A. DUSSAUCHOY

Loi de probabilité des maxima d'une fonction aléatoire stationnaire Somme d'une partie gaussienne et d'une partie sinusoïdale

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1969, tome 6, fascicule 4
, p. 79-95

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1969__6_4_79_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1970 t. 6-4

LOI DE PROBABILITE DES MAXIMA D'UNE FONCTION ALEATOIRE STATIONNAIRE SOMME D'UNE PARTIE GAUSSIENNE ET D'UNE PARTIE SINUSOÏDALE

A. DUSSAUCHOY

I. - INTRODUCTION.

Nous étudions la loi de probabilité des maxima d'une fonction aléatoire $X(t)$, somme d'une partie stationnaire et gaussienne $B(t)$ et d'une partie sinusoïdale $P\cos(\omega t + \varphi)$ ayant une phase φ aléatoire uniformément répartie entre 0 et 2π et indépendante de la partie gaussienne. Cette fonction aléatoire $X(t)$ a été utilisée dans [1] pour représenter le rythme alpha des tracés électro-encéphalographiques.

Nous étendons à $X(t)$ les résultats classiques ([2],[3]) concernant les fonctions aléatoires gaussiennes. Puis nous montrons que la densité de probabilité des maxima de la fonction aléatoire $X(t)$ tend vers la densité de probabilité de l'enveloppe lorsque la mesure spectrale de la partie gaussienne tend vers une mesure concentrée en ω , ce qui justifie une approximation faite dans [1].

II. - PROPRIETES PRELIMINAIRES.

Soit la fonction aléatoire

(1) $$X(t) = P\cos(\omega t + \varphi) + B(t) \qquad -\infty < t < +\infty$$

où

a). $B(t)$ est une fonction aléatoire réelle, stationnaire, gaussienne et séparable, $B(t)$ ayant de plus

(i) une moyenne nulle $E[B(t)] = 0$.

(ii) une fonction de corrélation.

(2) $$\psi(\tau) = E[B(t+\tau) \cdot B(t)]$$

continue, admettant des moments spectraux finis jusqu'à l'ordre 4 et vérifiant :

(3) $$\psi(o)\, \psi^{(4)}(o) - [\psi''(o)]^2 \neq 0$$

b). P et ω sont des constantes et φ une variable aléatoire uniformément répartie entre 0 et 2π et indépendante de $B(t)$.

Nous pouvons alors donner la proposition suivante :

Proposition :

(i). $X(t)$ *est stationnaire au sens strict*

(ii). Les réalisations de $X(t)$ *sont presque sûrement à dérivées continues*

(iii). Sur tout intervalle fini T ,

a) le nombre moyen de fois où $X(t)$ [*resp.* $X'(t)$] *franchit sur* T , *le niveau* m *est fini*

b) pour tout m *fixé, la probabilité d'au moins une tangence de* $X(t)$ *au niveau* m , *sur* T *est nulle.*

Les résultats énoncés dans la proposition précédente seront utilisés lors de l'étude de la loi de probabilité des maxima de $X(t)$.

Démonstration :

1°) Considérons n instants $t_1, t_2, \ldots t_n$. Pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ le vecteur aléatoire $[X(t_1) \ldots X(t_n)]$ conditionnellement au fait que $\varphi = \theta$ est un vecteur aléatoire gaussien de fonction caractéristique :

$$g(U;\theta) = \exp\left[i\, U^T m(\theta) - \frac{1}{2} U^T A\, U\right]$$

où

$$m(\theta) = \begin{vmatrix} P\cos(\omega t_1 + \theta) \\ \vdots \\ P\cos(\omega t_1 + \theta) \end{vmatrix}$$

est le vecteur moyenne de $[X(t_1),\ldots,X(t_n)]$ conditionnellement au fait que $\varphi = \theta$.

où A est la matrice de covariance de $[X(t_1) \ldots X(t_n)]$

où U est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et où B^T désigne la transposée de la matrice B.

Le vecteur aléatoire $[X(t_1),\ldots,X(t_n)]$ admet alors pour fonction caractéristique

$$h(U) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} g(U;\theta)\,d\theta$$

De même le vecteur aléatoire $[X(t_1+\tau) \ldots X(t_n+\tau)]$ admet pour fonction caractéristique

$$\begin{aligned} h'(U) &= \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} g(U;\theta+\omega\tau)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\omega\tau}^{2\pi+\omega\tau} g(U;\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} g(U;\theta)\,d\theta = h(U) \end{aligned}$$

car $g(U;\theta)$ est une fonction périodique de θ et de période 2π .

Ce qui démontre la première partie de la proposition.

