PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

GEORGE GEORGESCU
CONSTANTIN VRACIU

Sur le spectre maximal d'une algèbre de Lukasiewicz

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1969, tome 6, fascicule 1
, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1969__6_1_1_0>

© Université de Lyon, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1969 t. 6-1

SUR LE SPECTRE MAXIMAL D'UNE ALGEBRE DE LUKASIEWICZ

par George Georgescu et Constantin Vraciu

On donne, à l'aide du spectre maximal, une théorie de la dualité pour les algèbres de Lukasiewicz n-valentes, analogue à la théorie de la dualité pour les anneaux commutatifs (12). On caractérise la catégorie des algèbres de Lukasiewicz n-valentes pour lesquelles la théorie de dualité est semblable à la théorie de dualité pour les algèbres de Boole (voir (8), (10) ou (13)) et à la théorie de dualité de Pontrjagin pour les groupes abéliens.

<u>Définition 1</u> : Un ensemble L s'appelle algèbre de Lukasiewicz n-valente s'il satisfait les axiomes suivants :

I) L est un treillis distributif avec un plus petit et un plus grand élément ;

II) Il existe une application $N : L \longrightarrow L$, dite négation, avec les propriétés suivantes :

$$N(x \cap y) = N\,x \cup N\,y\ ,\quad N(x \cup y) = N\,x \cap N\,y\ ,\quad N\,N\,x = x$$

III) Il existe n-1 applications $\sigma_i : L \longrightarrow L$, dénommées morphismes chrysippiens avec les propriétés :

$$\sigma_i\,0 = 0\ ,\ \sigma_i 1 = 1\ ,\ \sigma_i x \cap N\sigma_i x = 0\ ,\ \sigma_i x \cup N\sigma_i x = 1,$$

IV) $\sigma_h\,\sigma_k\,x = \sigma_k\,x$

$\sigma_i\,Nx = N\,\sigma_j\,x$, pour tout i, j tels que $i+j = n$

V) $\sigma_1 x \subset \sigma_2 x \subset \ldots\ \subset \sigma_{n-1} x$, pour tout $x \in L$

VI) Si $\sigma_i x = \sigma_i y$ pour tout $i = 1,\ldots,n-1$, alors $x = y$.

Définition 2 : Etant données les algèbres de Lukasiewicz n-valentes L, L', une application $f : L \longrightarrow L'$ est dite morphisme d'algèbres de Lukasiewicz n-valentes si on a :

$f(x \cup y) = f(x) \cup f(y)$, $f(x \cap y) = f(x \cap y)$

$f(0) = 0, f(1) = 1$, $f\,N(x) = N\,f(x)$, $f\sigma_i(x) = \sigma_i(f(x))$, $i = 1,\dots,n-1$.

Nous allons considérer la catégorie Luk_n des algèbres de Lukasiewicz n-valentes dont les objets et les morphismes ont été définis ci-dessus.

Définition 3 : Soit $L \in ObLuk_n$. On nomme idéal de L tout sous-ensemble non-vide $\underline{a} \subset L$, tel que :

$x, y \in \underline{a} \Longrightarrow x \cup y \in \underline{a}$

$x \in \underline{a}, y \subset x \Longrightarrow y \in \underline{a}$

Pour tout sous-ensemble M de L, nous allons considérer les sous-ensembles de L.

$$M_i = \{x \in L \; ; \; \sigma_i x \in M\} \quad , \quad i = 1,2,\dots,n-1$$

Proposition 1 : Si $\underline{a}$ est un idéal de L, alors $\underline{a}_{n-1} \subset \underline{a}$.

Démonstration : En effet, si $x \in \underline{a}_{n-1}$, alors $\sigma_{n-1} x \in \underline{a}$ et tenant compte que $x \subset \sigma_{n-1} x$, il résulte $x \in \underline{a}$.

Définition 4 : Un idéal $\underline{a}$ de L est dénommé n-idéal si $\underline{a}_{n-1} = \underline{a}$ $\underline{a}$ est donc n-idéal si et seulement si $\sigma_{n-1} x \in \underline{a}$

Proposition 2 : Toute intersection de n-idéaux est un n-idéal.

La démonstration de cette proposition est immédiate.

