Publications du Département de mathématiques de Lyon

Alain Faisant

Sur les demi-groupes de fractions

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1969, tome 6, fascicule 1
, p. 73-85
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1969__6_1_73_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1969 t. 6-1

SUR LES DEMI-GROUPES DE FRACTIONS

par Alain FAISANT

Notre but est une construction explicite du demi-groupe des fractions d'un demi-groupe quelconque D pour rapport à un complexe quelconque (c'est-à-dire une partie non vide) de D. De façon plus précise, on veut résoudre le problème suivant :

Problème (D,S). Etant donné un couple (D,S) où D est un demi-groupe et S un complexe de D, trouver un couple (Δ,ϕ) vérifiant les propriétés suivantes :

$[D,S]_1$ Δ est un demi-groupe avec élément neutre et $\phi : D \longrightarrow \Delta$ un homomorphisme.

$[DS]_2$ pour tout s, $s \in S$: $\phi(s)$ est inversible dans Δ.

$[DS]_3$ pour tout couple (Δ',ϕ') vérifiant $[DS]_1$ et $[DS]_2$, il existe un unique homomorphisme $\sigma : \Delta \longrightarrow \Delta'$ tel que $\sigma \circ \phi = \phi'$.

Notations : H(D,D') désigne l'ensemble des homomorphismes du demi-groupe D dans le demi-groupe D' ; e_D l'élément neutre éventuel de D ; $H^1(D,D')$ l'ensemble des homomorphismes conservant l'élément neutre,

$\mathcal{U}(D)$ l'ensemble des unités (éléments inversibles) de D.

§ 1. Forme universelle du problème (D,S).

Le problème (D,S) est équivalent à un problème d'application universelle [1] : l'espèce de structure T est celle des demi-groupes avec élément neutre (T-ensembles), la famille de T-morphismes est $(H^1(\Delta,\Delta'))_{\Delta,\Delta'}$ = T-ensembles , la famille $(\alpha(D,\Delta'))_{\Delta}$: T-ensemble d'α-applications est définie par $\alpha(D,\Delta) = \{\phi \in H(D,\Delta)$ tel que $\phi(S) \subseteq \mathcal{U}(\Delta)\}$. Le résultat se déduit du lemme suivant :

Lemme 1 : a) si $\sigma \in H^1(\Delta,\Delta')$ alors $\begin{cases} \sigma(\mathcal{U}(\Delta)) \subseteq \mathcal{U}(\Delta') \\ \text{et } \forall x \in \mathcal{U}(\Delta) : \sigma(x^{-1}) = \sigma(x)^{-1} \end{cases}$

b) soit $\sigma \in H(\Delta,\Delta')$ et supposons l'existence de e_Δ et $e_{\Delta'}$. Alors : si $\sigma(\Delta) \cap \mathcal{U}(\Delta') \neq \emptyset$ on a : $\sigma \in H^1(\Delta,\Delta')$.

a) c'est une propriété classique.

b) soit $\sigma(x) \in \mathcal{U}(\Delta')$ donc $\sigma(x).\sigma(x)^{-1} = e_{\Delta'}$, et par multiplication à gauche par $\sigma(e_\Delta)$: $\sigma(e_\Delta x).\sigma(x)^{-1} = \sigma(e_\Delta).e_{\Delta'}$, soit $\sigma(x)\sigma(x)^{-1} = e_{\Delta'}$, d'où $e_{\Delta'} = \sigma(e_\Delta)$.

Le problème (D,S) étant équivalent à un problème universel, on a :

Proposition 1 : Si (Δ,ϕ) et (Δ',ϕ') sont solutions du problème (D,S) alors Δ et Δ' sont isomorphes.

On va maintenant construire une solution du problème (D,S) selon une méthode exposée dans (4) pour les catégories de fractions.

§ 2. Construction d'une solution du problème (D,S).

. Résultats préliminaires.

Congruence engendrée par une relation R_0 sur un demi-groupe D, cf (2).

