G. GERMAIN

Extension algébrique simple d'un anneau Propriétés de transfert et de descente

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1969, tome 6, fascicule 4
, p. 55-77

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1969__6_4_55_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1970 t. 6-4

EXTENSION ALGEBRIQUE SIMPLE D'UN ANNEAU
PROPRIETES DE TRANSFERT ET DE DESCENTE

G. GERMAIN

Introduction.

Dans tout ce qui suit, A désigne un sous-anneau d'un domaine d'intégrité B, ayant même élément unité que B, θ un élément de B n'appartenant pas à A, A^* le plus petit anneau contenant A et θ qu'on appelle extension simple de A selon θ. Nous supposons que θ est algébrique sur A.

Au paragraphe I, on cherche une condition sur A pour qu'il existe un polynôme caractéristique de θ sur A.

Au paragraphe II, on étudie le relèvement des idéaux de A et on donne une condition nécessaire pour que A^* soit local lorsque A est local et factoriel.

Au paragraphe III, on donne une condition nécessaire et suffisante pour que A^* soit normal lorsque A est factoriel et de rang un.

Au paragraphe IV, on établit deux démonstrations de la propriété de descente suivante : "A^* local régulier et θ fortement entier sur $A \Rightarrow A$ local régulier".

Soient A un sous-anneau d'un domaine d'intégrité B ayant même élément unité que B et θ un élément de B n'appartenant pas à A. Notons A^*, le plus petit anneau contenant A et θ, qu'on appelle extension simple de A selon θ. Rappelons que A^* est l'ensemble des expressions polynômiales $\sum_{i=o}^{n} a_i \theta^i$ $a_i \in A$, $n \in N$, et qu'il est isomorphe à $\frac{A[x]}{\mathfrak{J}}$, $\mathfrak{J}$ étant l'idéal des polynômes de A[x] dont θ est racine.

Rappelons aussi la terminologie suivante :

1) Si $\mathfrak{J} = (o)$, A^* est une extension transcendante de A

2) Si $\mathfrak{J} \neq (o)$ et si aucun polynôme de $\mathfrak{J}$ n'a un coefficient directeur égal à l'unité, θ est dit algébrique sur A et A^* extension algébrique de A.

3) Si $\mathfrak{J} \neq (o)$ et si il existe un polynôme de $\mathfrak{J}$ ayant son coefficient directeur égal à l'unité, θ est dit entier sur A et A^* extension entière de A.

4) Si $\mathfrak{J} \neq (o)$ et si parmi les polynômes de $\mathfrak{J}$ de plus faible degré, il en existe un dont le coefficient directeur est égal à l'unité, θ est dit fortement entier sur A.

Dans ce paragraphe nous nous placerons dans le cas où $\mathfrak{J} \neq (o)$.

<u>*Proposition 1-I*</u> : *Si* A *est factoriel, tout idéal premier de* A[x] *au-dessus de l'idéal* (o) *de* A *est principal et de rang 1.*

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A[x] tel que $\mathfrak{p} \cap A = (o)$. Il existe dans $\mathfrak{p}$ un polynôme irréductible $\Phi(x)$, non nul, de degré minimum, ce degré étant strictement positif. En effet, l'ensemble des degrés des polynômes non nuls de $\mathfrak{p}$ étant un sous-ensemble de N, il possède un élément minimum non nul car $\mathfrak{p} \cap A = (o)$. Soit $\varphi(x)$ un élément de $\mathfrak{p}$ ayant ce degré minimum.

Nous pouvons prendre $\phi(x)$ primitif (le p.g.c.d. de ses coefficients égal à l'unité de A) car $\mathfrak{P}$ est premier et au-dessus de l'idéal (o) de A.

$\phi(x)$ est irréductible, sinon $\phi(x) = \phi_1(x)\phi_2(x)$ avec $o < d^\circ(\phi_1(x)) < d^\circ(\phi(x))$ et $o < d^\circ(\phi_2(x) < d^\circ(\phi(x))$. $\mathfrak{P}$ étant premier, $\phi_1(x) \in \mathfrak{P}$ ou $\phi_2(x) \in \mathfrak{P}$. C'est impossible car $\mathfrak{P}$ n'a pas d'élément de degré strictement inférieur à celui de $\phi(x)$.

Montrons que $\mathfrak{P} = (\phi(x))$. Soit $p(x) \in \mathfrak{P}$. On peut effectuer la division généralisée de $p(x)$ par $\phi(x)$ (voir [II] page 133) : il existe un couple unique de polynômes $q(x)$ et $r(x)$ tels que

$$(1) \qquad a^k p(x) = \phi(x)q(x)+r(x)$$

avec $k = \max(o, m-n+1)$ et $d^\circ(r(x)) < n$ ou $r = o$, n (respectivement m) étant le degré de $\phi(x)$ (respectivement $p(x)$) et a le coefficient directeur de $\phi(x)$.

$r(x) = a^k p(x) - \phi(x)q(x)$ appartient à $\mathfrak{P}$ et $d^\circ(r(x)) < d^\circ(\phi(x)) \Rightarrow r(x) = 0$, c'est-à-dire, $a^k p(x) = \phi(x)q(x)$. $\phi(x)$ étant irréductible et $A[x]$ factoriel, $\phi(x)$ divise $p(x)$ c'est-à-dire $p(x) = \phi(x)q_1(x)$. $\mathfrak{P}$ est l'idéal principal $(\phi(x))$.

S'il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$ de $A[x]$ strictement contenu dans $\mathfrak{P}$ et différent de l'idéal (o), d'après ce qui précède, $\mathfrak{q} = (\psi(x))$ où $\psi(x)$ est un polynôme irréductible. $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{P} \Rightarrow \psi(x) = \lambda(x)\phi(x)$, ce qui est impossible. $\mathfrak{P}$ est de rang 1.

<u>*Proposition 2-I*</u> *: Si* A *est factoriel, l'idéal* $\mathfrak{I}$ *des polynômes, dont* θ *est racine, est principal et de rang* 1

B étant intègre, $\mathfrak{I}$ est un idéal premier et $\mathfrak{I} \cap A = (o)$. Donc, d'après la proposition, $\mathfrak{I}$ est principal et de rang 1.

Nous venons de montrer que lorsque A est factoriel, il existe un polynôme primitif irréductible $\phi(x)$ tel que $\mathfrak{J} = (\phi(x))$ et $R \simeq \frac{A[x]}{(\phi(x))}$. Comme en [I], $\phi(x)$ sera appelé le polynôme caractéristique de Θ sur A.

<u>*Proposition 3.I*</u> *: Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A tel que $\frac{A}{\mathfrak{p}}$ soit factoriel, les idéaux premiers de $A[x]$ au-dessus de $\mathfrak{p}$ sont de la forme $\{\psi(x), \mathfrak{p}\}$ où $\bar{\psi}(x)$ est un polynôme premier de $\frac{A}{\mathfrak{p}}[x]$ (ou bien $\bar{\psi}(x) = \bar{0}$).*

<u>Notations</u> : $\psi(x) = a_0 + a_1x + \quad + a_nx^n$, $\bar{\psi}(x) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1x + \quad + \bar{a}_nx^n$ $\bar{a}_i$ étant la classe de a_i dans $\frac{A}{\mathfrak{p}}$.

Soit $\mathfrak{p}_x$ un idéal de $A[x]$ tel que $\mathfrak{p}_x \cap A = \mathfrak{p}$.

$\bar{\mathfrak{p}}_x = \{\bar{p}(x),\ p(x) \in \mathfrak{p}_x\}$ est un idéal premier de $\frac{A}{\mathfrak{p}}[x]$ au-dessus de l'idéal $(\bar{0})$ de $\frac{A}{\mathfrak{p}}$. Il est évident que $\bar{\mathfrak{p}}_x$ est un idéal. Il est premier car si $\bar{p}(x)\bar{q}(x) \in \bar{\mathfrak{p}}_x$, il existe $p_1(x) \in A[x]$ et $q_1(x) \in A[x]$ tels que :

$$\bar{p}_1(x) = \bar{p}(x),\ \bar{q}_1(x) = \bar{q}(x) \text{ et } p_1(x)q_1(x) \in \mathfrak{p}_x$$

$\mathfrak{p}_x$ étant premier, $p_1(x)$ ou $q_1(x)$ appartient à $\mathfrak{p}_x$, donc $\bar{p}(x)$ ou $\bar{q}(x)$ appartient à $\bar{\mathfrak{p}}_x$.

Montrons enfin que $\bar{\mathfrak{p}}_x \cap \frac{A}{\mathfrak{p}} = (\bar{0})$. Soit $\bar{p}(x) = \bar{q} \in \bar{\mathfrak{p}}_x \cap \frac{A}{\mathfrak{p}}$. Il existe $p_1(x) \in \mathfrak{p}_x$ et $q_1 \in A$ tels que $\bar{p}_1(x) = \bar{p}(x)$ et $\bar{q}_1 = \bar{q}$ et $p_1(x) = q_1 + \sum_{i=1}^{\ell} p_ix^i$ $(p_i \in \mathfrak{p})$.