2°) La fonction de corrélation $R(\tau)$ du processus $X(t)$ est

(4) $$R(\tau) = \psi(\tau) + \frac{P^2}{2}\cos(\omega\tau)$$

Avec les hypothèses faites sur $\psi(\tau)$ (existence du quatrième moment spectral) il est aisé de voir que $R^{(4)}(o)$ existe. Par conséquent $X(t)$ est un processus dont les réalisations ont presque surement des dérivées continues (d'après [3] page 125).

3°) L'étude faite dans [3] page 317 d'une fonction aléatoire de même type que $X(t)$ permet de donner le nombre moyen de franchissements du niveau m par $X(t)$ pendant l'intervalle $[0,1]$:

(5) $$E[C_m(0,1)] = \frac{\sigma_2}{(2\pi)^{3/2}\sigma}\int_o^{2\pi}\exp\left(-\frac{(m-P\cos\theta)^2}{2\,\sigma^2}\right) \times\left[\frac{2}{(2\pi)^{1/2}}\ \exp\left(-\frac{\omega^2P^2\sin^2\theta}{2\,\sigma_2^2}\right) + \frac{\omega\,P\sin\theta}{\sigma_2}\ \mathrm{erf}\left(\frac{\omega\,P\sin\theta}{2^{1/2}\,\sigma_2}\right)\right]d\theta$$

où σ^2 et σ_2^2 sont respectivement la variance et le second moment spectral de $B(t)$.

et où $\operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{(\pi)^{1/2}} \displaystyle\int_0^x \exp\left[-t^2\right] dt$.

Alors en appliquant au processus $X'(t)$ la même formule le nombre moyen de franchissement du niveau m par $X'(t)$ pendant l'intervalle $[0,1]$ est :

$$E\left[C_m^*(0,1)\right] = \frac{\sigma_4}{(2\pi)^{3/2}\sigma_2} \int_0^{2\pi} \exp\left[-\frac{(m+P\ \omega \sin\theta)^2}{2\ \sigma_2^2}\right]$$

$$\times\left[\frac{2}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{\omega^4\ P^2 \cos^2\theta}{2\ \sigma_4^2}\right) + \frac{\omega^2\ P\cos\theta}{\sigma_4} \operatorname{erf}\left(\frac{\omega^2\ P\cos\theta}{2^{1/2}\ \sigma_4}\right)\right] d\theta \tag{6}$$

où σ_4^2 est le quatrième moment spectral de $B(t)$.

Les résultats généraux concernant un intervalle de durée T s'obtiennent en multipliant les résultats (5) et (6) par T .

4°) On peut tirer (iii,b) d'un théorème de [illegible]SKAYA [4] qui est rappelé dans [3] page 76 en remarquant que la loi de probabilité à une dimension de $X(t)$ admet une densité bornée.

III. - LOI DE PROBABILITE DES MAXIMA DE $X(t)$.

Théorème 1 :

1°) *La hauteur du maximum local de* $X(t)$ *en* t_o *sachant que* $X(t)$ *a un maximum local en* t_o *, est une variable aléatoire ayant une loi de probabilité absolument continue de densité*

$$g(m) = \frac{\int_{-\infty}^{0} |z|\, p(m,o,z)dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{0} |z|\ p(x,o,z)dz} \tag{7}$$

où $p(x,y,z)$ *est la densité de probabilité de la loi conjointe de* $X(o)$, $X'(o)$, $X''(o)$.

2°) *En désignant par* σ_j^2 *le moment spectral d'ordre* j *de* $B(t)$ *et par* $M_{i,j}$ *les mineurs de la matrice* M *de covariance de* $[X(o), X'(o), X''(o)]$, *on a* $g(m) = \frac{N}{D}$ *avec :*

(8)
$$N = \frac{1}{4\pi^2 M_{33}} \int_0^{2\pi} \exp\left[- \frac{P^2\omega^2\sin^2\theta}{2\,\sigma_2^2} - \frac{(m-P\cos\theta)^2}{2\,\sigma^2}\right]$$
$$\times \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left[- \frac{(M_{13}(m-P\cos\theta)+M_{33}P\omega^2\cos\theta)^2}{2\,M_{33}\det M}\right] (\det M)^{1/2}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{M_{13}(m-P\cos\theta)+M_{33}P\omega^2\cos\theta}{2(M_{33})^{1/2}}\right)\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{M_{13}(m-P\cos\theta)+M_{33}P\omega^2\cos\theta}{(2\,M_{33}\det M)^{1/2}}\right)\right]\right\} d\theta$$

et

(9)
$$D = \frac{\sigma_4}{(2\pi)^{3/2}\,\sigma_2} \int_0^{2\pi} \exp\left[- \frac{(P\,\omega\sin\theta)^2}{2\,\sigma_2^2}\right]$$
$$\times \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left(- \frac{\omega^4P^2\cos^2\theta}{2\,\sigma_4^2}\right) + \frac{\omega^2P\cos\theta}{2\,\sigma_4}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{\omega^2P\cos\theta}{2^{1/2}\,\sigma_4}\right)\right]\right\} d\theta$$

