PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

MICHEL HACQUE

Mono sous catégories d'une catégorie de modules

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1969, tome 6, fascicule 1
, p. 13-48

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1969__6_1_13_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1969 t. 6-1

MONO SOUS CATEGORIES D'UNE CATEGORIE DE MODULES

par Michel HACQUE

0. Terminologie et notations.

De façon générale, la terminologie relative aux mono sous catégories, aux sous catégories coréflectives et aux coréflecteurs sera celle de (7) et la terminologie relative à la localisation sera analogue à celle de (3) et de (1) (Exercices 17 à 25 p. 157 - 165).

Dans la suite, sauf mention expresse du contraire, $\mathcal{A}$ désigne la catégorie des modules à gauche sur un anneau unitaire A.

Les définitions et les propriétés suivantes seront utilisées sans références bibliographiques :

1 - Une sous catégorie fermée $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$, est une sous catégorie pleine de $\mathcal{A}$, stable par sous objets et par limites inductives (Elle est donc avec limites inductives et le foncteur canonique de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}$ commute aux limites inductives).

2 - Un ensemble $\mathcal{F}$ d'idéaux à gauche de A est topologisant, s'il vérifie les conditions suivantes :

(a) - Tout idéal à gauche de A contenant un élément de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{F}$.

(b) - Toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{F}$.

(c) - Si $I \in \mathcal{F}$ et $a \in A$, l'idéal à gauche $N_a^I = \{\alpha ; \alpha \in A, \alpha a \in I\}$ appartient à $\mathcal{F}$.

Un objet M de $\mathcal{A}$ est $\mathcal{F}$-négligeable si l'annulateur de tout élément de M est un élément de $\mathcal{F}$, ce qui revient à dire que pour tout $f \in \mathrm{Hom}(A,M)$, $\mathrm{Ker} f \in \mathcal{F}$.

Pour tout objet M de $\mathcal{A}$, il existe un plus grand sous objet de M qui est $\mathcal{F}$-négligeable et noté $\mathcal{F}M$. Toute flèche $f : N \to M$ détermine par restriction un flèche $\mathcal{F}f : \mathcal{F}N \to \mathcal{F}M$

3 - Il existe une correspondance bijective entre les sous catégories fermées $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ et les ensembles $\mathcal{F}$ topologisants, caractérisée par les conditions

(a) - $I \in \mathcal{F}$ équivaut à A/I est un objet de $\mathcal{C}$.

(b) - M est un objet de $\mathcal{C}$ équivaut à $\mathcal{F}M = M$.

L'orsqu'il en est ainsi, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$ sont dits <u>associés</u>.

4 - Une sous-catégorie <u>localisante</u> $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ est une sous catégorie fermée et <u>épaisse</u>, c'est-à-dire telle que pour toute suite exacte dans $\mathcal{A}$, de la forme :

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

N est un objet de $\mathcal{C}$ si et seulement si N' et N" sont des objets de $\mathcal{C}$.

5 - Etant donné un ensemble $\mathcal{F}$ topologisant, $\mathcal{F}^2$ est l'ensemble des idéaux à gauche J de A pour lesquels il existe au moins un $I \in \mathcal{F}$ tel que $\subset I$ et que I/J soit $\mathcal{F}$-négligeable. Tout ensemble $\mathcal{F}$ topologisant vérifie $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^2$ et $\mathcal{F}$ est dit <u>idempotent</u> si $\mathcal{F} = \mathcal{F}^2$.

6 - Si une sous catégorie fermée $\mathcal{C}$ et un ensemble $\mathcal{F}$ topologisant sont associés, pour que $\mathcal{C}$ soit une sous catégorie localisante de $\mathcal{A}$, il faut et il suffit que $\mathcal{F}$ soit idempotent.

1 - <u>Mono sous catégorie associée à une sous catégorie fermée.</u>

<u>Proposition 1-1</u> : Etant donnée une sous catégorie fermée $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$, associée à un ensemble $\mathcal{F}$ topologisant, alors :

1 - Pour tout objet M de $\mathcal{A}$, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) $\mathcal{F}M = o$

(b) $\mathrm{Hom}(N,M) = \{o\}$ pour tout objet N de $\mathcal{C}$.

(c) L'application canonique : $\mathrm{Hom}(A,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(I,M)$ est injective pour tout $I \in \mathcal{F}$.

2 - La sous catégorie pleine $\mathcal{M} = m(\mathcal{C}) = m(\mathcal{F})$ de $\mathcal{A}$ caractérisee par les objets M vérifiant les conditions équivalentes (a), (b), (c) est une <u>mono sous catégorie</u> de $\mathcal{A}$ dite <u>associée</u> à $\mathcal{C}$ ou à $\mathcal{F}$.

Puisque toute flèche $f : N \longrightarrow M$ détermine par restriction une flèche $\mathcal{F}f : \mathcal{F}N \longrightarrow \mathcal{F}M$, pour tout objet N de $\mathcal{C}$ caractérisé par $N = \mathcal{F}N$, l'image de f est donc dans $\mathcal{F}M$. Il en résulte que (a) implique (b).

Tout objet M de $\mathcal{A}$ et tout idéal à gauche I de A déterminent une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A/I,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(I,M)$$

Pour tout $I \in \mathcal{F}$, l'objet A/I appartient à $\mathcal{C}$, ce qui montre que (b) implique (c).

Pour tout $f \in \mathrm{Hom}(A,\mathcal{F}M)$, alors $\mathrm{Ker} f = I \in \mathcal{F}$. La condition (c) entraine $f = o$, c'est-à-dire $\mathcal{F}M = o$, ce qui montre que (c) implique (a).

La condition (b) montre immédiatement que $\mathcal{M}$ est stable par sous objets et par limites projectives. Enfin, pour tout objet M de $\mathcal{M}$, soit Q une enveloppe injective de M dans $\mathcal{A}$. La condition $\mathcal{F}Q \neq o$ entrainerait $\mathcal{F}M = M \cap \mathcal{F}Q \neq o$. Ainsi, puisque $\mathcal{F}M = o$, il en résulte $\mathcal{F}Q = o$ ce qui montre que Q est un objet de $\mathcal{M}$. La sous catégorie pleine $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$ est donc une mono sous catégorie de $\mathcal{A}$.

2 - <u>Sous catégorie localisante associée à une mono sous catégorie</u>.

<u>Proposition 2-1</u> : Etant donnée une mono sous catégorie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$ et un coréflecteur R de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{M}$, alors :

1 - Pour tout objet N de $\mathcal{A}$, il y a équivalence des conditions suivantes

(a) RN = o.

(b) $\mathrm{Hom}(N,M) = \{o\}$ pour tout objet M de $\mathcal{M}$.

2 - La sous catégorie pleine $\mathcal{C} = c(\mathcal{M})$ de $\mathcal{A}$ caractérisée par les objets N vérifiant les conditions équivalentes (a), (b), est une sous catégorie <u>localisante</u> de $\mathcal{A}$ dite <u>associée</u> à $\mathcal{M}$.

3 - L'ensemble $\mathcal{F} = c(\mathcal{M})$ topologisant et idempotent associé à la sous catégorie localisante $\mathcal{C} = c(\mathcal{M})$ est caractérisé par la condition suivante :

$I \in \mathcal{F}$ si et seulement si l'application canonique $\mathrm{Hom}(A,M) \to \mathrm{Hom}(I,M)$ est injective pour tout objet M de $\mathcal{M}$.

L'équivalence des conditions (a) et (b) est évidente.

La condition (b) montre que $\mathcal{C}$ est stable par limites inductives.

Comme tout objet M de $\mathcal{M}$ est un sous objet d'un objet Q de $\mathcal{M}$ injectif dans $\mathcal{A}$, la sous catégorie $\mathcal{C}$ est aussi caractérisée par les objets N vérifiant $\mathrm{Hom}(N,Q) = \{o\}$ pour tout objet Q de $\mathcal{M}$ injectif dans $\mathcal{A}$.

Pour toute suite exacte dans $\mathcal{A}$, de la forme :

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(N'',Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}(N,Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}(N',Q) \longrightarrow 0$$

pour tout objet Q de $\mathcal{M}$ injectif dans $\mathcal{A}$, montrent que N est un objet de $\mathcal{C}$ si et seulement si N' et N" sont des objets de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire que la sous catégorie $\mathcal{C}$ est épaisse. La sous catégorie $\mathcal{C}$ est donc localisante.

Tout objet M de $\mathcal{A}$ et tout idéal à gauche I de A, déterminent une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A/I,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(I,M)$$

Si F est associé à $\mathcal{C}$, la condition $I \in \mathcal{F}$ signifie que A/I est un objet de $\mathcal{C}$. La condition (b) montre que $I \in \mathcal{F}$ se traduit par $\mathrm{Hom}(A/I,M) = \{o\}$ pour tout objet M de $\mathcal{M}$, c'est-à-dire par l'injectivité de l'application

$$\mathrm{Hom}(A,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(I,M) \text{ , pour tout objet } M \text{ de } \mathcal{M}.$$

3 - <u>Sous catégorie localisante engendrée par une sous catégorie fermée</u>.

<u>Lemme 3-1</u> : Etant donné un ensemble $\mathcal{F}$ topologisant, pour que $\mathcal{F}$ soit idempotent, il faut et il suffit que $\mathcal{F}(M/\mathcal{F}M) = o$ pour tout objet M de $\mathcal{A}$.

Pour tout objet M de $\mathcal{A}$ et pour tout $x \in M$, soit $\bar{x}$ son image dans $M/\mathcal{F}M$. Les idéaux $J = \mathrm{Ann}(x)$ et $I = \mathrm{Ann}(x) = \{\alpha ; \alpha \in A, \alpha x \in \mathcal{F}M\}$ vérifiant $J \subset I$. Pour tout $\alpha \in I$, l'annulateur de son image $\bar{\alpha}$ dans I/J est l'idéal à gauche

$$N_\alpha^J = \{a \ ; \ a \in A, a\alpha \in J\} = \{a \ ; \ a \in A, a\alpha x = o\} = \mathrm{Ann}(\alpha x)$$

La définition de I entraine $N_\alpha^J \in F$, ce qui montre que I/J est $\mathcal{F}$-négligeable,

Si F est idempotent, $\bar{x} \in \mathcal{F}(M/\mathcal{F}M)$ implique $I \in \mathcal{F}$, ce qui entraine $J \in \mathcal{F}$ et par suite $x \in \mathcal{F}M$, c'est-à-dire $\bar{x} = o$, ce qui montre que $\mathcal{F}(M/\mathcal{F}M) = o$.