Pour tout sous-ensemble $G \subset L$, le n-idéal (G) obtenu par l'intersection de tous les idéaux de L qui contiennent G sera dénommé l'idéal engendré par G. Si $G = \emptyset$, alors $(G) = (0)$.

Proposition 3 : Si $G \neq \emptyset$, alors

$$(G) = \{x \ ; \ (\exists)\ y\ ,\ x \subset \sigma_{n-1} y,\ y = y_1 \cup \ldots \cup y_p\ ,\ y_k \in G\ ,\ k=1 \ldots, p\}$$

Démonstration : L'ensemble $G' = \{x \ ; \ (\exists) y, x \subset \sigma_{n-1} y,\ y = y_1 \cup \ldots \cup y_p, y_k \in G, k=1,\ldots,p\}$ est un n-idéal et comme on a $G \subset G'$, il résulte $(G) \subset G'$. Soit maintenant $\underline{a}$ un n-idéal tel que $\underline{a} \supset G$. Si $y = y_1 \cup \ldots \cup y_p$, avec $y_k \in G$, pour $k=1,\ldots,p$, alors $y \in \underline{a}$ et donc $\sigma_{n-1} y \in \underline{a}$. Mais on a $x \subset \sigma_{n-1} y$ et il résulte $x \in \underline{a}$. Donc $(G) \supset G'$.

Un n-idéal est dénommé propre si il est un sous-ensemble propre de L. La condition nécessaire et suffisante pour que l'idéal $\underline{a}$ soit propre est $1 \notin \underline{a}$.

Proposition 4 : Soit $\underline{a}$ un n-idéal de L et $x \in L$ un élément chryssippien (voir (5))*.

Alors le n-idéal engendré par $\underline{a} \cup \{x\}$ est propre si et seulement si $N x \notin \underline{a}$.

Démonstration : En effet, si $\underline{b}$ est le n-idéal engendré par $\underline{a} \cup \{x\}$ et $Nx \in \underline{a}$, alors $x \in \underline{b}$ et $Nx \in \underline{b}$, donc $1 = x \cup Nx \in \underline{b}$ et donc $\underline{b}$ n'est pas propre. Réciproquement, si $\underline{b}$ n'est pas propre, alors $1 \in \underline{b}$, donc il existe $y \in \underline{a}$ tel que $y \cup x \supset 1$; il résulte $1 = y \cup x$. Dans ce cas, on a :

$$y = y \cup 0 = y \cup (x \cap Nx) = (y \cup x) \cap (y \cup Nx) = 1 \cap (y \cup Nx) = y \cup Nx.$$

Donc $y \supset Nx$. Comme on a $y \in \underline{a}$, il résulte $Nx \in \underline{a}$.

Proposition 5 : Soient les n-idéaux $\underline{a}$ et $\underline{a}'$. Si $\underline{a}' \supset \underline{a}$, $\underline{a} \neq \underline{a}'$, il existe $x \in \underline{a}'$ tel que $x \notin \underline{a}$ et x est chryssippien.

En effet il existe $y \in \underline{a}'$ avec $y \notin \underline{a}$ et il suffit de considérer $x = \sigma_{n-1} y$. L'ensemble des n-idéaux propres d'une algèbre de Lukasiewicz n-valente est ordonné par inclusion. On appelle n-idéal maximal tout élément maximal de cet ensemble ordonné.

Proposition 6 : Un idéal propre $\underline{a}$ est maximal si et seulement si pour tout élément chryssippien $x \in L$, on a $x \in \underline{a}$ ou $Nx \in \underline{a}$.

* Un élément $x \in L$ est dit chryssippien si $x \cup Nx = 1$ et $x \cap Nx = 0$.

Démonstration. Soit $\underline{a}$ un idéal propre maximal et x chryssippien tel que $x \notin \underline{a}$. Considérons le n-idéal $\underline{b}$ engendré par $\underline{a} \cup \{x\}$. Si on suppose $Nx \notin \underline{a}$ alors, $\underline{b}$ est maximal et $\underline{b} \supset \underline{a}$, $\underline{a} \neq \underline{b}$, ce qui contredit l'hypothèse que $\underline{a}$ est maximal. Réciproquement, soit $\underline{b}$ un n-idéal tel que $\underline{b} \supset \underline{a}$. Si $\underline{a} \neq \underline{b}$, alors de la proposition 5 il résulte qu'il existe x chryssippien avec $x \in \underline{b}$, $x \notin \underline{a}$. Dans ce cas $Nx \in \underline{a} \subset \underline{b}$, donc $1 = x \cup Nx \in \underline{b}$, ce qui montre que $\underline{b}$ n'est pas propre. Donc $\underline{a}$ est un idéal maximal.