$q_1 = p_1(x) - \sum_{i=1}^{\ell} p_ix^i \Rightarrow q_1 \in \mathfrak{p}_x \cap A = \mathfrak{p} \Rightarrow \bar{q}_1 = \bar{q} = \bar{0}$.

D'après la proposition 1.I, $\bar{\mathfrak{p}}_x = (\bar{\psi}(x))$, $\bar{\psi}(x)$ étant un polynôme premier de $\frac{A}{\mathfrak{p}}(x)$. Donc $\mathfrak{p}_x = \{p, \psi(x)\}$.

<u>*Corollaire*</u> *: Si $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal de* A, *les idéaux premiers de* $A[x]$ *au-dessus de $\mathfrak{M}$ sont les idéaux engendrés par* $\{\psi(x);\mathfrak{M}\}$ *où* $\bar{\psi}(x)$ *est un polynôme premier de* $\frac{A}{\mathfrak{M}}[x]$ *(ou bien* $\bar{\psi}(x) = \bar{0}$*).*

<u>**Remarques**</u> :

1°) K étant un corps, $K[x]$ n'est jamais un anneau local. En effet, si $K \neq \{0\}$ il a au moins deux éléments 0 et 1. Alors les polynômes x et 1+x sont premiers entre eux (identité de Bezout) et sont premiers. Donc les idéaux (x) et (1+x) sont premiers et maximaux. $K[x]$ a au moins deux idéaux maximaux.

2°) L'idéal $\mathfrak{M}A[x]$ engendré par l'idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A est premier, mais n'est jamais maximal dans $A[x]$, car d'après 1°), il existe toujours dans $\frac{A}{\mathfrak{M}}[x]$ un polynôme premier non nul $\bar{\phi}(x)$ et l'idéal $\{\phi(x),\mathfrak{M}\}$ est premier, au-dessus de $\mathfrak{M}$ et contient strictement $\mathfrak{M}A[x]$.

3°) Les anneaux $\frac{A[x]}{\mathfrak{M}A[x]}$ et $\frac{A}{\mathfrak{M}}[x]$ sont isomorphes, $\mathfrak{M}$ étant l'idéal maximal de A; (Rappelons que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, $\frac{A}{\mathfrak{p}}[x]$ et $\frac{A[x]}{\mathfrak{p}A[x]}$ sont isomorphes). $\frac{A}{\mathfrak{M}}$ étant un corps, $\frac{A}{\mathfrak{M}}[x]$ est euclidien donc factoriel.

Nous avons donc un exemple d'anneau factoriel qui est le quotient d'un anneau par un idéal premier non maximal d'après 2°).

4°) Rappelons le théorème suivant ([III], tome II, page 303) :

> *Si* A *est local régulier et si* $\mathfrak{p}$ *est un idéal premier engendré par des éléments linéairement indépendants modulo* $\mathfrak{M}^2$ *($\mathfrak{M}$ étant l'idéal maximal de* A*), alors* $\frac{A}{\mathfrak{p}}$ *est local régulier (donc factoriel).*
> *Nous avons un deuxième exemple d'anneau quotient* $\frac{A}{\mathfrak{p}}$ *factoriel.*

Ces deux exemples m'ont incité à me poser la question suivante :

A étant un domaine d'intégrité factoriel et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, à quelles conditions l'anneau quotient $\frac{A}{\mathfrak{p}}$ est-il factoriel ?

<u>II.</u> Dans ce paragraphe on suppose θ algébrique sur A et A factoriel. Il existe alors un polynôme irréductible $\phi(x)$ de degré n, appelé polynôme caractéristique de θ sur A et tel que A^* soit isomorphe à $\frac{A[x]}{(\phi(x))}$. Nous étudions le relèvement de certains idéaux de A.

<u>*Proposition 1-II*</u> *: L'ensemble des idéaux premiers de A^*, au-dessus de l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, est isomorphe, pour la relation d'ordre, à l'ensemble des idéaux premiers de $\frac{A}{\mathfrak{p}}[x]$, au-dessus de l'idéal $(\bar{0})$ de $\frac{A}{\mathfrak{p}}$ et contenant $\bar{\phi}(x)$.*

<u>Notations</u> : $\bar{p}(x) = \bar{a}_0+\bar{a}_1x+\ldots+\bar{a}_nx^n$ étant un élément de $\frac{A}{\mathfrak{p}}[x]$ nous noterons $p(\theta)$ l'un des éléments de A^* de la forme $a_0+a_1\theta+\ldots+a_n\theta^n$ (où a_i est un représentant de la classe $\bar{a}_i$), les autres éléments de cette forme étant donnés par $p(\theta)+\sum_{i=1}^{r}p_i\theta^i$ où $p_i\in\mathfrak{p}$. De même $p(x) = a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ (où a_i est un représentant de la classe $\bar{a}_i$) est un représentant de la classe $\bar{p}(x)$, les autres étant de la forme $p(x) + \sum_{i=1}^{r} p_ix^i$ où $p_i\in\mathfrak{p}$.

L'ensemble des idéaux premiers de A^* au-dessus de l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de A sera noté $\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}}$ et l'ensemble des idéaux premiers de $\frac{A}{\mathfrak{p}}[x]$ au-dessus de l'idéal $(\bar{0})$ et contenant $\bar{\phi}(x)$ sera noté $\bar{\mathfrak{J}}$.

<u>Démonstration</u> : Soit $\mathfrak{p}^*\in\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}}$, montrons que $\overline{\mathfrak{p}^*} = \left\{\bar{p}(x)\in\frac{A}{\mathfrak{p}}x, p(\theta)\in\mathfrak{p}^*\right\}$ est un idéal de $\bar{\mathfrak{J}}$. En effet :

a) $\overline{\mathfrak{p}^*}$ est un idéal de $\frac{A}{\mathfrak{p}}[x]$ (démonstration laissée aux soins du lecteur).

b) $\overline{\mathfrak{p}^*}$ est premier : $\bar{p}(x)\bar{q}(x)\in\overline{\mathfrak{p}^*} \Rightarrow p(\theta)q(\theta)\in\mathfrak{p}^* \Longrightarrow$ $p(\theta)$ ou $q(\theta)$ appartient à $\mathfrak{p}^* \Rightarrow \bar{p}(x)\in\overline{\mathfrak{p}^*}$ ou $\bar{q}(x)\in\mathfrak{p}^*$

c) $\overline{\mathfrak{p}^*}\cap\frac{A}{\mathfrak{p}} = (\bar{0})$: Soit $\bar{p}(x) = \bar{q}\in\overline{\mathfrak{p}^*}\cap\frac{A}{\mathfrak{p}}$. $p(\theta) = q\in\mathfrak{p}^*\cap A = \mathfrak{p}$ et $\bar{q} = \bar{p}(x) = \bar{0}$

d) $\bar{\phi}(x)\in\overline{\mathfrak{p}^*}$ car $\phi(\theta) = 0\in\mathfrak{p}^*$

L'application f : $\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \bar{\mathfrak{J}}$, $\mathfrak{p}^* \mapsto \overline{\mathfrak{p}^*} = f(\mathfrak{p}^*)$

est un isomorphisme d'ensembles ordonnés.

<u>f est surjective</u>. Soit $\overline{\mathfrak{P}^*} \in \bar{\mathfrak{I}}$. Montrons que $\mathfrak{P}^* = \{p(\theta) \in A^*,\ \bar{p}(x) \in \overline{\mathfrak{P}^*}\}$ est un élément de $\mathfrak{I}^*_{\mathfrak{P}}$ tel que $f(\mathfrak{P}^*) = \overline{\mathfrak{P}^*}$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{p}(x) \in f(p^*) \Rightarrow p(\theta) \in \mathfrak{P}^* \Rightarrow \bar{p}(x) \in \overline{\mathfrak{P}^*} \Rightarrow f(\mathfrak{P}^*) \subset \overline{\mathfrak{P}^*} \\ \bar{p}(x) \in \overline{\mathfrak{P}^*} \Rightarrow p(\theta) \in \mathfrak{P}^* \Rightarrow \bar{p}(x) \in f(\mathfrak{P}^*) \Rightarrow \overline{\mathfrak{P}^*} \subset f(\mathfrak{P}^*) \end{array}\right\} \Rightarrow f(\mathfrak{P}^*) = \overline{\mathfrak{P}^*}$$

Il est évident que $\mathfrak{P}^*$ est un idéal car $\overline{\mathfrak{P}^*}$ en est un.

<u>$\mathfrak{P}^*$ est premier</u> : $p(\theta)q(\theta) \in \mathfrak{P}^* \Rightarrow \bar{p}(x)\bar{q}(x) \in \overline{\mathfrak{P}^*} \Rightarrow \bar{p}(x)$ ou $\bar{q}(x)$ appartient à $\overline{\mathfrak{P}^*} \Rightarrow p(\theta)$ ou $q(\theta)$ appartient à $\mathfrak{P}^*$.

