PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

S. D. EKONG

Sur les extensions du groupe de Poincaré connexe par un groupe fini et leurs représentations unitaires irréductibles

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1968, tome 5, fascicule 2
, p. 73-118

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1968__5_2_73_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1968 t. 5-2

SUR LES EXTENSIONS DU GROUPE DE POINCARE CONNEXE PAR UN GROUPE FINI ET LEURS REPRESENTATIONS UNITAIRES IRREDUCTIBLES

S. D. EKONG

INTRODUCTION.

La première partie de ce travail est consacrée à l'étude des extensions du groupe de Poincaré connexe par un groupe fini ; et la deuxième à l'étude de la forme des représentations unitaires irréductibles de ces extensions.

L'étude des extensions d'un groupe A par un groupe B conduit directement à l'étude du groupe des automorphismes de l'un des groupes quelle que soit la définition de l'extension qu'on adopte. Et on sait que cette tâche est loin d'être aisée même pour un groupe fini [1].

Le groupe de Poincaré étant un produit semi-direct, nous nous sommes attachés à caractériser les automorphismes d'un produit semi-direct au moyen d'un multiplet. Les résultats de ces investigations appliqués au groupe de Poincaré connexe $\mathcal{P}$ ont permis de déterminer le groupe des automorphismes de $\mathcal{P}$ et de retrouver les principaux résultats connus [2] [3] sur ce groupe. Le centre de $\mathcal{P}$ étant réduit à l'élément neutre, il en est de même de son groupe d'automorphismes. On sait alors d'après les travaux d'Eilenberg, Mac-Lane [4] et Fadeev (cité par Kurosh [5]) que toute extension de $\mathcal{P}$ par H est un produit semi-direct.

Dans le chapitre III de cette première partie, nous formulons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe fini H étant donné il existe une extension non triviale de $\mathcal{P}$ par H.

Dans la deuxième partie, nous nous sommes surtout préoccupés de prouver que les produits semi-directs $\mathcal{P}\times H$ obtenus sont réguliers au sens de Mackey. Une fois ceci prouvé, on sait alors que la méthode des représentations induites, permet de déterminer toutes les représentations unitaires irréductibles de ces extensions.

Compte tenu du fait que nous ne considérons que les représentations unitaires, le mot unitaire a été omis en plusieurs endroits.

§ 1. Préliminaires.

1/ Définition du groupe de Poincaré connexe.

Soit $\mathcal{L}$ le groupe orthogonal associé à la forme quadratique indéfinie sur $\mathbb{R}^4$: $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$

autrement dit le groupe des matrices telles que :

a/ $\Lambda \in GL(4,\mathbb{R})$

b/ ${}^t\Lambda J \Lambda = J$

où J est la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et ${}^t\Lambda$ la matrice transposée de Λ.

On a pour tout Λ appartennant à $\mathcal{L}$, d'après b/, $(\det \Lambda)^2 = 1$ d'où $\det \Lambda = \pm 1$

D'autre part si

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \lambda_{24} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & \lambda_{34} \\ \lambda_{41} & \lambda_{42} & \lambda_{43} & \lambda_{44} \end{pmatrix}$$

On a en particulier d'après b/

$$\lambda_{14}^2 + \lambda_{24}^2 + \lambda_{34}^2 - \lambda_{44}^2 = -1 \quad \text{d'où}$$

$$\lambda_{44}^2 = 1 + \lambda_{14}^2 + \lambda_{24}^2 + \lambda_{34}^2$$

par conséquent : $\lambda_{44}^2 \geqslant 1$

d'où $|\lambda_{44}| \geqslant 1$

L'ensemble L des éléments Λ de $\mathcal{L}$ tels que :

1°/ $\det \Lambda = 1$

2°/ $\lambda_{44} \geqslant 1$

est un sous-groupe normal de $\mathcal{L}$ et on sait [17] que c'est la composante connexe de l'élément neutre. On note souvent $L = L_+^\uparrow$

Soit T le groupe des translations dans $\mathbb{R}^4$

<u>Définition</u> : On appelle groupe de Poincaré connexe $\mathcal{P}$ le produit semi-direct

$$\mathcal{P} = T \times_\sigma L \quad (\text{où } \sigma : L \longrightarrow \mathrm{Aut}(T) \text{ est l'injection canonique}).$$

<u>Notations</u> : Nous utiliserons les lettres a, b, c, d, pour désigner des éléments de T et les lettres majuscules grecques pour les éléments de L.