Démonstration :

A/ Sachant que le processus $X(t)$ a un maximum local à l'instant t_o (c'est-à-dire sachant que $X'(t)$ admet un passage par zéro en descendant à l'instant t_o), la loi de probabilité de la variable aléatoire "hauteur de ce maximum" a pour fonction de répartition (d'après [3] page 243)

(10)
$$G(m) = \frac{E[D'_m(0,1)]}{E[D'(0,1)]}$$

où d'après [3] page 192 :

a) $D'(0,1)$ est sur $[0,1]$ le nombre de passages par zéro en descendant de $X'(t)$.

b) $D'_m(0,1)$ est sur $[0,1]$ le nombre de passages par zéro, en descendant, de $X'(t)$ pour lesquels la valeur correspondante de $X(t)$ ne dépasse pas m .

B/ L'expression du dénominateur de (10) s'obtient facilement en effectuant des calculs similaires à ceux donnés dans [3] pages 316 et 317 mais en les faisant porter sur $D'(0,1)$ et en utilisant pour cela les résultats donnés dans [3] page 288. On obtient alors facilement l'expression (9).

C/ 1) Soit $x(t)$ une fonction telle que :

a) $x(t)$ soit dérivable et à dérivée continue

b) il y ait un nombre fini de valeurs t_i de $t \in [0,1]$ annulant $x'(t)$

c) ces valeurs t_i soient situées en dehors de l'ensemble dénombrable des points de la forme $j/2^n$, $o \leq j \leq 2^n$, $n=1,2\ldots$

d) les maxima de $x(t)$ sur $[0,1]$ soient d'amplitude différente de m.

En appelant a_m le nombre de maxima de $x(t)$ sur $[0,1]$ dont l'amplitude est inférieure à m et $b_{m,n}$ le nombre d'intervalles $\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right]$ tels que $x'(\frac{j}{2^n}) > o > x'(\frac{j+1}{2^n})$ et $x(\frac{j}{2^n}) < m$ $n=1,2,\ldots$

On voit assez facilement que pour tout $\varepsilon > o$ à partir d'un certain rang N_ε

$$a_{m+\varepsilon} \geq b_{m,n} \geq a_m \qquad \forall n > N_\varepsilon$$

d'où l'on tire $b_{m,n} \longrightarrow a_m$ lorsque $n \longrightarrow \infty$

2) Comme l'ensemble des trajectoires de $X(t)$ qui ne possèdent pas les 4 propriétés a, b, c, d énoncées plus haut est de probabilité nulle, le nombre Y_n d'intervalles $\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right]$ tels que :

$$X'(\frac{j}{2^n}) > o > X'(\frac{j+1}{2^n}) \quad \text{et} \quad X(\frac{j}{2^n}) < m$$

converge presque surement vers $D'_m(0,1)$ le nombre de maxima de $X(t)$ dont l'amplitude est inférieure à m. Comme $D'_m(0,1) \leq D'(0,1)$ et que $E[D'(0,1)] < +\infty$ le théorème de convergence dominée nous donne :

$$(11) \qquad E(Y_n) \longrightarrow E[D'_m(0,1)] \quad \text{lorsque} \quad n \longrightarrow \infty$$

3) Soit alors les variables aléatoires

$$U_n^j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad X'(\frac{j}{2^n}) > o > X'(\frac{j+1}{2^n}) \quad \text{et} \quad X(\frac{j}{2^n}) < m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est clair que

$$Y_n = \sum_{j=0}^{2^n-1} U_n^j$$

et

$$E[Y_n] = \sum_{j=0}^{2^n-1} [E\, U_n^j] = 2^n\, E(U_n^o) \quad \text{par stationnarité}$$

$$= 2^n\, P\{[X'(o) > o > X'(2^{-n})] \quad \text{et} \quad X(o) < m\}$$

$$= 2^n\, P\{[o < X'(o) < -2^{-n}\, Z_n] \quad \text{et} \quad X(o) < m\}$$

en posant $Z_n = 2^n[X'(2^{-n}) - X'(o)]$

En appelant $p_n(x,y,z)$ la densité de probabilité conjointe de $X(o)$, $X'(o)$ et Z_n sous réserve d'existence de cette densité (nous verrons plus loin que l'hypothèse $\psi(o)\, \psi^4(o) - (\psi''(o))^2 \neq 0$ entraîne bien l'existence de cette densité pour n suffisament grand).