Proposition 7 : Pour tout n-idéal propre $\underline{a}$ de L, il existe un n-idéal maximal qui contient $\underline{a}$.

Démonstration : Soit F l'ensemble des n-idéaux propres ordonné par inclusion. Considérons $F_1 \subset F$ totalement ordonné. Soit $G = \bigcup_{\underline{a} \in F_1} \underline{a}$ et (G) le n-idéal engendré par G. Nous allons montrer que (G) est propre. En effet, si (G) n'est pas propre, alors $1 \in (G)$ et il existe donc y, avec $y = y_1 \cup \ldots \cup y_p$, $y_k \in G$, $k=1,\ldots,p$, tel que $1 \subset \sigma_{n-1} y$. Alors pour chaque $k = 1,\ldots,p$, il existe $\underline{a}_k \in F$ et $y_k \in a_k$ $\underline{F}_1$ étant totalement ordonné, il existe k_0 tel que $1 \leqslant k_0 \leqslant p$ et $y_k \in \underline{a}_{k_0}$ pour tout $k=1,\ldots,p$. Alors $y = y_1 \cup \ldots \cup y_p \in \underline{a}_{k_0}$, donc $1 = \sigma_{n-1} y \in \underline{a}_{k_0}$, donc $\underline{a}_{k_0}$ n'est pas propre, ce qui est absurde.

Donc (G) est un idéal propre, qui est un majorant de F. Il résulte que F est inductivement ordonné. Appliquant l'axiome de Zorn, la démonstration est finie.

Proposition 8 : Tout n-idéal propre de L est l'intersection de tous les n-idéaux maximaux qui le contiennent.

Démonstration : Soit $\underline{a}$ un n-idéal propre. Alors il existe un élément chryssippien $x \in L$ tel que $x \notin \underline{a}$. Soit $x' = Nx$ et $\underline{b}$ l'idéal engendré par 1 et x'. Comme on a $Nx' = x \notin \underline{a}$, $\underline{b}$ est un idéal propre, donc il existe (voir proposition 7) un n-idéal maximal $\underline{c}$ qui contient $\underline{b}$. Mais $x' \in \underline{c}$ (voir proposition 6). Il résulte $x = Nx' \in \underline{c}$, ce qui achève la démonstration.

Pour toute algèbre de Lukasiewicz n-valente L, on nommera spectre maximal de L l'ensemble Max L de tous les idéaux maximaux de L. Pour tout sous-ensemble M de L on notera $v(M) = \{\underline{a} \in \text{Max } L \ ; \ M \subset \underline{a}\}$. Si $M = \{x\}$, on notera $v(x) = v(\{x\})$.

Proposition 9 : Avec les notations ci-dessus, les relations suivantes sont vraies :

(i) $v(o) = \text{Max } L \ ; \ v(1) = \emptyset$

(ii) Si $x, y \in L$, alors $v(x \cup y) = v(x) \cap v(y)$

(iii) Si $M' \supset M$, alors $v(M) \supset v(M')$

(iv) $v(\bigcup_{\lambda \in J} M_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in J} v(M_\lambda)$

(v) $v(M) = v((M))$, où (M) est le n-idéal engendré par M.

Démonstration (i) : Pour tout $\underline{a} \in \text{Max } L$, on a $0 \in \underline{a}$ et $1 \notin \underline{a}$, donc $v(o) = \text{Max } L$ et $v(1) = \emptyset$.

(ii) Si $\underline{a} \in \text{Max } L$, alors $x \cup y \in \underline{a}$ si et seulement si $x \in \underline{a}$ et $y \in \underline{a}$.

(iii) Evidemment, pour chaque $\underline{a} \in \text{Max } L$, si $M' \subset \underline{a}$, alors $M \subset \underline{a}$.