<u>Loi de groupe dans $\mathcal{P}$</u>.

Soient p et p' deux éléments de $\mathcal{P}$ tels que $p = (a,\Gamma)$, $p' = (b,\Lambda)$

on a : $p.p' = (a,\Gamma)(b,\Lambda)$

$$= (a+\Gamma b, \Gamma\Lambda)$$

L'élément neutre de $\mathcal{P}$ est (o,1) où : 1 est élément neutre de L, o élément neutre de T et le symétrique d'un élément (a,Γ) :

$$(a,\Gamma)^{-1} = (-\Gamma^{-1}a, \Gamma^{-1})$$

$$\forall (a,\Gamma) \in \mathcal{P}, \ (a,\Gamma) = (a, \ )(o,1)$$

Nous identifierons par conséquent T et L à leurs images isomorphes respectives $T\times 1$ et $o\times L$.

2/ <u>Extension d'un groupe</u>.

K et Q étant deux groupes, on appelle extension de K par Q tout groupe E tel que :

- K est un sous-groupe normal de E
- E/K est isomorphe à Q.

Ce qui est équivalent à l'exactitude de la suite $1 \longrightarrow K \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\phi} Q \longrightarrow 1$

où i est l'injection canonique et ϕ l'homomorphisme canonique.

Il est bien connu [5] [4] qu'à toute extension de K par Q correspond un homomorphisme σ de Q dans Ant(K)/IntK où Ant(K) et IntK désignent respectivement le groupe des automorphismes de K et le groupe des automorphismes intérieurs de K. Eilenberg et Mac Lane [4] d'une part et d'autre part Fadeev ont établi une C.N.S. pour qu'un homomorphisme θ de Q dans Aut(K)/Int(K) soit associé à une extension de K ; cette condition entraine la conséquence suivante : dans le cas particulier où K n'a pas de centre (centre réduit à l'élément neutre), tout homomorphisme θ de Q dans Aut(K)/Int(K) est associé à une extension de K par Q et une seule : le produit semi-direct. Le fait que certains auteurs appellent extension de K par Q la suite exacte

$$1 \longrightarrow Q \longrightarrow E \longrightarrow K \longrightarrow 1$$

échange les rôles de K et Q on doit alors étudier le groupe des automorphismes de Q.

Dans le cas du groupe de Poincaré, les extensions de cette forme ont été étudiées par L. Michel [6] et les extensions des algèbres de Lie de par M. Flato et D. Sternheimer [7] [8].

Nous nous proposons d'étudier le cas où la suite exacte est de la forme

$1 \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 1$ avec Q fini.

II - Les automorphismes d'un produit semi-direct.

Soit G = K × H un groupe, produit semi-direct de ses sous-groupes K et H, avec K normal dans G. On sait alors que G est en particulier une extension de K par H et qu'il existe un homomorphisme θ de H dans Aut(K). Nous désignerons par $\tilde{h}$ l'image $h \in H$ dans Aut(K) par θ.

II - 1/ Les automorphismes de G = K × H

$(a,\Gamma) \in G$, $(b,\Lambda) \in G$ on a :

$$(a,\Gamma)(b,\Lambda) = (a.\tilde{\Gamma}(b),\Gamma\Lambda)$$

Soit F un automorphisme de G : $\forall\ (a,\Gamma) \in K$, $\exists\ (b,\Lambda) \in G$, $F(a,\Lambda) = (b,\Lambda)$

(1,1) élément neutre de G.