On a donc

$$E[Y_n] = 2^n \int_{-\infty}^{m} dx \int_{-\infty}^{o} dz \int_{o}^{-2^{-n}z} p_n(x,y,z)\,dy$$

En appelant $p_n(x,y,z;\theta)$ la densité de probabilité conjointe de $X(o)$, $X'(o)$, Z_n sachant que $\varphi = \theta$ on a :

$$p_n(x,y,z) = \frac{1}{2\pi} \int_{o}^{2\pi} p_n(x,y,z;\theta)\,d\theta \tag{12}$$

Soit alors :

$$E[Y_n] = \frac{2^n}{2\pi} \int_{-\infty}^{m} dx \int_{-\infty}^{o} dz \int_{o}^{-2^{-n}z} dy \int_{o}^{2\pi} p_n(x,y,z;\theta)\,d\theta$$

$$(13)\quad \begin{aligned} &= \frac{2^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{m} dx \int_{-\infty}^{o} dz \int_0^{-2^{-n}z} p_n(x,y,z;\theta)\,dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{m} dx \int_{-\infty}^{o} dz \int_0^{-z} p_n(x,2^{-n}y,z;\theta)\,dy \end{aligned}$$

en appliquant successivement le théorème de Fubini et le changement de y en $2^{-n}y$.

4) Il est facile de voir que

$$(14)\quad p_n(x,2^{-n}y,z;\theta) = (2\pi)^{-3/2}(\det M_n)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} u_n^T \cdot M_n^{-1} \cdot u_n\right]$$

avec

$$u_n = \left|\begin{matrix} x - P\cos\theta \\ 2^{-n}y + P\omega\sin\theta \\ z + 2^n P\omega(\sin(\theta+\omega 2^{-n}) - \sin\theta) \end{matrix}\right| \xrightarrow[\to\infty]{} u = \left|\begin{matrix} x - P\cos\theta \\ P\,\omega\sin\theta \\ z + P\,\omega^2\cos\theta \end{matrix}\right|$$

M_n est la matrice de covariance du vecteur gaussien $[X(o), X'(o), Z_n]$. Lorsque $n \to \infty$ $M_n \longrightarrow M$ la matrice de covariance de $[X(o), X'(o), X''(o)]$

$$M = \left|\begin{matrix} \psi(o) & 0 & \psi''(o) \\ 0 & -\psi''(o) & 0 \\ \psi''(o) & 0 & \psi^{(4)}(o) \end{matrix}\right|$$

Comme :

$$(15)\quad \det M = -\psi''(o)\left[\psi(o)\ \psi^4(o) - (\psi''(o))^2\right]$$

et comme par hypothèse les moments spectraux de $B(t)$ existent jusqu'à l'ordre 4 et que de plus $\psi(o)\ \psi^4(o) - (\psi''(o))^2 \neq o$, alors $\det M \neq o$. Par conséquent pour n suffisament grand $\det M_n \neq o$ et $p_n(x,y,z;\theta)$ ainsi que $p_n(x,y,z)$ existent d'après (14) et (12).

Alors

$$(16)\quad p_n(x,2^{-n}.y,z;\theta) \xrightarrow[n\to\infty]{} p(x,o,z;\theta)$$

où $p(x,y,z;\theta)$ est la densité de probabilité du vecteur $[X(o), X'(o), X''(o)]$ conditionnellement au fait que $\varphi = \theta$.

5) Nous allons maintenant donner une majoration de $p_n(x,y,z;\theta)$ qui nous permette d'appliquer à la formule (13) le théorème de la convergence dominée.

Considérons alors la densité de probabilité conjointe du vecteur $[X(o),\ Z_n]$ sachant que $\varphi = \theta$

$$Q_n(x,z;\theta) = \frac{1}{2\pi(\det A_n)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} V_n^T A_n^{-1} V_n\right]$$

où

$$V_n = \begin{vmatrix} x - P\cos\theta \\ z + 2^n P\,\omega(\sin(\omega\, 2^{-n} + \theta) - \sin\theta) \end{vmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{} V = \begin{vmatrix} x - P\cos\theta \\ z + P\,\omega^2 \cos\theta \end{vmatrix}$$

et où A_n la matrice de covariance de $[X(o),\ Z_n]$ converge vers A la matrice de covariance de $[X(o),\ X''(o)]$ lorsque $n \to \infty$.

Comme $\det A = \psi(o)\,\psi^{(4)}(o) - (\psi''(o))^2 \neq 0$ on est assuré que pour n suffisament grand $\det A_n \neq 0$ et que par conséquent $Q_n(x,z;\theta)$ existe.

Alors

$$(17)\quad p_n(x,2^{-n}y,z;\theta) = Q_n(x,z;\theta)\ .\ \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\,\Sigma_n} \exp\left[-\frac{(2^{-n}y - MC)^2}{2\,\Sigma_n^2}\right]$$

où MC et Σ_n^2 sont respectivement la moyenne et la variance conditionnelle de $X'(o)$ lorsque X , Z_n et φ sont fixées.

