PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

A. ROUX

Une propriété homotopique des cofibrations

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1969, tome 6, fascicule 2
, p. 131-138
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1969__6_2_131_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1969 t. 6-2

UNE PROPRIETE HOMOTOPIQUE DES COFIBRATIONS

A. ROUX

1. Le théorème principal.

Soit (X,A) une paire fermée où l'inclusion canonique $i : A \longrightarrow X$ est une cofibration. Pour une homotopie $\phi : A \times I \longrightarrow B$, on construit les carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi_\circ"'] & X \arrow[d, "\phi_\circ"] \\ B \arrow[r, "j_\circ"] & Y_\circ \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi_1"'] & X \arrow[d, "\phi_1"] \\ B \arrow[r, "j_1"] & Y_1 \end{tikzcd}$$

a) Il existe $\gamma_1^\circ : Y_1 \longrightarrow Y_\circ$ constant sur B

Φ° une homotopie de $\bar{\phi}_\circ$ à $\gamma_1^\circ \bar{\phi}_1$ prolongeant ϕ

et de même, en permuttant o et 1.

b) Il existe une homotopie K° de $1_{Y_\circ}$ à $\gamma_1^\circ \gamma_\circ^1$ relative à B et de même en permuttant o et 1.

Preuve :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "0"'] & X \arrow[d, "0"] \arrow[ddr, "\bar{\phi}_\circ"] & \\ A \times I \arrow[r] \arrow[d] & X \times I \arrow[dr, dashed, "\Phi^\circ"] & \\ B \arrow[rr, "j_\circ"] & & Y_\circ \end{tikzcd}$$

$i : A \longrightarrow X$ étant une cofibration, le diagramme ci-contre peut être complété par $\Phi^\circ : X \times I \longrightarrow Y_\circ$

On a alors le diagramme commutatif ci-dessous qui par cocartésianité peut être complété (de façon unique) par $\gamma_1^\circ : Y_1 \longrightarrow Y_\circ$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi_1"'] & X \arrow[d, "\phi_1"] \arrow[dd, bend left=60, "\Phi_1^\circ"] \\ B \arrow[r, "j_1"] \arrow[dr, "j_\circ"'] & Y_1 \arrow[d, dashed, "\gamma_1^\circ"] \\ & Y_\circ \end{tikzcd}$$

ceci démontre a).

$\gamma_1^{\circ}\phi^{1}$ est une homotopie de $\gamma_1^{\circ}\bar{\phi}_1$ à $\gamma_1^{\circ}\gamma_0^{1}\bar{\phi}_0$ dont la restriction à $A\times I$ est $j_0\,\phi$ (avec $\phi^{*}(a,t) = \phi(a,1-t)$). D'où $\phi^{\circ}_{*}(\gamma_1^{\circ}\phi^{1})$ est une homotopie de $\bar{\phi}_0$ à $\gamma_1^{\circ}\gamma_0^{1}\bar{\phi}_0$ dont la restriction à $A\times I$ est $j_0(\phi * \phi^{*})$ (et non $j_0\phi_c p$ malheureusement !).

On utilise alors le fait que $\phi * \phi^{*}$ est homotope à $\phi_0 p$ (avec $p(a,t) = a$) pour construire une homotopie H de $\bar{\phi}_0$ à $\gamma_1^{\circ}\gamma_0^{1}\bar{\phi}_0$ dont la restriction à $A\times I$ soit $j_0\,\phi_0 p$:

on définit $\psi : (A\times I \cup X\times 0 \cup X\times 1)\times I \longrightarrow X\times I$ par

sur $X\times o\times I$ $\quad \psi(x,o,t') = \bar{\phi}_0(x)$

sur $X\times 1\times I$ $\quad \psi(x,1,t') = \gamma_1^{\circ}\gamma_0^{1}\bar{\phi}_0(x)$

$$\text{sur } A\times I\times I \qquad (a,t,t') = \begin{cases} j_0\phi(a,o) & o \leq t \leq \frac{t'}{2} \\ j_0\,\phi(a,2t-t') & \frac{t'}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ j_0\,\phi(a,2-2t-t') & \frac{1}{2} \leq t \leq 1-\frac{t'}{2} \\ j_0\phi(a,o) & 1-\frac{t'}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