<u>$\mathfrak{P}^* \cap A = \mathfrak{P}$</u> : $p(\theta) = q \in \mathfrak{P}^* \cap A \Rightarrow \bar{p}(x) = \bar{q} \in \overline{\mathfrak{P}^*} \cap \frac{A}{\mathfrak{P}} = (\bar{0}) \Rightarrow \bar{p}(x) = \bar{q} = (\bar{0}) \Rightarrow$ $p(\theta) = q \in \mathfrak{P} \Rightarrow \mathfrak{P}^* \cap A \subset \mathfrak{P}$. De plus, $p \in \mathfrak{P} \Rightarrow \bar{p} = \bar{0} \in \overline{\mathfrak{P}^*} \Rightarrow \mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}^*$

D'où $\mathfrak{P}^* \cap A = \mathfrak{P}$.

<u>f est croissante</u> : Supposons $\mathfrak{P}^* \subseteq \mathfrak{Q}^*$ et soit $\bar{p}(x) \in \overline{\mathfrak{P}^*}$.

Alors $p(\theta) \in \mathfrak{P}^* \Rightarrow p(\theta) \in \mathfrak{Q}^* \Rightarrow \bar{p}(x) \in \overline{\mathfrak{Q}^*} \Rightarrow \overline{\mathfrak{P}^*} \subset \overline{\mathfrak{Q}^*}$

<u>f^{-1} est croissante</u> : $\overline{\mathfrak{P}^*} \subseteq \overline{\mathfrak{Q}^*} \Rightarrow \forall\, p(\theta) \in f^{-1}(\overline{\mathfrak{P}^*})$, $\bar{p}(x) \in \overline{\mathfrak{Q}^*}$, donc $p(\theta) \in f^{-1}(\overline{\mathfrak{Q}^*})$ et $f^{-1}(\overline{\mathfrak{P}^*}) \subseteq f^{-1}(\overline{\mathfrak{Q}^*})$.

<u>*Proposition 2 II*</u> : *Si $\mathfrak{P}$ est un idé l premier de A tel que $\frac{A}{\mathfrak{P}}$ soit factoriel, les idéaux premiers de A^* au-dessus de $\mathfrak{P}$ sont les idéaux engendrés respectivement par $\phi_{\mathfrak{P},i}(\theta)$ et $\mathfrak{P}$ pour $i = 1,2,\ldots,n_{\mathfrak{P}}$, $\prod_{i=1}^{n_{\mathfrak{P}}} \bar{\phi}_{\mathfrak{P},i}(x)$ étant la décomposition en facteurs premiers dans $\frac{A}{\mathfrak{P}}[x]$ de $\bar{\phi}.(x)$*

<u>**Démonstration**</u> : soit $\prod_{i=1}^{n_{\mathfrak{P}}} \bar{\phi}_{\mathfrak{P},i}(x)$ la décomposition en facteurs premiers dans $\frac{A}{\mathfrak{P}}[x]$ de $\bar{\phi}(x)$. Montrons que $\bar{\mathfrak{I}} = \left\{\overline{\mathfrak{P}^*_i},\ \overline{\mathfrak{P}^*_i} = (\bar{\phi}_{\mathfrak{P},i}(x))\right\}_{i=1,\ldots,n_p}$.

$(\bar{\phi}_{\mathfrak{P},i}(x))$ est un idéal premier au-dessus de $(\bar{0})$ et contenant $\bar{\phi}(x)$, donc $\overline{\mathfrak{P}^*_i} = (\bar{\phi}_{\mathfrak{P},i}(x)) \in \bar{\mathfrak{I}}$ pour tout $i = 1,2,\ldots,n_p$. Réciproquement soit $\overline{\mathfrak{P}^*} \in \bar{\mathfrak{I}}$. $\overline{\mathfrak{P}^*}$ est principal (proposition 1 I). $\overline{\mathfrak{P}^*}$ contenant $(\bar{\phi}(x))$, il existe $i \in \{1,2,\ldots,n_p\}$ tel que $(\bar{\phi}_{\mathfrak{P},i}(x)) = \overline{\mathfrak{P}^*}$. D'après la proposition 1 – II, $\mathfrak{I}^*_{\mathfrak{P}}$ est isomorphe à $\bar{\mathfrak{I}}$. Pour tout $\mathfrak{P}^* \in \mathfrak{I}_{\mathfrak{P}}^*$, il existe $i \in \{1,2,\ldots,n_p\}$ tel que $\mathfrak{P}^* = f^{-1}(\overline{\mathfrak{P}^*_i}) = f^{-1}((\bar{\phi}_{\mathfrak{P},i}(x)) = \{p(\theta) \in A^*,\ \bar{p}(x) = \bar{\lambda}(x)\bar{\phi}_{\mathfrak{P},i}(x)\}$

C'est-à-dire

$$\mathfrak{p}^* = \left\{ p(\theta) = \lambda(\theta)\phi_{\mathfrak{p},i}(\theta) + \sum p_i \theta^i \ , \lambda(\theta) \in A^* \quad \text{et} \quad p_i \in \mathfrak{p} \right\}$$

$$= \left\{ \phi_{\mathfrak{p},i}(\theta), \mathfrak{p} \right\}$$

d'où

$$\mathfrak{I}^*_{\mathfrak{p}} = \left\{ \mathfrak{p}^*_i \ , \ \mathfrak{p}^*_i = \left\{ \phi_{\mathfrak{p},i}(\theta), \mathfrak{p} \right\} \right\}_{i=1,2,\ldots,n_{\mathfrak{p}}}$$

<u>Remarques</u> : (a) Si $\bar{\phi}(x) = \bar{0}$, alors $\mathfrak{I}^*_{\mathfrak{p}} = \left\{ \mathfrak{p}^* , \mathfrak{p}^* = \left\{ q(\theta), \mathfrak{p} \right\} \right\}$ où $\bar{q}(x)$ est un polynôme premier quelconque de $\frac{A}{\mathfrak{p}}[x]$. En particulier $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p} A^* \in \mathfrak{I}^*_{\mathfrak{p}}$.

(b) Si $\bar{\phi}(x) = \bar{1}$ c'est-à-dire $\phi(x) = 1 + \sum p_i x^i$, $\bar{\mathfrak{I}} = \emptyset$ d'où $\mathfrak{I}^*_{\mathfrak{p}} = \emptyset$. Il n'y a aucun idéal premier de A^* au-dessus de l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de A. On dit alors que $\mathfrak{p}$ est perdu dans A^* (III).

(c) Si $\bar{\phi}(x) \neq \bar{0}$, il n'y a aucune relation d'inclusion entre les éléments de $\mathfrak{I}^*_p$ lorsque $\frac{A}{\mathfrak{p}}$ est factoriel . Sinon

$$\mathfrak{p}^*_i = \left\{ \phi_{\mathfrak{p},i}(\theta), \mathfrak{p} \right\} \subseteq \mathfrak{p}^*_j = \left\{ \phi_{\mathfrak{p},j}(\theta), \mathfrak{p} \right\} \Longrightarrow \phi_{\mathfrak{p},i}(\theta) = \lambda(\theta)\phi_{\mathfrak{p},j}(\theta)$$

$$+ \sum_{i=1}^{\ell} p_i \theta^i (p_i \in \mathfrak{p}) \Longrightarrow \bar{\phi}_{\mathfrak{p},i}(x) = \bar{\lambda}(x)\bar{\phi}_{\mathfrak{p},j}(x)$$ ce qui est impossible

car $\bar{\phi}_{\mathfrak{p},i}(x)$ est premier dans $\frac{A}{\mathfrak{p}}[x]$. C'est faux si $\bar{\phi}(x) = \bar{0}$ car alors $\mathfrak{p}^* = \left\{ q(\theta), \mathfrak{p} \right\} \supset \mathfrak{p} A^*$ et ce sont deux idéaux de $\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}^*$ d'après (a).

<u>*Corollaire*</u> : *Les idéaux premiers de* A^* *, au-dessus de l'idéal maximal* $\mathfrak{M}$ *de* A *et contenant strictement* $\mathfrak{M} A^*$ *, sont maximaux.*

Si $\bar{\phi}(x) = \bar{1}$ dans $\frac{A}{\mathfrak{M}}[x]$, c'est-à-dire, $\phi(x) = 1 + \sum_{i=1}^{n} m_i x^i \quad m_i \in \mathfrak{M}$ il n'y a pas d'idéaux premiers de A^* au-dessus de $\mathfrak{M}$ (Remarque (b) ci-dessus).