Si $\mathcal{F}$ n'est pas idempotent, il existe un idéal à gauche J, vérifiant $J \ \ \mathcal{F}^2$ et $J \notin \mathcal{F}$

En posant $M = A/J$, la définition de $\mathcal{F}^2$ entraine qu'il existe $I' \in \mathcal{F}$ tel que I'/J sont $\mathcal{F}$-négligeable, c'est-à-dire contenu dans $\mathcal{F}M$. Il en résulte que l'idéal à gauche I image réciproque de $\mathcal{F}M$ dans A vérifie aussi $I \in \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}M = I/J$. Il en résulte $M/\mathcal{F}M = A/I$ qui est $\mathcal{F}$-négligeable, ce qui donne $\mathcal{F}(M/\mathcal{F}M) = M/\mathcal{F}M = A/I$. Puisque $J \notin F$ et que $\mathcal{F}M = I/J$ est $\mathcal{F}$-négligeable, il en résulte $I \neq A$, qui entraine $\mathcal{F}(M/\mathcal{F}M) \neq o$.

<u>Proposition 3-2</u> : Etant donnée une sous catégorie fermée $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ caractérisée par un ensemble $\mathcal{F}$ topologisant, soit $\mathcal{M} = m(\mathcal{C})$ la mono sous catégorie de $\mathcal{A}$ associée à $\mathcal{C}$ et soit $\bar{\mathcal{C}} = cm(\mathcal{C})$ la sous catégorie localisante

de $\mathcal{A}$ caractérisée par l'ensemble $\overline{F} = cm(\mathcal{F})$ topologisant et idempotent, qui est associée à la mono sous catégorie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$, alors :

1 - (a) $\mathcal{C}$ est une sous catégorie de $\overline{\mathcal{C}}$.

(b) $\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}}$

(c) $\mathcal{F}M \subset \overline{\mathcal{F}}M$ pour tout objet M de $\mathcal{A}$.

(d) $\mathcal{M}$ est la mono sous catégorie de $\mathcal{A}$ associée à $\overline{\mathcal{C}}$.

(e) Pour tout objet M de $\mathcal{A}$, les conditions $\mathcal{F}M = o$ et $\overline{\mathcal{F}}M = o$ sont équivalentes.

2 - Pour tout coréflecteur R de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{M}$:

(a) Pour tout objet M de $\mathcal{A}$, $\overline{\mathcal{F}}M$ est le plus petit des sous objets M' de M tels que M/M' soit un objet de $\mathcal{M}$.

(b) Tout objet M de $\mathcal{A}$ détermine une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}M \longrightarrow M \longrightarrow RM \longrightarrow 0$$

3 - (a) Pour que $\mathcal{C}$ soit localisante, il faut et il suffit que $\mathcal{C}$ soit identique à $\overline{\mathcal{C}}$.

(a') Pour que $\mathcal{F}$ soit idempotent, il faut et il suffit que $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}$

(b) La sous catégorie localisante $\overline{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{A}$ dite <u>engendrée</u> par $\mathcal{C}$ est la plus petite des sous catégories localisantes contenant $\mathcal{C}$

(b') L'ensemble $\overline{\mathcal{F}}$ topologisant et idempotent dit <u>engendré</u> par $\mathcal{F}$ est le moins fin des ensembles topologisants et idempotents plus fins que $\mathcal{F}$.

La première partie résulte immédiatement des propositions 1-1 et 2-1.

Pour tout objet M de $\mathcal{A}$ et pour tout objet P de $\mathcal{M}$ qui vérifie donc $\overline{\mathcal{F}}P = o$, toute flèche $f : M \to P$ s'annule sur $\overline{\mathcal{F}}M$ et par suite se factorise de façon unique grâce à l'épimorphisme $M \to M/\overline{\mathcal{F}}M$.

Puisque $\overline{\mathcal{F}}$ est topologisant et idempotent, le lemme 3-1 entraine

$\bar{F}(M/\bar{F}M) = o$, ce qui montre que $M/\bar{F}M$ est un objet de $\mathcal{M}$ caractérisant une coréflection de M dans $\mathcal{M}$. Ainsi, $\bar{F}M$ vérifie bien la condition 2 - (b) et la condition 2 - (a) résulte d'une construction classique de RM comme image de M dans le produit des quotients M/M' qui appartiennent à $\mathcal{M}$.

Si $\mathcal{C}$ est localisante, le lemme 3-1 entraine que tout objet M de $\mathcal{A}$ vérifie $F(M/FM) = o$ qui montre que M/FM est un objet de $\mathcal{M}$. La propriété 2 - (a) entraine $\bar{F}M \subset FM$ et compte tenu de la propriété 1 - (c), il en résulte $FM = \bar{F}M$ qui montre que $F = \bar{F}$ et que $\mathcal{C}$ est identique à $\bar{\mathcal{C}}$. La réciproque étant évidente, il en résulte les propriétés 3 - (a) et 3 - (a').

Pour toute sous catégorie localisante $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{A}$ contenant $\mathcal{C}$, il est immédiat que $\bar{\mathcal{C}}$ est contenue dans $\bar{\mathcal{C}}'$ qui est identique à $\mathcal{C}'$ d'après 3 - (a) ce qui entraine 3 - (b) et 3 - (b').

4 - Caractérisation des mono sous catégories.

Lemme 4 - 1 : Etant donnée une catégorie abélienne $\mathcal{A}$, soit $\mathcal{B}$ une sous catégorie pleine coréflective de $\mathcal{A}$ telle que le coréflecteur T_1 de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ soit exact à gauche, alors le noyau de T_1 est une sous catégorie localisante $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est la sous catégorie pleine de $\mathcal{A}$ caractérisée par les objets $\mathcal{C}$-fermés.

Le foncteur canonique S_1 de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$ est un adjoint de T_1. Il en résulte que le morphisme fonctoriel d'adjonction $\Phi_1 : T_1S_1 \to I_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme et que T_1 commute aux limites inductives, ce qui montre qu'il est exact.

D'après la proposition 5-3 p. 130 de (7) , $\mathcal{B}$ est une catégorie abélienne. Ainsi, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des catégories abéliennes, T_1 est un foncteur exact de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ et T_1 admet un adjoint S_1 tel que le morphisme fonctoriel $\Phi_1 : T_1S_1 \to I_{\mathcal{B}}$ soit un isomorphisme. Ces données vérifient donc les hypothèses de la proposition 5 p. 374 de (3) qui assure que la sous catégorie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ noyau de T_1 est une sous-catégorie localisante et dont la démonstration montre que si T est le foncteur canonique de A dans la catégorie quotient A/C, alors, il existe un foncteur unique R de A/C dans B tel que $T_1 = RT$ et que de plus $S = S_1R$ est un adjoint de T. Il en résulte alors : $ST = S_1RT = S_1T_1$ et le morphisme fonctoriel d'adjonction $\Psi : I_A \longrightarrow ST$ coïncide avec le morphisme fonctoriel d'adjonction $\Psi_1 : I_A \to S_1T_1$. D'après le corollaire de la proposition 3 p 371 de (3), les objets M de A qui sont C-fermés, sont ceux pour lesquels $\Psi(M) : M \to STM$ est un isomorphisme, c'est-à-dire ceux pour lesquels $\Psi_1(M) : M \to S_1T_1M$ est un isomorphisme. Puisque $S_1\Phi_1 \circ \Psi_1 S_1 = Id_{S_1}$ et que Φ_1 est un isomorphisme, il en résulte que $\Psi_1 S_1 : S_1 \longrightarrow S_1T_1S_1$ est un isomorphisme, ce qui montre que tout objet M de A de la forme S_1B est C-fermé. Réciproquement, pour tout objet M de A qui est C-fermé, puisque B est une sous catégorie pleine de A, l'isomorphisme $\Psi_1(M) : M \to S_1T_1M$ montre que M est de la forme S_1B pour un objet B de B. Ainsi, B est la sous catégorie pleine de A caractérisée par les objets C-fermés.

Proposition 4-2 : Etant donnée une mono sous catégorie M de A, soit $C = c(M)$ la sous catégorie localisante associée à M, caractérisée par l'ensemble $F = c(M)$ topologisant et idempotent, alors :

1 - La mono sous catégorie M de A est identique à la mono sous catégorie $\widetilde{M} = m(C)$ de A associée à C.

2 - Si L est la sous catégorie pleine de A caractérisée par les objets purs de M, pour tout objet L de A, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) L est un objet de L.

(a') L est un objet de M et pour tout monomorphisme : $L \to M$ tel que M soit un objet de M, alors M/L est un objet de M

(b) L est un objet C-fermé.

(b') L est un objet de M et pour tout monomorphisme : $L \to M$

tel que M/L soit un objet de C, alors L est un facteur direct de M.

(c) Hom(N,L) = {o} et Ext^1(N,L) = {o} pour tout objet N de C.

(d) L'application canonique : Hom(A,L) $\to$ Hom(I,L) est bijective pour tout $I \in F$.

Il est immédiat que M est une sous catégorie de $\overline{M}$ et que C est associée à $\overline{M}$ Si L et $\overline{L}$ sont les sous catégories pleines de A caractérisées par les objets purs de M et de $\overline{M}$, d'après le théorème 6-8 p. 135 de (7), L et $\overline{L}$ sont des catégories abéliennes et les coréflecteurs R et $\overline{R}$ de A dans L et $\overline{L}$ sont exacts. La construction d'un coréflecteur donnée dans la démonstration du lemme 6-6 p. 134 de (7) montre que les noyaux de R et de $\overline{R}$ sont les noyaux des coréflecteurs de A dans M et dans $\overline{M}$, ce qui montre, compte tenu de la remarque initiale et de la proposition 2-1, qu'ils sont identiques à C. Le lemme 4-1 entraine que L et $\overline{L}$ sont caractérisées par les objets C-fermés de A. Il en résulte que les catégories L et $\overline{L}$ coïncident et aussi l'équivalence des conditions 2-(a) et 2-(b). L'équivalence de 2-(a) et de 2-(a') résulte de la définition d'un objet pur et l'équivalence de 2-(b) et de 2-(b') résulte de la définition des objets C-fermés et du lemme 1 p. 370 de (3).

Tout objet $\overline{M}$ de $\overline{M}$ se plonge dans un objet $\overline{Q}$ de $\overline{M}$ injectif dans A et la définition des objets purs de $\overline{M}$ montre que $\overline{Q}$ est un objet de $\overline{L}$. Comme L et $\overline{L}$ coïncident, il en résulte que $\overline{Q}$ est un objet de L et par suite de M. Comme M est stable par sous objets, il en résulte que $\overline{M}$ est un objet de M, ce qui montre que $\overline{M}$ est une sous catégorie de M. La remarque initiale entraine alors que les catégories M et $\overline{M}$ coïncident.

D'après la proposition 1-1, l'égalité de $\mathcal{M}$ et de $\overline{\mathcal{M}}$ montre que la condition $\mathrm{Hom}(N,M) = \{o\}$ pour tout objet N de $\mathcal{C}$ caractérise les objets M de $\mathcal{M}$.

Tout objet M de $\mathcal{M}$ se plonge dans un objet Q de $\mathcal{M}$ injectif dans $\mathcal{A}$, qui est aussi un objet de $\mathcal{L}$. Tout objet N de $\mathcal{C}$ détermine une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(N,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(N,Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}(N,Q/M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(N,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(N,Q)$$

dans laquelle les deux premiers termes sont nuls puisque M et Q sont des objets de $\mathcal{M}$ et le dernier est nul puisque Q est injectif. Si M est un objet de $\mathcal{L}$, Q/M est un objet de $\mathcal{M}$ et le troisième terme est donc nul. Il en résulte que $\mathrm{Ext}^1(N,M) = \{o\}$ pour tout objet N de $\mathcal{C}$. Ainsi 2-(a) implique 2-(c).