la restriction de ψ à $A\times I\times I$ est une homotopie de $j_0(\phi * \phi^{*})$ à $j_0\,\phi_0 p$

$$\begin{tikzcd} A\times I\cup X\times o\cup X\times 1 \arrow[r, hook] \arrow[d, "o"'] & X\times I \arrow[d, "o"] \arrow[dd, bend left, "\phi^{\circ}_{*}(\gamma_1^{\circ}\phi^{1})"] \\ (A\times I\cup X\times o\cup X\times 1)\times I \arrow[r] \arrow[dr, "\psi"'] & X\times I\times I \arrow[d, dashed, "\Psi"] \\ & Y_0 \end{tikzcd}$$

$A\times I\cup X\times o\cup X\times 1 \longrightarrow X\times I$ étant une cofibration, le diagramme ci-contre peut être complété par $\Psi : X\times I\times I \longrightarrow Y_0$

$$\begin{tikzcd} A\times I\cup X\times o\cup X\times 1 \arrow[r] \arrow[dr, "\psi_1"'] & X\times 1 \arrow[d, "\Psi_1 = H"] \\ & Y_0 \end{tikzcd}$$

Pour $t' = o$ on a donc $\Psi_0 = \phi^{\circ}_{*}(\gamma_1^{\circ}\phi^{1})$ et pour $t' = 1$ on a le diagramme commutatif ci-contre et $H = \Psi_1$ est une homotopie de $\bar{\phi}_0$ à $\gamma_1^{\circ}\gamma_0^{1}\bar{\phi}_0$ dont la restriction à $A\times I$ est $j_0\phi_0 p$.

$$\begin{tikzcd}
A\times I \arrow[r] \arrow[d, "\phi_0\times 1_I"'] & X\times I \arrow[d, "\bar\phi_0\times 1_I"] \arrow[dd, bend left, "H"] \\
B\times I \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & Y_0\times I \arrow[d, dashed, "K^0"] \\
B \arrow[r, "j_0"] & Y_0
\end{tikzcd}$$

Par cocartisianité, le diagramme commutatif ci-contre peut être complété (de façon unique) par $k^0 : Y_0\times I \longrightarrow Y_0$

K^0 est donc une homotopie de K_0^0 à K_1^0 relative à B.

Pour t = o et t = 1, on a les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\phi_0"'] & X \arrow[d, "\bar\phi_0"] \arrow[dd, bend left, "\bar\phi_0"] \\
B \arrow[r, "j_0"] \arrow[dr, "j_0"'] & Y_0 \arrow[d, "K_0^0"] \\
& Y_0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\phi_0"'] & X \arrow[d, "\bar\phi_0"] \arrow[dd, bend left, "\gamma_1^0\gamma_0^1\bar\phi_0"] \\
B \arrow[r, "j_0"] \arrow[dr, bend right, "j_0"'] & Y_0 \arrow[d, "K_1^0"] \\
& Y_0
\end{tikzcd}$$

et par cocartisianité on en déduit $K_0^0 = 1_{Y_0}$ et $K_1^0 = \gamma_1^0\gamma_0^1$

donc K^0 est une homotopie de 1_{Y_0} à $\gamma_1^0\gamma_0^1$ relative à B.

En permuttant o et 1 on a aussi une homotopie K^1 de 1_{Y_1} à $\gamma_0^1\gamma_1^0$ relative à B. ce qui démontre b).

Corollaire 1 :

Soit (X,A) *une paire fermée où l'inclusion canonique* $i : A \longrightarrow X$ *est une cofibration . Pour des applications* $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow A$, *on construit les carrés cocartésiens :*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "\bar f"] \\
B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "\bar g"] \\
A \arrow[r, "i'"] & X'
\end{tikzcd}$$

Si $|g||f| = |1_A|$, *il existe* $\gamma : X' \longrightarrow X$ *constant sur* A *tel que* $|\gamma\bar g||\bar f| = |1_X|$

$$|\bar g||\bar f\gamma| = |1_{X'}|$$

de plus γ *est une équivalence d'homotopie.*

Preuve :

Par hypothèse, il existe une homotopie de 1_A à gf, donc d'après le théorème principal il existe $\gamma : X' \longrightarrow X$ constant sur A et une homotopie Φ de 1_X à $\gamma\bar g\bar f$.