On l'obtient en trois étapes : soit d'abord $R_1 = R_0 \cup \overset{-1}{R_0} \cup \mathcal{E}_D$ où $\mathcal{E}_D$ désigne la relation d'égalité dans D ; on définit ensuite R_2 par $aR_2 b$ ssi : $\exists x,y \in D^1$, $\exists a',b' \in D$ tels que $a = xa'y$, $b = xb'y$ et $a'R_1 b'$, où D^1 désigne D si D possède un élément neutre, et $D \cup \{1\}$ avec $1.x = x.1 = x \quad \forall x \in D$, $1.1 = 1$, si D ne possède pas d'élément neutre ; enfin $\overline{R}_2$ fermeture transitive de R_2 est la congruence engendrée par R_0.

<u>Lemme 2</u> : Le diagramme ci contre, où $f \in H(D,D')$ et où R et R' sont des congruences sur D et D', se ferme commutativement de façon unique par $\bar{f} \in H(D/R, D'/R')$ ssi $R \subseteq f^{-1}(R')$

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & D' \arrow[d, "j"] \\ D/R \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] & D'/R' \end{tikzcd}$$

Rappelons que : $x\, f^{-1}(R')\, y$ ssi $f(x)R'f(y)$. Si $R \subseteq f^{-1}(R')$ on posera $\bar{f}(i(x)) = j(f(x))$ $\bar{f}$ est bien définie et c'est un homomorphisme. Unicité et réciproque sont évidentes.

<u>Le demi-groupe libre</u> F_X <u>sur un ensemble X</u> : c'est l'ensemble des suites finies, ou mots, d'éléments de X, que l'on compose par juxtaposition : $(x_1,\dots,x_n).(y_1,\dots,y_p) = (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_p)$. Ce demi-groupe ne possède pas d'élément neutre et n'est pas commutatif.

<u>Lemme 3</u> : Dans le diagramme ci contre d désigne l'injection naturelle $x \mapsto (x)$, et Δ est un demi-groupe avec élément neutre. Alors il existe un unique homomorphisme $\tilde{f}$ tel que $\tilde{f} \circ d = f$, et conservant l'élément neutre.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "f"'] & F^1_X \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] \\ & \Delta \end{tikzcd}$$

On obtient directement $\tilde{f}$ unique en posant $\begin{cases} \tilde{f}((x_1,\dots,x_n)) = f(x_1).f(x_2)\dots f(x_n) \\ \tilde{f}(e_F) = e_\Delta \end{cases}$

<u>Lemme 4</u> : Soit le diagramme :

$$\begin{tikzcd} F^1_X \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "f"'] & F^1_X/R \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ & \Delta \end{tikzcd}$$

où R est la congruence engendrée par une relation $R_\circ$ sur F^1_X, r la surjection canonique, et f un homomorphisme de demi-groupes. Alors : Si $R_\circ \subseteq f^{-1}(E_\Delta)$ il existe $\bar{f}$ homomorphisme unique tel que $\bar{f} \circ r = f$

En effet, le diagramme peut s'écrire :

$$\begin{tikzcd} F_X^1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & \Delta \arrow[d, "1_\Delta"] \\ F_X^1/R & \Delta = \Delta/E_\Delta \end{tikzcd}$$

où 1_Δ est l'application identique de Δ.
D'après le lemme 2 il suffit de montrer que $R \subseteq \bar{f}^1(E\Delta)$ ce qui est réalisé puisque $R_\circ \subseteq \bar{f}^1(E_\Delta)$ et que R est la plus fine congruence contenant $R_\circ$.