Posons $b = f(a)$, $\Lambda = \alpha(a)$

On définit ainsi les applications

$$f : K \longrightarrow K$$

$$\alpha : K \longrightarrow H$$

de la même manière on définit pour tout $(1,\Gamma)$ appartenant à H,

$$F(1,\Gamma) = (c,\Delta)$$

les applications

$$\Phi : H \longrightarrow H$$

$$\phi : H \longrightarrow K$$

<u>Propriétés des applications f,α,ϕ,Φ .</u>

Soient $(a,1)$ et $(b,1)$ deux éléments de G et $F \in Aut(G)$ on a

$$(a,1)(b,1) = (ab,1)$$

$$\begin{aligned} F((a,1)(b,1)) &= F(a,1)F(b,1) \\ &= (f(a),\alpha(a))(f(b),\alpha(b)) \\ &= (f(a).\widetilde{\alpha(a)}[f(b)]],\ \alpha(a)\alpha(b)) \end{aligned}$$

or $F((a,1)(b,1) = F(ab,1)$ et $F(ab,1) = (f(ab),\alpha(ab))$.

On en déduit par identification

(1) $f(ab) = f(a)\widetilde{\alpha(a)}[f(b)]$

(2) $\alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b)$

La relation (2) entraine que α est un homomorphisme. Posons $\widetilde{\Gamma}(a) = \widetilde{\Gamma}a$

on a alors

$$f(ab) = f(a)\widetilde{\alpha(a)}f(b)$$

appliquons maintenant le même traitement aux éléments $(1,\Gamma)$ et $(1,\Lambda)$ de G.

$$\begin{aligned} F((1,\Gamma)(1,\Lambda)) &= F(1,\Gamma)F(1,\Lambda) \\ &= (\phi(\Gamma),\Phi(\Gamma))(\phi(\Lambda),\Phi(\Lambda)) \\ &= (\phi(\Gamma)\widetilde{\Phi(\Gamma)}\phi(\Lambda),\Phi(\Gamma)\Phi(\Lambda)) \end{aligned}$$

or $F((1,\Gamma)(1,\Lambda)) = F(1,\Gamma\Lambda)$

$$= (\phi(\Gamma\Lambda),\Phi(\Gamma\Lambda))$$

d'où les relations :

(3) $\phi(\Gamma\Lambda) = \phi(\Gamma)\widetilde{\Phi(\Gamma)}\phi(\Lambda)$

(4) $\Phi(\Gamma\Lambda) = \Phi(\Gamma)\Phi(\Lambda)$

La relation (4) entraine que Φ est un homomorphisme.

Comme pour tout élément (a,Γ) de G on a la décomposition $(a,\Gamma) = (a,\ )(1,\Gamma)$ on en déduit que :

$$
\begin{aligned}
F(a,\Gamma) &= F(a,1)F(1,\Gamma) \\
&= (f(a),\alpha(a))(\phi(\Gamma),\Phi(\Gamma)) \\
&= (f(a).\widetilde{\alpha(a)}\phi(\Gamma),\alpha(a)\Phi(\Gamma))
\end{aligned}
$$

On a d'autre part :

$$F((1,\Gamma)(a,1)) = F(\tilde{\Gamma}a,\Gamma)$$

d'où

$$(\phi(\Gamma),\Phi(\Gamma))(f(a),\alpha(a)) = (f(\tilde{\Gamma}a).\widetilde{\alpha(\Gamma a)}\phi(\Gamma),\alpha(\tilde{\Gamma}a)\Phi(\Gamma))$$

$$(\phi(\Gamma).\widetilde{\Phi(\Gamma)}f(a),\Phi(\Gamma)\alpha(a)) = (f(\tilde{\Gamma}a).\widetilde{\alpha(\Gamma a)}\phi(\Gamma),\alpha(\tilde{\Gamma}a)\Phi(\Gamma)$$