Si $\bar{\phi}(x) = \bar{0}$ dans $\frac{A}{\mathfrak{M}}[x]$, c'est-à-dire, $\phi(x) = \sum_{i=0}^{n} m_i x^i$ $m_i \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{M}} = \{p(\theta), \mathfrak{M}\}$, $\bar{p}(x)$ étant un polynôme premier quelconque de $\frac{A}{\mathfrak{M}}[x]$ ou $\bar{p}(x) = \bar{0}$ (remarque (a)). Soit $\mathfrak{p}^* = \{p(\theta), \mathfrak{M}\}$ un élément de $\mathfrak{J}^*_m$ distinct de $\mathfrak{M}A^*$ c'est-à-dire tel que $\bar{p}(x) \neq \bar{0}$. Si $\mathfrak{p}^*$ n'est pas maximal, il existe un idéal maximal $\mathfrak{q}^*$ de A^* contenant $\mathfrak{p}^*$. $\mathfrak{q}^* \cap A \supset \mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{M}$. Donc $\mathfrak{q}^* \cap A = \mathfrak{M}$, car $\mathfrak{M}$ est maximal, et $\mathfrak{q}^*$ appartient à $\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{M}}$. Il existe $q(\theta)$ tel que $\bar{q}(x) \neq \bar{0}$ dans $\frac{A}{\mathfrak{M}}[x]$ et $\mathfrak{q}^* = \{q(\theta), \mathfrak{M}\}$. $\mathfrak{p}^* \subset \mathfrak{q}^* \Longrightarrow p(\theta) = \lambda(\theta) q(\theta) + \sum m_i \theta^i$ $(m_i \in \mathfrak{M}) \Rightarrow \bar{p}(x) = \bar{\lambda}(x)\bar{q}(x)$. Ceci est impossible car $\bar{p}(x)$ est premier dans $\frac{A}{\mathfrak{M}}[x]$. Donc $\mathfrak{p}^*$ est maximal.

Si $\bar{\phi}(x) \neq \bar{0}$ et $\bar{\phi}(x) \neq \bar{1}$, soit $\bar{\phi}(x) = \prod_{i=1}^{n_{\mathfrak{M}}} \bar{\phi}_{\mathfrak{M},i}(x)$ la décomposition en facteurs premiers de $\bar{\phi}(x)$ dans $\frac{A}{\mathfrak{M}}[x]$. On a $\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{M}} = \{\mathfrak{M}^*_i , \mathfrak{M}^*_i = \{\phi_{\mathfrak{M},i}(\theta), \mathfrak{M}\}\}$ $i = 1, 2, \dots, n_{\mathfrak{M}}$ d'après la proposition 2 II et il n'y a aucune relation d'inclusion entre les éléments de $\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{M}}$ (Remarque (c)). Un raisonnement analogue au précédent montre que les idéaux de $\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{M}}$ sont maximaux.

<u>*Proposition 3 II*</u> : *Si $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ sont deux idéaux premiers de A^* tels que $\frac{A}{\mathfrak{p}}$ et $\frac{A}{\mathfrak{q}}$ soient factoriels et $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, alors à tout idéal $\mathfrak{q}^*$ de A^* premier et au-dessus de $\mathfrak{q}$, on peut faire correspondre au moins un idéal premier $\mathfrak{p}^*$ de A^* au-dessus de $\mathfrak{p}$, tel que $\mathfrak{p}^* \subset \mathfrak{q}^*$*

Soient $\prod_{j=1}^{n_{\mathfrak{q}}} \phi_{\mathfrak{q},j}(x)$ et $\prod_{i=1}^{n_{\mathfrak{p}}} \bar{\phi}_{\mathfrak{p},i}(x)$ les décompositions de $\bar{\phi}(x)$ respectivement dans $\frac{A}{\mathfrak{q}}[x]$ et dans $\frac{A}{\mathfrak{p}}[x]$, et $\mathfrak{q}^*$ un idéal premier de A^* au-dessus de $\mathfrak{q}$.
$\mathfrak{q}^* = \{r(\theta), \mathfrak{q}\}$ avec $r(\theta) = \bar{\phi}_{\mathfrak{q},j}(\theta)$ si $\bar{\phi}(x) \neq \bar{0}$ dans $\frac{A}{\mathfrak{q}}[x]$ ou $\bar{r}(x)$ polynôme premier quelconque de $\frac{A}{\mathfrak{q}}[x]$ si $\bar{\phi}(x) = \bar{0}$ dans $\frac{A}{\mathfrak{q}}[x]$ (proposition 2 III et remarques). On a $\phi(x) = \prod_{j=1}^{n_{\mathfrak{q}}} \phi_{\mathfrak{q},j}(x) + \sum q_i x^i = \prod_{i=1}^{n_{\mathfrak{p}}} \phi_{\mathfrak{p},i}(x) + \sum p_i x^i$ soit $\prod_{i=1}^{n_{\mathfrak{p}}} \phi_{\mathfrak{p},i}(x) = \prod_{j=1}^{n_{\mathfrak{q}}} \phi_{\mathfrak{q},j}(x) + \sum q'_i x^i$ avec $q'_i = q_i - p_i \in \mathfrak{q}$ car $p_i \in \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ et $q_i \in \mathfrak{q}$. En remplaçant x par θ, nous obtenons l'égalité :

$$\prod_{i=1}^{n_{\mathfrak{p}}} \phi_{\mathfrak{p},i}(\theta) = \prod_{j=1}^{n_{\mathfrak{q}}} \phi_{\mathfrak{q},j}(\theta) + \sum q'_i \theta^i$$

Nous pouvons en déduire que $\prod_{i=1}^{n_{\mathfrak{p}}} \phi_{\mathfrak{p},i}(\theta) \in \left\{\phi_{\mathfrak{q},j}(\theta),\mathfrak{q}\right\} = \mathfrak{q}^*$.

Il existe $i \in \left\{1,2,\ldots,n_{\mathfrak{p}}\right\}$ tel que $\phi_{\mathfrak{p},i}(\theta)\in\mathfrak{q}^*$. D'où $\mathfrak{p}^* = \left\{\phi_{\mathfrak{p},i}(\theta),\mathfrak{p}\right\}$ est contenu dans $\mathfrak{q}^* = \left\{\phi_{\mathfrak{q},j}(\theta),\mathfrak{q}\right\}$, $\mathfrak{p}^*$ étant un idéal premier de A^* au-dessus de $\mathfrak{p}$ (proposition 2 II).

Si $\bar\phi(x) = \bar 0$ dans $\frac{A}{\mathfrak{q}}[x]$, $\mathfrak{q}A^*$ est premier et si $\bar\phi(x) \neq \bar 0$ dans $\frac{A}{\mathfrak{p}}[x]$, $\phi_{\mathfrak{p},i}(\theta)\in\mathfrak{q}A^*$ et $\mathfrak{p}_i^* = \left\{\phi_{\mathfrak{p},i}(\theta),\mathfrak{p}\right\}\subset\mathfrak{q}A^*\subseteq\mathfrak{q}^*$ pour tout $i\in\left\{1,2,\ldots,n_{\mathfrak{p}}\right\}$ et tout $\mathfrak{q}^*\in\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{q}}$.

Si de plus $\bar\phi(x) = \bar 0$ dans $\frac{A}{\mathfrak{p}}[x]$, $\mathfrak{p}A^*$ est premier et $\mathfrak{p}A^*\subset\mathfrak{q}A^*\subseteq\mathfrak{q}^*$ $\forall\,\mathfrak{q}^*\in\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{q}}$

Remarquons que $\bar\phi(x) = \bar 0$ dans $\frac{A}{\mathfrak{p}}[x]$ entraîne $\bar\phi(x) = \bar 0$ dans $\frac{A}{\mathfrak{q}}[x]$ puisque $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{q}$

<u>*Corollaire*</u> *: Si* A *est local régulier et si* $\phi(x)$ *n'est pas égal à* $1+\sum_{i=1}^{n} m_i x^i$ *où à* $\sum_{i=0}^{n} m_i x^i$ $m_i\in\mathfrak{M}$ $\dim A^* = \operatorname{Dim} A$.

Rappelons que la dimension d'un anneau A notée dim A, est un entier n tel qu'il existe une chaîne strictement croissante de n+1 idéaux premiers de A

$$\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_2\subset\ldots\subset\mathfrak{p}_n\subset\mathfrak{p}_{n+1}$$

et qu'il n'existe pas de telle chaîne ayant plus de n+1 éléments.

Soient $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal de A et $\left\{u_1,u_2,\ldots,u_n\right\}$ une base de $\mathfrak{M}$.

dim A = n car A est local régulier et la chaîne

$$\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_2\subset\ldots\subset\mathfrak{p}_{n-1}\subset\mathfrak{M} = \mathfrak{p}_n$$

avec $\mathfrak{p}_i = \left\{u_1,u_2,\ldots,u_i\right\}$ i=1,2,...,n-1 est une chaîne strictement croissante d'idéaux premiers de A [IV] . $\frac{A}{\mathfrak{p}_i}$ étant factoriel pour tout i=1,2,...,n-1 [III] on peut trouver une chaîne strictement croissante d'idéaux premiers de A^* .

$$\mathfrak{p}_1^*\subset\mathfrak{p}_2^*\subset\ldots\subset\mathfrak{p}^*_{n-1}\subset\mathfrak{M} = \mathfrak{p}^*_n$$

avec $\mathfrak{p}_i^* = \left\{\phi_{\mathfrak{p}_i,j_i}(\theta),\mathfrak{p}_i\right\}$ (proposition 3-II et $\bar\phi(x)\neq\bar 0$, $\bar\phi(x)\neq\bar 1$ dans $\frac{A}{\mathfrak{p}_i}[x]$ pour i=1,2,...,n). Donc $\dim A^* \geqslant \dim A$. Montrons que $\dim A^* \leqslant \dim A$.

