$L_o = S_o T_o \quad .$$

Il en résulte en particulier que l'anneau localisé $A_{\mathfrak{F}_o}$ de A pour $\widetilde{\mathscr{L}}_o$ est l'opposé de l'anneau des endomorphismes de l'objet $T_o A = T'_o FA$. Comme $FA = A'$, l'anneau localisé $A'_{\mathfrak{F}'_o}$ de A' pour $\widetilde{\mathscr{L}}'_o$ est l'opposé de l'anneau des endomorphismes de l'objet $T'_o A'$ et par suite :

$$A_{\mathfrak{F}_o} = A'' = A'_{\mathfrak{F}'_o} \quad .$$

Il est alors immédiat que les homomorphismes canoniques

ρ' et ρ'' vérifient :

$$\rho'' = \rho' \rho .$$

En introduisant la localisation $\widetilde{\mathcal{L}}''_o = \rho'(\widetilde{\mathcal{L}}'_o)$ dans $\mathcal{A}''$, image par ρ' de $\widetilde{\mathcal{L}}'_o$, avec des notations évidentes analogues à celles du lemme 5-3, les résultats précédents montrent que le foncteur F'_o de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}''$ est caractérisé par :

$$F'_o = S'' \rho'_1 T'_o .$$

et que le foncteur F_o de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}''$ est caractérisé par :

$$F_o = S'' \rho'_1 T_o .$$

La relation : $T_o = T'_o F$ entraîne alors la relation :

$$F_o = F'_o F .$$

La relation : $T'_o = \tau' T'$ et le lemme 5-3 entraînent la relation :

$$T'_o = \tau' T' = \tau' \rho_1 T \rho_*$$

et la relation $T_o = \tau' \rho_1 T$ entraîne alors la relation :

$$T'_o = T_o \rho_* .$$

Il en résulte la relation :

$$F'_o = F_o \rho_*$$

ce qui achève la démonstration.

6-8. THEOREME : *Etant donné un* schéma affine $(X, \mathcal{O}_X)$, *associé à un anneau* commutatif A , *pour tout* ouvert quasi-compact U *de* X , *en posant* $A' = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ *soit* :

$$\rho : A \to A'$$

l'homomorphisme canonique d'anneaux déterminé par la restriction à l'ouvert U *de* X *et si* $(X', \mathcal{O}'_{X'})$ *est le schéma affine, associé à l'anneau* A' , *soit*

$$\varphi : X' \to X$$

l'application continue caractérisée par l'homomorphisme ρ .

En posant $U' = \varphi^{-1}(U)$, *soient* $(U, \mathcal{O}_U)$ *et* $(U', \mathcal{O}'_{U'})$ *les* préschémas *induits sur* U *et* U' *par les schémas affines* $(X, \mathcal{O}_X)$ *et* $(X', \mathcal{O}'_{X'})$. *Alors* :

(a) *L'ouvert* $U' = \varphi^{-1}(U)$ *de* X' *est un* ouvert quasi-compact, partout dense *dans* X' *et l'homomorphisme canonique d'anneaux*

$$\rho' : A' = \Gamma'(X', \mathcal{O}'_{X'}) \to \Gamma'(U', \mathcal{O}'_{X'})$$

déterminé par la restriction à l'ouvert U' *de* X' *est un* isomorphisme.

(b) *L'application continue* φ: $X' \to X$ *induit un* homéomorphisme w *de l'ouvert* U' *de* X' *sur l'ouvert* U *de* X , *tel que* :

$$\mathcal{O}_U = w_*(\mathcal{O}'_{U'}) .$$

Autrement dit, w *caractérise un* isomorphisme de préschémas :

$$W : (U', \mathcal{O}'_{U'}) \to (U, \mathcal{O}_U) \ .$$

Soit $\mathcal{A}$ = Mod A la catégorie des A-modules et soit $\mathcal{A}'$ = Mod A' la catégorie des A'-modules. Soit $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}_U$ la localisation dans $\mathcal{A}$, associée à l'ouvert quasi-compact U de X et caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F} = \mathcal{F}_U$.