. Construction du demi-groupe de fractions $D[S^{-1}]$

Soit $D \amalg S$ la somme directe ensembliste de D et S. On note $in_1 : D \to D\amalg S$ et $in_2 : S \to D\amalg S$ les injections canoniques. $D\amalg S$ n'est muni d'aucune structure.
Soit ensuite $d : D\amalg S \to F^1_{D\amalg S}$ l'injection naturelle, et $R_\circ$ la relation sur $F^1_{D\amalg S}$ définie par :

a) $(in_1 x)(in_1 y) R_\circ (in_1 xy) \quad \forall x, y \in D$

b) $(in_2 s)(in_1 s) R_\circ e_F \quad \forall s \in S$

c) $(in_1 s)(in_2 s) R_\circ e_F \quad \forall s \in S$

On note R la congruence engendrée par $R_\circ$, $\bar{x} = r(x)$ la classe de x modulo R,
$r : F^1_{D\amalg S} \longrightarrow F^1_{D\amalg S}/R = D[S^{-1}]$ la surjection canonique

Posons enfin $\phi_S = r_\circ d_\circ in_1 \qquad D \xrightarrow{in_1} D\amalg S \xrightarrow{d} F^1_{D\amalg S} \xrightarrow{r} D[S^{-1}]$

Théorème 1 : le couple $(D[S^{-1}], \phi_S)$ est solution du problème (D,S).

On vérifie successivement les conditions $[DS]_1$ $[DS]_2$ et $[DS]_3$

Condition $[DS]_1$:

. $D[S^{-1}]$ muni de la structure quotient est bien un demi-groupe avec élément neutre.

$$\left.\begin{aligned} . \ \phi_S \text{ est un homomorphisme car : } \phi_S(xy) &= r_\circ d((in_1 xy) = r((in_1 xy)) = \overline{(in_1 xy)} \\ \text{et : } \phi_S(x)\phi_S(xy) &= (\overline{in_1 x})(\overline{in_1 y}) \end{aligned}\right\}$$

d'où le résultat d'après a).

Condition $[DS]_2$:

pour tout $s \in S$ on a $\phi_S(s) = \overline{(in_1 s)}$. On calcul successivement :

$$\left.\begin{array}{ll} \phi_S(s).\overline{(in_2 s)} = \overline{(in_1 s)}\,\overline{(in_2 s)} = \bar{e}_F & \text{d'après c)} \\ \overline{(in_2 s)}\ \phi_S(s) = \overline{(in_2 s)}\,\overline{(in_1 s)} = \bar{e}_F & \text{d'après b)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \phi_S(s)^{-1} = \overline{(in_2 s)}$$

Remarquons que si e_D existe on aura $\phi_S(e_D) = \bar{e}_F = e_{D[S^{-1}]}$

Condition $[DS]_3$:

soit (Δ',ϕ') un couple vérifiant $[DS]_1$ et $[DS]_2$.

$\boxed{\text{existence de } \sigma}$ on procède de proche en proche de la façon suivante :

(A)
$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "in_1"] \arrow[dr, "\phi"'] & D\amalg S \arrow[d, dashed, "f"] \\ & \Delta \end{tikzcd}$$

il existe une unique application $f : D\amalg S \longrightarrow \Delta'$ telle que $\begin{cases} f_\circ in_1 = \phi' \\ \text{et } f(in_2 s) = \phi'(s)^{-1} \quad \forall s \in S \end{cases}$

Ces deux conditions définissent en effet f de façon unique.

(B)
$$\begin{tikzcd} D\amalg S \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "f"'] & F^1_{D\amalg S} \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] \\ & \Delta' \end{tikzcd}$$

d'après le lemme 3 il existe un unique homomorphisme $\tilde{f}$ tel que $\begin{cases} \tilde{f}_\circ d = f \\ \tilde{f}(e_F) = e_S, \end{cases}$

(C)
$$\begin{tikzcd} F^1_{D\amalg S} \arrow[r, dash, "r"] \arrow[dr, "\tilde{f}"'] & F^1_{D\amalg S}/R \arrow[d, dashed, "\bar{\tilde{f}}"] \\ & \Delta' \end{tikzcd}$$

on a : $R_\circ \subseteq \tilde{f}^{-1}(E_{\Delta'})$, c'est à dire que si $a\ R_\circ\ b$ alors $f(a) = f(b)$. En effet, supposons que $a\ R_\circ\ b$; ceci peut avoir lieu dans les trois cas suivants :

a) $a = (in_1 x)(in_1 y)$ alors $\tilde{f}(a) = f(in_1 x)f(in_1 y) = \phi'(x).\phi'(y) = \phi'(xy)$