Soient $\mathfrak{P}^*$ et $\mathfrak{Q}^*$ deux idéaux premiers de A^* tels que :
$\mathfrak{P}^* \supset \mathfrak{Q}^*$, $\mathfrak{P}^* \cap A = \mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}^* \cap A = \mathfrak{Q}$. Montrons que $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{Q}$.

Supposons que $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$ et posons $S = A - \mathfrak{P}$. D'après [V] (ch. II, § 2 n° 5 proposition 11 et ch. V, § 2 , n° 1 lemme 1), il existe un isomorphisme, pour la relation d'inclusion, entre l'ensemble des idéaux premiers de A^* au-dessus de $\mathfrak{P}$ et l'ensemble des idéaux premiers de A^*_S au-dessus de $\mathfrak{P} A_S = \mathfrak{P}_S$ idéal de A_S. Si $\mathfrak{P}^*_S$ et $\mathfrak{Q}^*_S$ sont les images respectives par cet isomorphisme de $\mathfrak{P}^*$ et $\mathfrak{Q}^*$ alors $\mathfrak{P}^*_S \supset \mathfrak{Q}^*_S$ et $\mathfrak{P}^*_S \cap A^*_S = \mathfrak{Q}^*_S \cap A = \mathfrak{P}_S$. Or $A^*_S = \dfrac{A_S[x]}{(\phi(x))}$ et $\mathfrak{P}$ étant premier et A local régulier, A_S est local régulier [VI] . De plus $\bar{\phi}(x) \neq \bar{0}$ dans $\dfrac{A_S}{\mathfrak{P}_S}[x]$. $\mathfrak{P}^*_S \supset \mathfrak{Q}^*_S$ est impossible (remarque (c)) et l'hypothèse $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$ est absurde. $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{Q}$ Cela suffit pour conclure que $\dim A^* \leq \dim A$.

<u>*Proposition 4 II*</u> *: Si A est local, factoriel et* $\dim A > 2.$ *, une condition nécessaire pour que les idéaux maximaux de* A^* *soient au-dessus de l'idéal maximal* $\mathfrak{M}$ *de A est que le coefficient directeur du polynôme caractéristique* $\phi(x)$ *de* Θ *sur A soit inversible ;*

<u>Démonstration</u> : une condition nécessaire et suffisante pour que les idéaux maximaux de A^* soient au-dessus de l'idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A est que l'idéal $\mathfrak{M}A^*$ engendré par l'idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A dans A^* soit contenu dans le radical de A^*. Il est donc nécessaire et suffisant que les éléments de A^* de la forme $1 + \sum_{i=1}^{r} m_i \Theta^i$ où $m_i \in \mathfrak{M}$, $r \in \mathbb{N}$ soient inversibles. En particulier il est nécessaire que $1 + m\,\Theta$ soit inversible pour tout $m \in \mathfrak{M}$. $1 + m\Theta$ est inversible si il existe $\mu(\Theta) \in A^*$ tel que $(1+m\Theta)\mu(\Theta) = 1$, soit dans $A[x]$, $(1+mx)\mu(x) = 1+\lambda(x)\phi(x)$, égalité qui s'écrit :

$$(1) \qquad \lambda(x)\,\phi(x) - \mu(x)(1+mx) = 1$$

L'égalité (1) signifie que l'idéal engendré par $\phi(x)$ et $(1+mx)$ dans $A[x]$ est l'anneau tout entier. Nous allons montrer que ceci n'est possible que si le coefficient directeur de $\phi(x)$ est inversible dans A. Appelons $\mathfrak{p}[x]$ l'idéal de $A[x]$ engendré par $\phi(x)$ et $1+mx$. Soit $a \in A$ le reste de la division généralisée de $\phi(x)$ par $1+mx$. On a :

$$(1') \qquad m^n \phi(x) = q(x)(1+mx)+a \qquad (n = d^\circ(\phi(x)))$$

montrons que $\mathfrak{p}[x] \cap A = a\,A$. De façon évidente $aA \subset \mathfrak{p}(x) \cap A$.

Soit $q \in \mathfrak{p}[x] \cap A$. $q = \lambda(x)\,\phi(x) + \mu(x)(1+mx)$ ou encore

$$(2) \qquad \lambda(x)\,\phi(x) = -\mu(x)(1+mx)+q$$

Effectuons la division généralisée de $\lambda(x)\,\phi(x)$ par $1+mx$

$$(3) \qquad m^{n+p}\,\lambda(x)\,\phi(x) = \mu_1(x)(1+mx)+q_1 a$$

avec $d^\circ\,\lambda(x) = p$, q_1 reste de la division généralisée de $\lambda(x)$ par $1+mx$, multiplions (2) par m^{n+p},

$$(2') \qquad m^{n+p}\,\lambda(x)\,\phi(x) = -\,m^{n+p}\mu(x)(1+mx)+qm^{n+p}.$$

L'unicité du couple quotient-reste entraîne

$$q_1 a = qm^{n+p}$$

a et m^{n+p} étant premier entre eux d'après (1'), a divise q car A est factoriel. Donc $q = \lambda a \in aA$ et $\mathfrak{p}(x) \cap A = aA$.

Si $\phi(x)$ est le polynôme $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, et si $a_n \neq \lambda_n m$ (lorsque $\dim A \geqslant 2$ on peut toujours choisir m tel que a_n ne soit pas multiple de m), $a = (-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} m + \dots - a_1 m^{n-1} + a_0 m^n$. Pour que a soit inversible il faut et il suffit que a_n soit inversible

Si A est local factoriel et de dimension 1, les idéaux maximaux de A^* sont nécessairement au-dessus de l'idéal maximal $\mathfrak{M} = (m)$ de A car un idéal premier de A^* est, ou bien nul, ou bien au-dessus de $\mathfrak{M}$. La proposition 2-II et son corollaire entraînant que, dans ce cas, la condition nécessaire et suffisante pour que A^* soit local est la même qu'en [I] (chapitre I. § 1 n°2).

III - $\mathcal{A}^*$ normal, $\mathcal{A}$ étant factoriel et de rang 1.

Rappelons que A^* est extension algébrique simple de A et soit $\phi(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ le polynôme caractéristique de θ sur A, son coefficient directeur a_n étant un élément non inversible de A dont la décomposition en un produit de facteurs irréductibles est :

$$a_n = p_1^{\alpha 1} \, p_2^{\alpha 2} \ldots p_r^{\alpha r}$$

(à un facteur inversible et multiplicatif près).

Nous utiliserons la caractérisation suivante des anneaux normaux :

Un anneau noéthérien A sans diviseurs de zéro est intégralement clos si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont réalisées :

(H_1) Pour chaque idéal premier $\mathfrak{p}$ de A de rang 1, $A_{\mathfrak{p}}$ est intégralement clos.

(H_2) Chaque idéal principal de A n'a pas d'idéaux premiers essentiels immergés.

A étant factoriel et de rang 1, il est à idéaux tous principaux et il est normal. Montrons que A^* est, ou bien un corps, ou bien de rang 1. (on peut dire aussi de dimension 1, voir paragraphe II, page 10). Soit $\mathfrak{p}^*$ un idéal premier de A^* : ou bien $\mathfrak{p}^* \cap A = (o)$ et alors $\mathfrak{p}^* = (o)$ (voir paragraphe II, proposition 2-II). ou bien $\mathfrak{p}^* \cap A \neq (O)$. A étant à idéaux tous principaux $\mathfrak{p}^* \cap A = (q)$. $\phi(x)$ étant primitif, $\bar{\phi}(x) \neq \bar{o}$ dans $\frac{A}{(q)}[x]$ et d'après le corollaire de la proposition 2-II, $\mathfrak{p}^*$ est maximal. La condition (H_2) est donc toujours réalisée dans A^*.

Nous allons chercher une condition nécessaire et suffisante portant sur $\phi(x)$, pour que la condition (H_1) soit réalisée dans A^*, c'est-à-dire pour que A^* soit normal.

Proposition 1 III : *A étant factoriel et de rang 1, A^* est normal si et seulement si A^*_S est normal pour toute partie multiplicative $S = A - \mathfrak{p}$ où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A.*

La condition nécessaire est évidente car : A^* normal $\Rightarrow (A^*)_S$ normal pour toute partie multiplicative de A^* et en particulier pour $S = A-\mathfrak{p}$ où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A. Rappelons que, S étant une partie multiplicative de A^* contenue dans A on a $(A^*)_S = (A_S)^*$. C'est cet anneau que nous noterons A_S^*.

Supposons que pour tout $S = A-\mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, A_S^* soit normal. Alors pour tout idéal premier $\mathfrak{p}^*$ de A^*, $(A^*)_{S^*} = (A_S^*)_{S^*}$ (où $S^* = A^*-\mathfrak{p}^*$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* \cap A$ et $S = A-\mathfrak{p}$) est normal comme A_S^*. Donc A^* est normal d'après (H_1).