Or les propriétés des lois conditionnelles de vecteurs gaussiens ([5] page 315) donnent

$$\Sigma_n = \left(\frac{\det M_n}{\det A_n}\right)^{1/2}$$

Soit puisque le dernier terme de (17) est majoré par 1

$$p_n(x,2^{-n}y,z;\theta) \leq (2\pi)^{-3/2}\ (\det M_n)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} V_n^T A_n^{-1} V_n\right]$$

Or

a) $\det M_n \longrightarrow \det M$ donc à partir d'un certain rang $\det M_n \geq \frac{1}{2}\det M > 0$

b) $V_n^T A_n^{-1} V_n \geq k_n V_n^T A^{-1} V_n$ où k_n est la plus petite valeur propre de la matrice $A_n^{-1} A$ et puisque $A_n^{-1} A \longrightarrow I$, $k_n \longrightarrow 1$ et donc à partir d'un certain rang

$$V_n^T A_n^{-1} V_n \geq \frac{1}{2} V_n^T A^{-1} V_n$$

d'où à partir d'un certain rang :

$$p_n(x,2^{-n}y,z;\theta) \leq 2^{1/2}(2\pi)^{-3/2}(\det M)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{4} V_n^T A^{-1} V_n\right]$$

En désignant par $\beta_{i,j}$ les éléments (tous positifs) de A^{-1} et par
$\alpha_n = 2^n P\omega(\sin(\theta + \omega\, 2^{-n}) - \sin\theta) - P\omega^2 \cos\theta$ (qui tend vers 0 lorsque $n \to \infty$)

$$V_n^T A^{-1} V_n = V^T A^{-1} V + \alpha_n^2 \beta_{22} + 2\alpha_n\left[\beta_{12}(x - P\cos\theta) + \beta_{22}(z + P\omega^2\cos\theta)\right]$$

A partir d'un certain rang $|\alpha_n| < 1$ donc

$$V_n^T A^{-1} V_n \geqslant V^T A^{-1} V - 2\left[\beta_{12}(|x| + P) + \beta_{22}(|z| + P\omega^2)\right]$$

En écrivant

$$V = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} - P\cos\theta \\ P\,\omega^2\cos\theta \end{vmatrix} = W_1 + W_2(\theta)$$

$$\begin{aligned} V_n^T A^{-1} V_n &\geqslant W_1^T A^{-1} W_1 + 2\, W_1^T A^{-1} W_2 - 2\left[\beta_{12}(|x| + P) + \beta_{22}(|z| + P\omega^2)\right] \\ &\geqslant W_1^T A^{-1} W_1 - 2P(\beta_{12} + \beta_{22}\omega^2) - 2|x|(\beta_{12} + P\beta_{11} + \beta_{12}\, P\omega^2) \\ &\qquad - 2|z|(\beta_{22} + P\beta_{12} + P\omega^2\, \beta_{22}) \end{aligned}$$

D'où à partir d'un certain rang :

$$p_n(x, 2^{-n}y, z;\theta) \leqslant K \exp\left[-\tfrac{1}{4} W_1^T A^{-1} W_1\right]\exp(C_1|x| + C_2|z|)$$

Or la fonction

$$(x,y,z;\theta) \longrightarrow \exp\left[-\tfrac{1}{4} W_1^T A^{-1} W_1\right]\exp(C_1|x| + C_2|z|)$$

est intégrable sur le domaine $-\infty < x < m$, $-\infty < z < -y < o$, $o < \theta < 2\pi$

D'où finalement en appliquant le théorème de convergence dominée et en utilisant les formules (13) et (16)

$$E[Y_n] \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{m} dx \int_{-\infty}^{o} |z|\; p(x,o,z;\theta)\,dz$$

Soit en notant $p(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} p(x,y,z;\theta)\,d\theta$ la densité de probabilité conjointe de $X(o)$, $X'(o)$, $X''(o)$

$$E[Y_n] \longrightarrow \int_{-\infty}^{m} dx \int_{-\infty}^{o} |z|\; p(x,o,z)\,dz$$

D'où finalement d'après (11)

$$E[D_m'(0,1)] = \int_{-\infty}^{m} dx \int_{-\infty}^{o} |z|\; p(x,o,z)\,dz$$

d'écrire :

$$G(m) = \frac{\int_{-\infty}^{m} dx \int_{-\infty}^{o} |z| \; p(x,o,z)dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{o} |z| \; p(x,o,z)dz}$$

Ce qui achève la démonstration de la première partie du théorème 1 .

D/ Pour terminer la démonstration de ce théorème nous allons maintenant calculer le numérateur N de (7).