$b = (in_1 xy)$ $\qquad = f(in_1 xy) = \tilde{f}(b)$

b) $a = (in_2 s)(in_1 s)$ alors $\tilde{f}(a) = f(in_2 s).f(in_1 s) = \phi'(s)^{-1}.\phi'(s) = e_{\Delta'} = \tilde{f}(b)$

$b = e_F$ car $\tilde{f}$ conserve l'élément neutre d'après (B).

c) $a = (in_1 s)(in_2 s)$ le cas se traite comme au b)

$b = e_F$

D'après le lemme 4 il existe donc un <u>unique</u> homomorphisme $\tilde{\tilde{f}} = \sigma$ tel que $\sigma_\circ r = \tilde{f}$. Il en résulte :

$$\sigma_\circ \phi_S = \sigma_\circ r_\circ d_\circ in_1 = \tilde{f}_\circ d_\circ in_1 = f_\circ in_1 = \quad .$$

$\boxed{\text{Unicité de } \sigma}$ Supposons que $\sigma'_\circ \phi_S = \sigma_\circ \phi_S = \phi'_S$ et montrons que $\sigma' = \sigma$

Pour cela nous utilisons les unicités signalées ci-dessus en (A), (B) et (C) : il faut donc d'abore vérifier les propriétés correspondantes pour σ' :

(B)' $\quad \sigma'_\circ r(e_F) = e_{\Delta'}$, car $\sigma'((\overline{in_1 s}))^{-1}$ existe et c'est $\phi'(s)^{-1}$

puisque $\sigma'((\overline{in_1 s})) = \sigma'_\circ r_\circ d_\circ in_1(s) = \sigma'_\circ \phi_S(s) = \phi'(s)$

d'où le résultat d'après le lemme 1.

(C)' $\quad R_\circ \subseteq \overset{-1}{\sigma'_\circ} r(E_{\Delta'})$ car $aR_\circ b \Rightarrow \bar{a} = \bar{b}$ ie $\sigma'_\circ r(a) = \sigma'_\circ r(b)$

(4)' $\quad \sigma'_\circ r_\circ d(in_2 s) = \phi'(s)^{-1} \quad \forall s \in S$

D'après (B)' il nous suffit de démontrer que $\sigma'((\overline{in_2 s})) = \sigma'((\overline{in_1 s}))^{-1}$

en effet : $\left.\begin{array}{l} \text{condition b) et (C')} \Rightarrow \sigma'((\overline{in_2 s}))\,\sigma'((\overline{in_1 s})) = \sigma'(\bar{e}_F) = e_{\Delta'} \\ \text{condition c) et (C')} \Rightarrow \sigma'((\overline{in_1 s}))\,\sigma'((\overline{in_2 s})) = \sigma'(\bar{e}_F) = e_{\Delta'} \end{array}\right\}$ d'où

$$\sigma'((\overline{in_2 s})) = \sigma'((\overline{in_1 s}))^{-1} = \phi'(s)^{-1}$$

On a alors successivement :

- $\sigma'_\circ r_\circ d = f$ en effet : $\left\{\begin{array}{l} (\sigma'_\circ r_\circ d)_\circ in_1 = \phi' \text{ par hypothèse} \\ \sigma'_\circ r_\circ d(in_2 s) = \phi'(s)^{-1} \quad \forall s \in S \text{ d'après (A)'} \end{array}\right.$

  et on applique (A) : unicité de f

- $\sigma'_\circ r = \tilde{f}$ car $\left\{\begin{array}{l} (\sigma'_\circ r)_\circ d = f \\ \sigma'_\circ r(e_F) = e_{\Delta'}, \text{ d'après (B)'} \end{array}\right.$

  et on applique (B) : unicité de $\tilde{f}$

- $\sigma' = \sigma$ car $\left\{\begin{array}{l} \sigma'_\circ r = \tilde{f} \\ R_\circ \subseteq \overset{-1}{\sigma'_\circ} r(E_{\Delta'}) \text{ d'après (C')} \end{array}\right.$

  et on applique (C) : unicité de $\tilde{\tilde{f}} = \sigma$

On notera $(D[S^{-1}],\phi_S)$ la solution ainsi construite, qui est donc unique à un isomorphisme près. $D[S^{-1}]$ est appelé demi-groupe de fractions de D par rapport à S.

