PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

R. OUZILOU

Théorie des fibrés et grassmanniennes des espaces de Banach

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1969, tome 6, fascicule 1
, p. 87-150

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1969__6_1_87_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1969 t. 6-1

THEORIE DES FIBRES ET GRASSMANNIENNES DES ESPACES DE BANACH

par R. OUZILOU

Ce travail a été présenté au cours du premier semestre 1968-1969 à la section de recherches "Géométrie et Topologie des variétés" du Département de Mathématiques de Lyon.

Les deux premiers chapitres constituent une tentative de synthèse des théories des fibrés dans le cadre des catégories. Le premier chapitre est une théorie globale des fibrés principaux des catégories à produits ; on y retrouve toutes les propriétés élémentaires des fibrés topologiques principaux. Pour pouvoir localiser les fibrés principaux d'une catégorie, ce qui est l'objet du second chapitre, on s'est placé dans le cadre d'un site à recollements après avoir défini de façon fonctorielle cette vieille notion de recollement. Le lecteur retrouvera ainsi tous les types classiques de localisation qu'on rencontre en topologie, en géométrie différentielle ou en géométrie algèbrique.. A côté de cet aspect interne de la théorie des fibrés localement triviaux, on présente l'aspect externe de cette théorie comme l'avait déjà fait M. Karoubi dans son cours à l'Université d'Alger : en prenant les fibres dans une catégorie convenablement liée à la catégorie de base.

Au dernier chapitre, les grassmanniennes banachiques sont définies comme espaces d'orbites de groupes linéaires, ce qui permet d'avoir une classification homotopique des fibrés vectoriels de dimension finie au moyen des espaces de suites $\ell^p(E)$. Ensuite, une attention particulière est accordée aux grassmanniennes des espaces de Hilbert et, grâce au théorème de contractibilité de Kuiper, on arrive à dégager pour ces variétés quelques propriétés homotopiques spéciales au cas de dimension infinie.

I. FIBRES PRINCIPAUX D'UNE CATEGORIE A PRODUITS FINIS.

$\mathcal{E}$ désignera la catégorie des ensembles et de leurs applications, $\mathcal{T}$ désignera la catégorie des espaces topologiques et de leurs applications continues.

Pour tout couple (A,B) d'objets d'une catégorie $\mathcal{C}$, l'ensemble des morphismes de $\mathcal{C}$ de source A et de but B sera noté $\mathcal{C}(A,B)$. Le foncteur $B \rightsquigarrow \mathcal{C}(A,B)$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{E}$ sera noté $A(.)$ si aucune confusion n'est possible sur la catégorie $\mathcal{C}$. Ainsi, pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}$, l'application $A(f)$ de $A(X)$ dans $A(Y)$ est définie par

$$A(f)(x) = f_\circ x \qquad , \qquad x : A \longrightarrow X.$$

Si aucune confusion n'est possible sur l'objet A, $A(f)(x)$ sera noté $f(x)$.

Dans tout ce qui suit $\mathcal{C}$ sera une catégorie à produits finis. L'objet final de $\mathcal{C}$, défini à une isomorphie près, sera appelé le point de $\mathcal{C}$ et noté "pt". Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, les morphismes $pt \longrightarrow X$ de $\mathcal{C}$ seront appelés les points de X et leur ensemble $pt(X)$ sera noté $\dot{X}$. Enfin, nous fixerons dans $\mathcal{C}$ un système de générateurs, i.e, un ensemble $\mathcal{A}$ d'objets de $\mathcal{C}$ tel que le foncteur $\Pi\mathcal{C}(A,.)$, $A \in \mathcal{A}$, soit fidèle. Pour $\mathcal{E}$ et $\mathcal{T}$, catégories à générateur ponctuel, on prendra bien entendu $\mathcal{A} = \{pt\}$.

Un objet A de $\mathcal{C}$ sera dit <u>vide</u> s'il existe un objet B de $\mathcal{C}$ tel que $B(A) = \emptyset$, ce qui revient à dire que $\dot{A} = \emptyset$.

Un morphisme $f : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}$ sera dit <u>constant</u> si, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $X(f)$ est une application constante de $X(A)$ dans $X(B)$; puisque, $A \times A$ est défini, ceci revient à dire que les composés de f avec les deux projections $A \times A \rightrightarrows A$ sont égaux. Notons que, pour un objet non vide A, les morphismes constants $A \longrightarrow B$ sont en correspondance biunivoque canonique avec les points de B.

Dans les diagrammes de morphismes, les flèches muettes indiqueront des projections.

1. Groupes d'une catégorie :

(1.1) Si $\mu : G\times G \longrightarrow G$ est un morphisme de $\mathcal{C}$, pour tout objet A de $\mathcal{C}$, on a une loi de composition interne :

$$A(\mu) : A(G)\times A(G) \longrightarrow A(G)$$

définie par :

$$A(\mu)(x,y) = \mu_\circ(x,y) \qquad , \qquad x,y : A \rightrightarrows G$$

Si aucune confusion n'est à craindre sur le morphisme μ ou sur l'objet A, on posera :

$$A(\mu)(x,y) = xy$$

Si, pour tout objet A du système de générateur $\mathcal{A}$, la loi $A(\mu)$ est associative, alors ceci reste vrai pour tout objet A de $\mathcal{C}$. Dans ces conditions, on dit que μ est un monoïde de $\mathcal{C}$.

Proposition : Pour un morphisme $\mu : G\times G \longrightarrow G$ de $\mathcal{C}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout objet A de $\mathcal{C}$, la loi interne $A(\mu)$ est une loi de groupe.

(ii) (G,μ) est un monoïde non vide et il existe un morphisme constant $e : G \longrightarrow G$, un morphisme $i : G \longrightarrow G$ tels que :

$$\mu_\circ(id_G, e) = \mu_\circ(e, id_G) = id_G$$
$$\mu_\circ(id_G, i) = \mu_\circ(i, id_G) = e$$

Dans ces conditions, e et i sont uniques et i est un automorphisme involutif de G.

Preuve : Pour passer de (i) à (ii) il suffit de prendre pour e l'élément neutre de $G(\mu)$ et pour i l'inverse de id_G pour cette loi. Le passage de (ii) à (i) se fait par composition avec les morphismes $A \longrightarrow G$ de $\mathcal{C}$ (cf. (2)).

<u>Définition</u> : Un triple $\mu : G\times G \longrightarrow G$; $e, i : G \rightrightarrows G$ satisfaisant aux conditions (ii) est appelé un <u>groupe</u> de $\mathcal{C}$. On retrouve ainsi tous les types usuels de groupes : groupes abstraits, i.e, groupes de $\mathcal{E}$; groupes topologiques, i.e, groupes de $\mathcal{T}$; schémas en groupes, variétés en groupes ...

A tout groupe $(\mu ; e, i)$ sur un objet G de $\mathcal{C}$ est associé un morphisme $\mu' : G\times G \quad G$ appelé la <u>contraction</u> de ce groupe et défini par :

$$\mu' = \mu_o(i\times id_G)$$

i.e, pour tout objet A de $\mathcal{C}$, on a :

$$\mu'(g,h) = g^{-1}h \qquad h, g \in A(G)$$

Il est clair que les deux endomorphismes (pr_1, μ) et (pr_1, μ') de $G\times G$ sont des isomorphismes réciproques. Réciproquement, un monoïde $\mu : G\times G \longrightarrow G$ de $\mathcal{C}$ tel que l'endomorphisme (pr_1, μ) soit inversible est un groupe de $\mathcal{C}$.

(1.2) Soit G un groupe de $\mathcal{C}$ ($\mu : G\times G \longrightarrow G$; $e, i : G \rightrightarrows G$ sont sous-entendus).

<u>Définition</u> : On dit qu'un morphisme $\nu : P\times G \longrightarrow P$ de $\mathcal{C}$ est un G-<u>objet à droite</u> de $\mathcal{C}$ (ou encore une action à droite de G dand $\mathcal{C}$) si, pour tout objet A de $\mathcal{C}$, le groupe abstrait A(G) opère à droite sur l'ensemble A(P) au moyen de l'application $A(\nu) : A(P)\times A(G) \longrightarrow A(P)$. Ceci revient à dire, en termes plus explicites et avec la notation abusive :

$$\nu_o(p,g) = pg \qquad , \quad p \in A(P),\ g \in A(G)$$

que

$$(pg)h = p(gh) \qquad g, h \in A(G)$$

$$pe = p$$

(on peut d'ailleurs se limiter à vérifier ces égalités pour les objets A du système de générateurs $\mathcal{A}$).

Les G-objets à gauche de $\mathcal{C}$ se définissent de façon analogue.

<u>Exemples</u> :

o/ Avec la loi μ de G, on définit de façon évidente un objet à droite μ_d et un objet à gauche μ_s sur l'objet G.

1/ Pour tout objet B de $\mathcal{C}$, la projection $B\times G \longrightarrow B$ est un G-objet à droite suivant

$$b.g = b \qquad\qquad b \in A(B)\ ,\ g \in A(G)$$

Un tel objet à droite sera dit <u>trivial</u>.

<u>Définition</u> : Un morphisme d'un G-objet $\lambda : P\times G \longrightarrow P$ à un G-objet $\nu : Q\times G \longrightarrow Q$ consiste en un morphisme $f : P \longrightarrow Q$ tel que

$$f_\circ\lambda = \nu_\circ(f\times id_G)$$

Ceci a lieu si, et seulement si, pour tout objet A du système de générateurs $\mathcal{A}$, on a :

$$f(pg) = f(p)g \qquad\qquad p \in A(P),\ g \in A(G)$$

on peut alors organiser les G-objets à droite de $\mathcal{C}$ en une catégorie $\mathcal{C}^G$ dans laquelle se plonge canoniquement la catégorie $\mathcal{C}$ en faisant opérer trivialement G sur les objets de $\mathcal{C}$. De la même façon, on définit la catégorie ${}^G\mathcal{C}$ des G-objets à gauche de $\mathcal{C}$.

<u>Proposition 1</u> : Les catégorie $\mathcal{C}^G$ et ${}^G\mathcal{C}$ sont canoniquement isomorphes.

<u>Preuve</u> : Il suffit de considérer, pour tout objet P de $\mathcal{C}$, les morphismes :

$$P\times G \xrightarrow{(i_\circ pr_2, pr_1)} G\times P \xrightarrow{(pr_2, i_\circ pr_1)} P\times G \quad ,$$

de composer le premier avec un G-objet $G\times P \longrightarrow P$ et le second avec un G-objet $P\times G \longrightarrow P$.

Explicitement, cette isomorphie se traduit par :

$$pg = g^{-1}p \qquad\qquad p \in A(P)\ ,\ g \in A(G)$$

Ces deux isomorphismes réciproques seront notés de la même façon : $\mu \leadsto \mu^*$ (ce qui ne risque pas de prêter à confusion).

<u>Proposition 2</u> : La catégorie $\mathcal{C}^G$ est à produits finis.

<u>Preuve</u> : Le point de C^G est celui de C. Le produit $\lambda * \mu$ de deux G-objets $\lambda : P\times G \longrightarrow P$, $\nu : Q\times G \longrightarrow Q$ est obtenu en multipliant le morphisme diagonal $G \longrightarrow G\times G$ par l'identité de $P\times G$, ce qui donne un morphisme :

$$P\times Q\times G \longrightarrow P\times Q\times G\times G \simeq P\times G\times Q\times G \ ,$$

puis en composant ce morphisme composé avec $\lambda\times\mu$.

En clair, ceci donne pour tout objet A de C:

$$(p,g) = (pg,qg) \quad , \ p\in A(P), q\in A(Q), g\in A(G)$$

<u>Applications</u> :

1/ Pour tout objet B de C, le produit de $pr_1 : B\times G \longrightarrow B$ et de $\mu_d : G\times G \longrightarrow G$ dans C^G fait opérer G sur $B\times G$ suivant :

$$(b,g)h = (b,gh) \quad , \ b\in A(B) \ ; \ g,h\in A(G)$$

De tels G-objets seront dits élémentaires.

2/ A tout G-objet à droite $\lambda : P\times G \longrightarrow P$ et à tout G-objet à gauche $\nu : G\times F \longrightarrow F$ on associe canoniquement le G-objet à droite $\lambda * \nu^*$ suivant :

$$(p,f)g = (pg,g^{-1}f) \quad , \ p\in A(P), f\in A(F), \ g\in A(G)$$

C'est ce que nous appelerons le <u>produit tordu à droite</u> de λ et de ν.

A tout G-objet $\nu : P\times G \longrightarrow P$, on associe l'endomorphisme $\theta = (\nu, i\circ pr_2)$ de $P\times G$, i.e :

$$\theta(p,g) = (pg,g^{-1}) \quad , \ p\in A(P), \ g\in A(G)$$

Il est clair que θ est un automorphisme involutif et que :

$$\nu\circ\theta = pr_1 \quad , \quad pr_1\circ\theta = \nu \quad ;$$

c'est pourquoi nous dirons que θ est la <u>symétrie</u> de ν .

Soit $\nu : P\times G \longrightarrow P$ un G-objet à droite de C. Si, pour tout objet A du système A, le groupe abstrait $A(G)$ opère librement sur l'ensemble $A(P)$, il est clair que ceci reste vrai pour tout objet A de C. Dans ces conditions, nous dirons que ce G-objet est <u>libre</u>.

On remarquera que, pour tout objet libre $\nu : P\times G \longrightarrow P$ de $\mathcal{C}$, un endomorphisme $\phi : P\times G \longrightarrow P\times G$ de $\mathcal{C}$ tel que :

$$pr_1\circ\phi = pr_1 \quad , \qquad \nu\circ\phi = \nu$$

est toujours égal à l'identité de $P\times G$, ce qui permet d'affirmer que la symétrie θ de ν est alors déterminée par les égalités :

$$\nu\circ\theta = pr_1 \quad , \; pr_1\circ\theta = \nu$$

2. <u>Fibrés réguliers, fibrés principaux</u> :

Dans tout ce qui suit, G désignera (abusivement) un groupe de $\mathcal{C}$.

(2.1) <u>Définition</u> : Un <u>fibré</u> de $\mathcal{C}$ de <u>groupe structural G</u> (en abrégé : G-fibré) consiste en un morphisme ξ de $\mathcal{C}^G$ dont le but est un objet trivial de $\mathcal{C}^G$; ce but, noté $B(\xi)$, est appelé <u>la base de ξ</u> et la source de ξ, notée $E(\xi)$, est appelé <u>l'espace</u> de ξ.

On a donc, pour un G-fibré ξ et pour tout objet A de $\mathcal{C}$:

$$\xi(pg) = \xi(p) \quad , \qquad p\in A(E_\xi),\ g\in A(G)$$

et ceci caractérise les G-fibrés.

<u>Exemples</u> : Soit $\mu : G\times G \longrightarrow G$ un groupe et $\nu : P\times G \longrightarrow P$ un G-objet de $\mathcal{C}$; alors :

1/ ν est un G-fibré pour le G-objet produit $\nu * \mu_s^*$.

2/ pour tout objet B de $\mathcal{C}$, $pr_1 : B\times P \longrightarrow B$ est un G-fibré pour le G-objet $id_B\times\nu : B\times P\times G \longrightarrow B\times P$; pour $P = G$ et $\nu = \mu_d$, on retrouve le G-objet élémentaire $B\times G$, c'est pourquoi les G-<u>fibrés</u> $pr_1 : B\times G \longrightarrow B$ seront dits <u>élémentaires</u>.

Rappelons que la catégorie $Mor(\mathcal{C})$ des morphismes de $\mathcal{C}$ a pour morphismes les couples $(f,g) : \xi \longrightarrow \eta$ de morphismes de $\mathcal{C}$ tels que $\eta\circ f = g\circ\xi$; lorsqu'on se limite aux morphismes de $\mathcal{C}$ de but donné B et aux morphismes $(f,1_B) : \xi \longrightarrow \eta$ de $Mor(\mathcal{C})$, on retrouve la catégorie $\mathcal{C}_B$ des objets de $\mathcal{C}$ au-dessus de B.

<u>Définitions</u> : La catégorie des G-fibrés (resp. G-fibrés de base B) de $\mathcal{C}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}^G)$ (resp. $(\mathcal{C}^G)_B$) dont les objets sont les G-fibrés (resp. G-fibrés de base B).