D'où

$$|\gamma\bar g||\bar f| = |\gamma\bar g\bar f| = |1_X|$$

De plus on sait que γ est une équivalence d'homotopie, donc il existe $\gamma' : X \longrightarrow X'$ tel que $|\gamma'||\gamma| = |1_{X'}|$ d'où

$$|1_{X'}| = |\gamma'||\gamma| = |\gamma'||\gamma\bar g||\bar f||\gamma| = |\gamma'\gamma||\bar g||\bar f\gamma| = |\bar g||\bar f\gamma|$$

Corollaire 2 :

Soit (X,A) *une paire fermée où l'inclusion canonique* $i : A \longrightarrow X$ *est une cofibration. Pour une application* $f : A \longrightarrow B$, *on construit le carrée cocartésien :*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "\bar f"] \\ B \arrow[r, "j"] & Y \end{tikzcd}$$

Si f est une équivalence d'homotopie il en est de même de $\bar f$.

Preuve :

Soit $g : B \longrightarrow A$ tel que $|g||f| = |1_A|$, $|f||g| = |1_B|$ avec les notations du corollaire 1 il existe $\gamma : X' \longrightarrow X$ constant sur A tel que $|\gamma g||\bar f| = |1_X|$,

(2) $|\bar g||\bar f\gamma| = |1_{X'}|$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "\bar g"] \\ A \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "\bar{\bar f}"] \\ B \arrow[r, "j'"] & Y' \end{tikzcd}$$

On construit les cocartésiens ci-contre : comme $|f||g| = |1_B|$, d'après le corollaire 1, il existe $\delta : Y' \longrightarrow Y$ constant sur B tel que $|\delta\bar f||\bar g| = |1_Y|$ (4) $|\bar{\bar f}||\bar g\delta| = |1_{Y'}|$

D'après (2) et (4) dans la catégorie homotopique $|\bar{g}|$ et $|\bar{f}\gamma|$ sont des isomorphismes (car $|\bar{g}|$ admet des inverses à gauche $|\delta\bar{f}|$ et à droite $|\bar{f}\gamma|$) et comme $|\gamma|$ est un isomorphisme il en est de même de $|\bar{f}|$.

2. Application à la décomposition d'un attachement le long d'une cofibration.

a) Pour $f : A \longrightarrow B$ et Z_f le cylindre de f. On a le diagramme ci-contre :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i_0"'] & & B \\ & Z_f \arrow[ur, "r"'] & \end{tikzcd}$$

où i_0 est une cofibration (définissant A comme son espace fermé de Z_f) et où r est une équivalence d'homotopie (rétraction de l'inclusion canonique du sous espace fermé B dans Z_f).

b) Pour une paire fermée (X,A), on construit le carré cocartésien ci-contre :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "\bar{i}_0"] \\ Z_f \arrow[r, "h"] & M_f \end{tikzcd}$$

il est facile de voir que l'inclusion de paire

$$(\bar{i}_0, i_0) : (X,A) \longrightarrow (M_f, Z_f)$$

se factorise suivant le diagramme ci-contre :

$$\begin{tikzcd} (X,A) \arrow[rr, "(\bar{i}_0, i_0)"] \arrow[dr, "(\bar{i}'_0, i'_0)"'] & & (M_f, Z_f) \arrow[dl, "(\bar{i}''_0, i''_0)"] \\ & (M_f(B,(M_f-B)\cap Z_f) & \end{tikzcd}$$

où $(\bar{i}'_0, i''_0)$ est une équivalence d'homotopie, et où $(\bar{i}''_0, i''_0)$ est l'inclusion canonique ; de plus le couple $\{M_f - B, Z_f\}$ est un recouvrement ouvert de M_f.

c) Lorsque l'inclusion canonique $i : A \longrightarrow X$ est une cofibration, il en est de même de l'inclusion canonique $k : Z_f \longrightarrow M_f$ (la paire (M_f, Z_f) étant fermée).