D'après le théorème 4-3 et le corollaire 4-4, l'anneau $A' = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ est le localisé $A_{\mathcal{F}}$ de l'anneau A pour la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ et l'homomorphisme canonique ρ coïncide avec l'homomorphisme ψ_A^U . Le théorème 5-9 montre donc que l'application continue φ: X' → X induit un homéomorphisme w de l'ouvert $U' = \varphi^{-1}(U)$ de X' sur l'ouvert U de X .

Pour tout ouvert U_o de U , c'est-à-dire pour tout ouvert U_o de X tel que $U_o \subset U$, en posant $U'_o = w^{-1}(U_o) = \varphi^{-1}(U_o)$, soit $\tilde{\mathcal{L}}_o = \tilde{\mathcal{L}}_{U_o}$ la localisation dans $\mathcal{A}$ associée à l'ouvert U_o de X et caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F}_o = \mathcal{F}_{U_o}$ et soit $\tilde{\mathcal{L}}'_o = \tilde{\mathcal{L}}_{U'_o}$ la localisation dans $\mathcal{A}'$ associée à l'ouvert U'_o de X' et caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F}'_o = \mathcal{F}_{U'_o}$. D'après le lemme 5-8, la localisation $\tilde{\mathcal{L}}'_o$ dans $\mathcal{A}'$ est l'image par ρ de la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_o$ dans $\mathcal{A}$.

Puisque la localisation $\widetilde{\mathcal{L}}_o$ est plus fine que la localisation $\widetilde{\mathcal{L}}$, le lemme 6-7 entraîne la relation :

$$F_o\, M = F'_o(FM)$$

pour tout objet M de $\mathcal{A}$.

Si l'ouvert U_o est quasi-compact (par exemple si U_o est un ouvert affine spécial) le théorème 4-3 et le corollaire 4-4 donnent les relations :

$$\Gamma(U_o,\widetilde{M}) = F_o\, M$$

et

$$\Gamma'(U'_o,\widetilde{FM}) = F'_o(FM)$$

qui entraînent donc :

$$\Gamma(U_o,\widetilde{M}) = \Gamma'(U'_o,\widetilde{FM}) \ .$$

Si j^* et j'^* sont les foncteurs images réciproques déterminés par les morphismes de préschémas j et j' associés aux injections canoniques de U dans X et de U' dans X' , il en résulte les relations :

$$\Gamma(U_o,j^*\, \widetilde{M}) = \Gamma'(U'_o,j'^*\, \widetilde{FM})$$

pour tout ouvert quasi-compact U_o de U .

D'après la définition du foncteur image directe w_* , la relation $U'_o = w^{-1}(U_o)$ entraîne :

$$\Gamma(U_o,w_*\, j'^*\, \widetilde{FM}) = \Gamma'(U'_o,j'^*\, \widetilde{FM})$$

et il en résulte donc les relations :

$$\Gamma(U_o, j^* \widetilde{M}) = \Gamma(U_o, w_* \, j'^* \, \widetilde{FM})$$

valables pour tout ouvert quasi-compact U_o de U .

Puisque $j^* \widetilde{M}$ et $w_* \, j'^* \, \widetilde{FM}$ sont des faisceaux sur U et que tout ouvert de U admet un recouvrement par des ouverts quasi-compacts, les relations :

$$\Gamma(U_o, j^* \widetilde{M}) = \Gamma(U_o, w_* \, j'^* \, \widetilde{FM})$$

restent valables pour tout ouvert U_o de U , ce qui entraîne la relation :

$$(1) \qquad j^* \widetilde{M} = w_* \, j'^* \, \widetilde{FM} \, .$$

En particulier, puisque FA = A' , cette relation entraîne

$$j^* \widetilde{A} = w_* \, j'^* \, \widetilde{A'}$$

c'est-à-dire la relation :

$$(2) \qquad \mathcal{O}_U = w_*(\mathcal{O}'_{U'}) \, .$$

Il en résulte que l'homéomorphisme w de U' sur U et le morphisme identique de $\mathcal{O}_U$ sur $w_*(\mathcal{O}'_{U'})$ caractérisent bien un isomorphisme de préschémas:

$$W : (U', \mathcal{O}'_{U'}) \to (U, \mathcal{O}_U)$$

ce qui achève la démonstration de la partie *(b)*.