Les G-<u>fibrés</u> de base B isomorphes au fibré élémentaire $B\times G \longrightarrow B$ sont dits <u>triviaux</u>. Notons que tout G-fibré isomorphe à un fibré élémentaire est trivial.

<u>Exemple</u> : La symétrie Θ d'un G-objet $\nu : P\times G \longrightarrow P$ est une isomorphie entre le fibré élémentaire $P\times G \longrightarrow P$ et le fibré ν (exemple 1).

<u>Théorème</u> : Soit B un objet de $\mathcal{C}$ et $\nu : P\times G \longrightarrow P$ un G-objet de $\mathcal{C}$; alors les B-morphismes f du G-fibré $B\times G \longrightarrow B$ au G-fibré $B\times P \longrightarrow B$ sont en correspondance biunivoque canonique avec les morphismes $s : B \longrightarrow P$ de $\mathcal{C}$.

<u>Preuve</u> : La recherche des morphismes f se ramène évidemment à celle des morphismes de G-objets $g : B\times G \longrightarrow P$; avec un tel g, on a le composé $B \xrightarrow{(pr_1,e)} B\times G \xrightarrow{g} P$. Inversement, pour tout morphisme $s : B \longrightarrow P$, le composé $B\times G \xrightarrow{s\times id_G} P\times G \xrightarrow{\nu} P$ est un morphisme de G-objets.

De la sorte, on définit la correspondance biunivoque en question par :

$$f(b,g) = (b,s(b)g) \qquad b \in A(B),\ g \in A(G)$$

et alors, pour P = G, on a les :

<u>Corollaire 1</u> : Le demi-groupe des B-endomorphismes du fibré élémentaire $B\times G \longrightarrow B$ est un groupe isomorphe à B(G).

<u>Corollaire 2</u> : Tout endomorphisme d'un fibré trivial au-dessus de sa base est un automorphisme.

(2.2) En présence du plongement canonique de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}^G$, il est tout naturel de se demander si on peut associer à un G-objet de $\mathcal{C}$ un objet de $\mathcal{C}$ de façon universelle ; plus précisément :

Définition : Un G-fibré ξ de $\mathcal{C}$ est dit régulier si, pour tout G-fibré η tel que $E(\eta) = E(\xi)$, il existe un morphisme unique $g : B(\xi) \longrightarrow B(\eta)$ de $\mathcal{C}$ tel que $g_\circ \xi = \eta$. Un G-objet de $\mathcal{C}$ est dit régulier si c'est l'espace d'un G-fibré régulier.

Proposition : Pour un G-objet $\nu : P \times G \longrightarrow P$ de $\mathcal{C}$, les G-fibrés réguliers de $\mathcal{C}$ d'espace P sont les conoyaux du couple $(pr_1, \nu) : P\times G \rightrightarrows P$.
(clair !).

Exemples :

1/ $G \longrightarrow pt$ est un G-fibré régulier (utiliser la contraction du groupe G).

2/ Dans $\mathcal{E}$ et $\mathcal{T}$ tout G-objet P est régulier car l'application canonique $P \longrightarrow P/G$ est un G-fibré régulier.

3/ Dans une catégorie de variétés différentielles un G-objet P est régulier si, et seulement si, le graphe de la relation d'équivalence définie sur P par G est une sous-variété de $P\times P$ et si la projection de ce graphe sur P est une submersion (1).

(2.3) Définition : Un G-fibré ξ de $\mathcal{C}$ est dit principal s'il est régulier et si le carré :

$$\begin{tikzcd}
E(\xi)\times G \arrow[r, "\nu"] \arrow[d] & E(\xi) \arrow[d, "\xi"] \\
E(\xi) \arrow[r, "\xi"] & B(\xi)
\end{tikzcd}$$

est cartésien (i.e représente un produit fibré).

Un G-objet de $\mathcal{C}$ est dit principal si c'est l'espace d'un G-fibré principal.

Exemples :

1/ $G \longrightarrow pt$ est un G-fibré principal.

2/ Dans $\mathcal{E}$, un G-fibré régulier $P \longrightarrow P/G$ est principal si, et seulement si, G opère librement sur P, i.e, pour tout couple $x \equiv y \bmod G$ de points de P, il existe un seul élément $\tau(x,y)$ de G tel que $x\tau(x,y) = y$.

3/ Dans $\mathcal{T}$, un G-fibré régulier $P \longrightarrow P/G$ est principal si, et seulement si, l'application $(p,g) \longmapsto (p,p.g)$ est un homéomorphisme de $P\times G$ sur le graphe de la relation d'équivalence définie sur P par G ; dans ces conditions, l'application orbitale $g \longmapsto gp$ de G dans P définie par un point p de P est un homéomorphisme de G sur Gp. Explicitement, dire que P est un G-objet principal signifie que l'application $(x,y) \longmapsto \tau(x,y)$ définie sur le graphe de G (ex. 2) est continue en tout point (x,x) ce qui a lieu notamment pour un espace homogène $G \longrightarrow G/H$. Lorsque G est discret, ceci équivaut à l'existence d'un recouvrement de P par des sections locales ouvertes de $P \longrightarrow P/G$, i.e, $P \longrightarrow P/G$ est un revêtement de P/G.

4/ Une G-variété différentielle est principale si, et seulement si, son espace topologique est principal et si ses applications orbitales sont des immersions.

Définition : On dit qu'un G-fibré $\xi : P \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}$ est sectionnable s'il existe un morphisme $s : B \longrightarrow P$ de $\mathcal{C}$ tel que $\xi \circ s = id_B$; un tel morphisme s est appelé une section de ξ.

Proposition 1 : Si un G-fibré sectionnable $\xi : P \longrightarrow B$ de loi $\nu : P\times G \longrightarrow P$ est tel que

$$\begin{tikzcd} P\times G \arrow[r, "\nu"] \arrow[d] & P \arrow[d, "\xi"] \\ P \arrow[r, "\xi"] & B \end{tikzcd}$$

soit cartésien, alors ce fibré est régulier.

(Preuve aisée confiée au lecteur).

Corollaire : Tout G-fibré trivial est principal.

Ce qui s'obtient, pour un fibré élémentaire de base B, à partir de l'exemple L qui précède.

<u>Théorème 2</u> : Les <u>sections</u> d'un G-fibré principal $\xi : P \longrightarrow B$ sont en correspondance biunivoque canonique avec les <u>G-morphismes de P à G</u>.

<u>Preuve</u> : Soit $s : B \longrightarrow P$ une telle section, i.e, $\xi_\circ s_\circ \xi = \xi$; on a alors un morphisme unique $(id_P, r^*) : P \longrightarrow P\times G$ tel que $\nu_\circ(id_P, r^*) = s_\circ\xi$, i.e, pour tout objet A de P :

$$p.r^*(p) = s_\circ\xi(p) \quad , \quad p \ A(P)$$

et un calcul rapide montre que :

$$r^*(pg) = g^{-1}r^*(p)$$

d'où, en posant $r = i_\circ r^*$:

$$r(pg) = r(p)g.$$

et ainsi :

$$p = (s_\circ\xi(p)).r(p) \quad , \quad p \in A(P)$$

Inversement, si on associe à tout G-morphisme $r : P \longrightarrow G$ l'endomorphisme $f = \nu_\circ(id_P, i_\circ r)$ de P, i.e :

$$p = f(p)r(p) \quad , \quad p \in A(P),$$

on a $\xi_\circ f = \xi$ et $f_\circ\nu = f_\circ pr_1$, ce qui donne un morphisme unique $s : B \longrightarrow P$ tel que $s_\circ\xi = f$ d'où $\xi_\circ s_\circ\xi = \xi$.

Le lecteur s'assurera que la correspondance entre s et r qui vient d'être décrite est biunivoque.

<u>Corollaire</u> : Un G-fibré principal est trivial si, et seulement si, il est sectionnable.

<u>Preuve</u> : En utilisant les fonctions A(.) qui, grâce à la proposition 1, conservent les fibrés principaux sectionnables, on se ramène au cas bien connu des fibrés d'ensembles.

Application :

Soit B et F deux objets de $\mathcal{C}$; l'ensemble $\mathrm{End}_B(B\times F)$ des endomorphismes de $B\times F \longrightarrow B$ au-dessus de B s'identifie canoniquement à l'ensemble $\mathcal{C}(B\times F, F)$, ce qui fait de $B \rightsquigarrow \mathrm{End}_B(B\times F)$ un cofoncteur. Il est aisé de voir que l'application $\mathrm{End}_B(B\times F) \longrightarrow \mathrm{End}_{B'}(B'\times F)$, qui correspond à un morphisme $f : B' \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}$, est définie par le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} B'\times F \arrow[r, "f\times id_F"] \arrow[d] & B\times F \arrow[d] \\ B' \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

ce qui fournit un sous-foncteur $B \rightsquigarrow \mathrm{Aut}_B(B\times F)$.

Théorème : Soit $\nu : G\times F \longrightarrow F$ un G-objet à gauche de $\mathcal{C}$; il existe alors un morphisme canonique

$$B(G) \longrightarrow \mathrm{Aut}_B(B\times F)$$

naturel en B.

Explicitement, à tout morphisme $s : B \longrightarrow G$ de $\mathcal{C}$ est associé un automorphisme unique t de $B\times F$ tel que :

$$t(b,f) = (b, s(b)f) \quad , \quad b \in A(B), f \in A(F)$$

Preuve : D'après ce qui précède, $id_B\times\nu : B\times G\times F \longrightarrow B\times F$ est un G-fibré principal pour le produit tordu à droite du G-objet élémentaire $B\times G$ et du G-objet F (2.1, ex.1) ; d'après (2.1, th) il correspond à un morphisme $s : B \longrightarrow G$ de $\mathcal{C}$ un élément u de $\mathrm{Aut}_B(B\times G)$ suivant

$$u(b,g) = (b, s(b)g) \quad , \quad b \in A(B), g \in A(G).$$

Mais comme le fibré $id_B\times\nu$ de base $B\times F$ est isomorphe au fibré trivial $B\times G\times F \longrightarrow B\times F$ (2.1, exemple précédant le théorème), le morphisme $u \times id_F$ est un endomorphisme du produit tordu précité ; par conséquent, il existe un morphisme unique $t : B\times F \longrightarrow B\times F$ tel que :

$$t\circ(id_B\times\nu) = (id_B\times\nu)\circ(u\times id_F) ,$$

on a donc, en clair, pour tout objet A de $\mathcal{C}$:

$$t(b,gf) = (b,s(b)gf) \quad , \quad b\in A(B),\ g\in A(G),\ f\in A(F)$$

Remarque : Ce morphisme fonctoriel $B(G) \longrightarrow Aut_B(B\times F)$ est injectif si, et seulement si, G opère fidèlement sur F, i.e, pour tout objet A de $\mathcal{C}$, le groupe abstrait A(G) opère fidèlement sur l'ensemble A(F).

BIBLIOGRAPHIE

(1) N. BOURBAKI : Variétés différentielles et analutiques (Fac. SC. Hermann 1967.

(2) HILTON et ECKMANN : Group-like structures in general categories (Math. annalen 1962.).

(3) D. HUSEMOLLER : Fiber Bundles (Mac-Graw Hill 1966).

(4) SEMINAIRE DE STRASBOURG : Groupes algèbriques (1965-1966).

II. LOCALISATION DES FIBRES DANS LES SITES A RECOLLEMENTS.

1. Recouvrements et recollements :

(1.1) Définition : Sur une catégorie C, un site (ou topologie de Grothendieck) consiste en la donnée, pour tout objet X de C, d'un ensemble de familles de morphismes de but X (appelées les recouvrements de X pour ce site) de sorte que :

1/ Pour tout objet X, l'identité de X constitue à elle seule un recouvrement de X.

2/ Pour tout recouvrement $U_i \longrightarrow X$ de X et pour tous recouvrements $U_{ji} \longrightarrow U_i$ des U_i, la famille $U_{ji} \longrightarrow U_i \longrightarrow X$ est un recouvrement de X.

3/ Pour tout recouvrement $U_i \longrightarrow X$ et pour tout morphisme $f : Y \longrightarrow X$, il existe un recouvrement unique $f^*(U_i) \longrightarrow Y$ et une famille unique de morphismes $f^*(U_i) \longrightarrow U_i$ tels que les carrés

$$\begin{array}{ccc} f^*(U_i) & \longrightarrow & U_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

soient cartésiens (le recouvrement $f^*(U_i) \longrightarrow Y$ est appelé l'image réciproque par f du recouvrement $U_i \longrightarrow X$).

4/ Pour tout recouvrement $\phi_i : U_i \longrightarrow X$, $i \in I$, et pour tout indice j de I, les morphismes $\phi_i^*(U_j) \longrightarrow U_j$, $i \in I$, forment un recouvrement de U_j.

Premières conséquences :

a) D'après 3/, deux recouvrements d'un même objet X sont identiques dès qu'ils sont isomorphes au-dessus de X. Pour deux morphismes $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, on a donc :

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

b) D'après 4/, on a pour tout recouvrement (U_i) de X :

$$\phi_i^*(U_j) = \phi_j^*(U_i) \qquad (= U_i \cap U_j)$$

Pour ce qui suit, nous supposerons de plus la condition suivante :

5/ Pour tout recouvrement (U_i), $i \in I$, d'un objet X, on a :

$$U_i \cap U_i = U_i \qquad , \qquad i \in I$$

ce qui suppose que les $U_i \rightarrow X$ sont des monomorphismes.

De plus, on ne réduit en rien la généralité de la théorie en supposant que :

6/ La réunion de deux recouvrements d'un même objet X est un recouvrement de X.

Exemples :

1) es espaces topologiques et leurs recouvrements ouverts forment un site avec $f^* = f^{-1}$; c'est cet exemple qui motive la terminologie précédente.

2) Dans l'exemple précédent, on peut remplacer les recouvrements ouverts par les recouvrements fermés localement finis.

(1.2) Soit I un ensemble. Il existe une application canonique de I×I dans $\mathcal{P}(I)$: celle qui à un couple (i,j) associe la paire $\{i,j\}$. Par cette application, l'ordre de $\mathcal{P}(I)$ induit sur I×I un préordre qui se traduit pour deux indices i et j par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(i,j) \arrow[r, shift left] \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & (j,i) \arrow[l, shift left] \arrow[d] \arrow[dl, dashed] \\
i & j
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales désignent des isomorphismes réciproques et les flèches en pointillé des morphismes composés (on identifie les éléments de I à ceux de la diagonale de I×I).

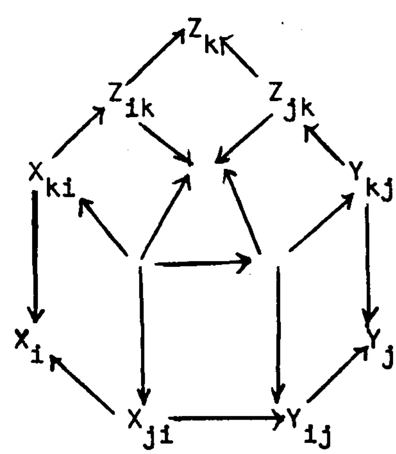
Dans tout ce qui suit, les ensembles I×I seront munis de ce préordre, ce qui permettra de parler des foncteurs $I \times I \longrightarrow \mathcal{C}$ sans autre précision. En clair, un tel foncteur consiste en la donnée, pour tout couple (i,j) de I×I, d'un morphisme $X_{ji} \longrightarrow X_i$, d'un morphisme $X_{ij} \longrightarrow X_j$ et de deux isomorphismes réciproques $X_{ji} \Longleftrightarrow X_{ij}$ qui, pour $i = j$, sont égaux à l'identité de X_i.

<u>Exemple</u> : Soit C un site. Pour tout recouvrement (U_i), $i \in I$, d'un objet X de C, on obtient un foncteur $I \times I \longrightarrow C$ en prenant $U_{ij} = U_i \cap U_j$ et pour isomorphismes $U_{ji} \rightleftarrows U_{ij}$ l'identité de $U_i \cap U_j$. Un tel foncteur sera appelé un <u>foncteur de recouvrement</u>.