Il est facile de voir que :

$$p(m,o,z) = (2\pi)^{-2} (\det M)^{-1/2} \int_{o}^{2\pi} \exp\left[- \frac{Q(m,z;\theta)}{2 \det M}\right] d\theta$$

avec

$$Q(m,z;\theta) = M_{11}(m - P \cos \theta)^2 + M_{22}P^2\omega^2 \sin^2 \theta$$

$$+ M_{33}(z + P\omega^2 \cos \theta)^2 + 2M_{13}(m - P \cos \theta)(z + P\omega^2 \cos \theta)$$

et

$$(18) \quad \begin{cases} M_{11} = -\psi''(o) \; \psi^{(4)}(o) \\ M_{22} = \psi(o) \; \psi^{(4)}(o) - (\psi''(o))^2 \\ M_{33} = - \psi(o) \; \psi''(o) \\ M_{13} = (\psi''(o))^2 \\ M_{12} = M_{23} = 0 \end{cases}$$

Alors :

$$N = \frac{-1}{(2\pi)^{5/2} (\det M)^{1/2}} \int_{o}^{2\pi} d\theta \exp\left[- \frac{R_1(\theta)}{2 \det M}\right] \int_{-\infty}^{o} z \exp\left[- \frac{R_2(z)}{2 \det M}\right] dz$$

avec

$$R_1(\theta) = M_{11}(m - P \cos \theta)^2 + M_{22} P^2 \omega^2 \sin^2 \theta$$

$$\text{et } R_2(z) = M_{33}(z + P \omega^2 \cos \theta)^2 + 2M_{13}(m - P \cos \theta)(z + P \omega^2 \cos \theta)$$

La dernière intégrale de N se calcule en effectuant le changement de variable

$$W = \left(\frac{M_{33}}{2 \det M}\right)^{1/2} (z + P \omega^2 \cos \theta) + \frac{M_{13}(m - P \cos \theta)}{(2 M_{33} \det M)^{1/2}}$$

Cette dernière intégrale devient alors :

$$\exp\left(\frac{M_{13}^2(m - P\cos\theta)^2}{2\,M_{33}\det M}\right) . \left(\frac{2\det M}{M_{33}}\right)^{1/2}$$

$$\times\int_{-\infty}^{a} \frac{(2\,M_{33}\det M)^{1/2}\,W - M_{13}(m - P\cos\theta) - M_{33}\,P\,\omega^2\cos\theta}{M_{33}} \exp\left[-\,W^2\right]dW$$

$$= \exp\left(\frac{M_{13}^2(m - P\cos\theta)^2}{2\,M_{33}\det M}\right) . \left(\frac{2\det M}{M_{33}}\right)^{1/2}$$

$$\times\left[\left(\frac{\det M}{2\,M_{33}}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{a}\exp\left[-W^2\right]dW^2 - \frac{M_{13}(m - P\cos\theta) + M_{33}P\omega^2\cos\theta}{M_{33}}\int_{-\infty}^{a}\exp\left[-W^2\right]dW\right]$$

avec $\quad a = \dfrac{M_{33}P\,\omega^2\cos\theta + M_{13}(m - P\cos\theta)}{(2\,M_{33}\det M)^{12}}$

Soit alors

$$N = \frac{1}{(2\pi)^{5/2}}\left(\frac{2}{M_{33}}\right)^{1/2}\int_{0}^{2\pi}\exp\left(-\frac{(m - P\operatorname{Cos}\theta)^2\,(M_{11}M_{33} - M_{13}^2) + M_{22}M_{33}P^2\omega^2\sin^2\theta}{2\,M_{33}\det M}\right)$$

$$.\left\{\left(\frac{\det M}{2\,M_{33}}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{(M_{13}(m - P\cos\theta) + M_{33}\,P\,\omega^2\cos\theta)^2}{2\,M_{33}\det M}\right]\right.$$

$$\left. + \frac{(\pi)^{1/2}}{2}\left(\frac{M_{13}}{M_{33}}(m - P\cos\theta) + P\,\omega^2\cos\theta\right)\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{M_{33}P\omega^2\cos\theta + M_{13}(m - P\cos\theta)}{(2\,M_{33}\det M)^{1/2}}\right)\right]\right\}d\theta$$

D'où finalement la formule (8) ce qui achève la démonstration du théorème 1.

Il est à remarquer qu'en faisant $P = 0$ dans la formule (8) on retrouve le résultat donné dans [2] et [3] dans le cas d'une fonction aléatoire stationnaire gaussienne et de moyenne nulle.

IV. - CONVERGENCE DE LA LOI DE PROBABILITE DES MAXIMA DE $X(t)$ VERS LA LOI DE PROBABILITE A UNE DIMENSION DU PROCESSUS ENVELOPPE.

Considérons $V(t)$ le processus enveloppe de $X(t)$.