Avec les notations du lemme 6-7, pour tout ouvert quasi-compact U_o de U , l'homomorphisme canonique :

$$\rho' : A' \to A'' = A'_{\mathfrak{F}_o}$$

est l'homomorphisme canonique, de l'anneau :

$$A' = \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \Gamma'(X', \mathcal{O}'_{X'})$$

dans l'anneau :

$$\Gamma(U_o, \mathcal{O}_X) = A_{\mathfrak{F}_o} = A'' = A'_{\mathfrak{F}'_o} = \Gamma'(U'_o, \mathcal{O}'_{X'})$$

déterminé par la restriction à l'ouvert U' de X' .

En particulier, si $U_o = U$, ce qui entraîne $U'_o = U'$, il en résulte que l'homomorphisme canonique :

$$\rho' : A' = \Gamma'(X', \mathcal{O}'_{X'}) \to \Gamma'(U', \mathcal{O}'_{X'})$$

est un isomorphisme.

Il convient de remarquer que ce résultat exprime que l'anneau A' coïncide avec l'anneau localisé $A'_{\mathfrak{F}'}$ de A' pour la localisation $\widetilde{\mathcal{L}}' = \widetilde{\mathcal{L}}_{U'}$ dans $\mathcal{A}'$, associée à l'ouvert U' de X' et caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}_{U'}$.

Il en résulte en particulier la relation :

$$(3) \qquad \mathfrak{F}' A' = 0 .$$

Puisque w est un homéomorphisme et que U est un ouvert quasi-compact de X , l'ouvert U' de X' est également quasi-compact. Il existe donc une famille finie $(g'_j)_{j \in J}$ d'éléments de A' , telle que :

$$U' = \bigcup_{j \in J} D(g'_j) .$$

Soit f' un élément de A' tel que l'ouvert affine spécial $D(f')$ de X' vérifie :

$$D(f') \cap U' = \emptyset .$$

Pour tout $j \in J$, il en résulte :

$$D(f' g'_j) = D(f') \cap D(g'_j) = \emptyset$$

et par suite, il existe des entiers n_j tels que :

$$(f' g'_j)^{n_j} = 0 .$$

Si n est un majorant des entiers n_j pour $j \in J$, en posant :

$$f'_o = f'^n \quad \text{et} \quad f'_j = g'^n_j$$

pour tout $j \in J$, ce qui entraîne à fortiori :

$$f'_o f'_j = 0$$

pour tout $j \in J$, les relations :

$$D(g'_j) = D(f'_j)$$

pour tout $j \in J$, entraînent :

$$U' = \bigcup_{j \in J} D(f'_j)$$

et de plus :

$$D(f') = D(f'_o) .$$

Les relations $f'_o \, f'_j = 0$ pour tout $j \in J'$ montrent que l'annulateur de f'_o contient l'idéal :

$$\mathfrak{a}' = \sum_{j \in J} A' \, f'_j$$

de A' qui appartient à l'ensemble topologisant et idempotent $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}_{U'}$. Il en résulte la relation :

$$f'_o \in \mathfrak{F}' \, A'$$

et la relation (3) entraîne :

$$f'_o = 0$$

ce qui donne : $D(f') = D(f'_o) = \emptyset$.

Ainsi tout ouvert affine spécial de X' disjoint de U' est vide. Il en résulte que U' est partout dense dans X' , ce qui achève la démonstration de la partie (*a*).

6-9. COROLLAIRE : *Avec les données et les notations du théorème 6-8, soit* Φ *le morphisme du schéma affine* $(X', \mathcal{O}'_{X'})$ *dans le schéma affine* $(X, \mathcal{O}_X)$ *déterminé par l'homomorphisme* ρ *et soit* F *le foncteur de* $\mathcal{A}$ *dans* $\mathcal{A}'$ *tel que le foncteur localisation* L *de la localisation* $\widetilde{\mathcal{L}} = \widetilde{\mathcal{L}}_U$ *dans* $\mathcal{A}$*, associée à l'ouvert* U *de* X*, soit caractérisé par :* $L = \rho_* F$.

