PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

G. MAURY

Sur les ordres maximaux, sans diviseurs de zéro, noethériens, dont tous les idéaux (à droite ou à gauche) sont bilatères

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1969, tome 6, fascicule 3 , p. 83-105

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1969__6_3_83_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1969 t. 6-3

Sur les ORDRES MAXIMAUX, SANS DIVISEURS de ZERO, NOETHERIENS, dont tous les IDEAUX (à DROITE ou à GAUCHE) sont BILATERES.

G. MAURY.

INTRODUCTION

Cet article fait suite à la thèse [3] et utilise quelques-uns des résultats qui y sont obtenus, ainsi que la notion de puissance symbolique nième d'un idéal premier introduite par A.W. GOLDIE en [5]. Il traite des ordres maximaux, sans diviseurs de zéro, dont tous les idéaux à gauche et tous les idéaux à droite sont bilatères et qui vérifient, de plus, la condition de chaîne ascendante pour les idéaux. Dans la première partie, nous établissons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un anneau non commutatif, sans diviseurs de zéro, dont tous les idéaux à gauche et tous les idéaux à droite sont bilatères, vérifiant, de plus, la condition de chaîne ascendante, soit un ordre maximal de son corps des fractions. La condition obtenue redonne, si on l'applique au cas commutatif, une caractérisation connue des domaines d'intégrité noethériens intégralement clos ([8], [9]), appelée caractérisation (C) en [3]. La deuxième partie donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un ordre maximal régulier noethérien à droite et à gauche, sans diviseurs de zéro, ait tous ses idéaux à gauche et tous ses idéaux à droite bilatères. On se reportera aux mémoires [2] ou [3] pour les définitions concernant les ordres maximaux réguliers. Le présent article complète l'exposé [12]. La troisième partie, assez courte, étudie certains suranneaux d'un ordre maximal A , noethérien, sans diviseurs de zéro, qui sont plats en tant que A-module à gauche et A-module à droite.

R désigne dans cette partie un anneau non nécessairement commutatif, à élément unité 1, sans diviseurs de zéro, noethérien , dont tous les idéaux à droite et tous les idéaux à gauche sont bilatères. Soit P un idéal premier de R. Soit $P^{(n)}$ la puissance symbolique nième de P [5]. Soit $S = R - P$, S est un sous-demi-groupe de R contenant 1, R vérifie la condition de ORE à droite et à gauche par rapport à S. L'anneau de fractions de R selon S est $R_S = {}_SR$ en notant $R_S = \{s^{-1}a, a\in R, s\in S\}$ et ${}_SR = \{as^{-1}, a\in R, s\in S\}$. Aux lemmes 1 à 6 on suppose $\bigcap_1^\infty P^{(n)} = 0$.

Lemme 1 : *Supposons* $\bigcap_1^\infty P^{(n)} = 0$. *On peut écrire :*

$$(\forall a\in R),(\forall s\in S),\exists\, s_2\in S,\exists\, s_1\in S \quad \textit{avec} \quad sa = as_1\ ,\ as = s_2a.$$

Démonstration : A cause de l'égalité $Ra = aR$, on a toujours $sa = as_1, s_1\in R$. Il faut démontrer que s_1 appartient à S. Si a appartient à S, as_1 appartient à S donc aussi s_1. Soit a appartenant à P, si a est nul on peut prendre $s_1 = 1$, si a est non nul, il existe n tel que a appartient à $P^{(n)}$ et tel que a n'appartient pas à $P^{(n+1)}$ (sans quoi a appartiendrait à $\bigcap_1^\infty P^{(n)}$ et serait nul). Supposons $s_1\in P$, alors sa appartiendrait à $P^{(n)}P$ donc a appartiendrait à $P^{(n+1)}$, contrairement à l'hypothèse [on remarquera que dans le cas particulier envisagé ici, la définition de $P^{(n)}$ s'obtient par récurrence ainsi : $P^{(1)} = P$, si $P^{(n-1)}$ est défini, on définit $P^{(n)}$ ainsi $P^{(n)} = \{x\in R, \exists\, s,s'\in S$ tels que $sxs'\in P^{(n-1)}P$ (ou $\in PP^{(n-1)}$)$\}$].

Lemme 2 : R_S *a tous ses idéaux à gauche et tous ses idéaux à droite bilatères :*

Démonstration : Soit $x\in R_S$. Il faut démontrer $R_Sx = xR_S$. Posons $x = as^{-1}, s\in S, a\in R$ donc $xR_S = as^{-1}R_S = aR_S = \{aR\tau^{-1}, \tau\in S\} = \{Ra\tau^{-1}, \tau\in S\} = \{R\tau'^{-1}a, \tau'\in S\}$ si l'on a $a\tau = \tau'a$ (lemme 1), et $xR_S = aR_S = R_Sa = R_Sx$.

Lemme 3 : Soit R' *un sous-anneau de* K, *corps des fractions de* R, *contenant* R; *on a* $R'_S = {}_SR'$.

Démonstration : Soit $ab^{-1} \in K$, $a, b \in R, b \neq 0$; d'après le lemme 1, s étant donné dans S, on peut trouver s' et s" dans S tels que $sa = as'$ et $bs' = s''b$. On a donc $sab^{-1} = as'b^{-1} = ab^{-1}s''$ et $sab^{-1} \in R'$ équivaut à $ab^{-1}s'' \in R'$ d'où $R'_S = {}_SR'$. D'ailleurs si l'on suppose $x = ab^{-1}$ dans R' on a $sx = xs'', s \in S, s'' \in S$, et de même $xs = s_1x, s \in S, s_1 \in S$.

Lemme 4 : Un idéal Q de R *est P-primaire à gauche si et seulement si :*

(H) 1) il existe $n \in N$ *tel que* $P^n \subseteq Q$ *; 2)* $xa \subseteq Q$ *et* $x \notin Q$ *entraine* $a \in P$.

Démonstration : On sait que Q est P-primaire à gauche [4] si :

1) Il existe $n \in N$ tel que $P^n \subseteq Q$;
2) $XA \subseteq Q$, $X \nsubseteq Q$, entraîne $A \subseteq P$, X et A désignant des idéaux de R. Si la condition (H 2)) est vérifiée , $XA \subseteq Q$, $X \nsubseteq Q$ entraîne l'existence de $x \in X$, $x \notin Q$ tel que l'on ait $\forall a \in A$, $xa \in Q$ donc $a \in P$ et $A \subseteq P$ donc Q est P-primaire à gauche. Réciproquement si Q est P-primaire à gauche, soit $x \notin Q$ et $xa \in Q$ alors on a $RxaR \subseteq Q$, $Rx.aR \subseteq Q$ avec $Rx \nsubseteq Q$, donc $aR \subseteq P$ et $a \in P$. Remarquons que tout idéal P de R est premier si et seulement si $ab \in P$ entraîne a ou $b \in P$.