Remarque 1 : d'après la construction, tout élément ξ de $D[S^{-1}]$ s'écrit :

$\xi = \phi_S(x_1)^{\alpha_1}.\phi_S(x_2)^{\alpha_2} \dots \phi_S(x_n)^{\alpha_n}$ avec pour tout $i = 1,2,\dots,n$:

$x_i \in D$ et $\alpha_i = \pm 1$ et si $\alpha_i = -1$ $x_i \in S$

En d'autres termes $\phi_S(D) \cup \phi_S^{-1}(S)$ est un système générateur de $D[S^{-1}]$, ce que l'on écrit : $D[S^{-1}] = \langle \phi_S(D) \cup \phi_S^{-1}(S) \rangle$

Remarque 2 : il résulte du lemme 1 que si e_D existe alors $\phi_S \in H^1(D,D[S^{-1}])$

§ 3. Quelques propriétés de $D[S^{-1}]$.

Soit $\bar{S} = \langle S \rangle$ sous demi groupe engendré par S.

Théorème 2 : $D[S^{-1}]$ et $D[\bar{S}^{-1}]$ sont isomorphes.

Montrons que $(D[\bar{S}^{-1}], \phi_{\bar{S}})$ est solution du problème (D,S) :

$[DS]_1$ évident

$[DS]_2$ $\forall s \in S$ $\phi_{\bar{S}}(s)^{-1}$ existe car $S \subseteq \bar{S}$

$[DS]_3$ soit (Δ',ϕ') vérifiant $[DS]_1$ et $[DS]_2$ donc $\phi'(S) \subseteq \mathcal{U}(\Delta')$; or $\mathcal{U}(\Delta')$ est un sous-groupe de Δ' d'où $\phi(\bar{S}) \subseteq \mathcal{U}(\Delta')$ i.e (Δ',ϕ') vérifie $[D\bar{S}]_1$ et $[D\bar{S}]_2$ donc il existe σ unique tel que $\sigma \circ \phi_{\bar{S}} = \phi'$

Alors, $D[S^{-1}]$ et $D[\bar{S}^{-1}]$ étant solutions du même problème universel sont isomorphes.

Corollaire : Soit $\tilde{S} = \langle S \rangle \cup \mathcal{U}(D)$ et supposons $\mathcal{U}(D) \neq \emptyset$

Alors : $D[S^{-1}] \simeq D[\bar{S}^{-1}] \simeq D[\tilde{S}^{-1}]$

Montrons de même que $(D[\tilde{S}^{-1}],\phi_{\tilde{S}})$ est solution du problème (D,S) :

$[DS]_1$, $[DS]_2$ évident

$[DS]_3$ soit (Δ',ϕ') tel que $[DS]_1$ et $[DS]_2$ donc $\phi'(S) \subseteq \mathcal{U}(\Delta')$ et $\phi'(\bar{S}) \subseteq \mathcal{U}(\Delta')$. Or ϕ' conserve l'élément neutre (lemme 1) donc

$\phi'(\mathcal{U}(D)) \subseteq \mathcal{U}(\Delta')$ (lemme 1) d'où :

$\phi'(\tilde{S}) \subseteq \phi'(\bar{S}) \cup \phi'(\mathcal{U}(D)) \subseteq \mathcal{U}(\Delta') \cup \phi'(\mathcal{U}(D)) = \mathcal{U}(\Delta')$; le couple (Δ',ϕ') vérifie donc $[D\tilde{S}]_1$ et $[D\tilde{S}]_2$, on a alors un unique σ tel que $\sigma \circ \phi_{\tilde{S}} = \phi'$.