Si j^* *et* j'^* *sont les foncteurs images réciproques déterminés par les morphismes de préschémas* j *et* j' *associés aux injections canoniques de* U *dans* X *et de* U' *dans* X' *, alors :*

(a) Tout objet M *de* $\mathcal{A}$ *vérifie :*

$$j^* \widetilde{M} = w_* \, j'^* \, \widetilde{FM}$$

(b) Tout objet M' *de* $\mathcal{A}'$ *vérifie :*

$$j'^* \widetilde{M}' = w_*^{-1} \, j^* \, \widetilde{\Phi_* M'} \; .$$

Compte tenu de la relation :

$$\mathcal{O}_U = w_*(\mathcal{O}'_{U'})$$

la partie *(a)* est une conséquence immédiate de la relation (1) établie dans la démonstration du théorème 6-8.

Comme dans la démonstration du théorème 6-8, le lemme 6-7 entraîne la relation :

$$F'_o \, M' = F_o(\rho_* \, M')$$

pour tout objet M' de $\mathcal{A}'$, ce qui implique la relation :

$$\Gamma'(U'_o, \widetilde{M}') = \Gamma(U_o, \widetilde{\rho_* M'})$$

pour tout ouvert quasi-compact U'_o de U' . Un raisonnement analogue à celui de la démonstration du théorème 6-8, conduit à la relation :

$$j'^* \widetilde{M}' = w_*^{-1} \, j^* \, \widetilde{\rho_* M'}$$

La partie *(b)* est alors une conséquence immédiate de la relation :

$$\widetilde{\rho_* M'} = \Phi_* \, (\widetilde{M'})$$

qui résulte de la proposition (1-6-3) de [7] .

7 - OUVERTS AFFINES DES SCHEMAS AFFINES.

7-1. *THEOREME* : *Etant donné un* schéma affine $(X, \mathcal{O}_X)$, *associé à un anneau* commutatif A , *soit* $\mathcal{A}$ = Mod A *la catégorie des* A-*modules*.

Pour tout ouvert quasi-compact U *de* X , *soit* $(U, \mathcal{O}_U)$ *le* préschéma *induit sur* U *par le schéma affine* $(X, \mathcal{O}_X)$, *soit* $\mathcal{B}'_U$ *la catégorie des* $\mathcal{O}_U$-Mo*dules quasi-cohérents et en posant* $A' = \Gamma(U,\mathcal{O}_X) = \Gamma'(U,\mathcal{O}_U)$ *soit* $\mathcal{A}'$ = Mod A' *la catégorie des* A'-mo*dules*.

Alors, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) *L'ouvert* U *de* X *est un* ouvert affine.

(b) *Le foncteur section* Γ' *de* $\mathcal{B}'_U$ *dans* $\mathcal{A}'$ *détermine une* équivalence.

(b') *Le foncteur* Γ' *de* $\mathcal{B}'_U$ *dans* $\mathcal{A}'$ *est* exact.

(c) *La localisation* $\widetilde{\mathcal{L}}_U$ *dans* $\mathcal{A}$, *associée à l'ouvert* U *de* X , *est* exacte.

(c') *La localisation* $\tilde{\mathcal{L}}_U$ *dans* $\mathcal{A}$*, associée à l'ouvert* U *de* X *, est* plate.

(d) *Toute famille finie* $(f_j)_{j \in J}$ *d'éléments de* A *, telle que :*

$$U = \bigcup_{j \in J} D(f_j)$$

vérifie la condition :

(d_o) *Il existe une famille* $(g_j)_{j \in J}$ *de sections* $g_j \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ *, telle que :*

$$\sum_{j \in J} g_j \, (f_j | U) = 1 | U \ .$$

(d') *Il existe au moins une famille finie* $(f_j)_{j \in J}$ *d'éléments de* A *, telle que :*

$$U = \bigcup_{j \in J} D(f_j)$$

et vérifiant la condition (d_o).

(e) *Tout idéal de type fini* $\mathfrak{a}$ *de* A *admettant un système fini de générateurs* $(f_j)_{j \in J}$ *et tel que* $U = D(\mathfrak{a})$ *, vérifie la condition :*

(e_o) *Si* $u : A \to A_o$ *est l'homomorphisme canonique de* A *dans l'anneau quotient* A_o *de* A *par l'idéal* I_o *constitué par les éléments de* A *, annulés par une puissance de* $\mathfrak{a}$*, il existe un entier* n *et une famille* $(h_j)_{j \in J}$ *de* A*-homomorphisme* h_j *de* $\mathfrak{a}^n$ *dans* A_o *, telle que :*

$$\sum_{j \in J} h_j(x)\ u(f_j) = u(x)$$

pour tout $x \in \mathfrak{a}^n$.