Lemme 5 : L'intersection d'un idéal premier (respectivement primaire à gauche) de R_S *avec* R *est un idéal premier (respectivement primaire à gauche) de* R.

Démonstration : Soit Q' un idéal P'-primaire de R_S, P' idéal premier de R_S. Soit $P_1 = P' \cap R$. P_1 est premier car $ab \in P_1, a, b \in R$, entraîne $ab \in P'$ donc a ou $b \in P'$ donc a ou $b \in P_1$. Soit $Q_1 = Q' \cap R$. Considérons $a, b \in R$ et $ab \in Q_1, a \notin Q_1$; on en déduit $ab \in Q', a \notin Q'$

donc $b \in P'$ donc $b \in P_1$. Par ailleurs $P'^n \subseteq Q'$ entraîne $P'^n \cap R \subseteq Q_1$ et $P_1^n = (P \cap R)^n \subseteq P'^n \cap R \subseteq Q_1$ D'après le lemme 4 Q_1 est P_1-primaire à gauche.

Lemme 6 : *Soit* $P_p = R_S P = P R_S$ P_p *est l'idéal maximum de* R_S *et tout idéal contenant* P_p^2 *est* P_p*-primaire à gauche.*

Démonstration : L'ensemble des éléments de la forme $s^{-1}p, p \in P, s \in S$ forment un idéal de R_S (utiliser le lemme 1). Tout élément de R_S non contenu dans cet idéal est de la forme $s^{-1}s', s \in S, s' \in S$ donc est inversible dans R_S. Ainsi tout idéal propre de R_S est contenu dans cet idéal égal d'ailleurs à $R_S P = P R_S$. Remarquons que R_S est noethérien (car tout idéal I de R_S s'écrit $R_S I'$ avec $I' = I \cap R$). Soit I un idéal contenant P_p^2 et soit Q un idéal premier associé à I [4]. On a $P_p^2 \subseteq I \subseteq Q$ (I est bilatère) donc $Q = P_p$. Le seul idéal premier associé à I est P_p. Par ailleurs P_p est le seul résiduel à gauche propre premier de I car $I^{\cdot}.\ Y = A$ avec $Y \not\subseteq I$ entraîne $AY \subseteq I$ et I étant bilatère $A \supseteq I \supseteq P_p^2$ donc $A = P_p$, et P_p est idéal premier minimum contenant I de sorte que I est P_p-primaire ([4],th 5.1).

Proposition 1 : *Soit* R *un anneau vérifiant les conditions du début de ce paragraphe (noethérien, à élément unité, sans diviseurs de zéro, dont tous les idéaux (à droite, à gauche) sont bilatères). Soit* P *un idéal premier de* R *tel que* $\bigcap_1^\infty P^{(n)} = 0$ *et tel qu'il n'y ait pas d'idéaux* P*-primaires entre* P *et* $P^{(2)}$. *Soit* $S = R - P$. *Pour* $n = 1, 2, \ldots$ *on a,* a *désignant un élément convenable de* R *indépendant de* n, $P_p^n = R_S a^n = a^n R_S$ *et* P *est un idéal premier minimal de* R *non nul (c'est à dire* Q *premier non nul et* $Q \subseteq P$ *entraîne* $Q = P$). *Les idéaux propres de* R_S *sont* $P_p^n, n = 1, 2, \ldots$

<u>Démonstration</u> · On a $P_p^2 \neq P_p$ sinon $\bigcap_1^\infty P_p^n \neq 0$ d'où $\bigcap_1^\infty (P_p^n \cap R) \neq 0$; or on a d après GOLDIE [5] $P_p^n \cap R = P^{(n)}$, l'anneau local associé par GOLDIE à P étant ici R_S. On aurait donc $\bigcap_1^\infty P^{(n)} \neq 0$, contrairement à l'hypothèse. Soit alors $a \in P_p$ et $a \notin P_p^2$ et $I = P_p^2 + R_S a$; I est P_p-primaire (lemme 6), $I \cap R$ est P-primaire (lemme 5) contenant $P_p^2 \cap R = P^{(2)}$ donc $I \cap R = P$ ou $I \cap R = P^{(2)}$ et $I = R_S P = P_p$ ou $I = R_S P^{(2)} = P_p^2$ [5]. Mais ceci entraîne $I = P_p$ car $a \notin P_p^2$. Ainsi on a $P_p = P_p^2 + R_S a$, d'où l'on déduit d'après le lemme de NAKAYAMA (cas non commutatif) $P_p = R_S a$. De même $P_p = aR_S$ et pour $n = 1,2,\ldots$ $P_p^n = a^n R_S = R_S a^n$.

Tout idéal de R_S est un P_p^n $n = 1,2,\ldots$ En effet soit I un idéal de R_S engendré par a_i $i = 1,\ldots,r$. On a $a_i = \alpha_i a^{r_i}$, $\alpha_i \notin P_p$; soit $r_1 = \inf(r_1,\ldots,r_n)$
$I = (R_S\alpha_1 + R_S\alpha_2 a^{r_2-r_1} + \ldots + R_S\alpha_r a^{r-r_1})a^{r_1}$ et α_1 est inversible dans R_S donc

$I = R_S a^{r_1}$; R_S ne contient donc qu'un seul idéal premier non nul et par suite P ne contient aucun idéal premier non nul, car autrement soit $Q \subseteq P$ un idéal premier non nul, $QR_S = R_S Q$ serait premier dans R_S [tout élément de QR_S s'écrit qs^{-1}, $q \in Q$, $s \in S$. Alors, $as^{-1}bs'^{-1} \in QR_S$ et $a,b \notin Q$ entraînent $as^{-1}b \in QR_S$ et, si l'on a $s^{-1}b = b\tau^{-1}$, $\tau \in S, ab \in QR_S \cap R$, $ab = q_1 s_1^{-1} = r \in R$, $q_1 = rs_1 \in Q$ donc $r \in Q$ et $ab \in Q, a,b \notin Q$ contrairement à l'hypothèse Q premier]. Dès lors $QR_S = PR_S$ entraîne $Q = P$.

<u>*Proposition 2*</u> *: Avec les hypothèses de la proposition précédente,* R_S *est un ordre maximal du corps des fractions* K *de* R.