<u>Définition</u> : un <u>atlas</u> au-dessus d'un objet X d'un site C consiste en la donnée d'un recouvrement $(U_i \longrightarrow X)$ et d'une famille d'isomorphismes $\phi_i : X_i \longrightarrow U_i$

Soit $\phi_i : X_i \longrightarrow U_i$ et $\psi_j : Y_j \longrightarrow V_j$ deux atlas au-dessus d'un même objet de C; dans ces conditions, on a, pour tout indice i, un recouvrement $X_{ji} \longrightarrow X_i$, $X_{ji} = \phi_i^*(U_i \cap V_j)$ et, pour tout indice j, un recouvrement $Y_{ji} \longrightarrow Y_i$, $Y_{ij} = \psi_j^*(U_i \cap V_j)$ et des isomorphismes réciproques $X_{ji} \rightleftarrows Y_{ij}$ appelés les <u>isomorphismes de transition</u> entre les deux atlas. Les isomorphismes de transition entre un atlas et lui-même sont appelés les isomorphismes de transition de cet atlas.

Avec un troisième atlas $(Z_k \longrightarrow W_k)$ au-dessus de cet objet de C, on a le diagramme de carrés cartésiens :



où le triangle central :

$$\begin{tikzcd}
 & Z_{jk} \cap Z_{ik} & \\
X_{ji} \cap X_{ki} \arrow[ur] \arrow[rr] & & Y_{ij} \cap Y_{kj} \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Ceci devient particulièrement édifiant lorsqu'on prend trois atlas égaux.

Définition : Un foncteur $(i,j) \rightsquigarrow X_{ji}$ de $I \times I$ dans C est dit de recollement s'il est astreint aux conditions suivantes :

(i) Pour tout indice i, la famille $X_{ji} \longrightarrow X_i$, $j \in I$, est un recouvrement de X_i.

(ii) Pour tout couple d'indices (i,j), le recouvrement $X_{ji} \cap X_{ki} \longrightarrow X_{ji}$, $k \in I$, est l'image réciproque par $X_{ji} \longrightarrow X_{ij}$ du recouvrement $X_{ij} \cap X_{kj} \longrightarrow X_{ij}$ $k \in I$.

(iii) Les isomorphismes

$$\begin{tikzcd} & X_{jk} \cap X_{ik} & \\ X_{ji} \cap X_{ki} \arrow[ur] \arrow[rr] & & X_{ij} \cap X_{kj} \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

induits par les isomorphismes $X_{ji} \longrightarrow X_{ij}$, $X_{kj} \longrightarrow X_{jk}$, $X_{ki} \longrightarrow X_{ik}$, forment un triangle commutatif.

D'après ce qui précède, il est clair qu'un atlas sur un objet X de C définit canoniquement un foncteur de recollement isomorphe à un foncteur de recouvrement.

Définition : On dit qu'un site C est à recollements si :

(i) tout foncteur de recollement de C est isomorphe à un foncteur de recouvrement.

(ii) tout objet de C est limite inductive de chacun de ses foncteurs de recouvrement.

Ainsi, dans un site à recollements, à tout foncteur de recollement $(i,j) \rightsquigarrow X_{ji}$ correspond un atlas $X_i \rightarrow U_i$ au-dessus d'un objet X ; on dit que cet objet X, limite inductive de ce foncteur, est obtenu par recollements des objets X_i au moyen des isomorphismes $X_{ji} \rightleftarrows X_{ij}$.

Soit Y un autre objet de $\mathcal{C}$ obtenu par recollements d'objets Y_i au moyen d'isomorphismes $Y_{ji} \rightleftarrows Y_{ij}$ et soit $f_{ji} : X_{ji} \longrightarrow Y_{ji}$ un morphisme du recollement $(i,j) \leadsto X_{ji}$ au recollement $(i,j) \leadsto Y_{ji}$, i.e. les f_{ji} sont des restrictions des f_i et sont compatibles avec les isomorphismes de transition ; alors, ce morphisme fonctoriel possède une limite inductive $f : X \longrightarrow Y$. Cette limite inductive est dite obtenue par recollement des f_i.

(1.3) Définition : Une sous-catégorie $\mathcal{M}$ d'un site à recollements $\mathcal{C}$ est dite localisante si :

(i) pour tout objet M de $\mathcal{M}$ les recouvrements de M ont leurs composantes dans $\mathcal{M}$.

(ii) un morphisme $M \to N$ de $\mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{M}$ dès que M appartient à $\mathcal{M}$ et que, pour un certain recouvrement (U_i) de M, les restrictions $U_i \to M \to N$ de $M \to N$ appartiennent à $\mathcal{M}$.

(iii) pour tout morphisme $f : M \to N$ de $\mathcal{M}$ et pour tout recouvrement (V_i) de N, les morphismes $f^*(V_i) \to V_i$ appartiennent à $\mathcal{M}$.

Définitions : Soit $\mathcal{M}$ une sous-catégorie localisante d'un site à recollements $\mathcal{C}$.

On dit qu'un atlas (X_i) au-dessus d'un objet X de $\mathcal{C}$ est modelé sur $\mathcal{M}$ (en abrégé : un $\mathcal{M}$-atlas) si les isomorphismes de transition de cet atlas appartiennent à $\mathcal{M}$.

On dit que deux $\mathcal{M}$-atlas sont compatibles si leur réunion est un $\mathcal{M}$-atlas, i.e. les morphismes de transition entre ces deux atlas appartiennent à $\mathcal{M}$.

Les hypothèses faites sur $\mathcal{M}$ permettent de voir que :

1) deux recouvrements d'un même objet M de $\mathcal{M}$ sont des $\mathcal{M}$-atlas compatibles.

2) la compatibilité des $\mathcal{M}$-atlas de $\mathcal{C}$ est une relation d'équivalence.

Définition : Une $\mathcal{M}$-variété $\tilde{X}$ de $\mathcal{C}$ consiste en la donnée d'un objet X de $\mathcal{C}$ et d'une classe de $\mathcal{M}$-atlas compatibles au-dessus de X.

<u>Exemple</u> : Un objet M de $\mathcal{M}$ et l'ensemble de ses recouvrements forment une variété (canonique) sur M.

Un morphisme $\tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$ de $\mathcal{M}$-variétés consiste en un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}$ tel que, pour tout $\mathcal{M}$-atlas $(N_j \to V_j)$, $j \in J$, représentant $\tilde{Y}$, il existe un $\mathcal{M}$-atlas $(M_i \to U_i)$, $i \in I$, représentant X, une application $\tau : I \longrightarrow J$ et une famille de morphismes $f_i : M_i \longrightarrow N_{\tau(i)}$ tels que les diagrammes :

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\wr"] & N_{\tau(i)} \arrow[d, dash, "\wr"] \\
U_i \arrow[d] & V_{\tau(i)} \arrow[d] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

soient commutatifs.

Avec cette définition, il est clair que :

1/ les $\mathcal{M}$-variétés de $\mathcal{C}$ et leurs morphismes forment une catégorie $\mathcal{C}(\mathcal{M})$.

2/ tout morphisme $M \longrightarrow N$ de $\mathcal{M}$ est un morphisme des variétés canoniquement associées à M et N et le foncteur de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ ainsi défini est un plongement, ce qui permet de faire de $\mathcal{M}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}(\mathcal{M})$.

Soit $\tilde{X}$ une $\mathcal{M}$-variété sur un objet X de $\mathcal{C}$ et (U_i) un recouvrement de X ; alors les atlas de $\tilde{X}$ définissent sur chacun des U_i des $\mathcal{M}$-atlas compatibles et ainsi, la variété $\tilde{X}$ induit canoniquement des variétés $\tilde{U}_i$ telles que les $U_i \to X$ soient des morphismes de variétés. De la sorte, les recouvrements de $\mathcal{C}$ font de $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ un site et :

<u>Théorème 1</u> : Toute $\mathcal{M}$-variété de $\mathcal{C}$ est obtenue par recollements d'objets de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{M})$.

<u>Théorème 2</u> : Le site $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ est à recollements.

Pour montrer, e.g. que tout foncteur de recollement $(ij) \rightsquigarrow Y_{ji}$ de $C(M)$ est isomorphe à un foncteur de recouvrement, on commence par recoller les objets X_i de C sous-jacents aux $\tilde{X}_i$, ce qui donne un objet X de C et un recouvrement (U_i) de X ; puis, en prenant pour chaque indice i, un M-atlas $V_{\lambda i}$, $\lambda \in L_i$, représentant $\tilde{X}_i$ (ce qui donne un recouvrement $U_{\lambda i}$ de U_i) on forme au-dessus de X un atlas $V_{\lambda i} \xrightarrow{\sim} U_{\lambda i}$ dont on montre qu'il est modelé sur M.

2. <u>G-fibrés localement triviaux</u> :

Dans tout ce qui suit C désignera un site à produits finis et à recollements et G sera un groupe de C.

(2.1) Soit $\nu : P \times G \to P$ un G-objet de C et $\xi : P \to B$ un G-fibré pour ν, i.e. $\xi \circ \nu = \xi \circ pr_1$ et soit (B_i) un recouvrement de B. Il existe alors, pour chaque indice i, un G-objet $\nu_i : P_i \times G \to P_i$, $P_i = \xi^*(B_i)$, tel que la restriction $\xi_i : P_i \to B_i$ de ξ soit un G-fibré et que $P_i \to P$ soit un G-morphisme. Les symétries de ν_i et ν constituent une isomorphie des diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} P_i \times G & \longrightarrow & P \times G \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_i & \longrightarrow & P \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} P_i \times G & \longrightarrow & P \times G \\ {\scriptstyle \nu_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu} \\ P_i & \longrightarrow & P \end{array}$$

qui sont donc tous deux cartésiens et ainsi, le morphisme ν s'obtient par recollement des morphismes ν_i. Par conséquent, <u>si tous les</u> ξ_i <u>sont réguliers</u>, ξ l'est aussi et le carré :

$$\begin{array}{ccc} P \times G & \xrightarrow{\nu} & P \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \xi} \\ P & \xrightarrow{\xi} & B \end{array}$$

est cartésien si, et seulement si, les carrés

$$\begin{tikzcd} P_i \times G \arrow[r, "\nu_i"] \arrow[d] & P_i \arrow[d, "\xi_i"] \\ P_i \arrow[r, "\xi_i"] & B_i \end{tikzcd}$$

sont cartésiens.

Définition 1 : on dit qu'un morphisme $f : A \to B$ de $\mathcal{C}$ est localement sectionnable s'il existe un recouvrement (B_i) de B tel que les restrictions $f_i : f^*(B_i) \longrightarrow B_i$ de f soient sectionnables.

Définition 2 : on dit qu'un G-fibré $\xi : P \to B$ de $\mathcal{C}$ est localement trivial s'il existe un recouvrement (B_i) de B tel que les restrictions $\xi_i : \xi^*(B_i) \to B_i$ soient des G-fibrés triviaux ; un tel recouvrement (B_i) est dit **trivialisant** pour le fibré ξ.

De l'étude faite au début de ce paragraphe, on déduit que :

Théorème 1 : Il y a identité entre les G-fibrés localement triviaux de $\mathcal{C}$ et les G-fibrés principaux de $\mathcal{C}$ localement sectionnables.

Exemple : Dans un site de variétés différentiables, tout G-fibré principal est localement trivial.

Soit $\xi : P \to B$ et $\eta : Q \to B$ deux G-fibrés localement triviaux. On peut disposer alors d'un recouvrement (B_i) de B qui trivialise à la fois ξ et η et il est clair que tout morphisme $f : P \longrightarrow Q$ de ξ à η au-dessus de B s'obtient par recollement des morphismes $f_i : \xi^*(B_i) \longrightarrow \eta^*(B_i)$ induits par f ; or, on sait (I) que ces f_i sont des isomorphismes ; comme les inverses f_i^{-1} sont compatibles a avec les recouvrements $\xi^*(B_i) \to P$ et $\eta^*(B_i) \to Q$, on voit que :

Théorème 2 : Tout morphisme de deux G-fibrés localement triviaux de base B est un isomorphisme.

(2.2) Soit $\xi : P \longrightarrow B$ un G-fibré localement trivial et $\mathcal{B} = (B_i)$, $i \in I$, un recouvrement de B qui trivialise ξ ; il existe donc, pour chaque indice i, un isomorphisme $\alpha_i : \xi^*(B_i) \longrightarrow B_i \times G$ de G-fibrés de base B_i (une telle famille (α_i) est appelée une trivialisation de ξ). Ainsi, pour tout couple (i,j) d'indices de I, on a un automorphisme :

$$\alpha_{ji} = \alpha_j \circ \alpha_i^{-1} : (B_i \cap B_j) \times G \longrightarrow (B_i \cap B_j) \times G$$

de G-fibrés de base $B_i \cap B_j$, ce qui donne d'après I un morphisme $\gamma_{ji} : B_i \cap B_j \longrightarrow G$ tel que, pour tout objet A de $\mathcal{C}$:

$$\text{(1)} \qquad \alpha_{ji}(b,g) = (b, \gamma_{ji}(b)g) \qquad b \in A(B_i \cap B_j),\ g \in A(G)$$

Pour tout triple (i,j,k) d'indices de I, les restrictions à $B_i \cap B_j \cap B_k$ des morphismes γ_{ji} , γ_{kj} , γ_{ki} satisfont dans le groupe $\mathcal{C}(B_i \cap B_j \cap B_k, G)$ à la condition:

$$\text{(2)} \qquad \gamma_{kj} \cdot \gamma_{ji} = \gamma_{ki}$$

<u>Définition</u> : De façon générale, toute famille de morphismes $\gamma_{ji} : B_i \cap B_j \to G$ astreinte à la condition (2) est appelée un <u>cocycle</u> de B à valeurs dans G relativement au recouvrement $\mathcal{B} = (B_i)$; l'ensemble de ces cycles est noté $Z^1(\mathcal{B},G)$.

Nous venons de voir que toute trivialisation d'un G-fibré localement trivial $\xi : P \longrightarrow B$ détermine un cocycle. Inversement, tout cocycle $\gamma_{ji} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$ relatif à un recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)$ de B donne un foncteur de recollement $(i,j) \rightsquigarrow (U_i \cap U_j) \times G$ dont les isomorphismes de transition α_{ji} sont définis par la formule (1) ; en recollant ce foncteur, on obtient un G-fibré de base B trivialisé par $\mathcal{U}$ et défini à une isomorphie près.

Si $Is(\mathcal{U},G)$ désigne l'ensemble des classes d'isomorphie des G-fibrés de base B localement triviaux de $\mathcal{C}$, on a donc une surjection canonique :

$$Z^1(\mathcal{U},G) \longrightarrow Is(\mathcal{U},G)$$

Deux cocycles γ et γ' de $Z^1(\mathcal{U},G)$ représentent la même classe d'isomorphie si, et seulement si, il existe des isomorphismes $\lambda_i : U_i\times G \longrightarrow U_i\times G$ de G-fibrés de base U_i compatibles sur les $(U_i \cap U_j)\times G$. En exprimant ces morphismes sous la forme :

$$\lambda_i(b,g) = (b,\sigma_i(b)g) \qquad b\in A(U_i)\ ,\ g\in A(G)$$

où les $\sigma_i : U_i \longrightarrow G$ sont canoniquement associés aux λ_i (cf. I), cette compatibilité s'exprime :

$$(3) \qquad \gamma_{ji}\circ\sigma_i = \sigma_j\circ\gamma'_{ji}$$

dans chaque groupe $C(U_i\cap U_j,G)$.

<u>Définition</u> : Deux cocycles relatifs à $\mathcal{U}$ sont dits <u>cohomologues</u> s'il existe des morphismes $\sigma_i : U_i \longrightarrow G$ qui satisfont à la condition (3).

Ainsi, la cohomologie des cocycles relatifs à $\mathcal{U}$ est une relation d'équivalence et l'ensemble $H^1(\mathcal{U},G)$ des classes de cohomologie de ces cocycles est canoniquement isomorphe à $Is(\mathcal{U},G)$:

$$H^1(\mathcal{U},G) \xrightarrow{\sim} Is(\mathcal{U},G)$$

<u>changement de recouvrement</u> :

Soit $\mathcal{V} = (V_j)$, $j\in J$, un recouvrement de B plus fin que le recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)$, $i\in I$, i.e.

il existe une application $\tau : J \longrightarrow I$ telle que :

$$V_j \subset U_{\tau(j)} \qquad , j\in J$$

D'un cocycle de $Z^1(\mathcal{U},G)$ on déduit un cocycle de $Z^1(\mathcal{V},G)$ par composition :

$$V_j\cap V_{j'} \hookrightarrow U_{\tau(j)}\cap U_{\tau(j')} \longrightarrow G$$

et ceci préserve la cohomologie, d'où une application :

$$\tau_* : H^1(\mathcal{U},G) \longrightarrow H^1(\mathcal{V},G)$$

compatible avec les isomorphismes canoniques $H^1(\mathcal{U},G) \xrightarrow{\sim} Is(\mathcal{U},G)$.