(e') Il existe au moins un idéal de type fini $\mathfrak{a}$ *de* A , *admettant un système fini de générateurs* $(f_j)_{j\in J}$ *et tel que* $U = D(\mathfrak{a})$, *vérifiant la condition* (e_0).

Soit $\widetilde{\mathcal{L}} = \widetilde{\mathcal{L}}_U$ la localisation dans $\mathcal{A}$ associée à l'ouvert U de X et caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_U$. Puisque l'ouvert U de X est quasi-compact, le théorème 4-3 et le corollaire 4-4 montrent que l'anneau A' est l'anneau localisé $A_{\mathfrak{F}}$ de A pour la localisation $\widetilde{\mathcal{L}}$. Il en résulte que l'anneau A' est caractérisé par :

$$A' = A_{\mathfrak{F}} = \varinjlim_{I \in \mathfrak{F}} \operatorname{Hom}(I, A/_{\mathfrak{F}A})$$

et l'homomorphisme de restriction ρ de A dans A' coïncide avec l'homomorphisme ψ_A^U .

Tout d'abord, pour qu'une famille finie $(f_j)_{j \in J}$ d'éléments de A vérifie

$$U = \bigcup_{j \in J} D(f_j)$$

il faut et il suffit que $(f_j)_{j\in J}$ soit un système fini de générateurs d'un idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de A, tel que $U = D(\mathfrak{a})$.

D'autre part, pour tout idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de A vérifiant cette condition, l'ensemble $\mathfrak{F}$ admet pour système cofinal les puissances de $\mathfrak{a}$ et par suite l'idéal I_0 introduit dans la condition (e_0) coïncide avec l'idéal $\mathfrak{F}A$, ce qui entraîne $A_0 = A/_{\mathfrak{F}A}$. Il en résulte alors que l'anneau A' peut être caractérisé par :

$$A' = A_{\mathfrak{F}} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}^n , A_0) .$$

Compte tenu de la caractérisation classique de la structure multiplicative de l'anneau $A_{\mathfrak{F}}$, ces remarques entraînent immédiatement l'équivalence des conditions (d_0) et (e_0) .

Il en résulte immédiatement que les conditions (d) et (e) sont équivalentes et que de même les conditions (d') et (e') sont équivalentes.

Le théorème (1-4-1) de [7] montre que la condition (a) entraîne la condition (b).

Il est évident que la condition (b) entraîne la condition (b').

Les relations (a) et (c) du lemme 6-2 entraînent la relation

$$L_U = \rho_* \Gamma' j^* \check{P} .$$

D'après le corollaire 6-5, le foncteur $j^* \check{P}$ est exact et comme le foncteur ρ_* est exact, si le foncteur Γ' est exact, le foncteur localisation L_U de la localisation $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}_U$ dans $\mathcal{A}$ est exact. Ainsi, la condition (b') entraîne la condition (c).

Puisque l'ouvert U de X est quasi-compact, la proposition 2-9 montre que la localisation $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}_U$ dans $\mathcal{A}$ est de type fini. La proposition 3-5 et le théorème 3-6 de [11] montrent donc que la condition (c) entraîne la condition (c').

Soit $\tilde{\mathcal{L}}' = \rho(\tilde{\mathcal{L}})$ la localisation dans $\mathcal{A}'$, image par ρ de la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ et caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent $\mathfrak{F}' = \rho(\mathfrak{F})$ image par ρ de l'ensemble $\mathfrak{F}$.