<u>RECHERCHE D'UNE CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE POUR QUE A_S^* SOIT NORMAL.</u>

Rappelons que lorsque le coefficient directeur du polynôme caractéristique appartient à S, la condition nécessaire et suffisante pour que A_S^* soit normal a été trouvée par G. MAURY en [I].

Supposons donc que $a_n \notin S$. $a_n \in \mathfrak{p} = (p)$. Il existe $i \in \{1,2,\dots,r\}$ tel que $p_i = p$. Le polynôme caractéristique de θ sur A_S est $\phi(x)$, A_S est local régulier de dimension 1 et d'idéal maximal pA_S. Si $\phi(x) = 1+pxq(x)$, nous avons vu (paragraphe II, remarque (b)) qu'il n'y a pas d'idéaux de A_S^* au-dessus de pA_S, donc donc A_S^* est un corps.

Soit $\prod_{i=1}^{q} \bar{\phi}_i^{\alpha_i}(x)$ la décomposition de $\bar{\phi}(x)$ en facteurs premiers dans $\frac{A_S}{pA_S}[x]$. A_S^* est semi-local d'idéaux maximaux $\mathfrak{p}_i^*$ $(i = 1,2,\dots,q)$ engendrés respectivement par $\phi_i(\theta)$ et pA_S.

Si $\bar{\phi}(x)$ est irréductible dans $\frac{A_S}{pA_S}[x]$, A_S^* est local régulier de dimension 1, donc intégralement clos, car $\bar{\phi}(x) = \bar{\phi}_1(x) \Rightarrow \phi(x) = \phi_1(x)+pq(x)$ et $\phi_1(\theta) = -pq(\theta)$. L'idéal maximal de A_S^* est engendré par p.

Si $\bar{\phi}(x) = \prod_{i=1}^{q} \bar{\phi}_i^{\alpha_i}(x)$ avec $q>1$, à quelles conditions A_S^* est-il intégralement clos ?

Soit $\bar{\phi}_i(x)$ un facteur d'exposant $\alpha_i = 1$ dans la décomposition précédente de $\bar{\phi}(x)$. Il existe un polynôme $\mu(x) \in A_S[x]$ de degré n, tel que l'on puisse écrire

$$\phi(x) = \prod_{i=1}^{q} \phi_i^{\alpha_i}(x) + p\,\mu(x)$$

A_S^* est normal si et seulement si $(A_S^*)_{S_i}$ est normal pour tout $i = 1,2,\dots,q$ avec $S_i^* = A_S^* - \mathfrak{P}_i^*$. Or $(A_S^*)_{S_i^*}$ est local de dimension 1, d'idéal maximal $(\mathfrak{P}_i^*)_{S_i^*}$ dont une base est $\{\phi_i(\theta), p\}$. Mais comme

$$\phi_i(\theta) = \frac{-p\,\mu(\theta)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{q} \phi_j^{\alpha_j}(\theta)}$$

p est une base de $(\mathfrak{P}_i^*)_{S_i^*}$. $(A_S^*)_{S_i^*}$ est donc régulier et par suite normal.

Soit $\bar{\phi}_i(x)$ un facteur d'exposant $\alpha_i > 1$ et supposons A_S^* normal. On peut alors engendrer $\mathfrak{P}_i^*$ par $\phi_i(\theta)$ (même démonstration qu'en [I] pages 38-38). Nous avons vu qu'il existe $\mu(x) \in A[x]$ tel que :

$$\phi(x) = \prod_{i=1}^{q} \phi_i^{\alpha_i}(x) + p\,\mu(x)$$

montrons que $\mu(\theta) \notin \mathfrak{P}_i^*$. Si $\mu(\theta) \in \mathfrak{P}_i^*$, $\mu(\theta) = \phi_i(\theta)\,\Upsilon(\theta)$. K étant le corps des quotients de A_S donc de A, on peut écrire dans $K[\theta]$:

$$\Upsilon(\theta) = \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1}{b_1}\theta + \dots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\theta^{n-1}$$

Posons $D = b_0 b_1 \dots b_{n-1}$. $D\mu(\theta) = \phi_i(\theta)\, D\,\Upsilon(\theta) = \phi_i(\theta)\,\lambda(\theta)$ avec $\lambda(\theta) = a_0' + a_1'\theta + \dots + a_{n-1}'\theta^{n-1} \in A_S[\theta]$.

$D\phi(\theta) = 0 = D\prod_{i=1}^{q} \phi_i^{\alpha_i}(\theta) + D\mu(\theta) = D\prod_{i=1}^{q} \phi_i^{\alpha_i}(\theta) + \phi_i(\theta)\,\lambda(\theta)$

$= \phi_i(\theta)\left[D\prod_{j=1}^{q} \phi_j^{\alpha'_i}(\theta) + \lambda(\theta)\right]$. Cette dernière égalité entraîne

$D\prod_{j=1}^{q} \phi_j^{\alpha'_j}(\theta) + \lambda(\theta) = 0$, ce qui est impossible car θ serait racine du polynôme

$D \prod_{j=1}^{q} \phi_j^{\alpha'_j}(x) + \lambda(x)$ dont le degré est strictement inférieur à celui de $\phi(x)$, n.

Nous pouvons conclure :

Si A_S^* est normal, $\mu(\theta)$ n'appartient à aucun $\mathfrak{P}_i^*$ pour i tel que $\alpha_i > 1$.

Réciproquement, si $\mu(\theta)$ n'appartient à aucun $\mathfrak{P}_i^*$ pour i tel que $\alpha_i > 1$, on peut écrire dans $(A_S^*)_{S_i^*}$ (une base de $(\mathfrak{P}_i^*)_{S_i^*}$ étant $[p, \phi_i(\theta)]$) :

$$p = \frac{-\prod_{i=1}^{q} \phi_i^{\alpha_i}(\theta)}{\mu(\theta)}$$

et par suite $(\mathfrak{P}_i^*)_{S_i^*}$ est engendré par $\phi_i(\theta)$ ce qui entraîne que $(A_S^*)_{S_i^*}$ est local régulier de dimension 1, donc intégralement clos. A_S^* est normal. (pour i tel que $\alpha_i = 1$ nous avons montré que $(A_S^*)_{S_i^*}$ est normal).

<u>INTERPRETATION DE LA CONDITION</u> " $\mu(\theta)$ <u>N'APPARTIENT PAS</u> A $\mathfrak{P}_i^*$ <u>A L'AIDE DE</u> $\phi(x)$.

$\mathfrak{P}_i^*$ étant engendré par $\phi_i(\theta)$ et $\mathfrak{P}$, $\mu(\theta) \in \mathfrak{P}_i^*$ si, et seulement si, il existe $\lambda(\theta)$ et $q(\theta)$ dans A_S^* tels que :

$$\mu(\theta) = \lambda(\theta)\, \phi_i(\theta) + pq(\theta)$$

Posons $\psi(x) = \lambda(x)\, \phi_i(x) + pq(x)$. On a alors $\mu(x) = \psi(x) + \eta(x)\phi(x) = \psi(x) + \eta(x)\left[\prod_{i=1}^{q} \phi_i^{\alpha_i}(x)\right] + pq'(x)$, $q'(x)$ étant à coefficients dans A_S.

Le reste de la division de $\mu(x)$ par $\phi_i(x)$, comme celui de $\psi(x)$ par $\phi_i(x)$, a tous ses coefficients multiples de p. Réciproquement, s'il en est ainsi, $\mu(x) = \lambda(x)\, \phi_i(x) + pr(x)$ soit $\mu(\theta) = \lambda(\theta)\, \phi_i(\theta) + pr(\theta)$. $\mu(\theta)$ appartient à $\mathfrak{P}_i^*$.

Remarquons qu'il revient au même de dire que le reste de la division de $\mu(x)$ par $\phi_i(x)$ a tous ses coefficients multiples de p, ou que le reste de la division de $\phi(x)$ par $\phi_i(x)$ a ses coefficients multiples de p^2 car $\phi(x) = \prod_{i=1}^{q} \phi_i^{\alpha_i}(x) + p\mu(x)$.

Nous pouvons énoncer :

<u>*Théorème*</u> *: Soit* A *un anneau à élément unité, factoriel et de rang* 1 *, plongé dans un suranneau* B *commutatif et sans diviseurs de zéro, ayant même élément unité que* A *et soit* θ *un élément de* B*, algébrique sur* A*, dont le polynôme caractéristique sur* A *est noté* ϕ (x).