Réciproquement soit L un objet de $\mathcal{A}$ vérifiant 2-(c). La première partie de la condition entraine que L est un objet de $\mathcal{M}$. Tout monomorphisme : $L \longrightarrow M$ tel que M soit un objet de $\mathcal{M}$ et tout objet N de $\mathcal{C}$ déterminent une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(N,L) \longrightarrow \mathrm{Hom}(N,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(N,M/L) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(N,L)$$

dans laquelle les deux premiers termes sont nuls puisque L et M sont des objets de $\mathcal{M}$ et le dernier terme est nul par hypothèse. Il en résulte $\mathrm{Hom}(N,M/L) = \{o\}$ pour tout objet N de $\mathcal{C}$, ce qui montre que M/L est un objet de $\mathcal{M}$ et que par suite L est un objet de $\mathcal{L}$. Les conditions 2-(a) et 2-(c) sont donc équivalentes.

Tout objet L de $\mathcal{A}$ et tout $I \in \mathcal{F}$ déterminent une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A/I,L) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,L) \longrightarrow \mathrm{Hom}(I,L) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(A/I,L)$$

Si L est un objet de $\mathcal{L}$, il vérifie la condition 2-(c) qui montre que le premier et le dernier des termes de cette suite exacte sont nuls, puisque A/I est un objet de $\mathcal{C}$. Il en résulte que tout objet L de $\mathcal{L}$ vérifie la condition 2-(d)

Réciproquement, d'après la proposition 1-1, tout objet L de $\mathcal{A}$ vérifiant la condition 2-(d) est un objet de $\overline{\mathcal{M}}$ et par suite de $\mathcal{M}$, ce qui entraine $\mathcal{F}L = o$. D'après la proposition 4 p. 413 de (3), les morphismes canoniques $\Psi(M)$ de M dans $\varinjlim_{I \in \mathcal{F}} \mathrm{Hom}(I,M/\mathcal{F}M)$ cractérisent le morphisme fonctoriel Ψ de $I_{\mathcal{A}}$ dans un foncteur isomorphe au foncteur localisation défini par C ou F. Pour tout objet L vérifiant 2-(d), la relation FL = o montre que $\Psi(L)$ est un isomorphisme, c'est-à-dire que L est un objet C-fermé. Ainsi, la condition 2-(d) entraine 2-(b), ce qui active la démonstration.

Théorème 4-3 : Etant donnée une catégorie A de modules à gauche sur un anneau unitaire A, pour tout sous catégorie fermée C de A, soit M = m(C) la mono sous catégorie de A associée à C , alors :

1 - L'application m est une surjection de l'ensemble des sous catégories fermées C de A, sur l'ensemble des mono sous catégories M de A.

2 - Cette application détermine par restriction une bijection entre l'ensemble des sous catégories localisantes C de A et l'ensemble des mono sous catégories M de A.

La première propriété résulte de la première partie de la proposition 4-2 et la seconde propriété résulte alors de la proposition 3-2.

Corollaire 4-4 : Il existe une bijection entre l'ensemble des sous catégories localisantes C de A et l'ensemble des sous catégories pleines coréflectives, à coréflecteurs exacts à gauche, L de A.

De plus, si C et L sont associées par cette bijection, alors :

(a) La sous catégorie localisante C est la sous catégorie pleine de A caractérisée par les objets N de A vérifiant Hom(N,L) ={o} pour tout objet L de L.

(b) La sous catégorie pleine coréflective, à coréflecteur exact à gauche, L de A est caractérisée par les objets L de A vérifiant Hom(N,L) = {o} et Ext^1(N,L) = {o} pour tout objet N de C.

En effet, d'après le lemme 4-1, une telle catégorie L est parfaitement déterminée par la sous catégorie localisante C noyau du coréflecteur et elle coïncide avec la sous catégorie pleine caractérisée par les objets C-fermés, c'est-à-dire par les objets purs de la mono sous catégorie $\mathcal{M}$ associée à $\mathcal{C}$. La condition (a) est alors évidente et la condition (b) résulte de la proposition 4.2.

<u>Lemme 4-5</u> : Etant données une catégorie $\mathcal{A}$ <u>quelconque</u> et une sous catégorie pleine coréflective $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, soit S le foncteur canonique de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$ et soit T un coréflecteur de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ tel que ST <u>préserve les monomorphismes</u>, alors les objets Q de $\mathcal{B}$, injectifs dans $\mathcal{B}$, sont ceux pour lesquels SQ est injectif dans $\mathcal{A}$.

Puisque $\mathcal{B}$ est coréflective dans $\mathcal{A}$, il est immédiat qu'une flèche de $\mathcal{B}$ est un monomorphisme dans $\mathcal{B}$ si et seulement si son image par S est un monomorphisme dans $\mathcal{A}$, ce qui entraine que tout objet Q de $\mathcal{B}$ tel que SQ soit injectif dans $\mathcal{A}$ est injectif dans $\mathcal{B}$.

Réciproquement, si $\Psi : I_A \longrightarrow ST$ est le morphisme fonctoriel d'adjonction, tout monomorphisme $u : M' \longrightarrow M$ dans $\mathcal{A}$ donne la relation $\Psi(M) \circ u = ST(u) \circ \Psi(M')$ dans laquelle $u' = T(u) : TM' \longrightarrow TM$ est un monomorphisme dans $\mathcal{B}$ puisque $S(u') = ST(u)$ est un monomorphisme dans $\mathcal{A}$. Pour tout objet Q injectif dans $\mathcal{B}$ et pour toute flèche $f : M' \longrightarrow SQ$, il existe une flèche $f' : TM' \longrightarrow Q$ telle que $f = S(f') \circ \Psi(M')$ et par suite une flèche $g' : TM \longrightarrow Q$ telle que $f' = g' \circ u'$. Il en résulte alors que la flèche $g = S(g') \circ \Psi(M) : M \longrightarrow SQ$ vérifie les relations :

$$g \circ u = S(g') \circ \Psi(M) \circ u = S(g') \circ ST(u) \circ \Psi(M') = S(f') \circ \Psi(M') = f$$

ce qui prouve que SQ est injectif dans $\mathcal{A}$.

<u>Corollaire 4-6</u> : Etant donnée une mono sous catégorie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$, soit $\mathcal{L}$ la sous catégorie pleine de $\mathcal{A}$ caractérisée par les objets purs de $\mathcal{M}$, alors pour tout objet Q de $\mathcal{M}$, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) Q est injectif dans $\mathcal{A}$

(b) Q est injectif dans $\mathcal{M}$.

(c) Q est un objet de $\mathcal{L}$, injectif dans $\mathcal{L}$.

D'après le théorème 4-3, la mono sous catégorie $\mathcal{M}$ est associée à une sous catégorie localisante $\mathcal{C}$ ou à un ensemble $\mathcal{F}$ topologisant et idempotent.

Pour tout monomorphisme $u : M' \rightarrow M$ dans $\mathcal{A}$, la relation $\mathcal{F}M' = M' \cap \mathcal{F}M$ entraine que la flèche : $M'/\mathcal{F}M' \rightarrow M/\mathcal{F}M$ est un monomorphisme dans $\mathcal{A}$. La proposition 3-2 montre alors que le coréflecteur de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{M}$ vérifie l'hypothèse du lemme 4-5. Ce lemme implique donc l'équivalence des conditions (a) et (b).

Le corollaire 4-4 montre qu'un objet Q vérifiant la condition (a) est un objet de $\mathcal{L}$. Comme le foncteur localisation associé à $\mathcal{L}$ est exact à gauche, le lemme 4-5 entraine l'équivalence des conditions (a) et (c).

5 - Propriétés générales des mono sous catégories.

Dans ce paragraphe, $\mathcal{M}$ désigne une mono sous catégorie de $\mathcal{A}$ et R le coflecteur de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{M}$. Compte tenu du théorème 4-3, $\mathcal{C}$ désignera la sous catégorie localisante et $\mathcal{F}$ l'ensemble topologisant et idempotent associés à $\mathcal{M}$.

Pour simplifier les notations, lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, une flèche dans $\mathcal{M}$ et son image dans $\mathcal{A}$ seront désignées par la même lettre. Par contre, des indices $\mathcal{A}$ et $\mathcal{M}$ permettront de distinguer les notions relatives à la catégorie $\mathcal{A}$ et à la catégorie $\mathcal{M}$.

Les définitions des images et des coimages seront celles de (4) et non celles de (7).

Proposition 5-1 : Si $\mathcal{M}$ est une mono sous catégorie de $\mathcal{A}$, alors :

1 - La catégorie $\mathcal{M}$ est additive.

2 - La catégorie $\mathcal{M}$ est avec limites projectives (Une limite projective dans $\mathcal{M}$ se calcule comme dans $\mathcal{A}$).

3 - La catégorie $\mathcal{M}$ est avec limites inductives (Une limite inductive dans $\mathcal{M}$ s'obtient en appliquant R à la limite inductive dans $\mathcal{A}$ et une somme directe dans $\mathcal{M}$ se calcule comme dans $\mathcal{A}$).

La première propriété est évidente et la seconde résulte du fait que $\mathcal{M}$ est une sous catégorie pleine de $\mathcal{A}$ stable par limites projectives.

La troisième propriété résulte du fait que $\mathcal{M}$ est une sous catégorie pleine coréflective de $\mathcal{A}$ et de la relation évidente : $\mathcal{F}\left[\bigoplus_{i\in I} M_i\right] = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{F}M_i$.

Corollaire 5-2 : La catégorie $\mathcal{M}$ est avec noyaux, conoyaux, images et coimages.

De plus, pour toute flèche $f : M \to P$, alors :

(a) $\left[\mathrm{Ker}_{\mathcal{M}} f \xrightarrow{i} M\right] = \left[\mathrm{Ker}_{\mathcal{A}} f \xrightarrow{i} M\right]$

(b) $\left[P \xrightarrow{p} \mathrm{Coker}_{\mathcal{M}} f\right] = \left[P \xrightarrow{p'} \mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} f \to R(\mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} f)\right]$

(c) $\left[\mathrm{Im}_{\mathcal{M}} f \xrightarrow{j} P\right] = \left[\mathrm{Ker}_{\mathcal{M}} p \xrightarrow{j} P\right] = \left[p'^{-1}(\mathcal{F}\mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} f) \to P\right]$

(d) $\left[M \xrightarrow{q} \mathrm{Coim}_{\mathcal{M}} f\right] = \left[M \xrightarrow{q} \mathrm{Coker}_{\mathcal{M}} i\right] = \left[M \xrightarrow{q'} \mathrm{Coim}_{\mathcal{A}} f\right]$

Les propriétés (a) et (b) résultent immédiatement de la proposition 5-1.

Les premières égalités des propriétés (c) et (d) traduisent les définitions des images et des coimages adoptées dans (4).