<u>Proposition</u> : τ_* ne dépend que des recouvrements $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$.

En effet, pour deux raffinements τ_1, τ_2 : $J \longrightarrow I$ et pour un cocycle γ de $H^1(\mathcal{U},G)$, on a :

$$\gamma_{\tau_1(j),\tau_1(j')} \cdot \gamma_{\tau_1(j'),\tau_2(j')} = \gamma_{\tau_1(j),\tau_2(j)} \cdot \gamma_{\tau_2(j),\tau_2(j')}$$

i.e. $\tau_1(\gamma)$ et $\tau_2(\gamma)$ sont cohomologues dans $Z^1(\mathcal{U},G)$.

Soit Is(B,G) l'ensemble des classes d'isomorphie de G-fibrés localement triviaux de base B ; soit $H^1(B,G)$ la limite inductive des $H^1(\mathcal{U},G)$ suivant le préordre de finesse des recouvrements de B. En conclusion de ce qui vient d'être fait, on a un isomorphisme canonique :

$$H^1(B,G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Is}(B,G)$$

(2.3) <u>Le cofoncteur $B \rightsquigarrow H^1(B,G)$</u>

Soit $f : B' \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{U} = (U_i)$ un recouvrement de B. En associant à tout cocycle γ de B relatif à $\mathcal{U}$ la famille de morphismes :

$$f^*(U_i) \cap f^*(U_j) = f^*(U_i \cap U_j) \longrightarrow U_i \cap U_j \xrightarrow{\gamma} G \text{ ,}$$

on définit une application $\gamma \longmapsto f^*(\gamma)$ de $Z^1(\mathcal{U},G)$ dans $Z^1(f^*(\mathcal{U}),G)$ compatible avec la cohomologie, d'où un morphisme :

$$f^* : H^1(B,G) \longrightarrow H^1(B',G)$$

Ceci donne le cofoncteur $H^1(.,G)$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{E}$.

<u>Interprétation géométrique</u> :

Si $\xi : P \longrightarrow B$ est un G-fibré localement trivial, l'image par f^* de la classe d'isomorphie de ξ est représentée par les G-fibrés localement triviaux $\xi' : P \longrightarrow B'$ obtenus par recollement des diagrammes cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
f^*(U_i \cap U_j) \times G \arrow[r, "f \times id_G"] \arrow[d] & (U_i \cap U_j) \times G \arrow[d] \\
f^*(U_i \cap U_j) \arrow[r, "f"] & U_i \cap U_j
\end{tikzcd}$$

au moyen des automorphismes des $(U_i \cap U_j) \times G$ (resp. $f^*(U_i \cap U_j) \times G$ au-dessus des $U_i \cap U_j$ (resp. $f^*(U_i \cap U_j)$) définis canoniquement par un cocycle $U_i \cap U_j \longrightarrow G$ représentant ξ.

A la limite, on a donc des carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccc} P' & \longrightarrow & P \\ {\scriptstyle \xi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \xi} \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Ces fibrés isomorphes ξ' sont dits obtenus à partir de ξ par le changement de base $f : B' \longrightarrow B$.

Corollaire : Soit $\xi : P \longrightarrow B$ un G-fibré localement trivial. Pour tout objet C de $\mathcal{C}$, $id_C \times \xi : C\times P \longrightarrow C\times B$ est un G-fibré localement trivial lorsqu'on fait opérer G trivialement sur C , i.e, lorsqu'on définit le G-objet $C\times P$ par :

$$(c,p)g = (c,pg) \quad ; \quad c \in A(C),\ p \in A(P),\ g \in A(G)$$

(2.4) Le foncteur $G \rightsquigarrow H^1(B,G)$

Définition : Soit F et G deux groupes de $\mathcal{C}$. Un morphisme de F à G consiste en un morphisme $f : F \longrightarrow G$ de $\mathcal{C}$ tel que, pour tout objet A de $\mathcal{C}$, l'application $A(f) : A(F) \longrightarrow A(G)$ soit un morphisme de groupes de $\mathcal{E}$. De la sorte, les groupes de $\mathcal{C}$ s'organisent en une catégorie : $Grp(\mathcal{C})$.

Soit B un objet de $\mathcal{C}$ et $f : F \longrightarrow G$ un morphisme de groupes de $\mathcal{C}$. En composant avec f un cocycle $U_i \cap U_j \longrightarrow F$ relatif à un recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)$ de B, on obtient un cocycle $U_i \cap U_j \longrightarrow G$ et l'application $Z^1(\mathcal{U},F) \longrightarrow Z^1(\mathcal{U},G)$ ainsi définie est compatible vec la cohomologie des cocycles, ce qui fournit une application $H^1(\mathcal{U},F) \longrightarrow H^1(\mathcal{U},G)$ dont on vérifie qu'elle est naturelle en $\mathcal{U}$ lorsque $\mathcal{U}$ décrit l'ensemble des recouvrements de B préordonné par la relation de finesse. De la sorte, on obtient une application $f_* : H^1(B,F) \longrightarrow H^1(B,G)$ d'où un foncteur de $Grp(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{E}$.

Les G-fibrés dont les classes d'isomorphie sont dans l'image de f_* sont dits obtenus à partir des F-fibrés par élargissement du groupe structural au moyen de f. Inversement, les F-fibrés dont les classes d'isomorphie sont dans l'image réciproque par f_* de la classe d'isomorphie d'un G-fibré ξ sont dits obtenus à partir de ξ par réduction du groupe structural au moyen de f.

<u>Proposition 1</u> : Soit $\phi : H \to G$ un morphisme de groupes de $\mathcal{C}$. Un G-fibré localement trivial $\xi : P \to B$ est réductible à un H-fibré localement trivial $\eta : Q \to B$ si, et seulement si, il existe un cocycle $h_{ij} : U_i \cap U_j \to H$ tel que $(\phi_\circ h_{ij})$ représente ξ.

<u>Aspect géométrique de la réduction</u> :

Soit $\phi : H \to G$ un morphisme de groupes de $\mathcal{C}$. Tout G-objet $\mu : P\times G \to P$ de $\mathcal{C}$ devient par composition un H-objet $P\times H \xrightarrow{id_P \times \phi} P\times G \xrightarrow{\mu} P$

Soit P un G-objet de Q un H-objet. Un morphisme de Q à P consiste en un morphisme $f : Q \to P$ de $\mathcal{C}$, qui est un H-morphisme lorsqu'on considère P comme un H-objet; en clair, ceci veut dire que, pour tout objet A de $\mathcal{C}$:

$$f(qh) = f(q)\phi(h) \qquad , \qquad q \in A(Q) \ , \quad h \in A(H)$$

Ceci dit, on a le :

<u>Théorème 2</u> : Un G-fibré localement trivial $\xi : P \to B$ est réductible à un H-fibré localement trivial $\eta : Q \to B$ si, et seulement si, il existe un morphisme f du H-objet Q au G-objet P tel que : $\xi_\circ f = \eta$.

La construction du couple (η,f) s'obtient par recollement des diagrammes

$$\begin{tikzcd} U_{ij}\times H \arrow[rr, "id_{i,j}\times\phi"] \arrow[dr] & & U_{ij}\times G \arrow[dl] \\ & U_{ij} & \end{tikzcd} \qquad , \quad U_{ij} = U_i \cap U_j$$

au moyen des h_{ij} et $g_{ij} = \phi_\circ h_{ij}$ (cf. prop. 1)

3. <u>Fibrés de Steenrod</u> :

(3.1) Soit B un objet de $\mathcal{C}$, G un groupe de $\mathcal{C}$ et F un G-objet à gauche. On sait (ch.I) que tout morphisme $g : B \to G$ définit canoniquement un automorphisme g^F de E = au-dessus de B suivant :

$$g^F(b,f) = (b,g(b)f) \qquad ; \qquad b\in A(B),\ f\in A(F)$$

et l'application $g \mapsto g^F$ est naturelle en B.

Pour $F = G$, cet automorphisme est un automorphisme du G-fibré trivial $B\times G \longrightarrow N$ et tous les automorphismes de ce G-fibré de base B sont obtenus de cette façon.

Les $g^F : B\times F \to B\times F$, $g \in B(G)$, seront appelés les automorphismes de Steenrod de $B\times F$.

<u>Définitions</u> : Soit F un G-objet à gauche de $\mathcal{C}$. Un morphisme $\xi : E \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}$ sera appelé un <u>fibré de Steenrod</u> de fibre F s'il existe un recouvrement (U_i) de B et, pour chaque indice i, un isomorphisme $\alpha_i : \xi^*(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i\times F$ au-dessus de U_i de telle sorte que, les morphismes :

$$\alpha_j \circ \alpha_i^{-1} : (U_i \cap U_j)\times F \longrightarrow (U_i \cap U_j)\times F$$

soient des automorphismes de Steenrod.

Un tel couple $(U_i),(\alpha_i)$ sera appelé une trivialisation de ξ.

Soit $\xi : E \to B$ et $\xi' : E' \to B$ deux fibrés de Steenrod de même fibre F. Un morphisme $f : E \to E'$ de $\mathcal{C}$ sera dit de steenrod si $\xi' \circ f = \xi$ et s'il existe une trivialisation $(U_i),(\alpha_i)$ de ξ, une trivialisation $(U_i),(\alpha'_i)$ de ξ' telles que, pour tout indice i :

$$U_i\times F \xrightarrow{\alpha_i^{-1}} \xi^*(U_i) \xrightarrow{f} \xi'^*(U_i) \xrightarrow{\alpha'_i} U_i\times F$$

soit un automorphisme de Steenrod.

Il est clair que les morphismes de Steenrod des fibrés de Steenrod de base B et de fibre F forment une catégorie d'isomorphismes. Cette catégorie sera notée $H^1(B,F)$.

<u>Théorème 1</u> (Adjonction d'une fibre).

> Soit B un objet de $\mathcal{C}$, G un groupe de $\mathcal{C}$, $\nu : G\times F \to F$ un G-objet à gauche. A toute classe ξ de $H^1(B,G)$ est associé de façon canonique une classe ξ^F de $H^1(B,F)$. Si G opère fidèlement sur F, on obtient alors une équivalence entre la catégorie des G-fibrés localement triviaux de base B et la catégorie des F-fibrés de Steenrod de base B. Pour $F = G$, cette équivalence est une identité.

<u>Preuve</u> : Si un cocycle $g_{ij} : U_{ij} \longrightarrow G$ ($U_{ij} = U_i \cap U_j$) représente un G-fibré localement trivial $\xi : P \longrightarrow B$, on a dans C^G les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
U_{ij} \times G \arrow[r, "g^G_{ij}"] & U_{ij} \times G \\
U_{ij} \quad G \times F^{*} \arrow[u] \arrow[r, "g^G_{ij} \times id_F"] \arrow[d, "id \times \nu"'] & U_{ij} \quad G \times F^{*} \arrow[u] \arrow[d, "id \times \nu"] \\
U_{ij} \times F \arrow[r, "g^F_{ij}"] & U_{ij} \times F
\end{tikzcd}$$

(G opère trivialement sur $U_{ij} \times F$).

La naturalité de $g \longmapsto g^F$ permet de recoller ces diagrammes et leurs projections sur les U_{ij} suivant un diagramme

$$\begin{tikzcd}
P \times F^{*} \arrow[r] \arrow[d, "\eta"'] & P \arrow[d, "\xi"] \\
P^F \arrow[r, "\xi^F"] & B
\end{tikzcd}$$

où η est un G-fibré localement trivial dont l'espace $P \times F^{*}$ est le produit tordu à droite de P et de F (cf. I)

Ce diagramme est un carré cartésien dans C^G car :

$$\begin{tikzcd}
G \times F^{*} \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "\nu"'] & G \\
F &
\end{tikzcd}$$

représente dans C^G le produit du G-objet à droite G et du G-objet trivial F.

Si G opère fidèlement sur F, toute trivialisation (U_i), (α_i) d'un F-fibré de Steenrod de base B détermine un cocycle $U_i \cap U_j \longrightarrow G$. d'où la seconde assertion. La troisième assertion résulte du fait évident que, pour F = G, le diagramme cartésien précédent est identique à

$$\begin{array}{ccc} P\times G & \longrightarrow & P \\ \mu \downarrow & & \downarrow \xi \\ P & \xrightarrow{\xi} & B \end{array}$$

Remarque : ξ^F peut être considéré comme le morphisme de $\mathcal{C}$ universellement associé au morphisme $pr_1 : P\times F^* \longrightarrow P$ de $\mathcal{C}^G$, ce qui permet de montrer que :

Théorème 2 : Les sections du fibré de Steenrod $\xi^F : P^F \longrightarrow B$ obtenu par adjonction de la fibre F à un G-fibré localement trivial $\xi : P \longrightarrow B$ sont en correspondance biunivoque canonique avec les G-morphismes de P à F^*.

Pour une section σ de ξ^F et pour un morphisme $s : P \longrightarrow F^*$ cette correspondance est définie par :

$$\sigma \circ \xi = \eta \circ (id_P, s)$$

i.e, en posant pour tout objet A de $\mathcal{C}$:

$$pf = \eta \circ (p,f) \qquad , \qquad p \in A(P), \quad f \in A(F)$$

par

$$\sigma \circ \xi(p) = p.s(p)$$

Remarque : Soit $H \longrightarrow G$ un morphisme de groupes de $\mathcal{C}$, $\xi : P \longrightarrow B$ un G-fibré localement trivial de $\mathcal{C}$ réductible à un H-fibré localement trivial $\eta : Q \to B$; dans ces conditions, l'adjonction à ξ d'un G-objet à gauche F donne, à une isomorphie près, le même résultat que l'adjonction à η de la fibre F considérée comme un H-objet à gauche.

(3.2) Définitions : Soit $f : H \longrightarrow G$ un morphisme de groupes de $\mathcal{C}$. Si f est un monomorphisme, on dit que H est un sous-groupe de G au moyen de f ; dans ces conditions, H opère librement sur G.

On dit qu'un sous-groupe H est régulier si G est un H-objet régulier, ce qui donne un H-fibré régulier $G \longrightarrow G/H$. Si ce fibré est principal, on dit que H est un sous-groupe principal de G.

Exemples : Dans $\mathcal{E}$, tout sous-groupe H d'un groupe G est principal. Dans $\mathcal{T}$, un sous-groupe H d'un groupe G est principal si, et seulement si, c'est un sous-groupe topologique de G.

De ceci, il résulte que, dans une catégorie de variétés différentielles, un sous-groupe H d'un groupe G est principal si, et seulement si, c'est une sous-variété de G ; H est alors un sous-groupe fermé de G..

On dit qu'un sous-groupe H d'un groupe G de $\mathcal{C}$ est trivialisant s'il est régulier et si le H fibré $G \longrightarrow G/H$ est localement trivial, ce qui revient à dire que H est un sous-groupe principal de G et que $G \longrightarrow G/H$ est localement sectionnable. Ceci a toujours lieu pour les sous-groupes principaux des groupes d'une catégorie de variétés différentielles.

Soit H un sous-groupe trivialisant d'un groupe G de $\mathcal{C}$; on a donc un H-fibré localement trivial $G \longrightarrow G/H$ qui, multiplié à gauche par le H-objet trivial G, fournit une H-fibré localement trivial $G\times G \longrightarrow G\times G/H$ et, comme la multiplication μ de G est un morphisme du H-objet ainsi obtenu au H-objet G, on a un diagramme canonique commutatif :

$$\begin{tikzcd} G\times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d] & G \arrow[d] \\ G\times G/H \arrow[r, "\bar{\mu}"] & G/H \end{tikzcd}$$

qui fait de G/H un G-objet à gauche canonique :

Théorème 1 : Soit $\xi : P \longrightarrow P/G$ un G-fibré localement trivial de $\mathcal{C}$ et H un sous-groupe trivialisant de G : dans ces conditions, P est un H-objet régulier, le H-fibré $\eta : P \longrightarrow P/H$ est localement trivial et sa base P/H s'obtient par adjonction à ξ de la fibre G/H.