<u>Démonstration</u> : Cela résulte d'un résultat de ASANO ([2], th 2,9), compte tenu que tout R_S-idéal est inversible. Démontrons ce dernier point. Soit T un R_S-idéal, il existe $\lambda \in R_S$ tel que $\lambda T \subseteq R_S$, λT est visiblement un idéal à droite de R_S donc bilatère

(lemme 2) donc $\lambda T = R_S x = xR_S$, $x \in R_S - \{0\}$ (proposition 1). Soit $T = \lambda^{-1} xR_S$, posons $T^* = R_S x^{-1}\lambda$ on a $T^*T = R_S x^{-1}\lambda . \lambda^{-1} xR_S = R_S$ et $TT^* = \lambda^{-1} xR_S R_S x^{-1}\lambda = \lambda^{-1} R_S x x^{-1}\lambda = \lambda^{-1} R_S \lambda = \lambda^{-1}\lambda R_S = R_S$. R_S est un ordre maximal régulier puisque l'on a $\forall x \in R_S$ $R_S x = xR_S$.

Théorème 1 : Soit R *un anneau sans diviseurs de zéro, noethérien, dont tous les idéaux à droite et tous les idéaux à gauche sont bilatères, et à élément unité.* R *est un ordre maximal régulier de son corps des fractions* K *si pour tout idéal principal de* R, Ra, $a \in R$, $a \neq 0$, *et pour tout idéal premier* P *associé à* Ra, *il n'y a pas d'idéaux* P*-primaires (à gauche) entre* P *et* $P^{(2)}$, *et si l'on a* $\bigcap_1^\infty P^{(n)} = 0$.

Démonstration : Il est bien connu d'abord que R admet un corps des fractions [1]. Soit P un idéal premier associé à Ra. D'après les propositions 1 et 2, R_S pour $S = R - P$ est un ordre maximal de K et P est un idéal premier minimal de R. soit $Ra = \bigcap_1^n X_i$ une décomposition réduite en idéaux tertiaires de Ra, X_i étant P_i-tertiaire donc P_i-primaire (à gauche) puisque P_i est minimal ($i = 1,\dots,n$). Donc tout idéal principal non nul est intersection d'idéaux primaires dont les radicaux sont des idéaux premiers minimaux (condition C2 du théorème II,9 page 98 de la thèse [3]). Par ailleurs tout idéal premier minimal Q de R est idéal premier associé à Ra pour $a \in Q$, $a \neq 0$: en effet de $Ra = \bigcap_1^n X_i$, $X_i P_i$-primaire, on déduit $\prod_{i=1}^{i=n} P_i^{\rho_i} \subseteq Ra \subseteq Q$ donc $P_i = Q$ pour un i, $1 \leq i \leq n$. Donc pour tout P premier minimal, $S = R - P$, R_S est un ordre maximal (condition C_3 du théorème II,9 de la thèse [3]). Enfin pour tout ordre R' dans K contenant R et pour $S = R - P$, P premier minimal on a $R'_P = {}_P R'$ d'après le lemme 3 (condition C_1 du théorème II 9, de la thèse [3]). D'après le théorème II 9, de la thèse [3] on peut alors affirmer que R est un ordre maximal dans K.

Dans tout ce qui suit et jusqu'à la fin de la première partie, R, qui est toujours un anneau à élément unité, sans diviseurs de zéro, noéthérien, est de plus un ordre maximal régulier de son corps des frations, qui, sauf au lemme 7, a tous ses idéaux à gauche et tous ses idéaux à droite bilatères.

Lemme 7 : *Soit* P *un idéal premier minimal de* R, *on a* :

$$\bigcap_{i}^{\infty} P^{n} = 0$$

Démonstration : Soit $K = \bigcap_{n=1}^{n=\infty} P^n$. Si K est non nul, désignons par $\overline{A}$ la classe de A idéal de R, *modulo l'équivalence d'Artin* R (cf. [2] ou [3]). On a $\overline{K} \neq \overline{R}$ car $\overline{K} = \overline{R}$ entrainerait $\overline{P} = \overline{R}$, ce qui est impossible (cf. [3], lemme II,1 page 97). On pourrait alors écrire $\overline{K} = \overline{Q}_1^{p_1} \ldots \overline{Q}_r^{p_r} \subseteq \overline{P}$ et $\overline{Q}_1 = \overline{P}$ par exemple, $\overline{Q}_i$ $i = 1,\ldots,r$ et $\overline{P}$ étant des éléments premiers dans l'ensemble des classes (théorème II,5 page 93 de la thèse [3]). Comme on a $\overline{K} \subseteq \overline{P}^{\,n}$ pour tout n entier naturel on peut écrire $\overline{P}^{p_1+1} \supseteq \overline{P}^{p_1}\, \overline{Q}_2^{p_2} \ldots \overline{Q}_r^{p_r}$ et $\overline{P} \supseteq \overline{Q}_2^{p_2} \ldots \overline{Q}_r^{p_r}$ donc $\overline{P} = \overline{Q}_j$ pour un j, $2 \leq j \leq r$. Or ceci est impossible car on a $\overline{Q}_i \neq \overline{Q}_j$ pour $i \neq j$, $i,j = 1,\ldots r$. Il y a contradiction et $K = 0$.

Lemme 8 : $P^{(n)}$ *est le plus grand idéal de la classe* P^n *modulo* R *et l'on a* $\bigcap^{\infty} P^{(n)} = 0$, P *désignant un idéal bilatère minimal non nul.*

Démonstration : D'abord les $P^{(n)}$ sont tous distincts pour $n = 1, 2 \ldots$ En effet, si l'on avait $P^{(n-1)} = P^{(n)}$ cela signifierait (cf. [5] proposition 3,3)

$GP^{(n)}F \subseteq P^{(n-1)}P$ pour des idéaux F et G convenables appartenant à $F^{(*)}$. Passons aux classes *modulo* R, compte tenu de $P^{(n)} = P^{(n-1)}$, il vient :

$\overline{G}.\overline{P^{(n)}}.\overline{F} \subseteq \overline{P^{(n)}}.\overline{P}$ et $\overline{G}.\overline{F} \subseteq \overline{P}$ et $G.F \subseteq P$ puisque P est maximum dans sa classe *modulo* R (cf. [3]).

(*) F est ici la famille des idéaux qui rencontrent S .

Soient $s \in F$, $s' \in G$, s et s' appartenant à S, on en déduit $ss' \in P$, ce qui est impossible. On ne peut donc avoir $P^{(n)} \neq P^{(n')}$ avec $n \neq n'$.

Deuxièmement, $P^{(n)}$ est le plus grand idéal de la classe de P^n *modulo* R. En effet, on sait d'après GOLDIE ([5], théorème 4,3) que $P^{(n)}$ est P-primaire des deux côtés, $n = 1,2,\dots$ Les idéaux $P^{(k)}$ sont donc les plus grands idéaux de leur classe $\overline{P^{(k)}}$ *modulo* R, $k = 1,2,\dots$ Les classes $\overline{P^{(k)}}$, $k = 1,\dots,n$ sont des classes $\overline{P}$-primaires contenant $\overline{P^n}$ (cf. [3], théorème II,6 page 94 et lemme II,1); ce sont donc des classes parmi les $\overline{P^k}$, $k = 1,\dots,n$. Comme les classes $\overline{P^{(k)}}$ sont distinctes, on a l'égalité $\overline{P^{(k)}} = \overline{P}^k$ et $P^{(k)}$ est élément maximum de la classe $\overline{P^k}$, $k=1,\dots,n$.