Soient : $\mathfrak{p} = (p)$ un idéal premier de A et S = A-

$\mathfrak{p}_S = \mathfrak{p} A_S$ l'idéal maximal de A_S

$\bar{\phi}_{\mathfrak{p}_S}(x)$ le polynôme déduit de $\phi(x)$ par passage aux classes des coefficients, modulo $\mathfrak{p}_S$, et $\prod_{i=1}^{q} \overline{\phi_i^{\alpha_i}}(x)$ sa décomposition dans $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}[x]$ en facteurs premiers avec

$$\bar{\phi}_i(x) = \bar{\beta}_o + \ldots + \bar{\beta}_{n_i} x^{n_i} \qquad \bar{\beta}_j \in \frac{A_S}{\mathfrak{p}_S} \qquad j = \{o, 1, \ldots, n_i\}$$

$$\phi_i(x) = \beta_o + \ldots + \beta_{n_i} x^{n_i}$$

où β_i est un représentant dans A_S de $\bar{\beta}_i$.

Alors pour que A^* soit intégralement clos, il faut et il suffit que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p} = (p)$ de A, la condition C^* suivante soit réalisée:

(C^*) - Pour tout i tel que α_i est supérieur ou égal à 2 le reste de la division de $\phi(x)$ par $\phi_i(x)$ n'a pas ses coefficients tous multiples de p^2.

<u>**Remarques**</u> : (1) Si il existe i tel que $\alpha_i \geq 2$ alors le discriminant d de ϕ (x) est nul modulo $\mathfrak{p}_S$. Autrement dit, si $d = p_1^{\alpha_1} \ldots p_2^{\alpha_2}$, il suffira de vérifier la condition (C^*) pour (p_1), $(p_i), \ldots, (p_r)$.

(2) On peut relever $\bar{\phi}_i(x) = \bar{\beta}_o + \bar{\beta}_1 x + \ldots + \bar{\beta}_{n_i} x^{n_i}$ dans A, car $\frac{A_S}{\mathfrak{p} A_S}$ est isomorphe à $\frac{A}{(p)}$, donc dans chaque classe d'éléments $\bar{\beta}_i$ il y a un représentant situé dans A.

<u>**Exemples**</u> : (1) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{R}$, $\theta = \frac{-1+\sqrt{7}}{6}$ $\phi(x) = 6x^2+2x-1$ $d = 28 = 2^2 \times 7$.

Si p = 2 $\phi(x) = 2(3x^2+1)-1$. $\bar{\phi}_{\mathfrak{p}_S}(x) = 1$.

Si p = 7 $\phi(x) = 6(x-1)^2 + 14x-7$. Le reste de la division de $\phi(x)$ par x-1 est + 7.

Il n'est pas multiple de 7^2 . Donc $\mathbb{Z}(\theta) = \mathbb{Z}^*$ est intégralement clos.

(2) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{R}$, $\theta = \frac{1+\sqrt{6}}{5}$ $\quad \phi(x) = 5x^2 - 2x-1 \quad d = 3\times 2^2$

$\phi(x) = 5(x-2)^2+3(6x-7)$. Le reste de la division de $\phi(x)$ par $(x-2)$ est $3\times 5 = 15$ et $15 \notin (3^2)$.

De même $\phi(x) = 5(x+1)^2-2(6x+3)$. Le reste de la division de $\phi(x)$ par $(x+1)$ est 6. $6 \notin (2^2)$ donc $\mathbb{Z}\left(\frac{1+\sqrt{6}}{5}\right) = \mathbb{Z}^*$ est intégralement clos.

(3) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{R}$, $\theta = \frac{5}{8}(1+\sqrt{17})$, $\phi(x) = 4x^2-5x-25$, $d = 5^2 \times 17$

$\bar{\phi}(x) = 4x^2$ dans $\frac{\mathbb{Z}}{5}$. Le reste de la division de $\phi(x)$ par x est $-25 = -5 \in (5^2)$.

Donc $\mathbb{Z}\left[\frac{5}{8}(1+\sqrt{17})\right]$ n'est pas intégralement clos dans $\mathbb{R}$.

IV - Dans ce paragraphe le lecteur trouvera deux démonstrations, l'une dite "classique", l'autre homologique de la proposition suivante :

<u>*Proposition*</u> : *Si A^* est local régulier et si θ est fortement entier sur* A *alors* A *est local régulier.*

<u>Première démonstration</u> : Soit $\mathfrak{M}^*$ l'idéal maximal de A^*. Alors $\mathfrak{M}^* \cap A = \mathfrak{M}$ est l'unique idéal maximal de A et dim A^* = dim A (voir [I] chapitre I). Donc A est local. De plus si $\phi(x)$ est le polynôme caractéristique de θ sur A, alors $\bar{\phi}(x) = \bar{\phi}'^{\lambda}(x)$ est la décomposition de $\bar{\phi}(x)$ en facteurs premiers dans $\frac{A}{\mathfrak{M}}[x]$, et $\mathfrak{M}^*$ est engendré par $\{\mathfrak{M}, \phi(\theta)\}$ si $\lambda > 1$ et par $\mathfrak{M}$ si $\lambda = 1$ (voir [I] chapitre I page 35).

Soit p la dimension commune de A et de A^* . Il suffit de montrer qu'une base minimale de $\mathfrak{M}$ a exactement p éléments. Si q est le nombre d'éléments d'une base minimale de $\mathfrak{M}$, A étant local, $p \leq q$. Supposons $q > p$ et soit $\{u_1, u_2, \ldots, u_q\}$ une base minimale de $\mathfrak{M}$. Si $\lambda > 1$ $\{u_1, u_2, \ldots, u_q, \phi'(\theta)\}$ est un système de générateurs de $\mathfrak{M}^*$ et si $\lambda = 1$ $\{u_1, u_2, \ldots, u_q\}$ engendre $\mathfrak{M}^*$.

Cas $\lambda = 1$. On peut déduire de ce système de générateurs de $\mathcal{M}^*$ une base minimale de p éléments car A^* est régulier. Soit par exemple $\{u_1,u_2,\dots,u_p\}$

On a alors :

$$(I)\quad \begin{cases} u_q = \lambda_1^q u_1 + \dots + \lambda_p^q u_p \\ u_{q_1} = \lambda_1^{q-1} u_1 + \dots + \lambda_p^{q-1} u_p \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{p+1} = \lambda_1^{p+1} u_1 + \dots + \lambda_p^{p+1} u_p \end{cases}$$

avec $\lambda_i^j = \sum_{k=o}^{n-1} a_{i,k}^j \Theta^k \in A^*$

Le système (I) s'écrit : (II) $\left\{ u_j = \sum_{k=o}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{p} a_{i,k}^j u_i \right) \Theta^k \right\}$ $j=q,q+1,\dots,p+1$

$$(II) \Longrightarrow (III) \quad \begin{cases} u_q = a_{1,o}^q u_1 + a_{2,o}^q u_2 + \dots + a_{p,o}^q u_p \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{p+1} = a_{1,o}^{p+1} u_1 + \dots + a_{p,o}^{p+1} u_p \end{cases} \qquad a_{i,k}^j \in A$$

(car dans A^* $\sum_{j=1}^{n-1} b_j \Theta^j = o \Rightarrow b_j = o \quad \forall j = 1,2,\dots,n-1$)

(III) contredit la minimalité de la base $\{u_1,u_2,\dots,u_q\}$ de $\mathcal{M}$. L'hypothèse $q>p$ est absurde. Donc $q=p$.

Cas $\lambda > 1$. On peut déduire du système de générateurs $\{u_1,u_2,\dots,u_q, \phi'(\Theta)\}$ de $\mathcal{M}^*$ une base minimale de p éléments. Soit, par exemple $\{u_1,u_2,\dots,u_{p-1}, \phi'(\Theta)\}$ cette base (elle contient nécessairement $\phi'(\Theta)$ car pour $\lambda > 1$ $\mathcal{M} A^*$ n'est pas maximal). Il existe $\mu_j \in \mathbb{N}$ tel que $u_j \in (\mathcal{M}^*)^{\mu_j}$ et $u_j \notin (\mathcal{M}^*)^{\mu_j+1}$ pour $j=q,q-1,\dots,p$ car $\bigcap_{i\in \mathbb{N}} (\mathcal{M}^*)^i = (o)$. Nous pouvons écrire :

$$u_j = \lambda_1^j u_1 + \lambda_2^j u_2 + \dots + \lambda_{p-1}^j u_{p-1} + \lambda_p^j [\phi'(\Theta)]^{\mu_j} \quad j=q,q-1,\dots,p.$$

où $\lambda_i^j \in A^*$ et λ_p^j est inversible dans A^* ou bien nul.

(a) Si tout les λ_p^j sont nuls, $u_q, u_{q-1}, \dots, u_p$ s'expriment en fonction de $u_1, u_2, \dots, u_{p-1}$ ce qui est impossible (voir cas $\lambda = 1$).

(b) Si un seul des λ_p^j est non nul, λ_p^p par exemple, alors

$$u_j = \lambda_1^j u_1 + \dots + \lambda_{p-1}^j u_{p-1} \qquad j = q, q-1, \dots, p+1$$

$u_q, u_{q-1}, \dots, u_{p+1}$ s'expriment en fonction de $u_1, \dots, u_{p-1}$ (même démonstration que dans le cas $\lambda = 1$) ce qui contredit la minimalité de la base de $\mathcal{M}\{u_1, u_2, \dots, u_q\}$ donc $q = p$.