(19) $\quad V(t) = \left[X^2(t) + \hat{X}^2(t)\right]^{1/2}$

ou $\hat{X}(t)$ est la transformée de Hilbert de $X(t)$ c'est-à-dire le résultat du passage de $X(t)$ à travers un filtre linéaire de gain ([3] page 142) :

$$H(\lambda) = \begin{cases} i & \lambda < o \\ o & \lambda = o \\ -i & \lambda > o \end{cases}$$

Si la fonction de répartition spectrale de $X(t)$ est continue en zéro alors on sait que pour tout t ([3] page 142)

$$E[X(t) \,.\, \hat{X}(t)] = o$$

$$E[\,|\hat{X}(t)|^2] = E[\,|X(t)|^2]$$

En remarquant que, conditionnellement à $\varphi = \theta$ les variables aléatoires $X(t)$ et $\hat{X}(t)$ sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes de même variance et de moyennes respectives $P\cos(\omega t + \theta)$ et $P\sin(\omega t + \theta)$ on obtient facilement que $R(t)$ admet une loi de probabilité à une dimension absolument continue de densité :

$$(20) \quad k(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v < o \\ \dfrac{v}{2\pi\psi(o)} \displaystyle\int_o^{2\pi} \exp\left[-\dfrac{(v^2+P^2-2v\,P\cos\theta)}{2\psi(o)}\right] d\theta & \text{si } v > o \end{cases}$$

Il est à remarquer que cette loi ne dépend pas de la forme du spectre de $B(t)$ (il faut cependant que la fonction de répartition spectrale soit continue en zéro).

Intuitivement, il est logique de penser que la loi de probabilité des maxima est proche de celle de l'enveloppe lorsque le processus $B(t)$ à un spectre concentré autour de la valeur ω .

Nous allons voir précisément

Théorème 2 :

Si ψ_n *est une suite de fonctions de corrélation telle que :*

(i) $\psi_n(o) =$ constante $= S$ (même variance)

(ii) $\psi_n(o)\, \psi_n^{(4)}(o) - (\psi_n''(o))^2 \neq 0 \quad \forall n$

(iii) pour tout n *la mesure spectrale* μ_n *correspondant à* ψ_n *admette des moments jusqu'à l'ordre 4 et* $\mu_n(\{o\}) = o$

(iv) Quand $n \to \infty$, μ_n *converge faiblement vers* $S.\delta_\omega$ *où* δ_ω *est*

(v) $\lambda \to \lambda^4$ *soit uniformément intégrable par rapport à* μ_n .

Soit $g_n(m)$ *la densité de probabilité de la loi des maxima d'un processus :*

$$X_n(t) = P\cos(\omega t + \varphi_n) + B_n(t)$$

$B_n(t)$ *est un processus stationnaire gaussien centré, séparable et de fonction de corrélation* $\psi_n(\tau)$

φ_n *est une variable aléatoire indépendante de* $B_n(t)$ *et uniformément répartie sur* $[0\ ,\ 2\pi]$.

Alors quand $n \to \infty$ $g_n(m)$ *converge ponctuellement vers la densité de probabilité de la loi de l'enveloppe de* $X_n(t)$ *(indépendante de* n *).*

<u>Démonstration</u> :

A/

1) Il est immédiat de constater que l'hypothèse *(v)* implique que pour $o \leqslant j \leqslant 4$ la fonction $\lambda \to \lambda^j$ est uniformément intégrable par rapport à μ_n .

2) Lorsque $n \to \infty$

$$(21)\quad \begin{cases} \sigma_n^2 = \psi_n(o) = \displaystyle\int_o^\infty d\mu_n \longrightarrow \psi(o) = S\ .\int_o^\infty \delta_\omega(d\lambda) = S \\ (\sigma_2)_n^2 = -\ \psi_n''(o) = \displaystyle\int_o^\infty \lambda^2 d\mu_n \longrightarrow S\ .\int_o^\infty \lambda^2\ \delta_\omega(d\lambda) = \omega^2\ S \\ (\sigma_4)_n^2 = \psi_n^{(4)}(o) = \displaystyle\int_o^\infty \lambda^4\ d\mu_n \longrightarrow S\int_o^\infty \lambda^4\ \delta_\omega(d\lambda) = \omega^4\ S \end{cases}$$

où $(\sigma_j)_n^2$ est le moment spectral d'ordre j de $B_n(t)$.

Ceci résulte immédiatement de l'uniforme intégrabilité de $\lambda \to \lambda^j$ $(o \leqslant j \leqslant 4)$ et de l'hypothèse *(iv)* (voir par exemple [6] page 183).

Remarquons qu'en fait, la première limite de (21) jointe à l'hypothèse *(iv)* indique que $\mu_n \to \mu$ étroitement.

3) D'après (15), (18) et (21), lorsque $n \to \infty$

$$
(22) \quad \begin{cases}
\det M_n \longrightarrow o \\
(M_{11})_n \longrightarrow \omega^6 \; S^2 \\
(M_{22})_n \longrightarrow 0 \\
(M_{33})_n \longrightarrow \omega^2 \; S^2 \\
(M_{13})_n \longrightarrow \omega^4 \; S^2
\end{cases}
$$

où les $(M_{ij})_n$ sont les mineurs de la matrice M_n de covariance de $[X_n(o) \; , \; X'_n(o) \; , \; X''_n(o)]$.