D'après le théorème 3-6 de [11], pour que la localisation $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}_U$ dans $\mathcal{A}$ soit plate, il faut et il suffit que l'ensemble $\mathfrak{F}'$ vérifie

$$\mathfrak{F}' = \{A'\} \quad .$$

En particulier, lorsque la localisation $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}_U$ dans $\mathcal{A}$ est plate, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A tel que $\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}$, le lemme 5-2 entraîne que l'idéal $A'\rho(\mathfrak{a})$ de A' est un élément de $\mathfrak{F}'$ et par suite :

$$A' \rho(\mathfrak{a}) = A' \ .$$

Toute famille finie $(f_j)_{j \in J}$ d'éléments de A , telle que :

$$U = \bigcup_{j \in J} D(f_j)$$

est un système fini de générateurs d'un idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de A vérifiant : $U = D(\mathfrak{a})$ et par suite : $\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}$.

Ce qui précède montre donc que la condition (c') entraîne

$$\sum_{j \in J} A' \rho(f_j) = A'$$

ce qui équivaut à l'existence d'une famille $(g_j)_{j \in J}$ d'éléments $g_j \in A'$, telle que :

$$\sum_{j \in J} g_j \, \rho(f_j) = 1' .$$

L'interprétation de ρ comme l'homomorphisme de restriction à l'ouvert U de X , montre que les éléments $\rho(f_j)$ de $A' = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ sont les restrictions $(f_i|U)$ à U des sections $f_i \in A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ et comme l'élément unité de A' est la restriction à U de la section unité au-dessus de X , la relation précédente s'écrit :

$$\sum_{j \in J} g_j \, (f_j|U) = 1|U .$$

Ainsi, la condition (c') entraîne la condition (*d*).

Il est évident que la condition (*d*) entraîne la condition (*d'*).

Compte tenu des équivalences établies au début de cette démonstration, pour l'achever, tout revient à montrer que la condition (*d'*) entraîne la condition (*a*).

La condition (*d'*) signifie que la famille $(f_j)_{j \in J}$ d'éléments de A est un système fini de générateurs d'un idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de A , vérifiant $U = D(\mathfrak{a})$ et pour lequel il existe une famille $(g_j)_{j \in J}$ d'éléments g_j de A' , telle que :

$$\sum_{j \in J} g_j \, \rho(f_j) = 1'$$

Puisque l'anneau A' est commutatif, pour tout entier n , la considération de la puissance $n^{\text{ième}}$ des deux membres de la relation précédente, montre que l'élément unité 1' de A' peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire, à coefficients dans A' , d'éléments de A' qui sont les images par ρ d'éléments de l'idéal $\mathfrak{a}^n$. Autrement dit, il en résulte la relation :

$$A' \rho(\mathfrak{a}^n) = A'$$

qui montre que A' est le seul idéal $\mathfrak{a}'$ de A' vérifiant :

$$\mathfrak{a}^n \subset \rho^{-1}(\mathfrak{a}') .$$

Comme la condition $U = D(\mathfrak{a})$ entraîne que l'ensemble topologisant et idempotent $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_U$ admet pour système cofinal les puissances de l'idéal $\mathfrak{a}$, le lemme 5-2 montre que l'ensemble topologisant et idempotent $\mathfrak{F}' = \rho(\mathfrak{F})$, image par ρ de l'ensemble $\mathfrak{F}$, vérifie :

$$\mathfrak{F}' = \{A'\} \quad .$$

Soit $(X', \mathcal{O}'_{X'})$ le schéma affine associé à l'anneau A' et soit φ: X' → X l'application continue déterminée par l'homomorphisme d'anneaux $\rho : A \to A'$. Le lemme 5-8 entraîne que la localisation $\tilde{\mathcal{L}}' = \rho(\tilde{\mathcal{L}})$ dans $\mathcal{A}'$ est la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_{U'}$ dans $\mathcal{A}'$, associée à l'ouvert $U' = \varphi^{-1}(U)$ de X' . La relation $\mathfrak{F}' = \{A'\}$ entraîne donc U' = X' et le théorème 6-8 montre que l'application continue φ : X' → X induit un homéomorphisme w de X' sur l'ouvert U de X , qui caractérise un isomorphisme de préschémas :

$$W : (X', \mathcal{O}'_{X'}) \to (U, \mathcal{O}_U) .$$

La condition *(d')* entraîne donc que le préschéma $(U, \mathcal{O}_U)$, induit sur l'ouvert U par le schéma affine $(X, \mathcal{O}_X)$, est isomorphe au schéma affine $(X', \mathcal{O}'_{X'})$, c'est-à-dire que l'ouvert U de X est un ouvert affine.