Proposition 2 : Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) ϕ_S est un isomorphisme.

b) $S \subseteq \mathcal{U}(D)$

a $\Longrightarrow$ b: si e' est l'élément neutre de $D[S^{-1}]$et $\bar{\phi}_S^{-1}$ l'isomorphisme réciproque : $\forall x \in D \quad \exists x' \in D[S^{-1}]$tel que $x = \bar{\phi}_S^{-1}(x')$ donc $x.\bar{\phi}_S^{-1}(e') = \bar{\phi}_S^{-1}(x'e') = \bar{\phi}_S^{-1}(x') = x$ et de même $\bar{\phi}_S^{-1}(e')x = x$. Donc $e_D = \bar{\phi}_S^{-1}(e')$ est l'élément neutre de D et $\bar{\phi}^{-1} \in H^1(D[S^{-1}],D)$. D'après le lemme 1 on a alors

$S = \bar{\phi}_S^{-1}(\phi_S(S)) \subseteq \bar{\phi}_S^{-1}(\mathcal{U}(D[S^{-1}])) \subseteq \mathcal{U}(D)$

b $\Longrightarrow$ a: montrons que $(D,1_D)$ est solution du problème (D,S) :

$[DS]_1$ évident.

$[DS]_2$ évident.

$[DS]_3$ si (Δ',ϕ') vérifie $[DS]_1$ et $[DS]_2$ il existe un unique σ tel que $\sigma \circ 1_D = \phi'$: c'est $\sigma = \phi'$.

On en déduit que $D[\mathcal{U}(D)^{-1}] \simeq D$. Retenons seulement que le couple $(D,1_D)$ vérifie $[DS]_1$ et $[DS]_2$ ainsi que le couple $(D[S^{-1}],\phi_S)$. Comme ce dernier est solution du problème (D,S) on a :

$$\left.\begin{array}{l} \circ \text{ un unique } \sigma \text{ tel que } \sigma \circ \phi_S = 1_D \text{ donc } (\phi_S \circ \sigma) \circ \phi_S = \phi_S \\ \circ \text{ un unique } \rho \text{ tel que } \rho \circ \phi_S = \phi_S \text{ donc } \rho = 1_{D[S^{-1}]} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \phi_S \circ \sigma = \rho = 1_{D[S^{-1}]} \\ \text{or } \sigma \circ \phi_S = 1_D \end{array}\right\} \quad \phi_S \text{ est donc un isomorphisme.}$$

Proposition 3 : Considérons le diagramme :

où f est un homomorphisme,

T un complexe de D'

et où $f(S) \subseteq T$. Alors il existe

$\hat{f}$ unique tel que $\hat{f} \circ \phi_S = \phi_T \circ f$

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_S"'] & D' \arrow[d, "\phi_T"] \\ D[S^{-1}] \arrow[r, dashed, "\hat{f}"] & D'[T^{-1}] \end{tikzcd}$$

En effet le couple $(D'[T^{-1}] , \phi_T \circ f)$ vérifie $[DS]_1$ et $[DS]_2$ car $f(S) \subseteq T$ et la condition $[DS]_3$ entraine alors l'existence de l'unique $\hat{f}$ tel que $\hat{f} \circ \phi_S = \phi_T \circ f$

Remarque : $\hat{f}$ conserve l'élément neutre car si $s \in S$ $\hat{f}[\phi(s)]$ est inversible et son inverse est $[\phi_T \circ f(s)]^{-1}$ d'où le résultat d'après le lemme 1

Corollaire : Si de plus f est surjectif alors $\hat{f}$ aussi cf. (3).

Cas particulier : $S = D$ et $T = D'$; il est facile de voir qu'alors $D[D^{-1}]$ est un groupe engendré par $\phi_D(D)$. On a donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_D"'] & D' \arrow[d, "\phi_{D'}"] \\ D[D^{-1}] \arrow[r, dashed, "\hat{f}"] & D'[D'^{-1}] \end{tikzcd}$$

où $\hat{f}$ est un homomorphisme de groupes, car il conserve l'élément neutre d'après la remarque précédente donc $\hat{f}(x)^{-1} = \hat{f}(x^{-1})$ d'après le lemme 1.