La seconde égalité de la propriété (c) résulte de (a) et de (b) qui montrent que le noyau de p dans $\mathcal{M}$ est identique au noyau de p dans $\mathcal{A}$, c'est-à-dire à l'image réciproque par p' du noyau de la flèche : $\mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} f \to R(\mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} f)$ qui est $\mathcal{F}\mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} f$ d'après la proposition 3-2.

Puisque $\mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} i'$ est un sous objet de l'objet P de $\mathcal{M}$, il est également un objet de $\mathcal{M}$, ce qui montre que la flèche : $\mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} i' \to R(\mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} i')$ est un isomorphisme et la propriété (b) entraine que les conoyaux de i' dans $\mathcal{A}$ et dans $\mathcal{M}$ coïncident. La seconde égalité de la propriété (d) résulte alors de la propriété (a) qui montre que le conoyau de i dans $\mathcal{M}$ est le conoyau de i' dans $\mathcal{M}$, c'est-à-dire le conoyau de i' dans $\mathcal{A}$ et par suite la coimage de f dans $\mathcal{A}$.

Corollaire 5-3 : Pour toute flèche $f : M \to P$ dans $\mathcal{M}$, alors :

1 - Il y a équivalence des conditions suivantes

(a) La flèche f est un monomorphisme dans $\mathcal{M}$.

(b) $\mathrm{Ker}_{\mathcal{M}} f = o$

(c) $\mathrm{Ker}_{\mathcal{A}} f = o$.

2 - Il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) La flèche f est un épimorphisme dans $\mathcal{M}$.

(b) $\mathrm{Coker}_{\mathcal{M}} f = o$

(c) $\mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} f$ est un objet de $\mathcal{C}$.

La propriété (b) du corollaire 5-2 entraine l'équivalence des conditions 2-(b) et 2-(c). Les autres équivalences sont évidentes.

Théorème 5-4 : Pour toute flèche $f : M \rightarrow P$, il existe une flèche unique

$\bar{f} : \mathrm{Coim}_{\mathcal{M}} f \rightarrow \mathrm{Im}_{\mathcal{M}} f$, telle que le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & P \\
\mathrm{Coim}_{\mathcal{M}} f \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathrm{Im}_{\mathcal{M}} f \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

De plus, la flèche $\bar{f}$ est un monomorphisme et un épimorphisme dans $\mathcal{M}$.

L'existence et l'unicité de la flèche $\bar{f} : \mathrm{Coim}_{\mathcal{M}} f \rightarrow \mathrm{Im}_{\mathcal{M}} f$ résulte d'un raisonnement classique dans une catégorie additive avec noyaux et conoyaux.

Le corollaire 5-2 montre que $q = q'$ est un épimorphisme dans $\mathcal{A}$ et que j est un monomorphisme dans $\mathcal{A}$. De plus $\bar{f}$ est caractérisée par la relation $j \circ \bar{f} = j' \circ f'$ dans laquelle f' est l'isomorphisme canonique de $\mathrm{Coim}_{\mathcal{A}} f$ dans $\mathrm{Im}_{\mathcal{A}} f$ et j' le monomorphisme canonique dans $\mathcal{A}$ de $\mathrm{Im}_{\mathcal{A}} f$ dans P. Il en résulte immédiatement que $\bar{f}$ est un monomorphisme dans $\mathcal{A}$ et par suite dans $\mathcal{M}$. Le conoyau de $\bar{f}$ dans $\mathcal{A}$ est donc caractérisé par $\mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} \bar{f} = \mathrm{Im}_{\mathcal{M}} f / \mathrm{Im}_{\mathcal{A}} f \simeq F \mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} f$. Le corollaire 5-2 entraine $\mathrm{Coker}_{\mathcal{M}} \bar{f} = o$ et le corollaire 5-3 montre que $\bar{f}$ est un épimorphisme dans $\mathcal{M}$.

Proposition 5-5 : Toute mono sous catégorie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$ possède les propriétés suivantes :

1 - Pour tout monomorphisme $u : M' \rightarrow M$ dans $\mathcal{M}$, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) u est un monomorphisme normal.

(b) La flèche canonique $\bar{u}$: $M' = \mathrm{Coim}_{\mathcal{M}} u \to \mathrm{Im}_{\mathcal{M}} u$ est un isomorphisme

(c) $\mathrm{Coker}_{\mathcal{M}} u = \mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} u$

(d) $\mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} u$ est un objet de $\mathcal{M}$ (c'est-à-dire $F(M/M') = o$)

2 - Pour tout épimorphisme $v : M \to M''$ dans $\mathcal{M}$, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) v est un épimorphisme conormal.

(b) La flèche canonique $\bar{v}$: $\mathrm{Coim}_{\mathcal{M}} v \to \mathrm{Im}_{\mathcal{M}} v = M''$ est un isomorphisme

(c) $\mathrm{Coker}_{\mathcal{M}} v = \mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} v$.

(d) $\mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} v = o$ (c'est-à-dire : v est un épimorphisme dans $\mathcal{A}$).

En effet, pour qu'un monomorphisme $u : M' \to M$ soit normal, c'est-à-dire un noyau, il est immédiat qu'il faut et il suffit qu'il soit un noyau de son conoyau, ce qui montre l'équivalence des conditions 1-(a) et 1-(b). De même, pour qu'un épimorphisme $v : M \to M''$ soit conormal, c'est-à-dire soit un conoyau, il est immédiat qu'il faut et il suffit qu'il soit un conoyau de son noyau, ce qui montre l'équivalence des conditions 2-(a) et 2-(b).

La démonstration du théorème 5-4 a donné la relation

$$\mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} \bar{f} = F\mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} f.$$

Comme $\bar{f}$ est un monomorphisme dans $\mathcal{A}$, pour que $\bar{f}$ soit un isomorphisme dans $\mathcal{A}$ ou dans $\mathcal{M}$, il faut et il suffit que $\mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} \bar{f} = o$, c'est-à-dire que $F\mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} f = o$ ou encore que $\mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} f$ soit un objet de $\mathcal{M}$.

Il en résulte l'équivalence des conditions 1-(b) et 1-(d) d'une part et l'équivalence des conditions 2-(b) et 2-(d) d'autre part puisque pour un épimorphisme v, le corollaire 5-3 entraine que $\mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} v$ est un objet de $\mathcal{C}$.

La propriété (b) du corollaire 5-2 entraine l'équivalence des conditions 1-(c) et 1-(d).

Enfin, pour l'épimorphisme v, le corollaire 5-3 entraine $\mathrm{Coker}_{\mathcal{M}} v = o$, ce qui montre l'équivalence des conditions 2-(c) et 2-(d).

Remarque 5-6 : Pour tout monomorphisme $u : M' \to M$ dans $\mathcal{M}$, le monomorphisme $j : \mathrm{Im}_{\mathcal{M}} u \to M$ est normal. Il en résulte facilement que pout tout sous objet M' de M déterminé par un monomorphisme $u : M' \to M$, le sous objet $\mathrm{Im}_{\mathcal{M}} u$ de M déterminé par le monomorphisme $j : \mathrm{Im}_{\mathcal{M}} u \to M$ est le "plus petit" des sous objets normaux de M, "plus grands" que M'.

Remarque 5-7 : Compte tenu de la proposition 4-2, les objets purs L de la mono sous catégorie $\mathcal{M}$, sont les objets de $\mathcal{M}$ qui sont des sous objets normaux dans tout "sur-objet" M de $\mathcal{M}$.

6 - Mono sous catégories localisantes.

Dans ce paragraphe, pour tout A-bimodule E et pour tout objet M de $\mathcal{A}$, le groupe abélien : $\mathrm{Hom}(E,M) = \mathrm{Hom}_A(E,M)$ sera muni de la structure de A-module à gauche déterminée par la structure de A-module à droite de E. De même, le groupe abélien $E \otimes M = E \otimes_A M$ sera muni de la structure de A-module à gauche déterminée par la structure de A-module à gauche de E. Il en résulte en particulier des isomorphismes canoniques :

$$\mathrm{Hom}(N,\mathrm{Hom}(E,M)) \to \mathrm{Hom}(E \otimes N,M)$$

Etant donné un idéal bilatère $\mathfrak{a}$ de A, soit ρ l'homomorphisme canonique d'anneaux unitaires de A dans l'anneau quotient $A' = A/\mathfrak{a}$. Lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, A' désignera également le A-bimodule $\rho_* A'$ obtenu en faisant opérer A sur A' par ρ.

Il est immédiat que l'ensemble $F_{\mathfrak{a}}$ des idéaux à gauche de A contenant $\mathfrak{a}$ est topologisant.

Soit $\mathcal{C}_a$ la sous catégorie fermée de $\mathcal{A}$ associée à F_a.

Lemme 6-1 : Pour tout objet M de $\mathcal{A}$, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) M est un objet de $\mathcal{C}_a$.

(b) Pour tout $f \in \mathrm{Hom}(A,M)$, $a \subset \mathrm{Ker} f$.

(b') $a.M = o$.

(b") L'application canonique : $\mathrm{Hom}(A,M) \to \mathrm{Hom}(a,M)$ est nulle

(c) l'injection canonique : $\mathrm{Hom}(A',M) \to \mathrm{Hom}(A,M)$ est un isomorphiems.

(c') La surjection canonique : $\mathrm{Hom}(a,M) \to \mathrm{Ext}^1(A,M)$ est un isomorphisme.

(d) La surjection canonique : $A \otimes M \to A' \otimes M$ est un isomorphisme

(d') L'injection canonique : $\mathrm{Tor}_1(A',M) \to a \otimes M$ est un isomorphisme.

L'équivalence des conditions (a), (b), (b'), (b") est immédiate.

Pour tout objet M de $\mathcal{A}$, la suite exacte :

$$o \longrightarrow \mathrm{Hom}(A',M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(a,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(A',M) \longrightarrow o$$

montre que les conditions (c) et (c') sont équivalentes à la condition (b").

Pour tout objet M de $\mathcal{A}$, la suite exacte :

$$o \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(A',M) \longrightarrow a \otimes M \longrightarrow A \otimes M \longrightarrow A' \otimes M \longrightarrow o$$

montre que les condition (d) et (d') sont équivalentes, à la condition (b').

Proposition 6-2 : Pour tout idéal bilatère α de A, la sous catégorie fermée $\mathcal{C}_a$ de $\mathcal{A}$ possède les propriétés suivantes :

1- Le foncteur F_a de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}_a$ peut être caractérisé par

$$F_a M = \mathrm{Hom}(A',M)$$

2- La sous catégorie $\mathcal{C}_a$ est une sous catégorie coréflective de $\mathcal{A}$ et un coréflecteur R_a de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}_a$ peut être caractérisé par :

$$R_a M = A' \otimes M.$$

3- Le foncteur "extension des scalaires" ρ^* de $\mathcal{A}$ dans la catégorie $\mathcal{A}'$ des modules à gauche sur $A' = A/a$, induit une équivalence entre $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{A}'$.

La première propriété résulte facilement des conditions (b') et (c) du lemme 6-1.