Ainsi, la condition *(d')* entraîne la condition *(a)*, ce qui achève la démonstration.

7-2 - <u>Notations</u> - Etant donné un schéma affine $(X, \mathcal{O}_X)$, associé à un anneau commutatif A , pour tout ouvert U de X , en posant : $A' = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, le foncteur section $\Gamma(U,\cdot)$ de la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules (non nécessairement quasi-cohérents) dans la catégorie $\mathcal{A}' = \mathrm{Mod}\ A'$ des A'-modules, est exact à gauche.

Pour tout entier $p \geq 0$, soit $H^p(U,\cdot)$, le $p^{\text{ième}}$ foncteur dérivé du foncteur $\Gamma(U,\cdot)$. Ces foncteurs $H^p(U,\cdot)$ caractérisent un *foncteur cohomologique universel* [6] , noté $H^*(U,\cdot)$, de la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules dans la catégorie $\mathcal{A}'$ des A'-modules, d'après une remarque analogue à la remarque (0-12-1-2) de [8].

De même, pour tout entier $p \geq 0$, soit $\check{H}^p(U,\cdot)$ le $p^{\text{ième}}$ foncteur associé au foncteur $\Gamma(U,\cdot)$ par la méthode de Čech. (Voir par exemple [5] ou [9]).

7-3. *LEMME* : *Etant donné un* schéma affine $(X, \mathcal{O}_X)$, *associé à un anneau* commutatif A , *pour tout* ouvert affine U *de* X , *tout* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\widetilde{M}$, *vérifie* :

$$\check{H}^p(U,\widetilde{M}) = 0$$

pour tout $p>o$.

Tout d'abord, il est immédiat que tout ouvert affine U de X est quasi-compact.

Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de l'ouvert quasi-compact U de X , par des ouverts $U_j = D(f_j)$, caractérisés par une famille finie $(f_j)_{j\in J}$, d'éléments de A , vérifiant

$$U = \bigcup_{j\in J} D(f_j) .$$

Le théorème 7-1 entraîne qu'il existe une famille $(g_j)_{j\in J}$ de sections $g_j \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, telle que :

$$\sum_{j\in J} g_j \, (f_j|U) = 1|U .$$

Pour tout $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent $\widetilde{M}$, la restriction $\widetilde{M}|U$ de $\widetilde{M}$ à l'ouvert U est un $(\mathcal{O}_X|U)$-Module quasi-cohérent et le corollaire (1-2-4) de [8] entraîne alors :

$$H^p(\mathcal{U}, \widetilde{M}) = 0$$

pour tout $p>o$.

Comme les recouvrements ouverts de U , de la forme $\mathcal{U}$, sont arbitrairement fins , par passage "à la limite inductive", il en résulte alors :

$$\check{H}^p(U,\widetilde{M}) = 0$$

pour tout $p>o$, ce qui achève la démonstration.

7-4. *COROLLAIRE* : *Etant donné un* schéma affine $(X, \mathcal{O}_X)$, *associé à un anneau* commutatif A , *pour tout* ouvert U *de* X , *avec les notations précédentes, il y a équivalence des conditions suivantes* :

(a) *L'ouvert* U *de* X *est un* ouvert affine.

(b) *L'ouvert* U *de* X *est* quasi-compact *et tout* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\widetilde{M}$, *vérifie* :

$$H^p(U,\widetilde{M}) = 0$$

pour tout $p>o$.

Naturellement, tout ouvert affine de X est quasi-compact.

Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des ouverts affines de X . La proposition (5-5-6) de [7] montre que $U'\in\mathcal{V}$ et $U''\in\mathcal{V}$ impliquent : $U'\cap U''\in\mathcal{V}$. Il est évident que $\mathcal{V}$ contient des ouverts arbitrairement petits. Enfin, pour tout $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent $\widetilde{M}$, le lemme 7-3 entraîne :

$$\check{H}^q(U',\widetilde{M}) = 0$$

pour tout $q\geqslant 1$ et tout $U'\in\mathcal{V}$.