Ceci permet de définir un foncteur ϕ de la catégorie $\mathbb{D}$ des demi-groupes dans la catégorie $\mathbb{G}$ des groupes :

$$\phi(D) = D[D^{-1}] \qquad \text{pour tout } D \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{D}$$

$$\phi(f) = \hat{f} \qquad \text{pour tout } f \in \mathrm{Hom}\,\mathbb{D}$$

le fait que $\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}$ est dû à l'unicité de $\widehat{g \circ f}$. Pour la même raison : $\phi(1_D) = 1_{D[D^{-1}]}$

§ 4. Fractions à droite.

Un élément ξ de $D[S^{-1}]$ est une fraction à droite s'il peut s'écrire $\xi = \phi_S(a)\, \phi_S(s)^{-1}$ avec $a \in D$, $s \in \langle S \rangle$ sous-demi groupe engendré par S. Si tout $\xi \in D[S^{-1}]$ est une fraction à droite, $D[S^{-1}]$ est appelé demi-groupe de fractions à droite de D par rapport à S.

Théorème 3 : $D[S^{-1}]$ est un demi-groupe de fractions à droite si et seulement si :

le couple (D,S) vérifie la condition (Sd) mod R_{ϕ_S} :

$\forall(a,s)\in D\times S \quad \exists(a',s')\in D\times\langle S\rangle$ tel que $as' R_{\phi_S} sa'$

Pour que tout élément soit une fraction à droite il faut et il suffit que tout élément de la forme $\phi(s)^{-1}\phi(a)$, $a\in D$, $s\in S$ puisse s'écrire $\phi(b)\phi(t)^{-1}$ $b\in D$, $t\in\langle S\rangle$ c'est-à-dire $\phi(s)^{-1}\phi(a) = \phi(b)\phi(t)^{-1}$ ou bien $\phi(at) = \phi(sb)$ ie $atR_{\phi_S}sb$.

On sait construire, cf (5), la plus fine congruence simplifiable par les éléments d'une partie S de D. Soit R_S cette congruence. R_{ϕ_S} étant une congruence simplifiable dans S on a donc $R_S\subseteq R_{\phi_S}$. Mais on peut démontrer, cf (3) que les conditions (Sd)modR_{ϕ_S} et (Sd)modR_S sont équivalentes, et que si l'une des deux est vérifiée alors $R_{\phi_S} = R_S$.

§.5 Immersion de D dans $D[S^{-1}]$.

Théorème 4 : Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) D est immersible dans $D[S^{-1}]$

b) S est simplifiable dans D et $R_{\phi_S}\subseteq R_S$

c) $R_{\phi_S} = \mathcal{E}_D$

d) $\forall x,y\in D$ tels que $x\neq y$ il existe un couple (Δ,ϕ) vérifiant

$[DS]_1$ et $[DS]_2$ et tel que $\phi(s)\neq\phi(y)$

e) la clôture de tout système de S-équations de Malcev est valide dans D

L'équivalence de a) b) et c) est évidente car S est simplifiable ssi $R_S = \mathcal{E}_D$. a) $\sim$ d) c'est une propriété d'injectivité pour la solution d'un problème universel cf (1).

c) $\sim$ d) la condition e) est la généralisation de la condition de Malcev cf (2), (3).

Corollaire : Si S est simplifiable dans D et si $(Sd)\mathrm{mod}\mathcal{E}_D$, ou bien $(Sg)\mathrm{mod}\mathcal{E}_D$ condition duale, est vérifiée, alors :

D est immersible dans $D[S^{-1}]$.

En effet on a alors d'après le § 4 : $R_{\phi_S} = R_S = \mathcal{E}_D$. Cette condition est la condition de Ore généralisée, cf (5) : si $(Sd)\mathrm{mod}\mathcal{E}_D$ est vérifiée, $D[S^{-1}]$ est un demi-groupe de fractions à droite dans lequel D est immergé.

§ 6. Immersion de D dans un groupe.