D'où l'on tire les relations :

(5) $f(\tilde{\Gamma}a)\widetilde{\alpha(\tilde{\Gamma}a)}\phi(\Gamma) = \phi(\Gamma)\widetilde{\Phi(\Gamma)}\ f(a)$

(6) $\alpha(\tilde{\Gamma}a)\Phi(\Gamma) = \Phi(\Gamma)\alpha(a)$

Tout automorphisme F de G éclate donc en quadruplet que nous appellerons quadruplet type ; nous appellerons relations de base les six relations précédentes qui relient les éléments du quadruplet.

II-2/ Caractérisation de F au moyen du quadruplet (f,α,ϕ,Φ)

Nous commencerons par étudier le cas où G est un produit direct.

Proposition :

Soit $G = K \times H$ un produit direct de groupes ; si F est un automorphisme de G alors tous les éléments du quadruplet sont des homomorphismes.

La démonstration est immédiate compte tenu du fait que : $\forall \Gamma \in H$

$\tilde{\Gamma} = \mathbb{1}_K$ où $\mathbb{1}_K$ est l'application identique sur K.

Soit $G = K \times H$ un produit direct de ses sous-groupes K et H, et $F = (f,\alpha,\phi,\Phi)$ une application de G dans G telle que tous les éléments du quadruplet soient des homomorphismes tels que :

$$f : K \longrightarrow K \quad ; \quad \alpha : K \longrightarrow H$$

$$\Phi : H \longrightarrow H \quad ; \quad \phi : H \longrightarrow K$$

Si le quadruplet (f,α,ϕ,Φ) vérifie les conditions (5) et (6) des relations de base, alors :

<u>Proposition</u> :

Une condition nécessaire et suffisante pour que $F = (f,\alpha,\phi,\Phi)$, définisse un automorphisme de G est que les éléments du quadruplet soient liés par les r relations suivantes :

(D1) $\ker f \cap \ker\alpha = 1$

(D2) $\ker\phi \cap \ker\Phi = 1$

(D3) $\mathrm{im} f \times \mathrm{im}\phi = K$ produit direct

(D4) $\mathrm{im}\alpha \times \mathrm{im}\phi = H$ produit direct.

$\mathrm{im} f \times \mathrm{im}\phi$ désigne ici l'ensemble des éléments b de G de la forme

$$b = f(a)\phi(\Gamma) \quad \text{avec } \alpha(a)\ \phi(\Gamma) = 1$$

de même $\mathrm{im}\alpha \times \mathrm{im}\Phi$ est l'ensemble des éléments Λ de G tels que :

$$\Lambda = \alpha(a)\Phi(\Gamma) \quad \text{avec } f(a)\phi(\Gamma) = 1$$

Si F est un automorphisme de G alors F est représentable par un quadruplet type (f,α,ϕ,Φ) qui vérifie les six relations de base.

$$a \in \ker f \cap \ker\alpha \Longrightarrow F(q,1) = (1,1)$$

$$F \in \mathrm{Aut}(G) \Longrightarrow a = 1 \quad \text{d'où (D1)}$$

On démonstre de la même façon que $\ker\phi \cap \ker\Phi = 1$ d'où (D2)

$$\forall\, b \in K\ ,\ \exists!\,(a,\Gamma) \in G \text{ tel que } F(a,\Gamma) = (b,1)$$

d'où $\begin{cases} b = f(a)\phi(\Gamma) \\ 1 = \alpha(a)\Phi(\Gamma) \end{cases}$

F étant un automorphisme de G, tout élément b de K admet une factorisation unique de la forme précédente. L'ensemble de ces factorisations forme donc un recouvrement de K que nous appellerons recouvrement propre de K et imf, imϕ sont les images propres associées à ce recouvrement ; on a alors :

$$\mathrm{im}f \cap \mathrm{im}\phi = 1$$

On en déduit donc que $K = \mathrm{im}f \times \mathrm{im}\phi$.