Les deux dernières propriétés découlent aisément des propriétés classiques du foncteur "extension des scalaires" ρ^* de A dans A' et du foncteur "restriction des scalaires" ρ_* de A' dans A, associés à l'homomorphisme surjectif $\rho : A \longrightarrow A' = A/\mathfrak{a}$ et vérifiant $\rho_* \rho^* M = R_{\mathfrak{a}} M$.

Les notions et la terminologie relatives à la localisation dans la catégorie abélienne $\mathcal{A}^*$ duale de $\mathcal{A}$, seront transcrites dans $\mathcal{A}$ par dualité en utilisant le préfixe "co". Par exemple, une sous catégorie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ est dite co-localisante si elle est localisante dans $\mathcal{A}^*$, etc... En particulier, $\mathcal{C}$ est dite bi-localisante(8), si elle est localisante et co-localisante.

Lemme 6-3 : Pour tout idéal bilatère idempotent $\mathfrak{a}$ de A, alors :

1 - La sous catégorie $\mathcal{C}_{\mathfrak{a}}$ est localisante, de plus :

(a) Le foncteur $F_{\mathfrak{a}}$ associé, peut être caractérisé par :

$$F_{\mathfrak{a}} M = \mathrm{Hom}(A', M)$$

(b) La mono sous catégorie $\mathcal{M}_{\mathfrak{a}}$ associée, est caractérisée par les objets M pour lesquels $\mathrm{Hom}(A', M) = 0$, ou pour lesquels l'application canonique : $\mathrm{Hom}(A, M) \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, M)$ est injective.

(c) La sous catégorie $\mathcal{L}_{\mathfrak{a}}$ des objets purs de $\mathcal{M}_{\mathfrak{a}}$ ou des objets $\mathcal{C}_{\mathfrak{a}}$-fermés est caractérisée par les objets M pour lesquels $\mathrm{Hom}(A', M) = 0$ et $\mathrm{Ext}^1(A', M) = 0$ ou pour lesquels l'application canonique : $\mathrm{Hom}(A, M) \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, M)$ est bijective.

Un foncteur localisation $L_{\mathfrak{a}}$ peut être caractérisé par :

$$L_{\mathfrak{a}} M = \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, M)) = \mathrm{Hom}(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}, M)$$

2 - La sous catégorie $\mathcal{C}_{\mathfrak{a}}$ est co-localisante, de plus :

(a) Le foncteur $F^*_{\mathfrak{a}}$ associé, peut être caractérisé par :

$$F^*_{\mathfrak{a}} M = A' \otimes M$$

(b) La "co-mono sous catégorie" $M_{\mathfrak{a}}^{*}$ associée, est caractérisée par les objets M pour lesquels $A' \otimes M = o$, ou pour lesquels l'application canonique : $\mathfrak{a}\otimes M \to A\otimes M$ est surjective.

(c) La sous catégorie $L_{\mathfrak{a}}^{*}$ des objets "co-purs" de $M_{\mathfrak{a}}^{*}$ ou des objets $C_{\mathfrak{a}}$ co-fermés est caractérisée par les objets M pour lesquels $A'\otimes M = o$ et $\mathrm{Tor}_1(A',M) = o$ ou pour lesquels l'application canonique : $\mathfrak{a}\otimes M \longrightarrow A\otimes M$ est bijective.

Un foncteur co-localisation $L_{\mathfrak{a}}^{*}$ peut être caractérisé par :

$$L_{\mathfrak{a}}^{*}M = \mathfrak{a}\otimes\mathfrak{a}\otimes M$$

Lorsque $\mathfrak{a}$ est un idéal bilatère idempotent, il est facile de vérifier que $F_{\mathfrak{a}}$ est topologisant et idempotent. La sous catégorie $C_{\mathfrak{a}}$ est donc localisante.

La première partie résulte alors de la proposition 6-2, du théorème 4-3, de la proposition 4-2 et de la caractérisation classique d'un foncteur localisation associé à F par la double application du foncteur : $M \rightsquigarrow M_{(F)}$.

La seconde partie en résulte alors par dualité en tenant compte des isomorphismes canoniques :

$$\mathrm{Hom}(N,\mathrm{Hom}(\mathfrak{a},M)) \simeq \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}\otimes N,M)$$

qui entrainent en particulier que $L_{\mathfrak{a}}$ est adjoint (à droite) à $L_{\mathfrak{a}}^{*}$.

Corollaire 6-4 : Pour toute sous catégorie fermée C de A, il y a équivalence des conditions suivantes. :

(a) C est une sous catégorie co-localisante.

(b) C est épaisse et stable par limites projectives.

(c) C est localisante et stable par limites projectives.

(d) C coïncide avec une sous catégorie $C_{\mathfrak{a}}$ pour un idéal bilatère idempotent $\mathfrak{a}$ de A.

(e) C est bilocalisante.

Il est immédiat que (a) implique (b) et que (b) implique (c).

Si F est l'ensemble topologisant et idempotent associé à C vérifiant (c), il est facile de vérifier que l'idéal : $\mathfrak{a} = \bigcap_{I \in F} I$ de A, est un idéal bilatère qui constitue le noyau de l'homomorphisme canonique de A dans la limite projective $\varprojlim_{I \in F} A/I$. Puisque les objets A/I sont des objets de C, la condition(c) qui entraine que C est stable par limites projectives et par sous-objets, montre que $\mathfrak{a} \in F$. Il en résulte $F = F_{\mathfrak{a}}$ et l'idéal bilatère $\mathfrak{a}$ est nécessairement idempotent Ainsi (c) implique (d). Le lemme 6-3 montre que (d) implique (e) et il est évident que (e) implique (a), ce qui achève la démonstration.

Définition 6-5 : Un idéal bilatère $\mathfrak{a}$ d'une anneau unitaire A est fortement idempotent à gauche, s'il vérifie la condition suivante :

pour tout $\alpha \in \mathfrak{a}$, il existe au moins $\beta \in \mathfrak{a}$, tel que $\alpha = \beta\alpha$.

Il est évident qu'un tel idéal bilatère est idempotent.

Un idéal à droite $\mathfrak{a}$ d'un anneau unitaire A est un idéal à droite pur dans A(1) (Exercice 24 p. 66), si pour tout A-module à gauche M, l'homomorphisme canonique :

$$\mathfrak{a} \otimes_A M \longrightarrow A \otimes_A M$$

est injectif.

Lemme 6-6 : Tout idéal bilatère $\mathfrak{a}$ fortement idempotent à gauche d'un anneau unitaire A, possède les propriétés suivantes :

1 - La partie multiplicative : $S = 1-\mathfrak{a}$ vérifie les conditions suivantes :

(a) Pour tout $s \in S$ et tout $a \in A$, il existe $t \in S$ et $b \in A$, tels que $ta = bs$.

(b) Si $a \in A$, si $s \in S$ et si $as = o$, alors il existe $t \in S$, tel que $ta = o$.

2 - L'ensemble F_S des idéaux à gauche de A qui rencontrent S est topologisant et idempotent.

3 - L'homomorphisme canonique u_A de A dans le localisé A_S de A pour $\mathcal{F}_S$ est un homomorphisme surjectif dont le noyau est $\mathfrak{a}$.

L'anneau quotient $A' = A/\mathfrak{a}$ isomorphe à A_S est un anneau de fractions à gauche de A pour S.

Le foncteur localisation est exact à gauche et isomorphe au foncteur : $M \rightsquigarrow A_S \otimes_A M = A' \otimes_A M$.

La caractérisation d'un idéal bilatère fortement idempotent à gauche est équivalente à la suivante : pour tout $\alpha \in \mathfrak{a}$, il existe au moins $u \in S$, tel que $u\alpha = o$.

Pour tout $a \in A$ et tout $s \in S$ de la forme $s = 1 - \alpha$ avec $\alpha \in \mathfrak{a}$, l'élément $c = sa - as = a\alpha - \alpha a$ est un élément de $\mathfrak{a}$ puisque $\mathfrak{a}$ est un idéal bilatère. Il existe donc $u \in S$, tel que $uc = o$, c'est-à-dire $u(sa-as) = o$. En posant $b = ua$ et $t = us$, il en résulte $ta = bs$ avec $t \in S$, ce qui démontre la condition (a).

Pour $a \in A$ et $s \in S$ avec $s = 1 - \alpha$ et $\alpha \in \mathfrak{a}$, la condition $as = o$ entraine $a = a\alpha$, qui montre que $a \in \mathfrak{a}$. Il existe donc $t \in S$, tel que $ta = o$, ce qui démontre la condition (b).

Il est connu (3) (p. 415) que (b) implique la seconde propriété.

Les conditions (a) et (b) sont les duales des conditions (*) et (**) de la partie (b) de la proposition 5. p. 415 de (3).

L'énoncé dual de cette proposition entraine que A_S est un anneau de fractions à gauche de A pour S et que le foncteur localisation est exact et isomorphe au foncteur : $M \rightsquigarrow A_S \otimes_A M$.

Le noyau de u_A est l'idéal bilatère $\mathfrak{a}' = \mathcal{F}_S A$. La condition $\alpha \in \mathfrak{a}'$ équivaut à : il existe un $s \in S$, tel que $s\alpha = o$, c'est-à-dire : il existe $\beta \in \mathfrak{a}$, tel que $\alpha = \beta\alpha$. Puisque $\mathfrak{a}$ est fortement idempotent à gauche, cette dernière condition équivaut à $\alpha \in \mathfrak{a}$. Aussi $\mathfrak{a}$ est le noyau de u_A.

Il en résulte que l'image par u_A de tout élément $s \in S = 1-\mathfrak{a}$ est l'élément unité de A_S. Puisque A_S est un anneau de fractions à gauche de A pour S, tout élément de A_S est de la forme : $[u_A(s)]^{-1} u_A(a)$ avec $s \in S$ et $a \in A$, c'est-à-dire de la forme $u_A(a)$. Il en résulte que u_A est surjective, ce qui achève la démonstration.

Théorème 6-7 : Pour tout idéal bilatère $\mathfrak{a}$ d'un anneau unitaire A, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) La sous catégorie $C_{\mathfrak{a}}$ est une mono sous catégorie de $\mathcal{A}$.

(b) Le A-module à droite : $A' = A/\mathfrak{a}$ est plat.

(c) L'idéal bilatère $\mathfrak{a}$ est un idéal à droite pur dans A.

(d) L'idéal bilatère $\mathfrak{a}$ est fortement idempotent à gauche.

D'après la proposition 6-2, un coréflecteur $R_{\mathfrak{a}}$ de $\mathcal{A}$ dans $C_{\mathfrak{a}}$ peut être caractérisé par : $R_{\mathfrak{a}}M = A' \otimes M$. Toute suite exacte de la forme :

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

détermine donc une suite exacte :

$$R_{\mathfrak{a}}M' \longrightarrow R_{\mathfrak{a}}M \longrightarrow R_{\mathfrak{a}}M'' \longrightarrow 0$$

D'après la proposition 3-2, un coréflecteur de $\mathcal{A}$ dans une mono sous catégorie respecte les monomorphismes. La condition (a) entraine donc que la flèche : $R_{\mathfrak{a}}M' \to R_{\mathfrak{a}}M$ est un monomorphisme, ce qui montre que $R_{\mathfrak{a}}$ est exact, c'est-à-dire que le A-module à droite $A' = A/\mathfrak{a}$ est plat. Aussi (a) implique (b).