On montre alors en remplaçant P^n par $P^{(n)}$, comme au lemme 7, que l'on a $\bigcap_1^\infty P^{(n)} = 0$.

<u>*Lemme 9*</u> : *Avec les hypothèses précédentes on a pour* $n=1,2,\dots, R_S P^{(n)} = P^{(n)} R_S = R_S P^n = P^n R_S = \left(P_P\right)^n$.

<u>Démonstration</u> : L'anneau local associé par GOLDIE à P dans l'article [5] grâce à la condition $\bigcap_1^\infty P^{(n)} = 0$ est R_S. En appliquant les résultats de GOLDIE ([5], théorème 4,6) on peut écrire : $P^{(n)} = \left(P_P\right)^n \cap R$ d'où résulte $P^{(n)} R_S = R_S P^{(n)} = \left(P_P\right)^n$ car on peut montrer que si I est idéal de R_S, $I \cap R = I'$ est idéal de R tel que $R_S I' = I$. Il reste à établir $(PR_S)^n = P^n R_S$. Soient $x_i \in R_S P = PR_S$ pour $i=1,\dots,n$ et considérons $\prod_{i=1}^{i=n} x_i$. On a $x_i = s_i^{-1} p_i = p_i' s_i'^{-1}$ avec p_i et p_i' appartenant à P et s_i, s_i' appartenant à S. On peut écrire $x_1 x_2 = p_1' s_1'^{-1} s_2^{-1} p_2 = p_1 \tau^{-1} p_2$ avec $\tau = s_2 s_1 \in S$. Or $\tau^{-1} p_2$ s'écrit à son tour $p'' \tau'^{-1}$, $\tau' \in S$, $p'' \in P$ et $x_1 x_2 = p_1 p_2 \tau'^{-1}$.

On peut appliquer ce raisonnement à $x_1x_2x_3,\dots,x_1x_2\dots x_n$. On obtient finalement $x_1x_2\dots x_n = p_1p_2''\dots p_n''\gamma^{-1}$, avec $\gamma\in S$, $p_1,p_2'',\dots,p_n''$ appartenant à P. On a donc $x_1\dots x_n\gamma\in P^n$ donc $x_1\dots x_n\in P^nR_S$. L'inclusion $P^nR_S\subseteq(PR_S)^n$ est immédiate.

<u>Théorème 2</u> *(réciproque du théorème 1) : Pour tout idéal premier associé à* $Ra = aR$, $a\neq 0$, $a\in R$ *il n'y a pas d'idéal P-primaire strictement compris entre* $P^{(2)}$ et P. *De façon générale les seuls idéaux P-primaires entre* P^n *et P sont* $P^{(n)}, P^{(n-1)},\dots,P$.

<u>Démonstration</u> : Rappelons que les idéaux P-primaires sont maximaux dans leur classe *modulo* R et celles-ci sont distinctes de la classe de R car P est premier minimal [3]. La classe d'un idéal P-primaire contenant P^n est donc de la forme $\bar{P}^k$ pour un certain k, $1\leqslant k\leqslant n$. Un idéal P-primaire contenant P^n est donc élément maximal de la classe $\bar{P}^k$ pour un certain k, $1\leqslant k\leqslant n$; c'est donc $P^{(k)}$.

<u>Remarque</u> : Il existe des ordres maximaux dans K, noethériens, sans diviseurs de zéro, dont tous les idéaux à gauche et à droite sont bilatères et qui ne sont pas obligatoirement commutatifs : Soit $\mathcal{O}$ un domaine d'intégrité local régulier complet de dimension 1 et soit K son corps des quotients. Soit Δ un corps (gauche), algèbre centrale simple sur le corps K. Si Λ est un ordre maximal de Δ, alors Λ est sans diviseurs de zéro, noethérien, à idéaux à droite et idéaux à gauche bilatères [cf. [10] corollaire page 14 et th. 3 - 11 page 13; cf. [11] Satz 12 page 100].

<u>Complément</u> : *Le lemme 8 et le théorème 2 sont valables aussi pour un ordre maximal régulier, sans diviseurs de zéro, noethérien (sans l'hypothèse que tous les idéaux sont bilatères).*

- *II* -

Dans cette deuxième partie R désigne un anneau, à élément unité, non nécessairement commutatif, noethérien, sans diviseurs de zéro, ordre maximal régulier de son corps des fractions K, vérifiant la condition (C) suivante (sauf au théorème 6).

(C) : pour tout idéal premier non nul minimal P de R, tout idéal à gauche P-primaire et tout idéal à droite P-primaire est contenu dans P.

La condition (C) est en particulier vérifiée lorsque tout idéal à gauche (et tout idéal à droite) P-primaire est bilatère. Nous utiliserons le théorème suivant ([3] page 96, th.2,8).

Théorème 0 : *Soit* R' *un ordre maximal, régulier, noethérien, sans diviseurs de zéro. Soit* a, $a \neq 0$, $a \in R$, Ra *(respectivement* aR*) est intersection d'idéaux à gauche (respectivement à droite) primaires (au sens de LESIEUR et CROISOT [4]) dont les radicaux sont des idéaux premiers bilatères minimaux non nuls de* R.

Dans toute la suite nous dirons idéal pour idéal bilatère. Soit P un idéal premier de R et $S = R-P$. Rappelons que si I désigne un idéal à gauche Q-primaire, Q désignant un idéal premier, il existe un entier naturel p tel que $Q^p \subseteq I$ (cf. [4] propriétés 5,5 et 5,6 et théorème 5,1) et si Q est premier minimal, la condition (C) entraîne $I \subseteq Q$.

Théorème 3 : R *vérifiant les hypothèses de la partie II,* S *est un sous-demi groupe multiplicatif de* R *et* R *vérifie la condition de Ore des deux côtés par rapport à* S.