(iv) Pour chaque $\mu \in J$ on a $M_\mu \in \bigcup_\lambda M_\lambda$, donc $v(\bigcup_\lambda M_\lambda) \subset v(M_\lambda)$. Il résulte $v(\bigcup_\lambda M_\lambda) = \bigcap_\lambda v(M_\lambda)$. Réciproquement, si pour $\underline{a} \in \text{Max } L$, on a $M_\lambda \subset \underline{a}$, pour tout $\lambda \in J$, alors $\bigcup_\lambda M_\lambda \subset \underline{a}$. Il résulte que $\bigcap_\lambda v(M_\lambda) \subset v(\bigcup_\lambda M_\lambda)$.

(v) On a $M \subset (M)$, donc, d'après (iii), on a $v((M)) \subset v(M)$. Réciproquement, pour $\underline{a} \in \text{Max } L$, avec $M \subset \underline{a}$, on a $(M) \subset \underline{a}$, donc $v(M) \subset v((M))$.

Pour tout $x \in L$, nous désignons par $d(x)$ l'ensemble :

$$\{\underline{a} \in \text{Max } L \ ; \ x \notin \underline{a}\}$$

Soit F un sous-ensemble de Max L ; nous notons $i(F) = \bigcap_{\underline{a} \in F} \underline{a}$.

Généralement, $i(F)$ est un n-idéal de L.

Proposition 10 : Pour chaque sous-ensemble F de Max L et pour chaque sous-ensemble M de L, nous avons :

(i) $F \subset v\ i\ (F)$

(ii) $i(F) = i\ v\ i\ (F)$

(iii) $v\ i\ v\ (M) = v\ (M)$

Démonstration :

(i) Pour tout $\underline{a} \in F$, on a $i(f) = \bigcap_{\underline{a} \in F} a \subset \underline{a}$, donc $F \subset v\ i\ (F)$

(ii) On a $F \subset v\ i\ (F)$, d'après (i), donc $i\ v\ i\ (F) \subset i\ (F)$. Réciproquement, si $x \in i(F)$, alors pour chaque $\underline{a} \in v\ i\ (F)$ on a $i(F) \subset \underline{a}$, donc $x \in \underline{a}$, ce qui prouve que $i(F) \subset i\ v\ i\ (F)$

(iii) On a $v\ (M) \subset v\ i\ v\ (M)$, d'après (i). Réciproquement, si $\underline{a} \in \text{Max } L$ et $i\ v\ (M) \subset \underline{a}$, alors $M \subset \bigcap_{\underline{b} \in v(M)} \underline{b} = i\ v\ (M) \subset \underline{a}$, donc $\underline{a} \in v(M)$.

Pour tout sous-ensemble F de Max L, nous désignons $v\ i\ (F)$ par $c(F)$ et $\bigcap c(x)$ par $d(x)$.

Proposition 11 : c est un opérateur de fermeture de Kuratowski dans Max L.

Démonstration : Comme on a $i\ (\emptyset) = L$ et $v\ (L) = \emptyset$, il résulte $c(\emptyset) = \emptyset$. Pour toute partie F de Max L, on a $F \subset c(F)$, d'après la proposition 10 (i) et $c\ c\ (F) = v\ i\ v\ i\ (F) = v\ i\ (F) = c\ (F)$, d'après la proposition 10 (ii).

Prouvons que $c\ (F \cup F') = c\ (F) \cup c(F)$, pour chaques parties F, F' de Max L. Si $\underline{a} \in c\ (F)$, alors $i(F) \subset \underline{a}$, donc $i\ (F \cup F') \subset i\ (F) \subset \underline{a}$, d'où il résulte $\underline{a} \in c(F \cup F')$, ce qui prouve que $c(F) \cup c(F') \subset c(F \cup F')$. Réciproquement, si $i(F) \not\subset \underline{a}$, et $i(F') \not\subset \underline{a}$, il existe $x \in \underline{a}$, $\underline{b}_x \in F$, tel que $x \notin \underline{b}_x$ et $y \in \underline{a}$, $\underline{b}_y \in F$, tel que $y \notin \underline{b}_y$. Alors $x \cup y \in \underline{a}$ et $x \cup y \notin \underline{b}_x \in F \cup F'$, donc $\underline{a} \notin c(F \cup F')$.

La topologie définie par la proposition 11 sera dénommée la topologie de Zariski du spectre maximal de L.