(c) Si plusieurs λ_p^j ne sont pas nuls, il existe parmi les μ_j correspondants un plus petit élément, soit μ_p par exemple. On a alors $\mu_j \geqslant \mu_p$ $\forall j = q, q-1, \dots, p$.
λ_p^p étant inversible, on peut écrire

$$[\phi'(\theta)]^{\mu_p} = \frac{1}{\lambda_p^p}\left[u_p - \lambda_p^p u_1 - \lambda_2^p u_2 - \dots - \lambda_{p-1}^p u_{p-1}\right]$$

Soit $u_j = \lambda_1^j u_1 + \dots + \lambda_{p-1}^j u_{p-1} + \lambda_p^j \; [\phi'(\theta)]^{(\mu_j - \mu_p)} \times \dfrac{[u_p - \lambda_1^p u_1 - \dots - \lambda_{p-1}^p u_{p-1}]}{\lambda_p^p}$

$j = q, q-1, \dots, p+1$.

Ce qui s'écrit encore

$$u_j = \alpha_1^j u_1 + \alpha_2^j u_2 + \dots + \alpha_p^j u_p \qquad j = q, q-1, \dots, p+1$$

où $\alpha_1^j \in A^*$. On est ramené au système (I) du cas $\lambda = 1$, donc à une impossibilité donc $q = p$ et A est local régulier.

<u>Deuxième démonstration</u> : Soit M un A-module. Le A^*-module déduit de M par extension à A^* de l'anneau des scalaires sera noté M_{A^*} et on a $M_{A^*} = M \otimes_A A^*$

<u>*Propriété 1*</u> *: Si M est un A-module libre de type fini alors M_{A^*} est un A^*-module de type fini.*

En effet on peut écrire $M = \bigoplus_{i=1}^{n} Ae_i$ où $\{e_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ est une base de M. $M \otimes_A A^* = (\bigoplus_{i=1}^{n} Ae_i) \otimes_A A^* = \bigoplus_{i=1}^{n} (Ae_i \otimes_A A^*)$ car le produit tensoriel commute aux sommes directes. Ae_i est isomorphe à A, donc $Ae_i \otimes_A A^*$ est isomorphe à A^* et $M \otimes_A A^*$ est isomorphe à $\bigoplus_{i=1}^{n} A^* = (A^*)^n$ qui est un A^*-module libre de type fini.

Plus généralement si M est un A-module libre M_{A^*} est un A^*-module libre.

Propriété 2 : Soient M',M,M'' *des* A*-modules tels que on ait la suite exacte*

(1) $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$

alors la suite de A *modules*

(2) $M'_{A^*} \xrightarrow{f \otimes 1_{A^*}} M_{A^*} \xrightarrow{g \otimes 1_{A^*}} M''_{A^*} \longrightarrow 0$

est exacte.

Le foncteur $. \otimes_A A^*$ étant exact à droite, (2) est une suite exacte de A-modules. C'est aussi une suite exacte de A^*-module car les A-homomorphismes $f\otimes 1_{A^*}$ et $g\otimes 1_{A^*}$ sont aussi des A^*-homomorphismes :

$$(f\otimes 1_{A^*})(\lambda^*(m'\otimes a^*)) = (f\otimes 1_{A^*})(m'\otimes \lambda^* a^*) = (f(m')\otimes \lambda^* a^*) = \lambda^*(f(m')\otimes a^*)$$
$$= \lambda^*(f\otimes 1_{A^*})(m'\otimes a^*) \text{ avec } \lambda^*,\ a^* \in A^*,\ m' \in M.$$

De même pour $g\otimes 1_{A^*}$.

Propriété 3. A^* *étant un* A*-module fidèlement plat (* θ *fortement entier sur* A*, donc* A^* *libre) il y a équivalence entre les assertions suivantes :*

(1) $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ *est une suite exacte de* A*-modules*

(2) $M'_{A^*} \xrightarrow{f\otimes 1_{A^*}} M_{A^*} \xrightarrow{g\otimes 1_{A^*}} M''_{A^*}$ *est une suite exacte de* A^**-modules.*

θ étant fortement entier sur A, A^* local $\Longrightarrow$ A local ((I) chapitre I page 35). Pour démontrer qu'il est régulier nous allons utiliser la caractérisation suivante des anneaux locaux réguliers ([VI] théorème de Serre-Buschbaum-Auslander) :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un anneau local soit régulier est que sa dimension homologique globale soit finie.

Rappelons que, si A est un anneau local noethérien,

(1) la dimension homologique globale de A, notée $\delta(A)$, est la borne supérieure des dimensions homologiques des A-modules M de type fini.

(2) la dimension homologique d'un A-module de type fini, notée $dh_A(M)$, est le plus petit entier n tel que $Tor_{n+1}(M, A/\mathfrak{M}) = (o)$.

Nous allons montrer que si ℓ est la dimension de A, donc aussi de A^*, pour tout A-module M de type fini $dh_A M \leq \ell$.

M étant un A-module de type fini et A un anneau local notehérien, il existe une récolution libre de type fini de M.

(1) $\ldots \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \quad \ldots \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_o \longrightarrow M \longrightarrow 0$

Montrons alors que

(2) $\ldots \longrightarrow L_n \otimes_A A^* \longrightarrow \quad \ldots \longrightarrow L_1 \otimes_A A^* \longrightarrow L_o \otimes_A A^* \longrightarrow M \otimes_A A^* \longrightarrow 0$

est une résolution libre de type fini du A^*-module $M_{A^*} = M \otimes_A A^*$. Cela résulte immédiatement des propriétés 1 et 2 ou 1 et 3.

M étant un A-module de type fini, M_{A^*} est un A^*-module de type fini car si $\{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ est un système de générateurs de M, $\{e_1 \otimes 1, e_2 \otimes 1, \ldots, e_p \otimes 1\}$ est un système de générateurs de A^*-module M_{A^*}. A^* étant local régulier $dh_{A^*}(M_{A^*}) = n \leq \ell$.

Alors ([VI] théorème 6 page 75).

$$L_n^* = \mathrm{Ker}\left[\ L_{n-1} \otimes_A A^* \longrightarrow L_{n-2} \otimes_A A^*\right]$$

est un A^*-module libre de type fini et on a la suite exacte de A^*-module :

(3) $\quad 0 \longrightarrow L_n^* \longrightarrow L_{n-1} \otimes_A A^* \longrightarrow \ldots \longrightarrow L_1 \otimes_A A^* \longrightarrow L_o \otimes_A A \longrightarrow M \otimes_A A^* \longrightarrow 0$

Soit R_n le noyau de $L_{n-1} \longrightarrow L_{n-2}$. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow R_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow L_{n-2}$$

A^* étant plat, on en déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow R_n \otimes_A A^* \longrightarrow L_{n-1} \otimes_A A^* \longrightarrow L_{n-2} \otimes_A A^*$$

ce qui montre que $R_n \otimes_A A^* = L_n^*$. Montrons que R_n est un A-module libre de type fini, En effet :

$R_n \otimes_A A^*$ est un A^*-module libre de type fini. A^* étant un A-module libre de type fini, $R_n \otimes_A A^*$ est un A-module libre de type fini. De plus $A^* = \bigoplus_{i=o}^{q-1} A\theta^i$ $(q=d^\circ(\phi(x)))$ entraîne $R_n \otimes_A A^* = \bigoplus_{i=o}^{q-1} (R_n \otimes A\theta^i)$. $A\theta^i$ étant isomorphe à A, $R_n \otimes_A A\theta^i$ est isomorphe à R_n. $R_n \otimes_A A^*$ est isomorphe en tant que A-module à $\bigoplus_{i=o}^{q-1} R_n$ qui est donc un A-module libre de type fini et par conséquent R_n aussi.

On a la suite exacte

$$(4) \quad 0 \longrightarrow R_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow L_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_o \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

qui est une résolution libre de type fini de M. La formule de décalage des Tor nous donne :

$\mathrm{Tor}_{n+1}^A (M, A/\mathfrak{m}) = \mathrm{Tor}_1^A(R_n, A/\mathfrak{m}) = 0$ car R_n est libre donc $dh_A(M) \leq n \leq \ell$.

BIBLIOGRAPHIE

I G. MAURY : La condition intégralement clos dans quelques structures algébriques. Thèse chapitre I. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 3e série, t.78, p.3L à 100.

II P. DUBREIL et M.L. DUBREIL-JACOTIN : Leçons d'algèbre moderne. Dunod, Paris 1961.

III ZARISKI et SAMUEL : Commutative algebra.

IV O.G. NORTHCOTT : Idealtheorie, Cambridge University Press 1953.

V N. BOURBAKI : Algèbre commutative.

VI P. SAMUEL : Anneaux factoriels.

Manuscrit remis en janvier 1970.

G. GERMAIN - Maître-assistant
Département de Mathématiques
43, bd du 11 novembre 1918 - 69 VILLEURBANNE