Réciproquement, la condition (b) implique que le coréflecteur $R_{\mathfrak{a}}$ est exact et que $\mathrm{Tor}_1(A', M) = o$ pour tout objet M de $\mathcal{A}$. Il en résulte que le noyau de $R_{\mathfrak{a}}$ est une sous catégorie localisante $C'_{\mathfrak{a}}$ de $\mathcal{A}$ et le lemme 6-5 montre que $C'_{\mathfrak{a}}$ est identique aux sous catégories $\mathcal{L}^*_{\mathfrak{a}}$ et $\mathcal{M}^*_{\mathfrak{a}}$. De plus, il en résulte facilement que le foncteur $F'_{\mathfrak{a}}$ associé à $C'_{\mathfrak{a}}$, de $\mathcal{A}$ dans $C'_{\mathfrak{a}} = \mathcal{L}^*_{\mathfrak{a}} = \mathcal{M}^*_{\mathfrak{a}}$ coïncide avec le foncteur co-localisation $L^*_{\mathfrak{a}}$.

Il convient de remarquer que d'après la proposition 3-2, les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a}\otimes M \longrightarrow A\otimes M \longrightarrow A'\otimes M \longrightarrow 0$$

entrainent que le foncteur $F'_{\mathfrak{a}} = L^{*}_{\mathfrak{a}}$ peut être caractérisé plus simplement par : $F'_{\mathfrak{a}}M = \mathfrak{a}\otimes M$, ce qui donne en particulier :

$$F'_{\mathfrak{a}}A = \mathfrak{a}\otimes A = \mathfrak{a}.$$

Les objets M de $C_{\mathfrak{a}}$ étant caractérisés par la condition $L^{*}_{\mathfrak{a}}M = o$, c'est-à-dire $F'_{\mathfrak{a}}M = o$, il en résulte que $C_{\mathfrak{a}}$ est la mono sous catégorie associée à $F'_{\mathfrak{a}}$ ou à $C'_{\mathfrak{a}}$. Ainsi (b) implique (a).

Les conditions (a) et (b) sont donc équivalentes.

Tout objet M de $\mathcal{A}$ détermine une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(A',M) \longrightarrow \mathfrak{a}\otimes M \longrightarrow A\otimes M \longrightarrow A'\otimes M \longrightarrow 0$$

Il en résulte que la condition (c) se traduit par la condition $\mathrm{Tor}_1(A',M) = o$ pour tout objet M de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire par la condition (b).

La condition (b) entraine que $C_{\mathfrak{a}}$ est la mono sous catégorie associée à la sous catégorie localisante $C'_{\mathfrak{a}}$ caractérisée par les objets M de $\mathcal{A}$ pour lesquels $A'\otimes M = o$, ce qui montre que l'ensemble $F'_{\mathfrak{a}}$ topologisant et idempotent est constitué par les idéaux à gauche I de A pour lesquels $A'\otimes(A/I) = o$. Les suites exactes :

$$0 \longrightarrow A'\otimes I \longrightarrow A'\otimes A \longrightarrow A'\otimes(A/I) \longrightarrow 0$$

montrent donc que $I\in F'_{\mathfrak{a}}$ se traduit par la surjectivité de l'application canonique : $A'\otimes I \longrightarrow A'\otimes A$.

L'image d'un élément $\sum_i a'_i\otimes u_i$ de $A'\otimes I$ est l'élément $\sum_i a'_i\rho(u_i)\otimes 1$ identifié à l'élément $\sum_i a'_i\rho(u_i)$ de A'. Il en résulte que l'image de l'application canonique : $A'\otimes I \longrightarrow A'\otimes A$ consiste en l'idéal à gauche $\rho(I)$ de A'. En désignant par 1' l'unité de A', la condition $I\in F'_{\mathfrak{a}}$ se traduit donc par $\rho(I) = A'$, c'est-à-dire par $1'\in\rho(I)$, ou encore par l'existence d'un élément $u\in I$, tel que $(1-u)\in\mathfrak{a}$. Ainsi $F'_{\mathfrak{a}}$ coïncide avec l'ensemble F_S des idéaux à gauche de A qui rencontrent la partie multiplicative $S = 1-\mathfrak{a}$.

Puisque $F'_{\mathfrak{a}}A$ est constitué par les éléments de A dont l'annulateur appartient à $F'_{\mathfrak{a}}$, la relation $F'_{\mathfrak{a}}A = \mathfrak{a}$. entraine que la condition $\alpha \in \mathfrak{a}$ est équivalente à la condition : il existe $s \in S$, tel que $s\alpha = o$, c'est-à-dire à la condition.: il existe $\beta \in \mathfrak{a}$ tel que $\alpha = \beta\alpha$, ce qui montre que l'idéal bilatère $\mathfrak{a}$ est fortement idempotent à gauche. Ainsi (b) implique (d).

Réciproquement, d'après le lemme 6-6, la condition (d) entraine que le foncteur : $M \rightsquigarrow A' \otimes M$ est exact. Ainsi, la condition (d) implique la condition b), ce qui achève la démonstration.

Corollaire 6-8 : Pour toute mono sous catégorie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$, déterminée par un ensemble F topologisant et idempotent, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) La sous catégorie $\mathcal{M}$ est localisante.

(b) La sous catégorie $\mathcal{M}$ coïncide avec une sous catégorie $C_{\mathfrak{a}}$ pour un idéal bilatère $\mathfrak{a}$ fortement idempotent à gauche de A.

(c) L'ensemble F coïncide avec l'ensemble F_S des idéaux à gauche de A qui rencontrent une partie multiplicative S telle que $\mathfrak{a} = 1-S$ soit un idéal bilatère fortement idempotent à gauche de A.

Le corollaire 6-4 montre que la condition (a) entraine que $\mathcal{M} = C_{\mathfrak{a}}$ pour un idéal bilatère idempotent $\mathfrak{a}$ de A. Le théorème 6-7 entraine alors que $\mathfrak{a}$ est fortement idempotent à gauche, ce qui montre que (a) implique (b).

Réciproquement, le lemme 6-8 montre que (b) implique (a), puisque $\mathfrak{a}$ est idempotent.

Les conditions équivalentes (a) et (b) entrainent d'après la démonstration du théorème 6-7 que $F = F'_{\mathfrak{a}} = F_S$ pour la partie multiplicative $S = 1-\mathfrak{a}$. Ainsi (b) implique (c).

Réciproquement, la condition (c) entraine que pour tout objet M de $\mathcal{A}$, le sous module FM est constitué par les éléments $x \in M$, pour lesquels il existe $s \in S$, tel que $sx = o$, c'est-à-dire pour lesquels il existe $\alpha \in \mathfrak{a}$, tel que $x = \alpha x$.

Si M est un objet de $C_{\mathcal{a}}$, pour tout $x \in M$, la relation $\alpha x = o$ pour $\alpha \in \mathcal{a}$, entraine $FM = o$ et par suite que M est un objet de $\mathcal{M}$. Si M n'est pas un objet de $C_{\mathcal{a}}$ il existe $y \in M$ et $\alpha \in \mathcal{a}$, tels que $x = \alpha y \neq o$. Il existe aussi $\beta \in \mathcal{a}$, tel que $\alpha = \beta\alpha$ ce qui entraine $x = \beta x$, c'est-à-dire $x \in FM$ avec $x \neq o$, et par suite $FM \neq o$, ce qui montre que M n'est pas un objet de $\mathcal{M}$. La condition (c) implique donc $\mathcal{M} = C_{\mathcal{a}}$, c'est-à-dire la condition (b), ce qui achève la démonstration.

Remarque 6-9 : Il existe des anneaux A ayant des idéaux bilatères $\mathcal{a}$ fortement idempotents à gauche, propres et essentiels. Par exemple, pour une famille infinie $\{K_j\}_{j \in J}$ de corps, il suffit de prendre $A = \prod_{j \in J} K_j$ et $\mathcal{a} = \bigoplus_{j \in J} K_j$.

7 - Mono sous catégories abéliennes.

Etant donnés deux anneaux unitaires A et B, en désignant par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ les catégories de modules à gauche sur A et sur B, tout homomorphisme d'anneaux unitaires $\phi : A \longrightarrow B$ détermine un foncteur "restriction des scalaires" ϕ_* de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$ et un foncteur "extensions des scalaires" ϕ^* de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$.

Pour toute sous catégorie localisante $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ associé à un ensemble F topologisant et idempotent, il est facile de vérifier que la sous catégorie pleine $\mathcal{D}$ de $\mathcal{B}$ caractérisée par les objets de $\mathcal{B}$ dont l'image par ϕ_* est un objet de $\mathcal{C}$, constitue une sous catégorie localisante de $\mathcal{B}$, appelée l'image de $\mathcal{C}$ par ϕ. L'ensemble $\mathcal{G}$ topologisant et idempotent associé à $\mathcal{D}$, appelé l'image de F par ϕ, est constitué par les idéaux à gauche J de B, tels que $\phi_*(B/J)$ soit un objet de $\mathcal{C}$. Il est facile de vérifier que $\mathcal{G}$ est le plus fin des ensembles topologisants $\mathcal{G}'$ de B, tels que l'application ϕ de l'anneau topologique (A,F) dans l'anneau topologique $(B,\mathcal{G}')$ soit continue.

Dans ce paragraphe, étant donnée une sous catégorie localisante $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$, associée à un ensemble $\mathcal{F}$ topologisant et idempotent, ρ désignera l'homomorphisme canonique d'anneaux unitaires de A sur l'anneau quotient : $A' = A/\mathcal{F}A$.

L'ensemble $\mathcal{F}'$ topologisant et idempotent, image de $\mathcal{F}$ par ρ, est associé à la sous catégorie localisante $\mathcal{C}'$ de la catégorie $\mathcal{A}'$ des modules à gauche sur A', image de $\mathcal{C}$ par ρ.

Lemme 7-1 : En posant $\mathfrak{a} = \mathcal{F}A$, alors :

1 - Pour tout objet M de $\mathcal{A}$, les objets $\mathrm{Tor}_1(A',M)$, $\mathfrak{a}\otimes M$ et $\mathfrak{a}M$ sont des objets de $\mathcal{C}$.

2 - Pour qu'un objet M de $\mathcal{A}$ soit un objet de $\mathcal{C}$, il faut et il suffit que ρ^*M soit un objet de $\mathcal{C}'$

3 - Un foncteur H_1 dérivé à gauche du foncteur ρ^* exact à droite de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}'$ est à valeurs dans $\mathcal{C}'$

L'annulateur de tout élément $y = \sum_i \alpha_i \otimes x_i \in \mathfrak{a}\otimes M$ contient l'intersection finie des annulateurs des éléments $\alpha_i \in \mathfrak{a}$.