B/ La loi de probabilité des maxima de $X_n(t)$ admet une densité :

$$
g_n(m) = \frac{\displaystyle\int_o^{2\pi} \ell_n(m,\theta)\, d\theta}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dm \int_o^{2\pi} \ell_n(m,\theta)\, d\theta}
$$

où $\displaystyle\int_o^{2\pi} \ell_n(m,\theta)\, d\theta$ est donnée par l'expression (8) lorsque l'on remplace (M_{ij}) par $(M_{ij})_n$ et $\det M$ par $\det M_n$.

Il est aisé de voir, compte tenu de (22) que pour tout m

$$
\ell_n(m,\theta) \longrightarrow \begin{cases}
\dfrac{m\ \omega}{4\pi^2\ S} \exp\left[- \dfrac{m^2+P^2-2m\ P\ \cos\ \theta}{2\ S}\right] & \forall\, m \geqslant o \\
0 & \forall\, m < o
\end{cases}
$$

D'autre part pour n assez grand

$$
\frac{S^2\ \omega^2}{2} < (M_{33})_n < 2\ S^2\ \omega^2
$$

$$
(M_{13})_n < 2\ S^2\ \omega^4
$$

$$
(2\pi)^{-1/2} \det M_n < 1
$$

Alors compte tenu que $\det M_n > o$ on peut obtenir la majoration suivante :

$$
\ell_n(m,\theta) < \frac{1}{2\pi^2\ S^2\ \omega^2} \exp\left[- \frac{m^2 - 2|m|P}{2\ S}\right] . \times \left[1 + 2\sqrt{2}(|m| + 2P)\right]
$$

pour tout $-\infty < m < +\infty$, $o \leqslant \theta < 2\pi$

En appliquant le théorème de la convergence dominée (après avoir remarqué que la majoration est intégrable sur le domaine $o \leqslant \theta < 2\pi$, $-\infty < m < +\infty$) on obtient lorsque $n \to \infty$:

$$\int_o^{2\pi} f_n(m,\theta)\,d\theta \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{m\,\omega}{4\pi^2\,S} \displaystyle\int_o^{2\pi} \exp\left[-\dfrac{m^2+P^2-2\,m\,P\cos\theta}{2\,S}\right] d\theta & \text{lorsque } m \geqslant o \\ 0 & \text{lorsque } m < o \end{cases}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dm \int_o^{2\pi} f_n(m,\theta)\,d\theta \longrightarrow \frac{\omega}{2\pi}\int_o^{\infty} dm\, \frac{m}{2\pi\,S}\int_o^{2\pi} \exp\left[-\frac{m^2+P^2-2\,m\,P\cos\theta}{2\,S}\right] d\theta$$

Or en remarquant que (20) est une densité de probabilité :

$$\int_o^{\infty} \frac{m}{2\pi\,S}\int_o^{2\pi} \exp\left[-\frac{m^2+P^2-2\,m\,P\cos\theta}{2\,S}\right] d\theta\, dm = 1$$

Soit finalement

$$g_n(m) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{m}{2\pi\,S}\int_o^{2\pi} \exp\left[-\frac{m^2+P^2-2\,m\,P\cos\theta}{2\,S}\right] d\theta$$

Ce qui achève la démonstration du théorème 2.

Remarquons pour terminer que le théorème 2 est applicable au cas gaussien. Il suffit pour cela de faire $P = o$ dans les différentes formules.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DUSSAUCHOY A. : Contribution à l'étude des propriétés statistiques du rythme alpha. Thèse de doctorat es sciences physiques. LYON 1969.

[2] RICE S.O. : Mathematical analysis of random noise. Bell system Techn. Journ. Vol. 23 et 24 1945.

[3] CRAMER J. And LEADBETTER MoR. : Stationary and Related stochastic processes. John WILEY and Sons NEW YORK 1967.

[4] BULINSKAYA : On the mean number of crossings of a level by a stationary Gaussian process. Teorya Veroyatnostei i ee Primeneniya 6(1961) p. 474-477.

[5] CRAMER ii. : Mathematical Methods of statistics Princeton University Press Princeton 1946.

[6] LOEVE M. : Probability Theory. D. Van Nostrand Company Inc. NEW YORK 1955.

[7] RICE S.O. : Statistical properties of sine wave plus random noise Bell System Techn. Journal, 27, Mars 1948 - p. 109-157.

Manuscrit remis le 27 avril 1970.

A. DUSSAUCHOY
Maître-assistant
I.N.S.A. - VILLEURBANNE