<u>Preuve</u> : Soit $g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$ un cocycle représentant ξ ; on a alors des diagrammes commutatifs canoniques :

$$\begin{tikzcd} & U_i\times G \arrow[dl] \arrow[d] \\ U_i\times G/H & U_i \arrow[l] \end{tikzcd}$$

et des morphismes de Steenrod. :

$$U_{ij}\times G \longrightarrow U_{ij}\times G \quad , \quad U_{ij}\times G/H \longrightarrow U_{ij}\times G/H \qquad (U_{ij} = U_i \cap U_j)$$

dont il est aisé de montrer la compatibilité avec les morphismes canoniques $U_{ij}\times G \longrightarrow U_{ij}\times G/H$.

On peut donc recoller les H-fibrés localement triviaux $U_i\times G \longrightarrow U_i\times G/H$ au moyen de ces automorphismes, ce qui donne un H-fibré localement trivial $P \longrightarrow P/H$ et un diagramme commutatif canonique :

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl] \arrow[d] \\ P/H \arrow[r] & P/G \end{tikzcd}$$

<u>Théorème 2 (Ereshmann)</u> : Soit $\xi : P \longrightarrow P/G$ un G-fibré localement trivial de $\mathcal{C}$ et H un sous-groupe trivialisant de G. Pour que le groupe structural G de ξ soit réductible à H, il faut et il suffit que le morphisme canonique $P/H \longrightarrow P/G$ soit sectionnable.

<u>Preuve</u> : Si $\xi : P \longrightarrow P/G$ est réductible à un H-fibré $\eta : Q \longrightarrow P/G$, on a un H-morphisme $Q \longrightarrow P$ au-dessus de P/G, ce qui permet d'avoir un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[d] \\ P/G \arrow[r] & P/H \end{tikzcd}$$

d'où le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & P \arrow[dl] \arrow[dd] \\ & P/G & \\ P/G \arrow[rr] & & P/H \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

et, puisque $Q \longrightarrow P/G$ est un épimorphisme, il s'ensuit que le composé :

$$P/G \longrightarrow P/H \longrightarrow P/G.$$

est égal à l'identité de P/G.

Réciproquement, si on dispose d'une section $P/G \longrightarrow P/H$ du morphisme $P/H \longrightarrow P/G$, on a un carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[d] \\ P/G \arrow[r] & P/H \end{tikzcd}$$

où $Q \longrightarrow P/G$ est un H-fibré localement trivial et $Q \rightarrow P$ un H-morphisme d'où, par composition avec $P/H \longrightarrow P/G$, un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[rr] \arrow[dr] & & P \arrow[dl] \\ & P/G & \end{tikzcd}$$

4. <u>Fibrés vectoriels</u> :

(4.1) Dans tout ce qui suit, nous supposerons l'existence d'un foncteur canonique fidèle du site $\mathcal{C}$ à recollements dans la catégorie $\mathcal{T}$ (le foncteur d'oubli) qui préserve les produits de $\mathcal{C}$, ~~qui transforme~~ les recouvrements de $\mathcal{C}$ en des recouvrements ouverts de $\mathcal{T}$ et préserve les images réciproques de ces recouvrements, ce qui permettra de considérerles objets de $\mathcal{C}$ comme des espaces topologiques et les morphismes de $\mathcal{C}$ comme des applications continues. Nous supposerons de plus que, pour tout objet X de $\mathcal{C}$ un recouvrement ouvert de X dans $\mathcal{T}$ est toujours sous-jacent à un recouvrement de X dans $\mathcal{C}$ bien déterminé. Enfin, pour tout couple (X,Y) d'objets de $\mathcal{C}$, les applications constantes $X \longrightarrow Y$ seront supposée être des morphismes de $\mathcal{C}$.

Les sites de variétés différentielles satisfont à toutes ces conditions.

Une C-catégorie consistera en la donnée d'une catégorie L dont le bifoncteur Hom : $L^\circ \times L \longrightarrow E$ (qu'il est commode de noter L.) se factorise par le foncteur d'oubli de C dans E, ce qui revient, pour tout couple (E,F) d'objets de L, à faire de L(E,F) un objet de C tel que, pour tout triple (E,F,G) d'objets de L, l'application $(f,g) \longmapsto g_\circ f$ de $L(E,F) \times L(F,G)$ dans $L(E,G)$ soit un morphisme de C. Nous supposerons de plus que, pour tout objet E de L, le groupe Aut(E) des automorphismes de E est un groupe de C dont l'espace topologique est un ouvert de L(E,E).

Exemple : C'est ce qui se passe pour une catégorie de variétés différentielles C et pour la catégorie L des espaces de Banach sur lesquels ces variétés sont modelées.

Définition : Soit L une C-catégorie. Un L-atlas au-dessus d'un objet X de C consiste en la donnée :

(i) d'un recouvrement (U_i), $i \in I$, de X et d'une famille (E_i), $i \in I$, d'objets de L (les couples (U_i, E_i) seront appelés les cartes de cet atlas).

(ii) d'une famille (F_x), $x \in X$, d'objets de L (les fibres de l'atlas) et d'une famille d'isomorphismes de L :

$$\tau_{xi} : E_i \xrightarrow{\sim} F_x \quad , \ i \in I, \quad x \in U_i$$

telle que les applications :

$$e_{ji} : U_i \cap U_j \longrightarrow L(E_i, E_j) \quad , \ i, \ j \in I$$

définies par

$$e_{ji}(x) = \tau_{xj}^{-1} \circ \tau_{xi} \qquad , \qquad x \in U_i \cap U_j$$

soient des morphismes de C.

Ces morphismes e_{ji} qu'on appelle les morphismes de transition de l'atlas considéré satisfont à :

$$e_{ii}(x) = \mathrm{id}_{E_i} \qquad , \quad x \in U_i$$

$$e_{kj}(x) \circ e_{ji}(x) = e_{ki}(x) \qquad , \ x \in U_i \cap U_j \cap U_k .$$

Deux L-atlas au-dessus d'un objet X de C :

$$\alpha = (U_i, E_i, F_x, \tau_{xi}) \quad , \quad \beta = (U'_\lambda \quad E'_\lambda \; , \; F'_x \; , \; \tau'_{x\lambda})$$

sont dits équivalents si

(i) $F_x = F'_x \qquad , \qquad x \in X.$

(ii) les applications

$$\theta_{\lambda i} : U_i \cap U'_\lambda \longrightarrow L(E_i, E'_\lambda)$$

définies par :

$$\theta_{\lambda i}(x) = \tau'^{-1}_{x\lambda} \circ \tau_{xi} \qquad , \qquad x \in U_i \cap U'_\lambda .$$

sont des morphismes de C.

Un <u>L-fibré de base X</u> consiste en une classe de L-atlas équivalents au-dessus de X.

<u>Remarque</u> : Soit α un L-atlas au-dessus d'un recouvrement (U_i) de X. Pour tout recouvrement (V_j) de X plus fin que (U_i) on définit, grâce aux raffinements de (V_j) dans (U_i), des atlas au-dessus de (V_j) qui sont tous équivalents à l'atlas α.

<u>Définition</u> : Soit deux L-atlas au-dessus d'un objet X de C:

$$\alpha = (U_i, E_i, F_x, \ _{xi}) \quad , \quad \beta = (U'_\lambda , E'_\lambda , F'_x , \ '_{x\lambda})$$

Un morphisme de α à β consiste en une famille de morphismes de L:

$$f_x : F_x \longrightarrow F'_x \qquad , \qquad x \in X$$

telle que les applications :

$$\phi_\lambda : U_i \cap U'_\lambda \longrightarrow L(E_i, E'_\lambda)$$

définies par :

$$\phi_{\lambda i}(x) = \tau'^{-1}_{x\lambda} \circ f_x \circ \tau_{xi} \qquad , \qquad x \in U_i \cap U'_\lambda$$

soient des morphismes de C.

Il est clair qu'un morphisme d'atlas reste un morphisme lorsqu'on remplace ces atlas par des atlas équivalents, ce qui permet de définir la catégorie $L(X)$ des L-fibrés de base X.

Cas particuliers :

1/ La sous-catégorie pleine des L-fibrés purs de $L(X)$ est constituée par les fibrés dont les fibres sont, pour chacun d'eux, isomorphes à un même objet de L. Tout atlas de cartes (U_i,E_i) représentant un L-fibré pur est équivalent à un atlas de cartes (U_i,E'_i) dont les E'_i sont égaux.

2/ La sous catégorie pleine des L-fibrés triviaux de $L(X)$ est constituée par les fibrés qui peuvent être représentés par un atlas à une seule carte ; cette catégorie est équivalente à la catégorie dont les objets sont ceux de L et dont les morphismes sont les morphismes de C de la forme :

$$X \longrightarrow L(E,F)$$

(4.2) Soit $L_1,\dots,L_n,L$ des C-catégories et $T : L_1\times\dots\times L_n \longrightarrow L$ un multifoncteur mixte de variance $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$. Pour tout entier $i \in [1,n]$ et pour tout couple (E_i,F_i) d'objets de L_i, posons :

$$L^{\varepsilon_i}(E_i,F_i) = L(E_i,F_i) \qquad \text{si } \varepsilon_i = 1$$
$$L^{\varepsilon_i}(E_i,F_i) = L(F_i,E_i) \qquad \text{si } \varepsilon_i = -1$$

Nous dirons que T est un C-foncteur si les applications qu'il définit :

$$L^{\varepsilon_1}(E_1,F_1)\times\dots\times L^{\varepsilon_n}(E_n,F_n) \longrightarrow L(T(E_1,\dots,E_n),\ T(F_1,\dots,F_n))$$

sont des morphismes de C.

Principe de transfert (Milnor) :

Pour tout objet X de C, un C-multifoncteur mixte $T : L_1\times\dots\times L_n \longrightarrow L$ induit canoniquement un multifoncteur mixte $T_X : L_1(X)\times\dots\times L_n(X) \longrightarrow L(X)$ de même variance et à tout morphisme $T \longrightarrow S$ de deux tels multifoncteurs correspond un morphisme $T_X \longrightarrow S_X$.

Preuve : Pour fixer les idées, limitons nous à un foncteur :

$$T : L_1^{\circ}\times L_2 \longrightarrow L .$$

Si $\alpha' = (U_i, E'_i, F'_x, \tau'_{xi})$ est un L_1-atlas, $\alpha'' = (U_i, E''_i, F''_x, \tau''_{xi})$ un L_2-atlas, alors $\alpha = (U_i, T(E'_i, E''_i), T(F'_x, F''_x), T(\tau'^{-1}_{xi}, \tau''_{xi}))$ est un L-atlas. Si $f'_x : \alpha' \longrightarrow \beta'$ est un morphisme de $L_1(X)$ et $f''_x : \alpha'' \longrightarrow \beta''$ un morphisme de $L_2(X)$, alors $T(f'_x, f''_x)$ est un morphisme de $L(X)$.

Le transfert des morphismes fonctoriels s'effectue par les fibres de la même façon que celui des foncteurs.

Corollaire 1 : Tout isomorphisme fonctoriel $T \xrightarrow{\sim} S$ donne un isomorphisme fonctoriel $T_X \xrightarrow{\sim} S_X$.

Corollaire 2 : Si L est à produits finis, il en est de même de $L(X)$.

Il suffit pour cela de transférer le foncteur produit :

$$\Pi : L \times L \longrightarrow L$$

et ses deux projections :

$$id_C \longleftarrow \quad \Pi \quad \longrightarrow id_C$$

Corollaire 3 : Si L est additive, il en est de même de $L(X)$. On définit la somme de deux morphismes f, g . $\xi \longrightarrow \eta$ de $L(X)$ par :

$$(f+g)_x = f_x + g_x.$$

Conséquence :

Dans une catégorie de fibrés vectoriels de Banach au-dessus d'un objet X de C , on peut définir, pour tout couple (ξ, η) de fibrés, les fibrés :

$$\xi', \ \xi \otimes \eta \ , \ \xi \hat{\otimes} \nu \ , \ L^n(\xi, \eta) \ , \ L^n_s(\xi, \eta) \ , \ L^n_a(\xi, \eta)$$

et on a des isomorphismes canoniques :

$$(\xi \otimes \eta)' \xrightarrow{\sim} \xi' \otimes \eta'$$

$$L(\xi \hat{\otimes} \eta, \zeta) \xrightarrow{\sim} L(\xi, L(\eta, \zeta))$$

et ce dernier isomorphisme caractérise $\xi \hat{\otimes} \eta$.

Si k_X est le fibré trivial de base X dont la fibre est le corps de scalaires choisi, on a :

$$\xi' = L(\xi, k_X)$$

(4.3) Images réciproques :

Soit L une C-catégorie et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de C. Pour tout L-atlas au-dessus de Y :

$$\beta = (V_j, E_j, F_y, \tau_{y,j}) \quad , \quad j \in J, \quad y \in V_j$$

les quadruples :

$$f^*(\beta) = (f^*(V_j), E_j, F_{f(x)}, \tau_{f(x),j}) \quad , \quad x \in f^*(V_j)$$

forment un L-atlas au-dessus de X et, pour tout morphisme $\psi_y : F'_y \longrightarrow F''_y$, $y \in Y$, d'un L-atlas β' à un L-atlas β'' au-dessus de (V_j), la famille :

$$f^*(\psi)_x = \psi_{f(x)} : F'_{f(x)} \longrightarrow F''_{f(x)} \quad , \quad x \in X$$

est un morphisme de $f^*(\beta')$ à $f^*(\beta'')$.

De la sorte, on définit un foncteur (l'image réciproque par f) :

$$f^* : L(Y) \longrightarrow L(X)$$

Il est clair que l'image réciproque est fonctorielle en f, i.e :

$$id_X^* = id_{L(X)}$$

et, pour tout couple $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ de morphismes de C :

$$(g_\circ f)^* = f^*{}_\circ g^*$$

En particulier, si ξ est un L-fibré de base X et (U_i) un recouvrement de X, on définit par restriction à chacun des U_i un fibré ξ_{U_i} de base U_i.

Définition : Soit ξ un L-fibré de base X et η un L-fibré de base Y. Un f-morphisme de ξ à η est un morphisme $\xi \longrightarrow f^*(\eta)$ de la catégorie $L(X)$. En clair, si ξ est représenté par un atlas $(U_i, E_i, F_x, \tau_{xi})$ et η par un atlas $(V'_j, E'_j, F'_y, \tau'_{yj})$, un tel morphisme consiste en une famille :

$$g_x : F_x \longrightarrow F'_{f(x)}$$

telle que les applications

$$x \longmapsto \tau'^{-1}_{f(x),j} \circ g_x \circ \tau_{x,i}$$

de U_i $f^*(V'_j)$ dans $L(E_i, E'_j)$ sont des morphismes de C.

Il est clair alors qu'on peut organiser tous les L-fibr$s de C en une catégorie $L(C)$.

Soit ξ un objet de $L(C)$ de base X; Pour tout recouvrement (U_i) de X, on a par restriction une famille (ξ_{U_i}) d'objets de $L(C)$ et une famille de morphismes $\xi_{U_i} \longrightarrow \xi$.

De la sorte, grâce à la transitivité des images réciproques, on définit de façon canonique un site sur $L(C)$.

<u>Principe de globalisation</u> (2) :

Soit X un objet de C et (U_i) un recouvrement de X. Pour chaque indice i, on se donne un L-fibré ξ_i de base U_i et pour tout couple d'indices (i,j), on se donne un isomorphisme :

$$f_{ji} : \xi_i|U_i \cap U_j \xrightarrow{\sim} \xi_j|U_i \cap U_j$$

de telle sorte que, pour tout triple d'indices (i,j,k), on ait :

$$(f_{ki})_x = (f_{kj} \circ f_{ji})_x \quad , \quad x \in U_i \cap U_j \cap U_k$$

Dans ces conditions, il existe un L-fibré ξ de base X, unique à une isomorphie près, et des isomorphismes $h_i : \xi_i \xrightarrow{\sim} \xi/U_i$ tels que, pour tout couple d'indices (i,j) :

$$(h_j^{-1} \circ h_i)_x = (f_{ji})_x \quad , \quad x \in U_i \cap U_j$$

<u>Preuve</u> : Pour avoir un tel fibré, commençons par recoller les fibres ξ_{ix} au-dessus des $U_i \cap U_j$.