Observations : a) Pour tout sous-ensemble M de L, $v(M)$ est fermé dans Max L et réciproquement, tout sous-ensemble fermé de Max L est de la forme $v(A)$, où A est un n-idéal de L. En effet, $c(v(M)) = v\ i\ v\ (M) = v\ (M)$, d'après la proposition 11 (iii). Si F est fermé dans Max L, alors $A = i\ (F)$ est un n-idéal dans L, donc $F = c(F) = v\ i\ (F) = v(A)$.

b) $d(x)$ est un ensemble ouvert dans Max L, étant la complémentaire d'un ensemble fermé dans Max L. Si M est un ensemble ouvert dans Max L, alors $c(M)$, comme ensemble fermé, est de la forme $v(M) = v(\bigcup_{x\in M}\{x\}) =$ $= \bigcap_{x\in M} v(x)$, donc $M = \complement(v(M)) = \complement(\bigcap_{x\in M} v(x)) = \bigcup_{x\in M} \complement(v(x) = \bigcup_{x\in M} d(x)$. Il résulte que $\{d(x)\}_{x\in L}$ est une base pour les ouverts de Max L.

Proposition 12 : Pour tout $x \in L$, $d(x)$ est quasi-compact.

Démonstration : $d(x)$ étant ouvert dans Max L, il suffit de prouver que, si $d(x) \subset \bigcup_{i\in I} d(x_i)$, alors il existe un sous-ensemble fini K de I, tel que $d(x) \subset \bigcup_{i\in K} d(x_i)$. Si $d(x) \subset \bigcup_{i\in I} d(x_i)$, il résulte que

$$v(x) \supset \bigcap_{i\in I} v(x_i) = v(\bigcup_{i\in I} \{x_i\}).$$

Soit $\underline{a}$ le n-idéal engendré de $\bigcup_{i\in I}\{x_i\}$. On a, d'après la proposition 3, $v(\underline{a}) = v(\bigcup_{i\in I}\{x_i\})$ donc $v(x) \supset v(\underline{a})$. Mais $\underline{a}$ est l'intersection des n-idéaux maximaux qui le contiennent et tenant compte que x appartient à tout n-idéal maximal qui contient $\underline{a}$, on a $x \in \underline{a}$, donc d'après la proposition 3, il existe $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n} \in \underline{a}$, tels que $x \subset x_{i_1} \cup \ldots \cup x_{i_n}$. Alors $v(x) \supset v(x_{i_1} \cup \ldots \cup x_{i_n}) =$ $= v(x_{i_1}) \cap \ldots \cap v(x_{i_n})$ d'après la proposition 9, (iii) et (ii). Donc $D(x) \supset D(x_{i_1}) \cup \ldots \cup D(x_{i_n})$.

Particulièrement $L = d(o)$ est quasi-compact.

Proposition 13 : Soit $f : L \to L'$ un morphisme de Luk_n. Si $\underline{a}'$ est un n-idéal maximal de L', alors $f^{-1}(\underline{a}')$ est un n-idéal maximal de L.

Démonstration : Evidemment, $f^{-1}(\underline{a}')$ est un n-idéal propre. Pour tout élément chryssippien $x \in L$, $f(x)$ est chryssippien dans L', donc $f(x)$ ou $N f(x) = f(Nx)$ appartient à $\underline{a}'$, ce qui montre que $x \in f^{-1}(\underline{a}')$ ou $N x \in f^{-1}(\underline{a}')$, donc $f^{-1}(\underline{a}')$ est un n-idéal maximal de L.

On obtient donc une application $f_* = \text{Max } f : \text{Max } L' \longrightarrow \text{Max } L$.

<u>Proposition 14</u> : f_* est une application continue.

<u>Démonstration</u> : On a les équivalences suivantes : $\underline{a}' \in f_*^{-1}(d(x)) \rightleftarrows f_*(\underline{a}') \in d(x) \rightleftarrows x \in f_*(\underline{a}') = f^{-1}(\underline{a}') \rightleftarrows f(x) \in \underline{a}' \rightleftarrows \underline{a}' \in d(f(x))$.

D'après l'observation b) de ci-dessus, f_* est une application continue. On a donc un foncteur contrevariant Max défini sur la catégorie des algèbres de Lukasiewicz n-valentes avec les valeurs dans la catégorie des espaces topologiques quasi-compacts.