Démonstration : Soient s et s' deux éléments de S, nous allons établir que ss' appartient à S Appliquons le théorème (O) :

$$Rs = \bigcap_{i=1}^{n} X_i, \quad X_i \text{ idéal à gauche } P_i\text{-primaire, } i=1,\dots,r$$

$$s'R = \bigcap_{i=1}^{n} X_i, \quad X_i \text{ idéal à droite } P'_i\text{-primaire, } i=1,\dots,r',$$

il existe des entiers p_i et p'_j, $i=1,\dots,r$, $j=1,\dots,r'$ tels que :

$$\prod_{i=1}^{r} P_i^{p_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^{i=r} X_i = Rs; \quad \prod_{j=1}^{j=r'} P_j'^{p'_j} \subseteq \bigcap_{j=1}^{r'} X'_j = s'R$$

Si ss' appartient à P, on a $Rss'R \subseteq P$ et par suite :

$$\left(\prod_{i=1}^{i=r} P_i^{p_i}\right) . \left(\prod_{j=1}^{j=r'} P_j^{p'_j}\right) \subseteq \text{idéal engendré par } Rss'R \subseteq P.$$

On en déduit de là que l'un des P'_j ou l'un des P_i est compris dans P. Mais ceci entraîne que s ou s' appartient à P contrairement à l'hypothèse. Ceci étant, montrons que pour tout s appartenant à S, il existe un s' appartenant à S, tel que $Rs \supseteq s'R$: on a établi plus haut $\prod_{i=1}^{i=r} P_i^{p_i} \subseteq Rs$. Supposons que $\prod_{i=1}^{i=r} P_i^{p_i}$ appartienne à P, on en déduirait que l'un au moins des P_i serait contenu dans P donc aussi Rs contenu dans X_i donc dans P_i (condition (C)). Il existe donc s', s' $\in$ S, tel que $s'R \subseteq \prod_{i=1}^{n} P_i^{p_i} \subseteq Rs$.

On démontrerait de même que pour tout s appartenant à S, il existe s" appartenant à S tel que $sR \supseteq Rs''$.

Il est facile de démontrer pour terminer que R vérifie la condition de Ore des deux côtés par rapport à S : démontrons par exemple qu'étant donnés a non nul appartenant à R et s appartenant à S, il existe a' appartenant à R et s' appartenant à S tel que $as' = sa'$. Il suffit de se rappeler que, d'après ce qui précède il existe $s' \in S$ tel que $sR \supseteq Rs'$.

<u>*Corollaire 1*</u> *:- Si* M *est un idéal à gauche de* R, *on a :*

$$M_P = \{x \in K \mid \exists\, s \in S,\ sRx \subseteq M\} = \{x \in K \mid \exists\, s' \in S, s'x \in M\},$$

et M_P *est un idéal à gauche de l'anneau* R_P.

- Si M *est un idéal à droite de* R, *on a :*

$$_PM = \{x \in K \mid \exists\, s \in S\ ,\ \ xRs \in M\} = \{x \in K \mid \exists\, s' \in S, xs' \in M\},$$

et $_PM$ *est un idéal à droite de l'anneau* $R_P = {}_PR$ *noté aussi* R_S.

<u>Démonstration</u> : Démontrons d'abord que R_P est un sous-anneau de K : soient x et y appartenant à R_P, il existe s et s' appartenant à S tels que $sRx \subseteq R, s'Ry \subseteq R$. Comme $sRs' \not\subseteq P$, il existe $\tau \in R$ tel que $s\tau s'$ n'appartient pas à P. On peut écrire alors :

$$s\tau s'R(x+y) \subseteq s\tau s'Rx + s\tau R \subseteq sRx + s\tau R \subseteq R \quad \text{et} \quad x+y \ \text{ appartient à } R_P.$$

Considérons maintenant xy. On a, y" désignant un élément de R tel que $s'ys'' \in S$, $s'y''sRxy \subseteq s'y''Ry \subseteq s'Ry \subseteq R$.

En s'inspirant de cette démonstration, le lecteur établira de même que M_P est un idéal à gauche de R_P, M désignant un idéal à gauche de R. Finalement de $sRx \subseteq M$, nous déduisons $sx \in M$ puisque R possède un élément unité. Réciproquement de $sx \in M$, $s \in S$ nous déduisons successivement $Rsx \in M$ et $s'Rx \in M$, avec $s' \in S$ tel que $Rs \supseteq s'R$.

Il est bien connu que la condition de Ore des 2 côtés par rapport à S entraîne l'existence d'un anneau de fractions au sens ordinaire de R selon S, noté R_S : R_S est l'ensemble des éléments K de la forme $as^{-1}, a\in R, s\in S$; on a donc $R_S = {}_P R$; on a de même $R_S = R_P$ Remarquons que si M est un idéal à gauche de R, on peut écrire $M_P = R_S M$

Dans toute la suite de l'article P désignera un idéal premier bilatère minimal non nul de R.

<u>*Proposition 3 (ASANO [6])*</u> : R_P *est un ordre maximal régulier.*

<u>Démonstration</u> : Le lecteur est prié de se reporter à l'article [6] page 25, théorème 5,4 (la démonstration de ce théorème donnée dans le cas où R est un demi-groupe se recopie lorsque R est un anneau) Dans le cas particulier où R est un anneau dont tous les idéaux premiers non nuls sont maximaux, ce résultat se trouve aussi dans [2] (théorème III-13).

<u>*Lemme 10*</u> : *Soit* $M = \bigcap_{i=1}^{n} X_i$ *avec* X_i, $i=1,\dots,n$, *et* M *désignant des idéaux à gauche. On a* $M_P = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i)_P$. *Si de plus* X_i *est* P_i*-primaire avec* $P_i \nsubseteq P$, *on a* $(X_i)_P = R_P$.

<u>Démonstration</u> : De $M\subseteq X_i$ résulte $M_P \subseteq (X_i)_P$ pour $i=1,\dots,n$, donc $M_P \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (X_i)_P$ Soit maintenant $x \in \bigcap_{i=1}^{n} (X_i)_P$: pour chaque $i=1,\dots,n$, il existe $s_i\in S$ tel que $s_i x\in X_i$. Il est facile d'établir par récurrence sur n, grâce à la condition de Ore à gauche, l'existence d'éléments α_i appartenant à S tels que $\gamma = \alpha_1 s_1 = \dots = \alpha_n s_n$, avec $\gamma\in S$. On en déduit $\gamma x\in X_i$, $i=1,\dots,n$ donc $\gamma x \in \bigcap_{i=1}^{n} X_i$ et $x\in M_P$. La deuxième partie du lemme est démontrée au lemme II,2 page 98 de la thèse [3].

Lemme 11 : *Si* A *est un idéal de* R *maximal dans sa classe modulo l'équivalence d' Artin* R, *on a* :

$$A_P = {}_PA = R_SA = AR_S \text{ ; en particulier on a } P_P = {}_PP.$$

Démonstration : De $sRx \subseteq A$ on déduit $RsR \,.\, RxR \subseteq A$ en désignant aussi par RsR l'idéal engendré par RsR dans R. En passant aux classes des idéaux *modulo l'équivalence d'Artin* R dans R (on pourra se reporter pour les définitions et les propriétés relatives à l'*équivalence* R à l'article [7] ou [3]), on obtient : $\overline{RsR}.\overline{RxR} \subseteq \overline{A}$ donc $\overline{RxR} \subseteq \overline{RsR}^{-1}.\overline{A} = \overline{A}.\overline{RsR}^{-1}$ et $\overline{RxR}.\overline{RsR} \subseteq \overline{A}$ et $RxR.RsR \subseteq A$ puisque A est maximum dans sa classe *modulo* R : par suite x appartient à ${}_PA$ et réciproquement. On a donc $A_P = {}_PA$. Comme P est maximal dans sa classe *modulo* R ([3] chapitre III, théorème II,5 et lemme II,1), on peut appliquer au cas particulier $P = A$.