Si, pour tout point x de X, on considère les indices i tels que $x \in U_i$, on obtient un système transitif d'isomorphismes :

$$\xi_{ix} \longrightarrow \xi_{jx}.$$

Un tel système admet toujours une limite inductive ; par le choix d'une telle limite ξ_x , on obtient des isomorphismes $k_{x,i} : \xi_{ix} \longrightarrow \xi_x$ compatibles avec ceux du système en question, ce qui permet d'avoir sur X une famille (ξ_x) d'objets de L et de regrouper une famille d'atlas :

$$(U_{i\lambda}, E_{i\lambda}, \xi_{ix}, \tau_{x,i,\lambda})$$

représentant les fibrés ξ_i en un atlas unique :

$$(U_{i\lambda}, E_{i\lambda}, \xi_x , h_{xi} \circ \tau_{xi\lambda})$$

(4.4) Sous-fibrés, fibrés-quotients :

Soit L une C-catégorie et X un objet de C.

Théorème 1 : Pour tout morphisme $f : \xi \longrightarrow \eta$ de $L(X)$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Les morphismes $f_x : \xi_x \longrightarrow \eta_x$ de L sont rétractables.

(ii) Il existe un recouvrement (U_i) de X tel que, pour chaque i, la restriction

$$f|U_i : \xi|U_i \longrightarrow \eta|U_i$$

soit rétractable dans $L(U_i)$

Preuve : Il est clair que (ii) implique (i).

Pour montrer que (i) entraine (ii), on peut supposer, grâce à une trivialisation de ξ et η au-dessus d'un même recouvrement de X, que ξ et η sont triviaux; f peut être considéré alors comme un morphisme de C de la forme :

$$f : X \longrightarrow L(E,F)$$

dont les composantes f_x sont rétractables dans L et il s'agit de trouver un recouvrement (U_i) de X et des morphismes de C :

$$g_i : U_i \longrightarrow L(F,E)$$

tels que, pour tout indice i :

$$g_{ix} \circ f_x = id_E \qquad , \quad x \in U_i$$

Pour cela, fixons un point i de X et considérons une rétraction $r_i : F \longrightarrow E$ de f_i. Puisque Aut(E) est ouvert dans End(E), l'image réciproque U_i de Aut(E) par l'application continue $h : X \longrightarrow End(E)$ définie par :

$$h_x = r_i \circ f_x$$

est un voisinage ouvert de i et on a alors :

$$(h_x^{-1} \circ r_i) \circ f_x = id_E \qquad , \quad x \in U_i \ ;$$

mais, puisque Aut(E) est un groupe de $\mathcal{C}$, ceci donne un morphisme $g_i : U_i \longrightarrow \mathcal{L}(F,E)$ avec

$$g_{ix} = h_x^{-1} \circ r_i$$

Définition : Sous les conditions équivalentes de ce théorème, on dit que (ξ, f) est un sous-fibré (localement direct) de η.

De façon duale, on définit les fibrés-quotients (localement triviaux) d'un $\mathcal{L}$-fibré η.

En général, on ne sait pas si les noyaux de $\mathcal{L}$ se transmettent à $\mathcal{L}(X)$; toutefois, on a le critère suivant :

Théorème 2 : Soit $\mathcal{F}$ une classe de morphismes de $\mathcal{L}$ à noyaux directs, stable par isomorphismes, et telle que, pour tout objet X de $\mathcal{C}$ et tout morphisme $f : X \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$ à composantes dans $\mathcal{F}$ il existe un recouvrement (U_j), $j \in J$, de X et des familles de morphismes de $\mathcal{C}$:

$$g_j : U_j \times U_j \longrightarrow Aut(E), \ h_j : U_i \times U_j \longrightarrow Aut(F)$$

telles que :

$$f(x) \circ g_j(x,y) = h_j(x,y) \circ f(y) \quad , \ j \in J \ ; \ x,y \in U_j$$

Dans ces conditions, pour tout objet X de $\mathcal{C}$ un morphisme $p : \xi \longrightarrow \eta$ de $\mathcal{L}(X)$ possède un noyau $\zeta \longrightarrow \xi$ et ce noyau est un sous-fibré du fibré ξ.

Preuve : Soit $(U_i, E_i, \xi_x, E_i \longrightarrow \xi_x)$ et $(U_i, F_i, \eta_x, F_i \longrightarrow \eta_x)$ des atlas représentant les fibrés ξ et η et $\zeta_x \longrightarrow \xi_x$ les noyaux des $\xi_x \longrightarrow \eta_x$. Le morphisme p induit alors des morphismes :

$$p_i : U_i \longrightarrow \mathcal{L}(E_i, F_i)$$

D'après nos hypothèses, on dispose de recouvrements $U_{ji} \hookrightarrow U_i$ et de morphismes :

$$g_{ji} : U_{ji} \times U_{ji} \longrightarrow Aut(E_i) \quad , \quad h_{ji} : U_{ji} \times U_{ji} \longrightarrow Aut(F_i)$$

tels que :

$$p_i(x) \circ g_{ji}(x,y) = h_{ji}(x,y) \circ p_i(y) \qquad , \quad x,y \in U_{ji}$$

Choisissons dans chaque ouvert U_{ji} un point x_{ji} et posons :

$$p_i(x_{ji}) = p_{ji}$$

et $\mathrm{Ker}p_{ji} = K_{ji} \longrightarrow E_i$

on a alors les diagrammes commutatifs canoniques

$$\begin{tikzcd} K_{ji} \arrow[r, shift left] & E_i \arrow[l, dashed, shift left] \arrow[r, "p_{ji}"] \arrow[d, "g_{j'i',ji}(x)"'] & F_i \arrow[d, "h_{j'i',ji}(x)"] \\ K_{j'i'} \arrow[r, shift left] & E'_i \arrow[l, dashed, shift left] \arrow[r, "p_{j'i'}"] & F_{i'} \end{tikzcd} \quad , x \in U_{ji} \cap U_{j'i'}$$

où les $g_{j'i',ji}(x)$ sont les composés :

$$E_i \xrightarrow{g_{ji}(x,x_{ji})} E_i \longrightarrow \xi_x \longrightarrow E_{i'} \xrightarrow{g^{-1}_{j'i'}(x,x_{j'i'})} E_{i'}$$

et les $h_{j'i',ji}(x)$ sont définis de façon analogue.

A l'aide d'une famille $E_i \longrightarrow K_{ji}$ de rétractions des noyaux des p_{ji} on obtient alors des morphismes

$$U_{ji} \cap U_{j'i} \longrightarrow L(K_{ji}, K_{j'i'})$$

compatibles avec les morphismes $K_{ij} \longrightarrow \zeta_x$ provenant des diagrammes canoniques

$$\begin{tikzcd} K_{ji} \arrow[r] & E_i \arrow[r, "p_{ji}"] \arrow[d] & F_i \arrow[d] \\ \zeta_x \arrow[r] & \xi_x \arrow[r] & \eta_x \end{tikzcd} \quad , x \in U_{ji}$$

De tout ceci, il ressort que la famille

$$(U_{ji}, K_{ji}, \zeta_x, K_{ji} \longrightarrow \zeta_x)$$

est un L-atlas sur X et que les $\zeta_x \longrightarrow \xi_x$ forment un morphisme de cet atlas à ξ et il est clair que le sous-fibré $\zeta \longrightarrow \xi$ ainsi défini est un noyau de p dans $L(X)$.

<u>Application aux $\mathcal{C}$-catégories pseudo-abéliennes</u> (4).

<u>Définition</u> : Une catégorie L est dite <u>pseudo-abélienne</u> si elle est additive et si tout projecteur $f : E \longrightarrow E$ de L possède un noyau ; dans ces conditions; f éclate suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathrm{Ker}(1-p) \arrow[dl, shift left, "j"] \arrow[dr, shift left, "j"] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}p \arrow[r, shift left, "i"] & E \arrow[l, shift left, "p"] \arrow[ur, shift left, "q"] \arrow[rr, "f"] & & E \arrow[ul, shift left, "q"] \arrow[r, shift left, "p"] & \mathrm{Ker}p \arrow[l, shift left, "i"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où p et q sont définis par :

$$1-f = i_\circ p \qquad \text{et} \qquad f = j_\circ q.$$

on a alors :

$$E = \mathrm{Ker}(1-f) \oplus \mathrm{Ker}\, f$$

et, dans cette décomposition :

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Théorème 3</u> : Si L est une $\mathcal{C}$-catégorie pseudo-abélienne, il en est de même des catégories $L(X)$.

<u>Preuve</u> : Pour cela, montrons que la famille F des projecteurs de L satisfait aux hypothèses du théorème 2. Pour les deux premières hypothèses, c'est évident. Reste à étudier les morphismes $f : X \longrightarrow \mathrm{End}(E)$ où les f_x sont des projecteurs.

Soit $x_\circ \in X$. En décomposant E sous la forme :

$$F \quad E'_\circ \oplus E''_\circ$$

où $E'_\circ = \mathrm{Ker}\,(1-f_\circ)$ et $E''_\circ = \mathrm{Ker}\, f_\circ$, on a :

$$f_x = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ c_x & d_x \end{bmatrix}$$

avec $a_\circ = 1$, $b_\circ = 0$, $c_\circ = 0$, $d_\circ = 0$

$$a^2 + bc = a \quad , \quad ab + cd = b \quad , \quad ca + dc = c \quad , \quad cb + b^2 = d$$

et il est aisé de voir alors que, avec :

$$g_x = \begin{bmatrix} a_x & -b_x \\ c_x & 1-d_x \end{bmatrix}$$

on a :

$$f_x \circ g_x = \begin{bmatrix} a_x & 0 \\ c_x & 0 \end{bmatrix} = g_x \circ f_{x_0}$$

et que $g : X \longrightarrow End(E)$ est un morphisme de C.

Comme $g_0 = 1$, il existe un voisinage U_{x_0} de x_0 tel que

$$g_x \in Aut(E) \quad , \quad x \in U_{x_0}$$

En prenant pour (U_i) le recouvrement (U_{x_0}), $x_0 \in X$, et pour $g_i : U_i \times U_i \longrightarrow L(E)$ les applications :

$$(x,y) \longmapsto g_x^{-1} \circ g_y$$

on satisfait à la dernière hypothèse du théorème 2.

(4.5) Réalisation géométrique d'un L-fibré.

Définition : Une réalisation d'une C-catégorie L dans la catégorie C est un foncteur fidèle $T : L \longrightarrow C$ tel que, pour tout couple (E,F) d'objets de L :

(i) $L(E,F) \subset C(T(E),T(F))$

(ii) l'application de $L(E,F) \times T(E)$ dans $T(F)$ définie par :

$$(f,x) \longmapsto f(x) \quad , \quad f \in L(E,F) \ , \quad x \in T(E)$$

est un morphisme de C.

Dans ce qui suit, nous nous donnerons une C-catégorie L réalisable dans C dont la réalisation dans C sera sous-entendue.

Exemple : La catégorie des espaces de Banach réels est canoniquement réalisable dans les catégories de C^r-variétés réelles.

Soit X un objet de C et ξ un fibré de $L(X)$. Si un atlas $(U_i, E_i, \xi_x, E_i \to \xi_x)$ représente ξ, on définit à l'aide des isomorphismes de transition de cet atlas :

$$\phi_{ji} : U_i \cap U_j \longrightarrow L(E_i, E_j)$$

un foncteur de recollement :

$$(U_i \quad U_j) \times E_i \xrightarrow{\Theta_{ji}} (U_i \cap U_j) \times E_j$$

suivant :

$$\Theta_{ji}(x,e) = (x, \phi_{ji}(x)e) \quad ,$$

ce qui, après recollement, donne un objet $E(\xi)$ de C et un morphisme $E(\xi) \to X$ qui ne dépendent que de ξ. $E(\xi)$ s'appelle l'espace de ξ et le couple $(E(\xi), E(\xi) \to X)$ la réalisation de ξ dans C. De même, on réalise dans C les morphismes $\xi \longrightarrow \eta$ de $L(X)$ suivant des morphismes $E(\xi) \longrightarrow E(\eta)$ de base X. En fin de compte, on obtient un foncteur de $L(X)$ dans C_X. Par restriction, ce foncteur donne une équivalence entre la catégorie des isomorphismes de L-fibrés purs de fibre E et de base X et la catégorie des fibrés de Steenrod de base X, de fibre E, et de groupe structural Aut(E).

Sections d'un L-fibré :

Les sections d'un L-fibré ξ de base X sont les sections de sa réalisation $E(\xi) \longrightarrow X$. Pour un atlas $\mathcal{U}$ de cartes (U_i, E_i) représentant ξ au moyen de morphismes de transition e_{ji}, une telle section s'exprime sous la forme d'une famille de morphismes $s_i : U_i \longrightarrow E_i$ telle que :

$$s_j(x) = e_{ji}(x) \circ s_i(x) \qquad , \qquad x \in U_i \cap U_j$$

ces morphismes s_i sont les parties principales de cette section relatives à cet atlas.

De façon précise, si $\Gamma(\mathcal{U}, \xi)$ est l'ensemble des parties principales des sections de ξ au-desus de $\mathcal{U}$, on définit pour tout atlas $\mathcal{V}$ de ξ plus fin que $\mathcal{U}$ une restriction

$$\Gamma(\mathcal{U}, \xi) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{V}, \xi)$$

qui ne dépend pas du raffinement choisi et l'ensemble des sections de ξ est donné par :

$$\Gamma(\xi) = \varinjlim_{\mathcal{U}} \Gamma(\mathcal{U}, \xi)$$

Exemple : Pour deux L-fibrés ξ et η de base X, les sections du fibré $L(\xi,\eta)$ sont les morphismes de ξ à η.

BIBLIOGRAPHIE

(1) N. BOURBAKI : Réf. de I.

(2) A. GROTHENDIECK : A general theory of fiber spaces with structure sheaf (University of Kansas - 1955).

(3) HIRZEBRUCH : Topological methods in algebraic geometry (Springer 1966).

(4) M. KAROUBI : K-théorie (Cours polycopie de l'université d'Alger - 1965).

(5) N. STEENROD : Topology of fiber bundles (Princeton. 1951).

(6) M. ARTIN : Grothendieck topologies (Harvard - 1962).

III - APPLICATIONS AUX FIBRES BANACHIQUES

1. Variétés de Stiefel ; variétés de Grassmann :

(1.1) Soit E un espace de Banach réel (ou complexe) et F un facteur direct de E. L'ensemble S(F,E) des monomorphismes directs de F à E est non vide et c'est un ouvert de l'espace de Banach L(F,E) ; plus précisément, on a le :

Lemme : Pour tout élément u de S(F,E), il existe un voisinage ouvert U de u dans L(F,E) et une application C^{∞}-différentiable $\rho : U \longrightarrow L(F,E)$ telle que

$$\rho(v) \circ v = \mathrm{id}_F \qquad , \quad v \in U$$

Preuve : Si $\rho(u)$ est une rétraction de u, on prend pour U l'image réciproque de GL(F) par l'application continue de L(F,E) dans L(F) :

$$v \longmapsto \rho(u) \circ v$$

et l'on pose :

$$\rho(v) = (\rho(u) . v)^{-1} \circ \rho(u) \qquad , \quad v \in U$$

Définition : la sous-variété ouverte S(F,E) de L(F,E) s'appelle la F-variété de Stiefel de E.

Toute isomorphie entre deux facteurs directs isomorphes F_1 et F_2 de E induit une isomorphie entre les variétés $S(F_1,E)$ et $S(F_2,E)$.

Lemme 2 : L'application différentiable $\theta : S(F,E)\times F \longrightarrow S(F,E)\times E$ définie au-dessus de S(F,E) par :

$$\theta(u,y) = (u,u.y)$$

fait du fibré vectoriel trivial $S(F,E)\times F \longrightarrow S(F,E)$ un sous-fibré du fibré vectoriel trivial $S(F,E)\times E \longrightarrow S(F,E)$.

Preuve : Cette application provient canoniquement de l'injection canonique $S(F,E) \hookrightarrow L(F,E)$ et les morphismes qu'elle induit sur les fibres : $\{u\}\times F \longrightarrow \{u\}\times E$ sont isomorphes aux morphismes $u : F \rightarrow E$.

Corollaire : L'image de Θ , i.e, l'ensemble des couples (u,x) de $S(F,E)\times E$ tels que x $u(F)$ est une sous-variété de $S(F,E)\times E$.