Comme imf et imϕ sont des sous-groupes normaux de K, on a $K = \mathrm{im}f \times \mathrm{im}\phi$

On démontre de manière identique que $H = \mathrm{im}\alpha \times \mathrm{im}\Phi$ est un produit direct, d'où (D4).

Réciproquement soit $F = (f,\alpha,\phi,\Phi)$ une application de G dans $G = K \times H$ telle que : $f : K \longrightarrow K$; $\alpha : K \longrightarrow H$

$$\Phi : H \longrightarrow H \qquad \phi : H \longrightarrow K$$

Soient des homomorphismes vérifiant les six relations de base et :

$$F(a,\Gamma) = (f(a)\phi(\Gamma),\alpha(a)\Phi(\Gamma)) \qquad \forall (a,\Gamma) \in G$$

si F vérifie en outre (D1), (D2),(D3) et (D4) alors F est un automorphisme de G ; en effet :

$$F(a,\Gamma) = (1,1) \Longrightarrow \begin{cases} f(a)\phi(\Gamma) = 1 \\ \alpha(a)\Phi(\Gamma) = 1 \end{cases}$$

$f(a)\phi(\Gamma) = 1$ entraine que $\alpha(a)\Phi(\Gamma)$ appartient au produit direct $\mathrm{im}\alpha \times \mathrm{im}\Phi$ donc :

$$\alpha(a)\Phi(\Gamma) = 1 \quad\Longrightarrow\quad \alpha \in \ker\alpha \ , \ \Gamma \in \ker \Phi$$

de même $\alpha(a)\Phi(\Gamma) = 1$ entraine que $f(a)\phi(\Gamma)$ appartient au produit direct $\mathrm{im}f \times \mathrm{im}\phi$ donc $f(a)\phi(\Gamma) = 1$ entraine $a \in \ker f$, $\Gamma \in \ker\phi$ donc d'après (D1) $a = 1$,$\Gamma = 1$ par conséquent F est un monomorphisme.

$$\forall (b,\Lambda) \in G \ , \exists (d,\Delta) \in G \text{ tel que } (b,\Lambda) = F(d,\Delta)$$

en effet : $b \in K \Longrightarrow b = f(a)\phi(\Gamma)$ avec $\alpha(a)\Phi(\Gamma) = 1$

$$\Lambda \in H \Longrightarrow \Lambda = \alpha(c)\Phi(\Sigma) \text{ avec } f(c)\phi(\Sigma) = 1$$

d'où :

$$\begin{aligned}(b,\Lambda) &= (f(a)\phi(\Gamma),\alpha(c)\Phi(\Sigma))\\ &= (f(a)\phi(\Gamma)f(c)\phi(\Sigma)\ ,\ \alpha(a)\Phi(\Gamma)\alpha(c)\Phi(\Sigma))\\ &= (f(ac)\phi(\Gamma\Sigma),\ \alpha(ac)\Phi(\Gamma\Sigma))\\ &= F(ac,\Gamma\Sigma)\end{aligned}$$

d'où :

$$dc \neq ac\ ,\quad \Delta = \Gamma\Sigma.$$

Par conséquent F est un épimorphisme d'où $F \in Aut(G)$.

Il est clair que la correspondance $F \longrightarrow (f,\alpha,\phi,\Phi)$ est bijective ; on peut donc identifier F à (f,α,ϕ,Φ).

Dans le cas particulier où K est un sous-groupe caractéristique de G, (i.e, stable pour tout automorphisme de G), on a :

$$\alpha(a) = 1 \quad \forall\ a \in K \qquad \text{donc} \quad \ker\alpha = K$$

d'après (D1) $\ker f = 1$, f est alors un monomorphisme ; d'après (D4) $\mathrm{im}\Phi = H$ donc Φ est un épimorphisme

$$\forall\ b \in K\ ,\ \exists\,!(q,\Gamma) \in G$$

tel que $\qquad F(a,\Gamma) = b$

d'où $\quad b = f(a)\phi(\Gamma)$ avec $\alpha(a)\Phi(\Gamma) = 1$

donc $\quad \Gamma \in \ker\Phi$ et $a \in \ker\alpha$

Par conséquent $\ker\alpha \times \ker\Phi$ est isomorphe à K ce qui entraine que $\ker\Phi = 1$ donc Φ est un automorphisme de H.