On a vu que si S = D, $D[S^{-1}]$ est un groupe. D'après le théorème 2 et son corollaire, on a plus généralement : si S est un système générateur de $D-\mathcal{U}(D)$ supposé non vide (ie D n'est pas un groupe) alors $D[S^{-1}]$ est un groupe. Soit Γ l'ensemble des systèmes générateurs de $D-\mathcal{U}(D)$:

$S \in \Gamma$ ssi $\langle S\rangle = D-\mathcal{U}(D)$.

Théorème 5 : Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) D est immersible dans un groupe

b) il existe $S \in \Gamma$ tel que D soit immersible dans $D[S^{-1}]$

$a \Rightarrow b$ soit $\phi' : D \to G$ injectif, alors (G,ϕ') est un couple vérifiant les conditions $[DD]_1$ et $[DD]_2$ donc il existe σ unique tel que $\sigma \circ \phi_D = \phi'$ or ϕ' est injectif donc ϕ_D aussi. Comme $D[D-\mathcal{U}(D)^{-1}] \simeq D[D^{-1}]$ on a $\phi_{D-\mathcal{U}(D)}$ injectif cqfd, puisque $D-\mathcal{U}(D) \in \Gamma$

$b \Rightarrow a$ évident car $D[S^{-1}]$ est un groupe.

Ce résultat montre que le problème de l'immersion dans un groupe est un cas particulier du problème de l'immersion dans un demi-groupe de fractions. On peut donc appliquer les résultats du théorème 4 avec $S \in \Gamma$, la condition e) devient alors exactement celle de Malcev. Et d'après le corollaire de ce même théorème :

Corollaire : S'il existe $S \in \Gamma$ tel que S soit simplifiable et que $(Sd)\mathrm{mod}\mathcal{E}_D$ soit vérifiée (ou bien $(Sg)\mathrm{mod}\mathcal{E}_D$) alors D est immersible dans un groupe qui est un groupe de fractions à droite (resp. à gauche).

Ces conditions sont équivalentes à celles de Ore cf (2).

Remarques : Si $D[S^{-1}]$ est un groupe alors D ne possède pas de zéro à gauche, ni à droite, ou bien card D = 1.

. si D est immersible dans un groupe et s'il possède un idempotent e alors e est l'élément neutre de D et l'unique idempotent de D.

. pour tout $S \in \Gamma$ $D[S^{-1}] \simeq D[D^{-1}]$

Appendice : D-groupes libres.

Soit D un demi-groupe : un groupe G est un D-groupe, cf (2), s'il existe $\phi \in H(D,G)$ tel que G soit engendré par $\phi(D)$ ie $G = <\phi(D) \cup \phi^{-1}(D)>$.

Un groupe G est un D-groupe libre si :

1) G est un D-groupe ; soit ϕ l'homomorphisme associé

2) pour tout D-groupe G' d'homomorphisme associé ϕ' il existe σ unique tel $\sigma_\circ\phi = \phi'$

On a vu (§ 2 remarque 1) que $D[D^{-1}] = <\phi_D(D) \cup \phi_D^{-1}(D)>$ $D[D^{-1}]$ est donc un D-groupe ; de plus la condition 2) est réalisée car elle moins forte que $[DD]_3$. Il s'ensuit :

. que $D[D^{-1}]$ est un D-groupe libre

. que tous les D-groupes libres sont isomorphes.

. que, en particulier, le D-groupe libre défini dans (2) est isomorphe à $D[D^{-1}]$.

BIBLIOGRAPHIE

(1) BOURBAKI : Théorie des ensembles ch. 4 - Structures.

(2) CLIFFORD et PRESTON : The algebraic theory of semi-groups (Am. Math. Soc. 1961).

(3) FAISANT : Rapport de D.E.A. 1968 et Séminaires P. Lefebvre 1968-69 (Lyon)

(4) GABRIEL et ZISMAN : Calculus of fractions and homotopy theory. (Springer Verlag 1967).

(5) LEFEBVRE : Semi-groups and Rings of fractions (University of Tennessee 1968, Knoxville U.S.A.).

Manuscrit remis le 15 mars 1969.

A. FAISANT
Assistant
Département de Mathématiques
43, bd du 11 novembre 1918
VILLEURBANNE