(1.2) Par composition des morphismes, le groupe différentiel $GL(F)$ opère librement à droite sur la variété $S(F,E)$ et l'orbite d'un élément u de $S(F,E)$ suivant $GL(F)$ est l'ensemble des éléments v de $S(F,E)$ tels que $v(F) = u(F)$. L'ensemble $G(F,E) = G(F;E) = S(F,E)/GL(F)$ s'identifie donc à l'ensemble des facteurs directs de E isomorphes à F et on a un fibré topologique régulier de groupe structural $GL(F)$:

$$S(F,E) \longrightarrow G(F,E)$$

Lemme 1 : Ce fibré topologique est principal.

Preuve : Soit u un élément de $S(F,E)$ et v, w des éléments de $S(F,E)$ de même image, suffisamment voisins de u pour qu'on puisse en exprimer des rétractions au moyen de la fonction ρ du lemme 1 de (1.1). L'élément $\tau(v,w)$ de $GL(F)$ qui transforme v en w est alors :

$$\tau(v,w) = \rho(v) \circ w$$

d'où la continuité de τ.

Lemme 2 : Les applications orbitales $GL(F) \longrightarrow S(F,E)$ sont des immersions

Preuve : Leurs différentielles : $L(F) \longrightarrow L(F,E)$ sont les monomorphismes directs :

$$\phi \longmapsto u \circ \phi \qquad , \ u \in S(F,E)$$

En fin de compte, on a le :

Théorème : Le groupe différentiel $GL(F)$ opère de façon régulière sur la variété $S(F,E)$ et le fibré différentiel qui s'en déduit :

$$S(F,E) \longrightarrow G(F,E)$$

est localement trivial.

<u>Définition</u> : La C^{∞}-variété $G(F,E)$ ainsi définie est appelée la <u>F-variété de Grassmann</u> de E. Il est clair que cette variété ne dépend que de la classe d'isomorphie de F ; on peut donc parler, en particulier, de la variété de Grassman $G(n,E)$ des sous-espaces de E de dimension finie n

(1.3) Soit $\xi^{*} : S^{*}(F,E) \longrightarrow G(F,E)$ le fibré de Steenrod de groupe structural $GL(F)$ obtenu par adjonction de la fibre F au fibré principal $\xi : S(F,E) \longrightarrow G(F,E)$. On a donc un carré cartésien :

$$\begin{tikzcd}
S(F,E)\times F \arrow[r] \arrow[d] & S(F,E) \arrow[d] \\
S^{*}(F,E) \arrow[r] & G(F,E)
\end{tikzcd}$$

et, comme $S(F,E)\times E \xrightarrow{\xi\times id_E} G(F,E)\times E$ est, pour $GL(F)$ opérant trivialement sur E, u fibré principal et que Θ (11. lemme 2) est un morphisme de $GL(F)$-objets, ce diagram se factorise suivant :

$$\begin{tikzcd}
S(F,E)\times F \arrow[r, "\Theta"] \arrow[d] & S(F,E)\times E \arrow[r] \arrow[d, "\xi\times id_E"] & S(F,E) \arrow[d, "\xi"] \\
S^{*}(F,E) \arrow[r] & G(F,E)\times E \arrow[r] & G(F,E)
\end{tikzcd}$$

Il est aisé de voir que l'application différentielle :

$$S^{*}(F,E) \longrightarrow G(F,E)\times E$$

de ce diagramme est injective et que son image est l'ensemble $\tilde{S}(F,E)$ des couples (V,x) de $G(F,E)\times E$ tels que $x \in V$.

Nous allons montrer maintenant que cette application fait de ξ^{*} : $S^{*}(F,E) \longrightarrow G(F,E)$ un sous-fibré du fibré vectoriel trivial $G(F,E)\times E \longrightarrow G(F,E)$. Compte tenu de (1.1.2) ceci résulte du :

<u>lemme</u> : Soit $\mathcal{C}$ le site des C^{∞}-variétés banachiques réelles (ou complexes), L une $\mathcal{C}$-catégorie réalisable dans $\mathcal{C}$, ξ et η deux L-fibrés de $\mathcal{C}$ de base X, $f : E(\eta) \longrightarrow E(\xi)$ un morphisme de $\mathcal{C}$ au-dessus de X, $s : Y \longrightarrow X$ une submersion surjective. Dans ces conditions, si $(s^*(\eta), s^*(f))$ est un sous-fibré de $s^*(\xi)$, alors (η, f) est un sous-fibré de ξ.

<u>Preuve</u> : Par une trivialisation convenable, on est ramené au cas de fibrés triviaux :

$$\begin{array}{ccccc} Y\times F & \xrightarrow{s^*(f)} & Y\times E & \longrightarrow & Y \\ {\scriptstyle s\times id_F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s\times id_E} & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ X\times F & \xrightarrow{f} & X\times E & \longrightarrow & X \end{array}$$

or, si on exprime f au moyen d'une application.

$$\Phi : X \longrightarrow \mathcal{C}(F,E),$$

$\Phi \circ s$ exprime alors $s^*(f)$ ce qui, compte tenu des hypothèses faites sur $s^*(f)$, entraine que :

$$\Phi \; : X \longrightarrow L(F,E)$$

et que Φ est différentiable.

Le fait que les Φ_x , $x \in X$, sont des monomorphismes directs résulte de ce que s est surjective.

Nous sommes en mesure d'affirmer maintenant que :

<u>Théorème</u> : Soit E un espace de Banach, F un facteur direct de E. Alors, l'ensemble $\tilde{S}(F,E)$ des couples (V,x) de $G(F,E)\times E$ tels que $x \in V$ est une sous-variété de $G(F,E)\times E$ et la projection :

$$\gamma_{F,E} : \tilde{S}(F,E) \longrightarrow G(F,E)$$

est un sous-fibré du fibré vectoriel trivial :

$$G(F,E)\times E \longrightarrow G(F,E)$$

Ce sous-fibré est isomorphe au fibré vectoriel obtenu par adjonction de F au fibré principal :

$$S(F,E) \longrightarrow G(F,E).$$

2. Variétés de Stiefel normales :

(2.1) Soit E un espace de Hilbert réel (ou complexe). Désignons par GL(E) le groupe des automorphismes de l'espace de Banach E et par U(E) le groupe unitaire de E, i.e, le sous-groupe des éléments u de GL(E) tels que :

$$u^* \circ u = id_E = u \circ u^*$$

Proposition 1 : U(E) est une sous-variété de GL(E).; le fibré principal GL(E) $GL(E) \longrightarrow GL(E)/U(E)$ est trivial et sa base est une variété isomorphe à l'espace H(E) des opérateurs hermitiens de E.

Preuve : H(E) est un facteur direct de l'espace de Banach L(E) et :

$$\exp : H(E) \longrightarrow GL(E)$$

est une application différentiable rétractable dont une rétraction différentiable est définie par :

$$u \longmapsto \frac{1}{2} \log u^* \circ u$$

Ainsi, l'ensemble P(E) des automorphismes hermitiens positifs de E est une sous-variété de GL(E) canoniquement isomorphe à H(E) et l'injection canonique de P(E) dans GL(E) admet une rétraction différentiable :

$$\rho \ : u \longmapsto (u^* \circ u)^{1/2}$$

Mais alors $\rho^{-1}(id_E) = U(E)$ est une sous-variété de GL(E). Les autres assertions deviennent évidentes.

(2.2) Soit F un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert E. Désignons par S'(F,E) l'ensemble des isométries linéaires de F dans E ; c'est évidemment un sous-espace fermé de S'(F,E) sur lequel le sous-groupe topologique U(F) de GL(F) opère. Il est clair que S'(F,E) est un espace principal de groupe structural U(F) et que, dans S'(F,E), les orbites suivant U(F) sont les traces des orbites de S(F,E) suivant GL(F), ce qui donne par passage au quotient un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} S'(F,E) & \longrightarrow & S(F,E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S'(F,E)/U(F) & \longrightarrow & G(F,E) \end{array}$$

Ce diagramme fait de $S'(F,E)/U(F)$ un sous-espace de $G(F,E)$, à savoir le sous-espace topologique de $G(F,E)$ constitué par les sous-espaces de E isométrique à F ; or :

Lemme : Deux espaces de Hilbert toplinairement isomorphes sont isométriques.

Preuve : Si $f : E_1 \longrightarrow E_2$ est un tel isomorphisme, alors $f^* \circ f$ est un automorphisme hermitient positif de E_1 et, en prenant $h = (f^* \circ f)^{1/2}$, on voit que $f \circ h^{-1}$ et $h^{-1} \circ f$ sont deux isomorphismes réciproques conjugués, i.e, deux isométries réciproques.

En résumé, on peut dire que :

Théorème 2 : Pour un espace de Hilbert E et un sous-espace fermé F de E, le fibré topologique principal $S(F,E) \longrightarrow G(F,E)$ de groupe structural $GL(F)$ se réduit canoniquement au fibré topologique principal $S'(F,E) \longrightarrow G(F,E)$ de groupe structural $U(F)$.

Corollaire : Le fibré $S'(F,E) \rightarrow G(F,E)$ est localement trivial;

Compte tenu de la proposition 1, ceci va résulter du :

Lemme : Soit $\mathcal{C}$ un site à recollements, G un groupe de $\mathcal{C}$, H un sous-groupe principal de G tel que le fibré $G \longrightarrow G/H$ soit trivial. Dans ces conditions, tout H-fibré principal $Q \longrightarrow B$ qui s'élargit suivant un G-fibré localement trivial $P \longrightarrow B$ est lui-même localement trivial.

Preuve : Par trivialisation, on se ramène au cas où $P \longrightarrow B$ est trivial, i.e, au cas où l'on a un G-morphisme $P \longrightarrow G$ et, puisque par hypothèse on a un H-morphisme $G \rightarrow H$, on obtient alors par composition :

$$Q \longrightarrow P \longrightarrow G \longrightarrow H$$

un H-morphisme $Q \longrightarrow H$.

(2.2) A partir du fibré différentiel $S(F,E) \longrightarrow G(F,E)$ et du groupe différentiel $U(F)$, l'étude topologique précédente permet de mettre sur $S'(F,E)$ une structure de sous-variété unique de $S(F,E)$ telle que $S'(F,E) \longrightarrow G(F,E)$ soit un fibré différentiel principal de groupe structural $U(F)$. En résumé :

Théorème 1 : Pour un espace de Hilbert E et un sous-espace fermé F de E, le fibré différentiel principal $S(F,E) \longrightarrow G(F,E)$ de groupe structural $GL(F)$ se réduit canoniquement à un fibré différentiel principal $S'(F,E) \longrightarrow G(F,E)$ de groupe structural $U(F)$.

Définition : $S'(F,E)$ est appelée la F-variété de Stiefel réduite (ou normale) de E.

Dans le cas hilbertien le fibré vectoriel $S^*(F,E) \longrightarrow G(F,E)$ défini en (1.3) est un facteur direct du fibré vectoriel trivial $G(F,E) \times E \longrightarrow G(F,E)$; de façon précise, en désignant par p_V la projection orthogonale de E sur un sous-espace fermé V, on a le résultat suivant :

Théorème 2 : Soit E un espace de Hilbert et F un sous-espace fermé de E ; soit p le projecteur du fibré trivial $G(F,E) \times E \longrightarrow G(F,E)$ défini par :

$$p(V,x) = (V, p_V(x))$$

Dans ces conditions, l'image de p est égale au sous-fibré $S^*(F,E) \longrightarrow G(F,E)$ et le noyau de p a pour espace l'ensemble $S^\circ(F,E)$ des couples (V,x) de $G(F,E) \times E$ tels que x soit orthogonal à V.

(L'existence des noyaux des projecteurs de fibrés a été établie au chapitre II).

Corollaire : Le fibré vectoriel trivial $G(F,E) \times E \longrightarrow G(F,E)$ est somme directe des fibres $S^*(F,E) \longrightarrow G(F,E)$ et $S^\circ(F,E) \longrightarrow G(F,E)$.

3. Classification homotopique :

Dans ce paragraphe, nous nous limiterons aux fibrés vectoriels topologiques à fibres de Banach.

(3.1) <u>Définition</u> : Soit ξ un fibré banachique de base X et F un espace de Banach. Un <u>morphisme gaussien</u> de ξ à F est une application $\phi : E(\xi) \longrightarrow F$ telle que $(\xi,\phi) : E(\xi) \longrightarrow X \times F$ fait de ξ un sous-fibré du fibré trivial $X \times F \longrightarrow X$. Il est clair que les restrictions

$$\phi_x : \xi_x \longrightarrow F \qquad , \quad x \in X$$

d'un morphisme gaussien ϕ sont des monomorphismes directs.

Si l'on se donne un atlas vectoriel de ξ de cartes (U_i,E_i) et de morphismes de transition :

$$\Theta_{ji} : U_i \cap U_j \longrightarrow L(E_i,E_j) \quad ,$$

un morphismes gaussien de ξ à F s'exprime sous la forme d'une famille d'applications continues :

$$\phi_i : U_i \longrightarrow S(E_i,F)$$

telle que, pour tout couple d'indices (i,j) :

$$\phi_i(x) = \phi_j(x) \circ \Theta_{ji}(x) \qquad , \quad x \in U_i \cap U_j$$

<u>Proposition 1</u> : Soit ξ un fibré banachique pur de fibre E et de base X et soit F un espace de Banach. Alors, les morphismes gaussiens ϕ de ξ à F sont en correspondance biunivoque canonique avec les carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{\quad g \quad} & S^*(E,F) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \xi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ X & \xrightarrow{\quad f \quad} & G(E,F) \end{array}$$

<u>Preuve</u> : Par image réciproque, un tel diagramme permet de transformer γ , sous-fibré du fibré trivial $G(E,F) \times F \longrightarrow G(E,F)$, en un sous-fibré $(\xi,\phi) : E(\xi) \longrightarrow X \times F$ du fibré trivial $X \times F \longrightarrow X$; de plus, g est déterminé par f et ϕ suivant :

$$g = (f \circ \xi, \phi)$$

alors que f est déterminé par ϕ suivant :

$$f(x) = \phi(\xi_x) \qquad , \quad x \in X$$

C.Q.F.D.

Limitons nous maintenant aux fibrés à base para-compacte et auparavant citons le :

<u>Lemme (6)</u> : Pour tout recouvrement ouvert localement fini (U_i), $i \in I$, d'un espace paracompact, il existe un recouvrement (V_J) de X plus fin que (U_i), indexé par l'ensemble $\mathcal{F}(I)$ des parties finies de I et tel que :

(i) card J = card K $\Longrightarrow V_J \cap V_K = \emptyset$; $J, K \in \mathcal{F}(I)$

(ii) le recouvrement dénombrable de X :

$$\mathcal{V}_n = \bigcup_{\mathrm{card}J = n} V_J \qquad , \quad n \in \underline{N}$$

est localement fini.

<u>Corollaire</u> : Tout fibré de base paracompacte admet un atlas <u>dénombrable</u> <u>localement fini</u>.

<u>Notation</u> : Dans ce qui suit, p désignera un nombre réel de l'intervalle $[1,+\infty]$ et $\ell^p(E)$ sera l'espace de Banach des suites (e_n) de E telles que $\sum_{n=0}^{\infty} ||e_n||^p < +\infty$

<u>Théorème 2</u> : Pour tout fibré banachique pur ξ de fibre E, et de base paracompacte X, il existe un morphisme gaussien de ξ à $\ell^p(E)$.

<u>Preuve</u> : Soit $(U_1, \ldots, U_n, \ldots)$ un recouvrement ouvert localement fini qui trivialise ξ au moyen des fonctions de transition :

$$\phi_{rq} : U_r \cap U_q \longrightarrow L(E)$$

et soit $(u_1, \ldots, u_n, \ldots)$ une partition continue de l'unité subordonnée à ce recouvrement. Pour tout entier r, on définit alors une application

$$\theta_r : U_r \longrightarrow L(E, \ell^p(E))$$

en posant :

$$\theta_r(x) = (\theta_{1r}(x), \ldots, \theta_{qr}(x), \ldots) \qquad , \quad x \in U_r$$

où pour tout entier q :

$$\theta_{qr}(x) = 0 \qquad , \quad x \notin U_q$$

$$\theta_{qr}(x) = u_q(x)\phi_{qr}(x) \qquad , \quad x \in U_q$$

(ce qui assure que, pour tout point x de U_k, les $\theta_{qr}(x)$ sont nuls à l'exception d'un nombre fini d'entre eux).