<u>Définition 5</u> : On va nommer n-espace géométrique de Lukasiewicz tout couple

(X, L_X) où X est un espace topologique et L_X est un faisceau d'algèbres de Lukasiewicz n-valentes, tel que pour tout $x \in X$, la fibre L_x de L_X est une algèbre de Lukasiewicz n-valente locale (i.e. elle a un seul n-idéal maximal désigné par $\underline{m}_x$).

<u>Définition 6</u> : Soient (X, L_X), (Y, L_Y) deux n-espaces géométriques de Lukasiewicz

On va nommer morphisme des espaces géométriques de Lukasiewicz un couple $u = (f, \alpha)$, où $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue et α est une famille (α_V^U) de morphismes de Luk_n avec les propriétés suivantes :

a) Si U est un ouvert de X et V est un ouvert de Y, tel que

$f(U) \subset V, \alpha_V^U : L_Y(V) \rightarrow L_X(U)$ est un morphisme de Luk_n,

compatible avec les restrictions aux ensembles ouverts contenus en U et V.

b) Pour tout $x \in X$ et $y = f(x)$, les morphismes α_V^U induisent un morphisme local $f_x : L_y \rightarrow L_x$ (i.e. $f_x(\underline{m}_y) \subset \underline{m}_x$)

On désignera par $Esgl_n$ la catégorie donnée par les définitions 5 et 6. $Esgl_n$ est une catégorie avec des limites inductives et projectives.

Soient $x \in L$ et S_x le n-filtre de L obtenu en considérant la complémentaire de (x). L'algèbre quotient L/S_x est une algèbre de Lukasiewicz n-valente locale. L'association $D(x) \rightsquigarrow L_x$ définit un pré-faisceau sur Max L. Le faisceau $L^{\sim}$ associé à ce pré-faisceau sera dénommé le faisceau structural du spectre maximal de L.

Définition 7 : Le n-espace géométrique de Lukasiewicz (Max L, $L^{\sim}$) est nommé le n-schéma de Lukasiewicz associé à L. On désignera par $Schl_n$ la catégorie de n-schémas de Lukasiewicz.

Proposition 15 : La catégorie duale de Luk_n est équivalente à $Schl_n$.

Démonstration : On va considérer les foncteurs contrevariants suivants :

$$\Gamma : Esgl_n \longrightarrow Luk_n, \ \underline{Max} : Luk_n \longrightarrow Esgl_n$$

défini de la façon suivante : $\Gamma(X, L_X) = L_X(X)$ et si $(f, (\alpha_V^U))$: $(X, L_X) \longrightarrow (Y, L_Y)$ est un morphisme de $Esgl_n$: $\Gamma(f, (\alpha_V^U)) = \alpha_X^Y$;

Max est défini canoniquement : $L \rightsquigarrow (\underline{Max}L, L^{\sim})$. Nous montrerons que Γ est un adjoint à gauche de $\underline{Max}$. Pour tout $L \in ObLuk_n$, considérons le morphisme

$$\Phi_L : L \longrightarrow \Gamma\underline{Max}\ L = \Gamma(MaxL, L^{\sim})$$

donné par le morphisme canonique défini par la construction du faisceau associé à un pré-faisceau.

Les morphismes $\{\Phi_L\}$ définissent un morphisme fonctoriel

$$\Phi : \mathfrak{I}dLuk_n \longrightarrow \Gamma.\underline{Max}$$

On prouve que Φ est un isomorphisme fonctoriel.

Pour tout (X, L_X) on peut définir canoniquement un morphisme.

$$\psi\ (X, L_X) : (L_X(X)\ ,\ (L_X(X))^{\sim}) \longrightarrow (X, L_X)$$

Les morphismes $\{\psi_{(X, L_X)}\}$ définissent un morphisme fonctoriel

$$\psi : \underline{Max}.\Gamma \longrightarrow \mathfrak{I}\,dEsgl_n$$

Il est facile de constater que $\psi(\mathrm{Max}L, L^{\sim})$ sont des isomorphismes fonctoriels. D'après la proposition 1. 28 de (9), la proposition est prouvée.

On va caractériser maintenant la sous-catégorie de Luk_n dont la détermination du dual revient à considérer les spectres maximaux et les applications continues entre ces spectres. Pour cela, nous allons considérer pour une algèbre de Lukasiewicz n-valente L la propriété suivante :

($*$) Pour toute séquence finie $x_1 \subset x_2 \subset \ldots \subset x_{n-1}$ d'éléments de L, il existe un seul élément $x \in L$ tel que $x_i = \sigma_i x$, pour $i = 1, \ldots, n-1$.