Comme ces annulateurs sont des éléments de $\mathcal{F}$, l'annulateur de y est un élément de $\mathcal{F}$, ce qui entraine que $\mathfrak{a}\otimes M$ est une objet de $\mathcal{C}$.

Tout objet M de $\mathcal{A}$ détermine une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(A',M) \longrightarrow \mathfrak{a}\otimes M \longrightarrow A\otimes M \longrightarrow A'\otimes M \longrightarrow 0$$

qui donne deux suites exactes courtes :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(A',M) \longrightarrow \mathfrak{a}\otimes M \longrightarrow \mathfrak{a}.M \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a}.M \longrightarrow A\otimes M \longrightarrow A'\otimes M \longrightarrow 0$$

Puisque $\mathfrak{a}\otimes M$ est un objet de $\mathcal{C}$, la première suite exacte courte entraine que $\mathrm{Tor}_1(A',M)$ et $\mathfrak{a}.M$ sont également des objets de $\mathcal{C}$.

De même, la seconde montre que $A\otimes M = M$ est un objet de $\mathcal{C}$ si et seulement si $A'\otimes M = \rho_*\rho^*M$ est un objet de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire si et seulement si $\rho^* M$ est un objet de $\mathcal{C}'$, d'après la définition de $\mathcal{C}'$.

Pour toute suite exacte dans A, de la forme :

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

telle que P soit projectif, un foncteur H_1 dérivé à gauche de ρ^* détermine dans A' une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H_1M \longrightarrow \rho^*M' \longrightarrow \rho^*P \longrightarrow \rho^*M \longrightarrow 0$$

dont l'image par le foncteur exact ρ_* de A' dans A, est la suite exacte dans A:

$$0 \longrightarrow \rho_* H_1M \longrightarrow \rho_*\rho^* M' \longrightarrow \rho_*\rho^*P \longrightarrow \rho_*\rho^*M \longrightarrow 0$$

dont les trois derniers termes sont isomorphes aux trois derniers termes de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(A',M) \longrightarrow A'\otimes M' \longrightarrow A'\otimes P \longrightarrow A'\otimes M \longrightarrow 0$$

Il en résulte que ρ_*H_1M est isomorphe à $\mathrm{Tor}_1(A',M)$. Puisque $\mathrm{Tor}_1(A',M)$ est un objet de C, la définition de C' montre que H_1M est un objet de C'.

Lemme 7-2 : Si S' est le foncteur canonique de la catégorie L' des objets C'fermés de A' et si T' est un foncteur canonique exact de A' dans L', tel que $L' = S'T'$ soit un foncteur localisation dans A', déterminé par C', alors :

1 - Le foncteur $U = T'\rho^*$ de A dans L' est exact et induit une équivalence entre A/C et L'.

2 - Le foncteur $L = \rho_*L'\rho^*$ est un foncteur localisation dans A déterminé par C.

Toute suite exacte dans A, de la forme :

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

détermine dans A', une suite exacte :

$$H_1M'' \longrightarrow \rho^*M' \longrightarrow \rho^*M \longrightarrow \rho^*M'' \longrightarrow 0$$

dont l'image par T', donne dans L' une suite exacte :

$$0 \longrightarrow T'\rho^*M' \longrightarrow T'\rho^*M \longrightarrow T'\rho^*M'' \longrightarrow 0$$

puisque $T'H_1M'' = o$, d'après la troisième partie du lemme 7-1.

Ainsi, le foncteur $U = T'\rho^*$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{L}'$ est exact. Il est immédiat qu'il admet le foncteur $V = \rho_* S'$ pour adjoint à droite. Il est facile de vérifier que le morphisme fonctoriel canonique de $UV = T'\rho^* \rho_* S'$ dans le foncteur identique sur $\mathcal{C}'$, est un isomorphisme puisque ρ^* induit une équivalence entre $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{A}'$, d'après la proposition 6-2, et que par suite $\rho^* \rho_*$ est isomorphe au foncteur identique sur $\mathcal{A}'$. Le noyau de U est caractérisé par les objets M de $\mathcal{A}$ pour lesquels $\rho^* M$ est un objet de $\mathcal{C}'$. D'après la seconde partie du lemme 7-1, le noyau de U coïncide donc avec $\mathcal{C}$.

La proposition 5 p. 374 de (3) entraine alors la première propriété

Puisque U admet V pour adjoint à droite, un foncteur localisation dans $\mathcal{A}$ déterminé par $\mathcal{C}$ peut donc être caractérisé par $L = VU = \rho_* S'T'\rho^* = \rho_* L'\rho^*$, ce qui démontre la seconde propriété.

Proposition 7-3 : Pour toute sous catégorie localisante $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$, associée à un ensemble F topologisant et idempotent, en posant $a = FA$, l'homomorphisme canonique ρ de A dans l'anneau quotient $A' = A/a$, possède les propriétés suivantes :

1- Si $\mathcal{C}'$ est la sous catégorie localisante de $\mathcal{A}'$, image de $\mathcal{C}$ par ρ, alors :

(a) Pour tout foncteur localisation L' dans $\mathcal{A}'$ déterminé par $\mathcal{C}'$, le foncteur $L = \rho_* L'\rho^*$ est un foncteur localisation dans $\mathcal{A}$ déterminé par $\mathcal{C}$.

(b) Pour tout foncteur localisation L dans $\mathcal{A}$ déterminé par $\mathcal{C}$, le foncteur $L' = \rho^* L\rho_*$ est un foncteur localisation dans $\mathcal{A}'$ déterminé par $\mathcal{C}'$.

2 - La mono sous catégorie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$ associée à $\mathcal{C}$ et la sous catégorie $\mathcal{L}$ des objets $\mathcal{C}$-fermés dans $\mathcal{A}$, sont des sous catégories de la catégorie $\mathcal{C}_a$.

3 - Dans l'équivalence entre $\mathcal{C}_{\mathcal{a}}$ et $\mathcal{A}'$ induite par ρ^*, la mono sous catégorie $\mathcal{M}$ et la sous catégorie $\mathcal{L}$ possèdent les propriétés suivantes :

(a) La mono sous catégorie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$ associée à $\mathcal{C}$ est équivalente à la mono sous catégorie $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{A}'$ associée à $\mathcal{C}'$.

En particulier, l'anneau A' est un objet de $\mathcal{M}'$, c'est-à-dire $F'A' = o$.

(b) La sous catégorie $\mathcal{L}$ des objets $\mathcal{C}$-fermés de $\mathcal{A}$ est équivalente à la sous catégorie $\mathcal{L}'$ des objets $\mathcal{C}'$-fermés de $\mathcal{A}'$.

La propriété 1-(a) résulte de la seconde partie du lemme 7-2.

Soit L_1' un foncteur localisation dans $\mathcal{A}'$ déterminé par $\mathcal{C}'$.

Puisque deux foncteurs localisation associés à une même sous catégorie localisante sont isomorphes, la seconde partie du lemme 7-2 entraine $L \simeq \rho_* L_1' \rho^*$. Puisque $\rho^* \rho_*$ est isomorphe au foncteur identique de $\mathcal{A}'$, il en résulte : $L_1' \simeq \rho^* L \rho_*$, ce qui montre que $L' = \rho^* L \rho_*$ est un foncteur localisation dans $\mathcal{A}'$ déterminé par $\mathcal{C}'$.

Si L et L' sont des foncteurs localisation dans $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ déterminés par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, et associés par la relation de 1-(a), soient ψ et ψ' les morphismes fonctoriels canoniques des foncteurs identiques sur $\mathcal{A}$ et sur $\mathcal{A}'$, dans L et dans L'.

La seconde partie du lemme 7-2 montre que pour tout objet M de $\mathcal{A}$, la flèche $\psi(M)$ de M dans LM, est le composé de l'épimorphisme canonique de M sur $R_{\mathcal{a}}M = \rho_* \rho^* M$ et de la flèche $\rho_* \psi' \rho^*(M)$ de $\rho_* \rho^* M$ dans $\rho_* L' \rho^* M = LM$.

Pour que M soit un objet de $\mathcal{M}$, c'est-à-dire que $\psi(M)$ soit un monomorphisme, il est nécessaire que l'épimorphisme canonique de M sur $R_{\mathcal{a}}M$ soit monomorphisme, c'est-à-dire un isomorphisme, ce qui montre que M doit être un objet de $\mathcal{C}_{\mathcal{a}}$. Il en résulte que $\mathcal{M}$, et par suite $\mathcal{L}$, sont des sous catégories de $\mathcal{C}_{\mathcal{a}}$.

La proposition 6-2 montre que ρ^* induit une équivalence entre C_a et $\bar{A}$

En tenant compte de la remarque précédente, pour qu'un objet M de C_a soit un objet de M (resp. de L) il faut et il suffit que ψ (M) soit un monomorphisme (resp. un isomorphisme), c'est-à-dire que $\rho_* \psi' \rho^*(M)$ soit un monomorphisme (resp. un isomorphisme). Comme ρ_* "reflète" les monomorphismes et les isomorphismes, les deux conditions précédentes se traduisent respectivement par les conditions $\psi' \rho^* M$ est un monomorphisme (resp. un isomorphisme), ce qui signifie que $\rho^* M$ est un objet de M' (resp. de L'). Il en résulte que M est équivalente à M' et que L est équivalente à L'.

Puisque le A-module à gauche A' est un objet de M, l'anneau A' est un objet de M', ce qui donne $F'A' = 0$, et achève la démonstration.

Théorème 7-4 : Pour toute mono sous catégorie M de A, associée à une sous catégorie localisante C de A, ou à un ensemble F topologisant et idempotent, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) La mono sous catégorie M est abélienne.

(b) La mono sous catégorie M coïncide avec la catégorie L des objets C-fermés de A.

(c) La mono sous catégorie M est localisante.

(d) L'ensemble F' topologisant et idempotent, image de F par l'homomorphisme canonique d'anneaux unitaires ρ de A dans $A' = A/FA$, vérifie $F' = \{A'\}$.

(e) La mono sous catégorie M coïncide avec une sous catégorie C_a pour un idéal bilatère a fortement idempotent à gauche de A.

(f) L'ensemble F coïncide avec l'ensemble F_S topologisant et idempotent constitué par les idéaux à gauche de A qui rencontrent une partie multiplicative S telle que $a = 1-S$ soit un idéal bilatère fortement idempotent à gauche de A.

En outre, si ces conditions équivalentes sont vérifiées, $\mathcal{a} = F\mathrm{A}$ et $\mathcal{M} = \mathcal{L} = \mathcal{C}_{\mathcal{a}}$.

La condition (a) entraine en particulier que tout monomorphisme dans $\mathcal{M}$ est normal. D'après la condition 1-(d) de la proposition 5-5, la caractérisation des objets $\mathcal{C}$-fermés, exprimée par la condition 2-(a') de la proposition 4-2, montre que tout objet de $\mathcal{M}$ est $\mathcal{C}$-fermé Ainsi (a) implique (b).