$\Gamma \in \ker\Phi \Longrightarrow \Gamma = 1$ donc d'après (D3) f est un épimorphisme d'où $f \in Aut(K)$

Cas d'un produit semi-direct.

Dans le cas d'un produit semi-direct quelconque, α et Φ sont des homomorphismes ce qui n'est plus le cas pour f et ϕ. Cependant les restrictions f_α et ϕ_Φ de f et ϕ à $\ker\alpha$ et $\ker\Phi$ sont des homomorphismes. On peut aussi remarquer que la restriction de f à $\ker\alpha.K$ est un pré-homomorphisme en ce sens que pour tout élément ab de $\ker\alpha$. K on a :

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

On a également une propriété analogue pour ϕ.

Comme dans le cas d'un produit direct, nous allons caractériser tout automorphisme de G au moyen d'un quadruplet (f,α,ϕ,Φ).

Proposition.

Soit $G = K \times H$ un produit semi-direct où K est un sous-groupe normal de G ; F une application de G dans G telle qu'elle éclate en un quadruplet type (f,α,ϕ,Φ). Si les éléments du quadruplet vérifient les six relations de base alors une condition nécessaire et suffisante pour que $F = (f,\alpha,\phi,\Phi)$ définisse un automorphisme de G est que l'on ait les relations :

(SD1) $\ker f_\alpha = 1$

(SD2) $\ker\phi_\Phi = 1$

(SD3) $\operatorname{inf}_\alpha \cap \operatorname{im}\phi_\Phi = 1$

(SD4) $\operatorname{im}\alpha \times \operatorname{im}\Phi = H$ produit semi-direct (où $\operatorname{im}\alpha \times \operatorname{im}\Phi$ est défini comme dans le cas du produit direct).

(SD5) $\forall\, b \in K, \exists\, !(q,\Gamma) \in G,\ b = f(a)\phi(\bar{\Gamma}^{1})^{-1}$ avec $\alpha(a)\Phi(\Gamma) = 1$.

Soit en effet F un automorphisme de G, $F = (f,\alpha,\phi,\Phi)$ et le quadruplet vérifie les six relations de base

$$a \in \ker f_\alpha \cap \ker_\alpha \Rightarrow F(a,1) = (1,1) \Rightarrow a = 1$$

donc $\ker f_\alpha = 1$ (puisque $\ker f_\alpha \subset \ker\alpha$)

de même on démontre que $\ker\phi_\Phi = 1$. $(a,\Gamma) \in \ker\alpha \times \ker\Phi$

alors $F(a,\Gamma) = (f_\alpha(a)\phi_\Phi(\Gamma),1)$

d'où $f_\alpha(a)\phi_\Phi(\Gamma) = 1 \Rightarrow a = 1 \ ,\ \Gamma = 1$

donc $\operatorname{im} f_\alpha \cap \operatorname{im}\phi_\Phi = 1$

ce qui démontre (D3)

$\forall \Lambda \in H, \exists!(a,\Gamma) \in G$ tel que :

$$\begin{cases} f(a)\widetilde{\alpha(a)}\ \phi(\Gamma) = 1 \\ \alpha(a)\ \Phi(\Gamma) = \Lambda \end{cases}$$

Cette factorisation étant unique et $\mathrm{im}\alpha$ étant un sous-groupe normal de $\mathrm{im}\alpha \times \mathrm{im}\Phi = H$, on en déduit que H est produit semi-direct de ses sous-groupes $\mathrm{im}\alpha$, $\mathrm{im}\Phi$ d'où (SD4).