Il est clair que les Θ_r sont compatibles avec les ϕ_{pr}.

Reste à voir que les Θ_r sont continues et que les $\Theta_r(x)$, $x\in U_r$, sont des monomorphismes directs. Pour cela, prenons pour chaque point x de U_r un voisinage V_x de x contenu dans U_r et qui ne rencontre qu'un nombre fini de supports des u_q puis désignons par U_x l'intersection (finie !) des U_q tels que $u_q(y) \neq o$, $y\in V_x$. Sous réserve d'utiliser une permutation de $\underline{N}$, on peut supposer que les entiers q tels que $u_q(y) \neq o$, $y\in V_x$, sont les nombres d'un intervalle $[1,n]$ et on a alors, avec $W_x = U_x \cap V_x$:

$$\Theta_r(y) = (u_1(y)\phi_{1r}(y),\dots,u_n(y)\phi_{n,r}(y),o,\dots) \quad , \quad y\in W_x$$

d'où, par restriction; une application :

$$\Theta_r : W_x \longrightarrow L(E,E^n) = L(E)^n$$

et cette application est la composée de l'application continue :

$$W_x \longrightarrow \underline{R}^n \times L(E)^n$$

définie par les u_q et les $\phi_{q,r}$, $1\leq q\leq n$. et de l'application produit de n copies de l'application bilinéaire canonique :

$$\underline{R}\times L(E) \longrightarrow L(E)$$

Comme $\Theta_r(x)$ est un isomorphisme de E sur la diagonale de E^n, ceci termine la démonstration.

<u>Corollaire 1</u> : Tout fibré banachique pur ξ de fibre E et de base paracompacte X est isomorphe à l'image réciproque du fibré banachique :

$$\gamma_{E,\ell^p(E)} : S^*(E,\ell^p(E)) \longrightarrow G(E,\ell^p(E))$$

par une application continue $f : X \longrightarrow G(E,\ell^p(E))$

(c'est une conséquence du théorème 2 et de la proposition 1).

<u>Corollaire 2</u> : ξ est facteur du fibré trivial $X\times\ell^p(E) \longrightarrow X$.

(3.2) Définition : Soit ξ un fibré banachique de base X et F un espace de Banach.

Une homotopie gaussienne de ξ à F est une homotopie

$$\Phi : I\times E(\xi) \longrightarrow F$$

telle que, pour tout nombre t de I, Φ_t soit une morphisme gaussien de ξ à F.

Proposition 1 : Soit ξ un fibré banachique pur de fibre E et de base X ; soit F un espace de Banach. Alors, toute homotopie gaussienne

$$\Phi : I\times E(\xi) \longrightarrow F$$

détermine une homotopie

$$\psi : I\times X \longrightarrow S(E,F)$$

suivant $\psi_t(x) = (\Phi_t|\xi_x) \circ \tau_{xi} \quad , \quad t \in I,\ x \in U_i$

où $(U_i, E, \xi_x, \tau_{xi} : E \longrightarrow \xi_x)$ est un atlas vectoriel de ξ.

Preuve : La continuité de ψ résulte de ce que la topologie de $I\times X$ est l'image directe de celle de $I\times E(\xi)$ par l'application $id_I\times\xi$.

Soit E un espace de Banach. Posons pour un temps

$$F = \ell^p(E)$$

on définit une décomposition directe :

$$F = F^+ \oplus F^-$$

avec

$$F^+ = \left\{(e_n) \in F\ ;\ e_1 = e_3 = \dots = e_{2n+1} = \dots = o\right\}$$
$$F^- = \left\{(e_n) \in F\ ;\ e_o = e_2 = \dots = e_{2n} = \dots = o\right\}$$

Considérons maintenant les homotopies

$$h_t^+ , h_t^- : F \longrightarrow F$$

définies par :

$$h_t^+((e_n)) = (e_n^+) \quad \text{où} \quad e_{2n+1}^+ = (1-t)e_{2n+1} \ ,\ e_{2n}^+ = (1-t)e_{2n} + te_n$$

$$h_t^-((e_n)) = (e_n^-) \quad \text{où} \quad e_{2n}^- = (1-t)e_{2n} \quad ,\ e_{2n+1}^- = (1-t)e_{2n+1} + te_n$$

Il est clair que :

$$h_o^+ = id_F = h_o^-$$

$$h_1^+(F) = F^+ \quad , \quad h_1^-(F) = F^-$$

et que l'endomorphisme g_1^+ (resp. g_1^-) de F défini par $g_1^+((e_n)) = (e_{2n})$ (resp. $g^-((en)) = (e_{2n+1}))$ est une rétraction linéaire continue de h_1^+ (resp. de h_1^-).

Pour $t \neq 1$, un petit calcul montre que h_t^+ possède un inverse linéaire g_t^+ fourni par :

$$g_t^+(e_o,\dots,e_n,\dots) = (e'_o,\dots,e'_n,\dots)$$

avec :

$$e'_{2^k(2n+1)} = \frac{1}{1-t}\ e_{2^k(2n+1)} - \frac{t}{(1-t)^2}\ e_{2^{k-1}(2n+1)} + \dots + \frac{(-1)^k t^k}{(1-t)^{k+1}}\ e_{2n+1}$$

et d'après le théorème du graphe fermé cet inverse est continu. De la même façon, on montre que les h_t^- , $t \neq 1$, sont des automorphismes de F.

Avec ceci, on peut affirmer que :

Lemme 1 : Soit ξ un fibré banachique pur de fibre E et soit f,g des morphismes gaussiens de ξ à $F = \ell^p(E)$. Dans ces conditions, les applications composées :

$$E(\xi) \overset{f,g}{\rightrightarrows} F \overset{h_t^+\ ,\ h_t^-}{\rightrightarrows} F$$

définissent des homotopies gaussiennes.

Preuve : Pour chaque t, les morphismes $h_t^+ \circ f$ et $h_t^- \circ g$ sont gaussiens d'après l'étude de h_t^+ et h_t^- que nous venons de faire.

Lemme 2 : Sous les hypothèses précédentes,

$$t\ h_1^+ \circ f + (1-t)\ h_1^- \circ g : E(\xi) \longrightarrow F$$

est, pour tout nombre réel t, un morphisme gaussien de ξ à F.

Ceci résulte du lemme plus général que voici :

<u>Lemme</u> : Soit u,v : $E \rightrightarrows F$ deux monomorphismes directs d'espaces de Banach. S'il existe une décomposition directe :

$$F = F_1 + F_2$$

telle que

$$u(E) \subset F_1 \qquad \text{et} \qquad v(E) \subset F_2$$

alors, pour tout nombre réel t :

$$tu + (1-t)v : E \longrightarrow F$$

est un monomorphisme direct.

<u>Preuve</u> : Remarquons tout d'abord que $u : E \to F_1$ et $v : E \longrightarrow F_2$ sont des monomorphismes directs. En utilisant alors un facteur direct supplémentaire de u(E) dans F_1 (resp. de v(E) dans F_2), on voit que u(E) + v(E) est un facteur direct de F. Pour démontrer le lemme, on peut donc supposer que $u : E \to F_1$ et $v : E \to F_2$ sont des isomorphismes ; or il est clair alors que l'application :

$$F_1 \times F_2 \xrightarrow{(u^{-1}, v^{-1})} E$$

est une rétraction continue de l'application :

$$E \xrightarrow{(tu, (1-t)v)} F_1 \times F_2$$

C.Q.F.D.

De ces lemmes on déduit la :

<u>Proposition 2</u> : Soit ξ un fibré banachique pur de fibre E. Alors, pour tout couple (f,g) de morphismes gaussiens de ξ à $\ell^p(E)$, il existe une homotopie gaussienne $\Phi_t : \xi \longrightarrow F$ telle que $\Phi_0 = f$ et $\Phi_1 = g$.

<u>Preuve</u> : D'après le lemme 1, f et $h_1^+ \circ f$ d'une part, g et $h_1^- \circ g$ d'autre part se correspondent suivant une homotopie gaussienne et, d'après le lemme 2, $h_1^+ \circ f$ et $h_1^- \circ g$ sont homotopes suivant une homotopie gaussienne.

Compte tenu de la proposition 1, ceci donne le :

Théorème 3 : Soit ξ un fibré banachique pur de fibre E et de base X. Alors, deux applications continues $f,g : X \longrightarrow G(E,F)$, $F = \ell^p(E)$, telles que

$$f^*(\gamma_{E,F}) \simeq \xi \simeq g^*(\gamma_{E,F}),$$

sont homotopes .

Enfin, on démontre que :

Théorème 4 : Soit X un espace paracompact et $f,g : X \longrightarrow Y$ deux applications continues homotopes. Alors, pour tout fibré banachique η de base Y, les fibrés banachiques $f^*(\eta)$ et $g^*(\eta)$ de base X sont isomorphes.

(Comme l'a remarqué Karoubi dans (3) , la célèbre démonstration de Milnor (5), reprise par Husemoller (2), reste valable pour des fibrés quelconques).

Des théorèmes (3.1.2-3-4) on déduit le

Théorème de classification homotopique :

Soit X un espace paracompact et E un espace de Banach. Alors, les classes d'isomorphie des fibrés purs de fibre E et de base X sont en correspondance biunivoque canonique avec les classes d'homotopie des applications continues de X dans $G(E, \ell^p(E))$.

Cette correspondance est naturelle en X.

4. Grassmanniennes de rang fini :

Nous entendrons par là les grassmanniennes G(n,E) où E est un espace de Hilbert de dimension hilbertienne $\geqslant n$.

(4.1) Soit E un espace de Hilbert, F un sous-espace fermé de E, F° le supplémentaire orthogonal de F. On a donc un épimorphisme canonique direct :

$$L(E) \longrightarrow L(F,E)$$

qui, par restriction donne une application différentiable :

$$U(E) \longrightarrow S'(F,E)$$

Deux éléments u,v de U(E) donnent le même élément de S'(F,E) si, et seulement si, $u^{-1} \circ v$ appartient au groupe des automorphismes unitaires de E qui laissent invariants les points de F ; or ce groupe est l'image du groupe $U(F^{o})$ par le morphisme de groupes différentiels :

$$\phi_{F^o} : (U(F^o) \longrightarrow U(E)$$

défini par :

$$\phi_{F^o}(u)(x+y) = x + u(y) \qquad , \quad x \in F \quad , \ y \in F^o$$

Comme ce morphisme est une isométrie, c'est un plongement topologique.

On a donc un fibré différentiel de groupe structural $U(F^o)$:

$$\Theta : U(E) \longrightarrow S'(F,E)$$

qu'il s'agit d'étudier.

Remarquons tout d'abord que U(E) opère à gauche sur lui-même et sur S'(F,E) de façon évidente et que Θ est un morphisme pour cette action.

Grâce au fibré principal trivial :

$$GL(F) \longrightarrow H(F)$$

de groupe structural U(F), on peut affirmer que, lorsqu'on identifie au moyen de l'exponentielle l'espace tangent à GL(E) en id_E (i.e, l'ensemble des sous-groupes à un paramètre de GL(E)) à l'espace de Banach L(F), l'espace tangent à U(F) en id_F devient le sous-espace A(F) des éléments antihermitiens de L(F).

Mais alors, en reprenant la construction de la variété S'(F,E) à partir de la variété S(F,E), on voit que la différentielle de l'injection canonique $S'(F,E) \hookrightarrow S(F,E)$ ou point i_F de S'(F,E), qu'est l'injection canonique $F \hookrightarrow E$, devient l'injection canonique :

$$L(F,F^o) \times A(F) \hookrightarrow L(F,F^o) \times L(F) = L(F,E)$$

Ainsi, <u>le plan tangent à</u> S'(F,E) <u>en i_F</u> <u>s'identifie à l'ensemble A(F,E) des applications toplinéaires f : $F \rightarrow E$ telles que</u> $p_F \circ f \in A(F)$

Théorème 1 : L'application canonique :

$$\Theta \ : U(E) \longrightarrow S'(F,E)$$

est une submersion.

Preuve : Compte tenu de l'action de U(E) sur ce fibré il suffit de montrer que Θ est une submersion en id_E , or, en ce point la différentielle de Θ s'identifie à l'application de restriction $\rho : A(E) \longrightarrow A(F,E)$, i.e :

$$\rho(u) = u \circ i_F$$

En associant à tout $f \in L(F,E)$ l'endomorphisme $\sigma(f)$ de E donné, suivant la décomposition directe :

$$E = F + F^{\circ}$$

par la matrice :

$$\begin{bmatrix} p_F \circ f & -(p_{F^{\circ}} \circ f)^{*} \\ & \\ p_{F^{\circ}} \circ f & 0 \end{bmatrix}$$

il est clair qu'on définit une application toplinéaire $\sigma : A(F,E) \longrightarrow A(E)$ qui est une section de ρ.

Théorème 2 : Le morphisme de groupes différentiels :

$$\phi_F \ : U(F) \longrightarrow U(E)$$

est un plongement différentiel.

Preuve : Comme on sait déjà que ϕ_F est un plongement topologique, il suffit de montrer que c'est une immersion différentielle en id_F ; or, en ce point, la différentielle de ϕ_F s'identifie au morphisme toplinéaire $A(F) \longrightarrow A(E)$ défini suivant la décomposition directe $E = F + F^{\circ}$ par :

$$u \mapsto \begin{bmatrix} u & 0 \\ & \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et il est clair que ce morphisme est un monomorphisme direct.

Corollaire 1 : L'application canonique :

$$U(E)/U(F^{\circ}) \longrightarrow S'(F,E)$$

est un plongement différentiel dont l'image est constituée par les isométries linéaires $f : F \longrightarrow E$ qui se prolongent à E suivant un automorphisme unitaire de E.

Un calcul facile utilisant les décompositions :

$$F + F^{\circ} = E = f(F) + f(F)^{\circ}$$

montre que ces isométries sont caractérisées par le fait que les sous-espaces F° et $f(F)^{\circ}$ sont isomorphes.

Corollaire 2 : Si F est un sous-espace de E de dimension finie, on a alors un difféomorphisme canonique :

$$U(E)/U(F^{\circ}) \xrightarrow{\sim} S'(F,E)$$

Preuve : Les supplémentaires orthogonaux de deux sous-espaces de E de même dimension finie sont isomorphes (Si E est de dimension finie, c'est bien connu ; sinon, ces supplémentaires ont la dimension hilbertienne de E).

(4.2) Application à l'homotopie :

On sait (théorème de Kuiper cité par (6)) que le groupe unitaire d'un espace de Hilbert de dimension infinie est contractible.De ce résultat fondamental et du corollaire précédent et de la suite exacte de Hurewicz du fibré :

$$U(E) \longrightarrow U(E)/U(F^{\circ})$$

on déduit que, dans le cas où F est de dimension finie, que les $\Pi_n\, S'(F,E)$ sont tous nuls ; or, d'après Palais (6), ceci entraine pour une variété banachique paracompacte la contratibilité de cette variété, d'où les :

Théorème 1 : Pour tout espace de Hilbert E de dimension infinie, les variétés de Stiefel réduites $S'(n,E)$ sont contratibles.

(Pour $n = 1$, on retrouve la contractibilité des sphères d'un espace de Hilbert de dimension infinie).

Théorème 2 : Pour tout espace de Hilbert E de dimension infinie et pour tout entier $k \geq o$, on a :

$$\Pi_k\, G(n,E) = \Pi_k U(n)$$

Pour cela, il suffit d'utiliser la suite exacte du fibré $S'(n,E) \longrightarrow G(n,E)$ de groupe structural $U(n)$

BIBLIOGRAPHIE

(1) A. DOUADY : Thèse - Annales de l'Institut Fourier (1966).

(2) D. HUSEMOLLER : Fiber Bundles (Mac-Graw Hill 1966).

(3) M. KAROUBI : K-théorie.

(4) S. LANG : Introduction aux variétés différentiables - Dunod 1962.

(5) J. MILNOR : Characteristic classes - Princeton Notes 1958.

(6) R. PALAIS : Homotopie theory of infinite dimensional manifolds Topology - vol. 5 - 1966.

Manuscrit remis le 2 mai 1969.

R. OUZILOU
Maître de Conférences
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
43, bd du 11 novembre 1918
VILLEURBANNE