Lemme 12 : $\forall a \in R,\ R_Sa = (Ra)_P$.

Démonstration : Si x appartient à R_Sa, on a $x = s^{-1}\lambda a, \lambda \in R$ donc $sx \in Ra$ et $R_Sa \in (Ra)_P$. Soit $x \in (Ra)_P$, il existe $s \in S$ tel que $sx \in Ra$, donc $x = s^{-1}\lambda a$ pour $\lambda \in R$ et $x \in R_Sa, (Ra)_P \subseteq R_Sa$.

Lemme 13 : *pour* $n=1,2,\ldots$ $(P^n)_P = (P_P)^n = ({}_PP)^n$.

(La démonstration est la même que celle du lemme 9).

<u>*Proposition 4 :*</u> *R_S est un anneau noethérien ; P_p est son plus grand idéal à gauche et aussi son plus grand idéal à droite. P_p et (0) sont les seuls idéaux premiers de R_S. Il y a une correspondance entre les idéaux à gauche propres (à droite propres) de R_S et les idéaux à gauche (à droite) ne rencontrant pas S :*

$$I \text{ idéal à gauche de } R_S \longrightarrow I' = I \cap R$$

$$I' \text{ idéal à gauche de } R \longrightarrow I = R_S I',$$

de plus I désignant un idéal à gauche de R_S, on a $I = R_S(I \cap R)$.

<u>Démonstration</u> : Soit I un idéal à gauche propre de R_S. $I' = R \cap I$ est un idéal à gauche de R. On a $I \supseteq R_S I'$. Soit $i = s^{-1}a \in I, a \in R, s \in S$. On peut écrire $si = a \in I'$ et $i \in R_S I'$. D'ailleurs I' ne rencontre pas S sinon on aurait $I' = R_S$. Si I' est maintenant un idéal à gauche de R ne rencontrant pas S, $R_S I'$ est un idéal à gauche de R_S propre car si 1 appartient à $R_S I'$ on peut écrire $1 = \sum_{j=1}^{r} s_j^{-1} a_j i_j'$ avec $i_j' \in I', a_j \in R, s_j \in S$ pour $j=1,\ldots,r$. On a vu au lemme 10, au cours de la démonstration, l'existence de $\gamma, \gamma \in S$, tel que :

$$\gamma = \alpha_1 s_1 = \cdots = \alpha_r s_r \ , \ \alpha_j \in S,\ j=1,\ldots,r$$

Dès lors $\gamma = \sum_{j=1}^{r} \gamma s_j^{-1} a_j i_j' \in I'$, ce qui entraîne une contradiction.

Le fait que R_S est noethérien se démontre comme dans le cas commutatif. Cherchons les idéaux premiers de R_S. Démontrons d'abord que P_p est le plus grand idéal à gauche de R_S : Soit I un idéal à gauche de R_S, $I \neq R_S, I' = I \cap R$ ne rencontre pas S donc est inclus dans P et on a $I = R_S I' \subseteq R_S P = P_p$

Comme $P_p = {}_pP$ (lemme 11), P_p est aussi le plus grand idéal à droite de R_S. Soit Q un idéal premier non nul de R_S donc compris dans P_p. On veut démontrer $Q = P_p$. Soit $Q' = Q \cap R$, $0 \subsetneq Q' \subseteq P$. Démontrons que Q' est complètement premier dans R

($ab \in Q'$, $a,b \in R$ entraîne a ou b appartient à Q'). On peut supposer d'entrée que a et b n'appartiennent pas à S, car si l'un d'eux par exemple a appartient à S, de $ab \subseteq Q'$, on déduit $b \in Q$ donc $b \in Q'$. Supposons donc que a et b appartiennent à P et qu'ils n'appartiennent pas à Q' : de $ab \subseteq Q'$, on déduit $(R_S a).b \subseteq Q$, donc $(Ra)_P.b \subseteq Q$ (lemme 12). D'après le théorème 0, on peut écrire $Ra = \bigcap_{i=1}^{n} X_i$, X_i P_i-primaire $i=1,\ldots,n$, et d'après le lemme 10, $(Ra)_P = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i)_P$; puisque l'on suppose que a appartient à P, l'un des P_i, par exemple P_1, est égal à P. D'après le lemme 10 on a $(X_1)_P = (Ra)_P$. Comme $P^{p_1} \subseteq X_1$ pour un certain entier naturel p_1, on a $(P^{p_1})_P \subseteq (X_1)_P$ et d'après le lemme 13 $(P^{p_1})_P = (P_P)^{p_1} \subseteq (X_1)_P$. Si l'on avait $(P_P)^{p_1} \subseteq Q$, on déduirait $Q = P_P$ c'est à dire ce que nous voulons établir. Supposons donc $(P_P)^{p_1} \not\subseteq Q$, il existe alors a', $a' \notin Q$, $a' \in (P_P)^{p_1}$ donc $a'R_S \in (P_P)^{p_1} \subseteq (X_1)_P$. On a donc $a'R_S b \subseteq (Ra)_P b \subseteq Q$ avec a' et b n'appartenant pas à Q : il y a une contradiction. Finalement Q' est complètement premier dans R. Il est donc égal à P et $Q = P_P$.

<u>*Lemme 14*</u> *: Soit* X *un idéal à gauche* P*-primaire de* R*,* P *désignant rappelons le un idéal premier minimal de* R*, on a :*

$$X = (R_S X) \cap R.$$

<u>Démonstration</u> : Elle a été fait sous des hypothèses plus générales au lemme II,2 page 98 de la thèse [3].

<u>*Proposition 5*</u> *:* *Soit* T *un idéal non nul de* R_S*,* R_S/T *est un anneau à idéaux à gauche tous principaux et à idéaux à droite tous principaux.*

<u>Démonstration</u> : JACOBSON a démontré (cf. [7] théorème 24, pages 128 et 129) que si L est un ordre maximal régulier noethérien vérifiant la condition de chaîne descendante affaiblie pour les idéaux(*) (c'est à dire que toute chaîne descendante d'idéaux(*) de L contenant un idéal(*) donné s'arrête au bout d'un nombre fini d'idéaux), pour tout idéal T de L, L/T a tous ses idéaux à gauche principaux et tous ses idéaux à droite principaux. Or R_S est un ordre maximal régulier noethérien, sans diviseurs de zéro, ne possédant qu'un seul idéal premier non nul P_p qui est d'ailleurs le plus grand idéal à gauche et le plus grand idéal à droite de R_S. On sait alors qu'il vérifie la condition de chaîne descendante affaiblie pour les idéaux(*) (cf. [2], théorème 2,16) et on peut appliquer le théorème de JACOBSON à R_S.