<u>Proposition 16</u> : Les affirmations suivantes sont équivalentes :

a) $\mathcal{C}$ est la sous-catégorie pleine de Luk_n formée par les algèbres de Lukasiewicz qui accomplissent la propriété ($*$).

b) La restriction à $\mathcal{C}$ du foncteur Max : $Luk_n \longrightarrow Top$ est un foncteur pleinement fidèle.

<u>Démonstration</u> : Soit $\mathfrak{B}$ la catégorie des algèbres de Boole. Si à chaque algèbre de Lukasiewicz n-valente L on associe l'ensemble CL de ses éléments chryssippiens on obtient un foncteur C : $Luk_n \longrightarrow \mathfrak{B}$. Pour chaque algèbre de Boole B considérons le sous-treillis de B^{n-1} :

$$DB = \{ (x_1, \ldots, x_{n-1}) \ ; \ x_1 \subset x_2 \subset \ldots \subset x_{n-1} \}$$

Dans (3) on a montré que l'association B DB est un foncteur qui est adjoint à gauche de C ; D est pleinement fidèle et C est fidèle. On observe que toute algèbre de Lukasiewicz n-valente est isomorphe à la sous-algèbre de Lukasiewicz n-valente de DB formée par les éléments de la forme $(\sigma_1 x, \ldots, \sigma_{n-1} x)$, où x est un élément quelconque de L. On sait que C est pleinement fidèle sur une sous-catégorie D de Luk_n si et seulement si on a un isomorphisme fonctoriel.

$$(1) \quad \mathrm{Id}\, D \simeq D\, C$$

Supposons a) vraie ; il résulte facilement qu'on a l'isomorphisme (1). On déduit immédiatement, en appliquant la proposition 6, que les idéaux maximaux de L et les idéaux maximaux de CL sont en correspondance bijective. C étant pleinement fidèle, il résulte que Max = SC , où S est le foncteur de dualisation de Stone définie sur la catégorie des algèbres de Boole avec les valeurs dans la catégorie des espaces totalement disconnexes. S étant pleinement fidèle, il résulte que b) est vraie, Supposons maintenant b) vraie. On déduit immédiatement l'isomorphisme fonctoriel (1), d'où il résulte a).

Observation : La théorie de la dualité pour les algèbres de Lukasiewicz n-valentes est donnée par le spectre maximal, parce que les n-idéaux maximaux et premiers coïncident dans ce cas, comme il ressort facilement de la proposition 6.

BIBLIOGRAPHIE

(1) A. BREZULEANU, R. DIACONESCU : Sur la duale de la catégorie des treillis (sous presse).

(2) R. DIACONESCU : Sume directe in categoria laticilor, St. Cerc. mat. 19, 6 (1967).

(3) G. GEORGESCU C. VRACIU : Sur les algèbres de Lukasiewicz n-valentes (Sous presse).

(4) G. GEORGESCU, C. VRACIU : N-Valent Centered Lukasiewicz Algebras (s.p.)

(5) Gr. C. MOISIL : Incercari vechi si noi de logica neclasica (1965).

(6) Gr. C. MOISIL : Contributions à l'étude des logiques non -chrysippiennes, II C.R. de l'Acad. Sc. Roum. t. VI 1942.

(7) Gr. C. MOISIL : On the Lukasiewiczian Algebras (sous presse).

(8) D. PONASSE : Logique mathématique (1968).

(9) N. POPESCU : Elemente de teoria fasciculelor, St. Cerc. Mat. n.2, 1966.

(10) A. PRELLER : La liberté des Algèbres de Boole et des Espaces de Boole par rapport aux ensembles. Pub. Dép. Math. Lyon, 3, nr. 1 (1966).

(11) A. PRELLER : Algèbres et Espaces de Boole, Fac. Sc. de Lyon (1966).

(12) : Séminaire Heildelberg - Strasbourg, Groupes Algèbriques (1965).

(13) R. SIKORSKI, : Boolean Algebras (1960)

George Georgescu et
Constantin Vraciu
Faculté de Mathématiques
Université de Bucarest