Ainsi, pour tout $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent $\tilde{M}$, la famille $\mathfrak{V}$, qui constitue naturellement un recouvrement ouvert de X , possède les propriétés a), b) et c) de l'énoncé du théorème 5-9-2 de [5]. La démonstration de ce théorème 5-9-2 de [5] établit, par récurrence sur n , que les homomorphismes canoniques :

$$\check{H}^n(U',\tilde{M}) \to H^n(U',\tilde{M})$$

sont bijectifs pour tout $U' \in \mathfrak{V}$.

Compte tenu de ce résultat, le lemme 7-3, entraîne :

$$H^p(U',\tilde{M}) = 0$$

pour tout $p>o$ et tout $U' \in \mathfrak{V}$.

Ainsi, la condition (a) entraîne la condition (b).

Avec les notations 6-1, pour tout ouvert quasi-compact U de X , le foncteur Γ_U , défini sur la catégorie $\mathfrak{B}$ des $\mathcal{O}_X$-Modules quasi-cohérents, est la restriction du foncteur section $\Gamma(U,\cdot)$ défini sur la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules. Il en résulte immédiatement que la condition (b) entraîne que le foncteur Γ_U est exact.

Les relations (c), (a) et (a') du lemme 6-2 entraînent la relation :

$$L_U = \Gamma\ j_*\ j^*\ \check{P} = \rho_*\ \Gamma'\ j^*\ \check{P} = \rho_*\ \Gamma_U\ \check{P}$$

et comme les foncteurs ρ_* et $\check{P}$ sont toujours exacts, il en résulte alors que le foncteur localisation L_U est exact, c'est-à-dire que la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_U$ dans $\mathcal{A}$, associée à l'ouvert quasi-compact U de X , est exacte. Le théorème 7-1 entraîne alors que l'ouvert U de X est un ouvert affine.

Ainsi, la condition (b) entraîne la condition (a), ce qui achève la démonstration.

7-5. Remarque - Le corollaire 7-4 constitue une généralisation du théorème (1-3-1) de [8].

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI : *Algèbre commutative*, Ch.I. *Modules plats*. Ch.II. *Localisations*, Paris Hermann (*Act. Sc. et Ind.* 1290, *Eléments de Mathématiques*).

[2] C. CHEVALLEY : *Introduction à la Théorie des Schémas*, Cours professé à l'I.H.P., Année 1964-65, édité par le Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique.

[3] P. GABRIEL : *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. Fr., t.90, 1962, p. 323-448 (Thèse Sc. Math. Paris 1961).

[4] J. GIRAUD : *Analysis Situs*, Séminaire BOURBAKI, Mai 1963.

[5] R. GODEMENT : *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Paris Hermann 1958 (*Act. Sc. et Ind.*, 1252, *Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg*, XIII).

[6] A. GROTHENDIECK : *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku math.J, Série 2, t.9, 1957, p. 119-221.

[7] A. GROTHENDIECK : *Eléments de géométrie algébrique*, I. *La langage des schémas*, Paris Presses universitaires de France, 1960 (*Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications Mathématiques* N°4).

[8] A. GROTHENDIECK : *Eléments de géométrie algébrique*, III. *Etude cohomologique des faisceaux cohérents*, Paris Presses Universitaires de France 1961 (*Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques* N°11).

[9] M. HACQUE : *Préfaisceaux et faisceaux sur les situations*, Cahiers de topologie et géométrie différentielle, Vol.IX, 3, 3ème trimestre 1967, p. 36-108 (Dunod, Paris).

[10] M. HACQUE : *Mono-sous-catégories d'une catégorie de modules*, Publications du Département de Math. Fac. des Sc. de LYON, t.6, 1969, fasc.1, p. 13-48.

[11] M. HACQUE : *Localisations exactes et localisations plates*, Publications du Département de Math. Fac. des Sc. de LYON, t.6, 1969, fasc.2, p. 97-117.

[12] D. LAZARD : *Autour de la platitude*, Bull. Soc.Math. Fr., t.97, 1969, p. 81-128 (Thèse Sc. Math. Paris, 1968).

Manuscrit remis le 20 mars 1970.

M. HACQUE
Maître de Conférences
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
43, bd du 11 novembre 1918
VILLEURBANNE