<u>*Théorème 4*</u> : *Les seuls idéaux à gauche (respectivement à droite), non nuls, de* R_S *sont les* P_p^n $n=0,1,2,\ldots$ *: ainsi tous les idéaux d'un côté de* R_S *sont bilatères. Enfin il existe un élément* $a, a \in R_S$ *tel que* $R_S a^n = a^n R_S = P_p^n$, $n=1,2,\ldots$

<u>Démonstration</u> : D'après la proposition 5, $\overline{R}_S = R_S/P_p^2$ est un anneau à idéaux à gauche (respectivement à droite) tous principaux et $P_p/P_p^2 = \overline{R}_S\overline{a}$, $\overline{a} \in \overline{R}_S$. On a donc $R_S a + P_p^2 = P_p$ et d'après le lemme de NAKAYAMA $P_p = R_S a$. Soit I un idéal à gauche propre non nul de R_S, I contient P_p^n pour un certain n puisque pour $i \in I$, $i \neq 0$ $R_S i$ est P_p-primaire (théorème 0). On a donc $I/P_p^{n+1} = \tilde{R}_S\tilde{a}'$, en posant $a' \in I$ et $\tilde{R}_S = R_S/P_p^{n+1}$. On peut écrire successivement $I = R_S a' + P_p^{n+1} = R_S a + P_p P_p^n \subseteq R_S a + P_p \cdot I \subseteq I$, donc $I = R_S a' + P_p I$, et d'après le lemme de NAKAYAMA, $I = R_S a'$. Mais a' appartenant à P_p s'écrit $a_1 a = a'$ et il est alors facile de prouver que $I = R_S a^r$ pour un entier naturel r. En particulier on a $P_p^r = R_S a^p \subseteq P_p^p$; si l'on avait $p > r$, on en déduirait $P_p^r = P_p^p$ mais cela entraînerait $\bigcap_1^\infty P_p^n \neq 0$, contrairement au lemme 7. On a donc $p \leq r$ et ceci entraîne $p=r$ (démonstration par récurrence sur p, pour $p=1$, on a évidemment $r=1$). Le théorème s'en déduit alors facilement.

Théorème 5 : Tout idéal à gauche (respectivement à droite) de R *est bilatère :*

Démonstration : Nous considérons un idéal à gauche P-primaire, P premier minimal, X. D'après le lemme 14, $X = R_S X \cap R$. D'après le théorème 4, $R_S X$ est un idéal bilatère de R_S donc X est un idéal de R. Soit alors $Ra = \bigcap_{i=1}^{n} X_i$, $a \in R$, $a \neq 0$, une représentation de Ra comme intersection d'idéaux à gauche P_i-primaires, théorème 0, P_i premier minimal $i=1,\ldots,n$. Chaque X_i est bilatère et par suite Ra est bilatère. On démontrerait de même que aR est bilatère, et par suite tout idéal d'un côté de R est bilatère.

Théorème 6 : Soit R *un ordre maximal régulier, noethérien, sans diviseurs de zéro. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) - Tout idéal d'un côté (à gauche, à droite) est bilatère.

2) - Tout idéal d'un côté P-primaire, P premier minimal, est compris dans P

3) - Pour tout idéal premier minimal P de R, *soit* $S = R - P$. *Pour tout* s *appartenant à* S, *il existe* s' *et* s" *appartenant à* S *tels que* $Rs \supseteq s'R$ *et* $sR \supseteq Rs''$.

4) - Tout idéal à gauche principal (resp. à droite principal) est compris dans chacun des idéaux premiers qui lui sont associés.

Démonstration :

$1) \Rightarrow 2)$: Si X est un idéal à gauche par exemple, P-primaire, P premier minimal on a $X \cdot R \subseteq P$. En particulier si X est bilatère on a $X \cdot R = X$ et X est compris dans P.

2) $\Longrightarrow$ 3) : Voir le théorème 3 et sa démonstration.

3) $\Longrightarrow$ 1) : Les résultats obtenus après le théorème 3 sont valables sous la condition de 3) remplaçant celle de 2) le théorème 3 étant alors valable sous la condition supplémentaire que P est premier minimal non nul. En particulier le théorème 5 est vrai.

2) $\Longrightarrow$ 4) : Immédiat par application du théorème 0.

4) $\Longrightarrow$ 1) : Il suffit de remarquer que l'étude faite à la partie II est valable sous l'hypothèse 4) au lieu de 2), le théorème 3 restant exact alors.

- III -

<u>Lemme 15</u> : *Soit* A *un anneau non nécessairement commutatif, sans diviseurs de zéro, noethérien,* K *son corps des fractions,* B *un sous-anneau de* K *contenant* A, *l'injection canonique* $\alpha : A \to B$ *est un épimorphisme d'anneaux.*

<u>Démonstration</u> : Soient β_1 et $\beta_2 : B \to C$ deux morphismes unitaires d'anneaux tels que $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Soit $b \in B$, $b \neq 0$, on peut trouver $a \in A$ et $s \in K$, $s \neq 0$ tel que $a = bs$ donc $\beta_1(bs) = \beta_2(bs)$ et $\beta_1(b)\beta_1(s) = \beta_2(b)\beta_2(s) = \beta_2(b)\beta_1(s)$; en multipliant à droite par $\beta_1(s^{-1})$ il vient $\beta_1(b) = \beta_2(b)$ donc $\beta_1 = \beta_2$.

<u>Lemme 16</u> : *On garde les mêmes hypothèses qu'au lemme précédent. On suppose de plus que* B *est plat en tant que* A*-module à droite et en tant que* A*-module à gauche. Soit* $\mathfrak{b}$ *un idéal bilatère de* B. *Supposons que* A *soit un ordre maximal de* K, *alors on a*

.../...

$\mathfrak{b}\,.^{\cdot}\,\mathfrak{b} = \{x\in K \mid \mathfrak{b}x \subseteq \mathfrak{b}\} = B$ *et* $\mathfrak{b}\,^{\cdot}.\,\mathfrak{b} = \{x\in K \mid x\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{b}\} = B$.