$$\begin{tikzcd} Z_f \arrow[r, "k"] \arrow[d, "r"'] & M_f \arrow[d, "r"] \\ B \arrow[r, "j"] & Y \end{tikzcd}$$

Il résulte alors du fait que r est une équivalence d'homotopie et du corollaire 2 que dans le carré cocartésien, $\bar{r}$ est une équivalence d'homotopie et plus précisément

$(\bar{r},r) : (M_f,Z_f) \longrightarrow (Y,B)$ est une équivalence d'homotopie.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "\bar{f}"] \\ B \arrow[r, "j"] & Y \end{tikzcd}$$

En résumé, l'application $(\bar{f},f) : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ définie par le carré cocartésien ci-contre admet la factorisation

$$(\bar{f},f) = (\bar{r},r)(i''_o,i''_o)(i'_o,i'_o)$$

où (r,r) et (i'_o,i'_o) sont des équivalences d'homotopie.

3. Exemples :

a) Soit (X,A) une paire fermée où l'inclusion canonique $i : A \longrightarrow X$ est une cofibration.

Pour $f : A \longrightarrow B$, on construit le carré cocartésien ci-contre :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "\bar{f}"] \\ B \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Avec les notations du paragraphe 2, le couple $(\mathring{Z}_f, M_f - B)$ étant un recouvrement ouvert de M_f, o on a la suite exacte de Mayer-Victoris (le module des coefficients étant quelconque)

$$\ldots \longrightarrow H_n(Z_f \quad (M_f-B) \longrightarrow H_n(M_f-B) \oplus H_n(Z_f) \longrightarrow H_n(M_f) \longrightarrow \quad \ldots$$

et du fait des équivalences d'homotopie explicitées ci-dessus on a la suite exacte :

$$(*) \quad \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{(i;f)} H_n(X) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\bar{f}-j} H_n(Y) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \longrightarrow$$

En particulier lorsque B est réduit à un point on a $Y = X/A$ et la suite ( ) s'écrit s'écrit

$$\ldots \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \longrightarrow \tilde{H}_n(X) \longrightarrow \tilde{H}_n(X/A) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(A) \longrightarrow \ldots\ldots$$

Il est évident que l'application quotient $(X,A) \longrightarrow (X,A..)$ définit un isomorphisme $\tilde{H}(X,A) \longrightarrow \tilde{H}(X/A)$.

Lorsque $H_{n-1}(A) = o$ la suite exacte $(\ast)$ montre que le carré :

$$\begin{tikzcd} H_n(A) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(X) \arrow[d] \\ H_n(B) \arrow[r] & H_n(Y) \end{tikzcd}$$

est cocartésien.

(on a des résultats duaux pour la cohomologie).

(b) Lorsque X,A,B sont connexes par arcs il en est de même de (M_f-B), $Z_f \cap (M_f-B)$, Z_f, et on peut appliquer le théorème classique de Van-Kamper au carré cocartésien

$$\begin{tikzcd} Z_f \cap (M_f-B) \arrow[r] \arrow[d] & M_f-B \arrow[d] \\ Z_f \arrow[r] & M_f \end{tikzcd}$$

ce qui donne le carré cocartésien dans la catégorie des groupes :

$$\begin{tikzcd} (Z_f \cap (M_f-B) \arrow[r] \arrow[d] & (M_f-B) \arrow[d] \\ (Z_f) \arrow[r] & (M_f) \end{tikzcd}$$

Du fait des équivalences d'homotopie, on en déduit le carré cocartésien dans la catégorie des groupes :

$$\begin{tikzcd} \pi(A) \arrow[r, "i_j"] \arrow[d, "f_j"'] & \pi(X) \arrow[d, "\bar{f}_j"] \\ \pi(B) \arrow[r, "j"] & \pi(Y) \end{tikzcd}$$

BIBLIOGRAPHIE

E.H. SPANIER : Algebraic topology (Mac-Graw-Hill book company)

P. OLUM : Non-abelian cohomology and Van Kamper's theorem. (Annals of Math. (1958) 658-68).

Manuscrit remis le 30 mai 1969

A. ROUX
Maître-assistant
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
43, bd du 11 novembre 1918
VILLEURBANNE