D'après la proposition 7-3, la condition (b) entraine $\mathcal{M}' = \mathcal{L}'$. Puisque A' est un objet de $\mathcal{M}'$, c'est aussi un objet de $\mathcal{L}'$. Tout idéal à gauche I' de A' est aussi un objet de $\mathcal{M}'$ et par suite de $\mathcal{L}'$. Il en résulte que les quotients A'/I' sont des objets de $\mathcal{M}'$, ce qui entraine $F'(A'/I') = o$. Les éléments I' de F' étant caractérisés par la condition $F'(A'/I') \neq A'/I'$, il en résulte $F' = \{A'\}$. Aussi (b) implique (d).

La condition (d) entraine $\mathcal{M}' = \mathcal{L}' = A'$ et en posant $\mathcal{a} = F\mathrm{A}$, la proposition 7-3 implique $\mathcal{M} = \mathcal{C}_{\mathcal{a}}$. Puisque $\mathcal{C}_{\mathcal{a}}$ est alors une mono sous catégorie de $\mathcal{A}$, le théorème 6-7 entraine que $\mathcal{a} = F\mathrm{A}$ est un idéal bilatère fortement idempotent à gauche de A. Ainsi, (d) implique (e).

Il est immédiat que (e) implique (a). L'équivalence de (c), (e) et (f), résulte du corollaire 6-8, ce qui achève la démonstration.

8 - Applications à l'essentialité et à ses généralisations.

8-1 - Caractérisation de certains ensembles topologisants.

Etant donné un anneau unitaire A et un ensemble F topologisant, mais non nécessairement idempotent, qui est associé à une sous catégorie fermée $\mathcal{C}$, la proposition 3-2 donne une caractérisation de l'ensemble $\overline{F}$ topologisant et idempotent engendré par F, associé à la sous catégorie localisante $\overline{\mathcal{C}}$ engendrée par $\mathcal{C}$.

Il est immédiat que $\overline{F}$ contient les ensembles topologisants F^n (3). Il peut arriver que $\overline{F}$ coïncide avec l'une de ces puissances de F, par exemple avec F^2.

L'étude de cette situation a été faite par Tisseron.

Pour tout objet M de A et tout sous objet N de M qui détermine une suite exacte :

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{u} M \xrightarrow{u'} M/N \longrightarrow 0$$

soit $\beta_F^M(N)$ le sous objet de M contenant N, constitué par l'image réciproque par u', de $F(M/N)$.

La condition $M = \beta_F^M(N)$ signifie que M/N est un objet de C et la condition $N = \beta_F^M(N)$ signifie que $F(M/N) = o$, c'est-à-dire que M/N est un objet de la mono sous catégorie M de A, associée à F.

De plus, tout ensemble F topologisant, vérifie $\left[\beta_F^M\right]^n = \beta_{F^n}^M$ pour tout objet M de A.

Les conditions : $\bar{F} = F^n$, $F^n = F^{n+1}$ et $\left[\beta_F^M\right]^n = \left[\beta_F^M\right]^{n+1}$ pour tout objet M de A, sont équivalentes. Lorsqu'il en est aussi : $\left[\beta_F^M\right]^n = \beta_{F^n}^M = \beta_{\bar{F}}^M$.

8-2. Applications à l'essentialité.

Pour tout anneau unitaire A, l'ensemble F_o des idéaux à gauche de A essentiels dans A est topologisant. Il n'est pas nécessairement idempotent, mais Tisseron a montré que $\bar{F}_o = F_o^2$.

Soient C_o et $\bar{C}_o$ la sous catégorie fermée et la sous catégorie localisante, associées à F_o et à $\bar{F}_o = F_o^2$.

Soit M_o la mono sous catégorie de A associée à F_o ou à $\bar{F}_o$, caractérisée par les objets M de A vérifiant l'une des conditions équivalentes $F_oM = o$ ou $\bar{F}_oM = o$.

Soit L_o la sous catégorie pleine de A des objets purs de M_o ou des objets $\bar{C}_o$-fermés de A.

Si N est un sous module essentiel de M, ce qui sera noté : $N \Delta M$, il est facile de vérifier que M/N est un objet de C_o et que réciproquement, cette condition entraine $N \Delta M$, si N contient $\bar{F}_oM$.

Les résultats rappelés ci-dessus sont applicables. Par exemple, en posant $\beta_o^M = \beta_{F_o}^M$ et $\bar{\beta}_o^M = \beta_{\bar{F}_o}^M$, il en résulte : $\left[\beta_o^M\right]^2 = \bar{\beta}_o^M$.

Si N contient F_oM, la condition $\beta_o^M(N) = M$, qui exprime que M/N est un objet de $\mathcal{C}_o$, est donc équivalente à NΔM. En particulier, dans $\mathcal{M}_o$, les conditions $\beta_o^M(N) = M$ et NΔM, sont équivalentes.

Si M est un objet de $\mathcal{M}_o$, les conditions équivalentes $N = \beta_o^M(N)$ et $N = \bar{\beta}_o^M(N)$, signifient, d'après la proposition 5-5, que le monomorphisme $u : N \rightarrow M$ est normal, c'est-à-dire que N est l'image de u dans $\mathcal{M}_o$, ou que N est un sous objet normal de M dans $\mathcal{M}_o$.

Plus généralement, si M est un objet de $\mathcal{M}_o$, le corollaire 5-2 montre que $\bar{\beta}_o^M(N)$ est l'image du monomorphisme $u : N \rightarrow M$, dans la catégorie $\mathcal{M}_o$.

La caractérisation de $\mathcal{L}_o$ fournit un autre exemple d'application.

Si L est un objet de $\mathcal{L}_o$, soit M un objet de $\mathcal{A}$, tel que LΔM. La relation $\bar{F}_oL = F_oM \cap L = o$, entraine $F_oM = o$ qui montre que M est un objet de $\mathcal{M}_o$. D'après ce qui précède, M/L est un objet de $\mathcal{C}_o$ et par suite de $\bar{\mathcal{C}}_o$. La proposition 4-2 montre que L est un facteur direct de M, ce qui entraine L = M. Ainsi, tout objet L de $\mathcal{L}_o$ n'admet pas d'extension essentielle propre, ce qui montre que L est injectif dans $\mathcal{A}$.

Le corollaire 4-6 montre que tout injectif Q de $\mathcal{A}$ tel que $F_oQ = o$, est un objet de $\mathcal{L}_o$.

Ainsi, $\mathcal{L}_o$ est la sous catégorie pleine de $\mathcal{A}$ caractérisée par les objets Q, injectifs dans $\mathcal{A}$, tels que $F_oQ = o$.

La recherche de conditions pour que $\mathcal{M}_o$ soit abélienne, donne un dernier exemple d'application.

Si $\mathcal{M}_o$ est abélienne, le théorème 7-4 entraine $\mathcal{M}_o = \mathcal{L}_o = \mathcal{C}_{\mathfrak{a}} \simeq A'$, en posant $\mathfrak{a} = \bar{F}_oA$ et $A' = A/\mathfrak{a}$. D'après ce qui précède, il en résulte que tout A'-module à gauche est injectif. L'anneau A' est donc semi-simple

Soit F' l'image de $\overline{F}_{\bullet}$ par l'homomorphisme canonique $\rho : A \longrightarrow A'$. Les éléments I' de F' sont les idéaux à gauche de A', tels que $\rho_{*}(A'/I')$ soit un objet de $\overline{C}_{\bullet}$. Si A' est semi-simple, tout idéal à gauche I' de A' est facteur direct (2), ce qui montre que A'/I' s'identifie à un sous objet de A', dont l'image par ρ_{*} est un objet de $M_{\bullet}$, puisque c'est un sous objet du A-module à gauche A' qui est un objet de $M_{\bullet}$. Il en résulte que $\rho_{*}(A'/I')$ ne peut être un objet de $\overline{C}_{\bullet}$ que s'il est nul, c'est-à-dire si $I' = A'$, ce qui entraine $F' = \{A'\}$. Le théorème 7-4 entraine que $M_{\bullet}$ est abélienne.

Ainsi, pour que $M_{\bullet}$ soit abélienne, il faut et il suffit que l'anneau $A' = A/\overline{F}_{\bullet}A$ soit <u>semi-simple</u>.

Ce résultat a été obtenu de façon différente par Leclerc.

8-3. <u>Interprétation des généralisations de l'essentialité.</u>

Soit Σ un ensemble d'idéaux à gauche d'un anneau unitaire A, vérifiant les axiomes de Sanderson (9). Il est facile de vérifier que Σ est un ensemble topologisant et idempotent.

La relation de Σ-essentialité étudiée dans (6) et dans (5), notée $N \overset{\Delta}{\Sigma} M$, peut être caractérisée par les conditions :

$$N \,\Delta\, M \text{ et } M/N \text{ est } \Sigma\text{-négligeable.}$$

Soit C_{Σ} la sous catégorie localisante de A, associée à Σ.

Si N contient $F_{\bullet}M$, la condition $N \overset{\Delta}{\Sigma} M$ équivaut à : M/N est un objet de $C_{\bullet}$ et de C_{Σ}, c'est-à-dire de la sous catégorie fermée C, associée à l'ensemble topologisant F défini par : $F = \Sigma \cap F_{\bullet}$.

Ainsi, lorsque N contient $F_{\bullet}M$, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) $N \overset{\Delta}{\Sigma} M$

(b) M/N est un objet de C.

(c) $M = \beta_{F}^{M}(N)$.

Cette remarque peut fournir une interprétation utile de la relation de Σ-essentialité.

BIBLIOGRAPHIE

(1) N. BOURBAKI : Algèbre commutative. Ch. I Modules plats et Ch. II Localisation. Paris Hermann (Act. Sc. et Ind. 1290, Eléments de Mathématiques.)

(2) N. BOURBAKI : Algèbre. Ch. VIII. Modules et Anneaux semi-simples Paris Hermann (Act. Sc. et ind 1261, Eléments de Mathématiques).

(3) P. GABRIEL : Des catégories abéliennes. Bull. Soc. Math. Fr. 90 (1962) 323-448 (Thèse Sc. Math. Paris 1961).

(4) A. GROTHENDIECK : Sur quelques points d'algèbre homologique. Tohoku math. J. Serie 2, 9 (1957) 111-221.

(5) A. HUDRY : Sous modules Σ-clos, sous modules Σ-compléments relatifs Modules Σ-quasi injectifs. Pub. Dep. Fac. Sc. Lyon. t. 5 fasc. 1 (1968) 1-35.

(6) G. MAURY : Σ-compléments. Pub. Dép. Math. Fac. Sc. Lyon. t. 5 fasc. 1 (1968) 37-62.

(7) B. MITCHELL : Theory of categories. Academic Press New York and London (1965).

(8) J. E. ROOS : Caractérisation des catégories qui sont quotients de catégories de modules par une sous catégorie bilocalisante. Compte rendus Ac. Sc. 261, série A (1965) 4954-4957.

(9) SANDERSON : A generalisation of divisibility and injectivity in modules. Canad. Math. Bull 8, (1965) 505-513.

Manuscrit remis le 1er février 1969.

Michel HACQUE
Maître de conférences
Département de Mathématiques
43, bd du 11 novembre 1918
VILLEURBANNE