<u>Démonstration</u> : D'après un résultat de SILVER [(13) prop.1,6 page 48] on a $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\otimes_A B = B\otimes_A\mathfrak{a}$ avec $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\cap A$. D'après un lemme de HARADA [(14),lemme 1 page 62] on a $\mathfrak{b}\,.^{\cdot}\,\mathfrak{b} = \mathrm{Hom}_B^{\ell}(\mathfrak{b},\mathfrak{b})$, en identifiant $x\in K$ au morphisme x qui à $b\in B$ fait correspondre bx, et de même $\mathfrak{b}\,^{\cdot}.\,\mathfrak{b} = \mathrm{Hom}_B^{r}(\mathfrak{b},\mathfrak{b})$.

Or d'après BOURBAKI [(15),prop.1 page 106] il existe un $\mathbb{Z}$-isomorphisme entre $\mathrm{Hom}_B^r(\mathfrak{a}\otimes B, B\otimes\mathfrak{a})$ et $\mathrm{Hom}_A^r[\mathfrak{a},\mathrm{Hom}_B^r(B,B\otimes\mathfrak{a})]$: cet isomorphisme associe à $h\in\mathrm{Hom}_B^r(B\otimes\mathfrak{a}, B\otimes\mathfrak{a})$, h' application linéaire de $\mathfrak{a}$ dans $\mathrm{Hom}_B^r(B,B\otimes\mathfrak{a}) = B\otimes\mathfrak{a}$, qui à $x\in\mathfrak{a}$ associe, $\forall y\in B$, $h'(x)y = hxy$ (on identifie $\mathfrak{a}\otimes_A B$ à $\mathfrak{a}B$ et $B\otimes_A\mathfrak{a}$ à $B\mathfrak{a}$) donc $h'(x) = hx$. Par ailleurs d'après BOURBAKI [(16) prop.10 page 38] il existe un $\mathbb{Z}$-isomorphisme entre $\mathrm{Hom}_A^r(\mathfrak{a},B\otimes_A\mathfrak{a})$ et $B\otimes_A\mathrm{Hom}_A^r(\mathfrak{a},\mathfrak{a})$ qui à h' application de $\mathfrak{a}$ dans $B\otimes_A\mathfrak{a}$ associe $y\otimes u$, $y\in B$, $u\in\mathrm{Hom}_A^r(\mathfrak{a},\mathfrak{a})$ tel que : $\forall x\in\mathfrak{a}$, $h'(x) = y\otimes u(x) = y\otimes ux$ donc $hx = yux$ et $h = yu$. Ainsi $B\otimes_A \mathrm{hom}_A^r(\mathfrak{a},\mathfrak{a})$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_B^r(\mathfrak{b},\mathfrak{b})$ et A étant un ordre maximal de K, on a $\mathrm{Hom}_A^r(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\,^{\cdot}.\,\mathfrak{a} = A$ et $B = \mathrm{Hom}_B^r(\mathfrak{b},\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}\,^{\cdot}.\,\mathfrak{b}$. On obtient de même $\mathfrak{b}\,.^{\cdot}\,\mathfrak{b} = B$.

<u>*Théorème 7*</u> *: Soit* A *un anneau sans diviseurs de zéro, noethérien, ordre maximal de son corps des fractions* K. *Soit un sous-anneau* B *de* K *contenant* A, *plat en tant que* A*-module à droite et* A*-module à gauche, dont tous les idéaux (à droite, à gauche) sont bilatères, alors* B *est un anneau noethérien, sans diviseurs de zéro, ordre maximal de* K.

<u>Démonstration</u> : Le fait que B est noethérien résulte de l'article [13] (prop. 1,6 page 48). Soit $\mathfrak{b}$ un B-idéal, il existe $\lambda\in B$ tel que $\mathfrak{b}\lambda\subseteq B$ donc il existe un idéal $\mathfrak{b}'$ de B tel que $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'\lambda^{-1}$. On a alors $\mathfrak{b}'\,^{\cdot}.\,\mathfrak{b}' = \{x\in K \mid x\mathfrak{b}'\subseteq\mathfrak{b}'\} = \mathfrak{b}\,^{\cdot}.\,\mathfrak{b}$

En appliquant le lemme 16 on trouve $\mathfrak{b}'\,^{\cdot}.\,\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}\,^{\cdot}.\,\mathfrak{b} = B$. On démontrerait de même $\mathfrak{b}\,.^{\cdot}\,\mathfrak{b} = B$. Ainsi B est un ordre maximal de K.

<u>Remarque</u> : *Le théorème 7, appliqué au cas où* A *est commutatif (donc aussi* B*), redonne un résultat de J. MAROT [17].*

BIBLIOGRAPHIE

[1] GOLDIE : The structure of prime rings with ascending chains conditions : Proc. London Math. Society (3),8,1958, 589-608.

[2] ASANO : Zur Arithmetic in Schiefringen I, Osaka Math. Journal Vol 1, n°2 July 1949 p.98 et suivantes.

[3] G. MAURY : La Condition intégralement clos dans quelques structures algébriques, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure - 3ème Série, t.78, 1961, p. 31 à 100.

[4] LESIEUR et CROISOT : Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif I. Colloque d'Algèbre Supérieure, Bruxelles, décembre 1956.

[5] GOLDIE : Localisation in non commutative algebra. Journal of Algebra 1967,5, p.89 à 105.

[6] ASANO : Arithmetical ideal théory in semi-groups. Journal of the Polytechnics Institute Osaka City University, serie A, t.4, 1953, p. 9 à 23.

[7] JACOBSON N. : Theory of rings (1943, New-York).

[8] S. MORI, T. DODO : Bedingungen für ganze abgeschossenheit in Integritätsbereichen (J. Sc. Hiroshima Univ. T 7, 1937, p. 15 à 28).

[9] M. YOSIDA and M. SAKUMA : On integrally closed noetherian rings (J. Sc. Hiroshima Univ. T.17, 1954, p. 311 à 315).

[10] M. AUSLANDER et Oscar GOLDMAN : Maximal orders Trans. Am Math. Soc., 97; 1960, p. 1 à 24.

[11] DEURING : Algebren (2ème édition 1968).

[12] G. MAURY : Remarques sur les ordres maximaux, noethériens, sans diviseurs de zéro, Séminaire Dubreil-Pisot, Année 1968-1969, Exposé du 3 Février 1969

[13] SILVER : Non commutative localisations and applications J of algebra 7,1967,44-67.

[14] HARADA M. : a generalisation of maximal orders. Osaka J Math, 1, 1964, 61-68.

[15] BOURBAKI N. : Algèbre commutative ch 1-2.

[16] BOURBAKI N. : Algèbre Ch 2.

[17] J. MAROT : Une propriété des suranneaux plats d'un anneau. CR Acad. Sc. PARIS t.265, 3 Juillet 1967.

Manuscrit remis le 1er septembre 1969

G. MAURY
Professeur
Département de mathématiques
43, bd du 11 novembre 1918
69 - VILLEURBANNE