$\forall\ b \in K$, $\exists!(a,\Gamma) \in G$ tel que

$$\begin{cases} f(a)\widetilde{\alpha(a)}\phi(\Gamma) = b \\ \alpha(a)\Phi(\Gamma) = \Lambda \end{cases}$$

$$\alpha(a)\Phi(\Gamma) = 1 \implies \alpha(a) = \Phi(\Gamma^{-1})$$

d'où

$$b = f(a)\widetilde{\Phi(\Gamma^{-1})}\phi(\Gamma)$$

mais

$$\phi(\Gamma^{-1})^{-1} = \widetilde{\Phi(\Gamma^{-1})}\phi(\Gamma)$$

donc

$$\begin{cases} b = f(a)\phi(\Gamma^{-1})^{-1} \\ 1 = \alpha(a)\Phi(\Gamma) \end{cases}$$

Réciproquement soit $F = (f,\alpha,\phi,\Phi)$ une application de G dans G définie de manière maintenant évidente

$$F(a,\Gamma) = (f(a)\widetilde{\alpha(a)}\phi(\Gamma), \alpha(a)\Phi(\Gamma))$$

Les relations de base font de F un endomorphisme de G.

$$F(a,\Gamma) = (1,1) \implies \begin{array}{l} f(a)\widetilde{\alpha(a)}\phi(\Gamma) = 1 \\ \alpha(a)\Phi(\Gamma) = 1 \end{array}$$

$f(a)\widetilde{\alpha(a)}\phi(\Gamma) = 1$ et $\alpha(a)\Phi(\Gamma) = 1 \implies a \in \ker\alpha$, $\Gamma \in \ker\Phi$ donc $f(a)\phi(\Gamma) \in \mathrm{im} f_\alpha \times \mathrm{im}\phi_\Phi$ comme $\mathrm{im} f_\alpha \cap \mathrm{im}\phi_\Phi = 1$ il vient $a \in \ker f_\alpha$ et $\Gamma \in \ker_\Phi$ donc $a = 1$, $\Gamma = 1$ donc F est un monomorphisme.

$(b, \ ) \in G \implies b \in K$, $\Lambda \in H$

$b \in K \implies \exists!(a,\Gamma) \in G$

$$b = f(a)\widetilde{\alpha(a)}\phi(\Gamma) \text{ avec } \alpha(a)\Phi(\Gamma) = 1$$

$$\Lambda \in H \Longrightarrow \Lambda = \alpha(c)\Phi(\Sigma) \text{ avec } f(c)\widetilde{\alpha(c)}\phi(\Sigma) = 1$$

d'où

$$(b,\Lambda) = (f(a)\widetilde{\alpha(a)}\phi(\Gamma),\alpha(c)\Phi(\Sigma))$$

Considérons l'élément

$$(a,\Gamma)(c,\Sigma) = (a.\tilde{\Gamma}c,\Gamma\Sigma)$$

on vérifie alors aisément que :

$$(b,\Lambda) = F(a.\tilde{\Gamma}c,\Gamma\Sigma)$$

donc F est un épimorphisme ; il en résulte donc que F est un automorphisme de G; En particulier si K est un sous-groupe caractéristique de G,

$$\alpha(a) = 1 \quad \forall a \in K \qquad \text{donc } H = \text{im}\Phi$$

Φ est alors un épimorphisme. $\alpha(K) = 1$ entraine que $K = \ker\alpha$ par conséquent f est un homomorphisme. Comme $\ker f_\alpha \equiv \ker f$ on en déduit que f est un monomorphisme

$$\forall b \in K \ , \ \exists !(a,\Gamma) \in G$$

$$b = f(a)\phi(\Gamma^{-1})^{-1}$$

$$1 = \alpha(a)\Phi(\Gamma) \quad \text{d'après (SD5)}$$

comme $\alpha(a) = 1$ on en déduit que $\Gamma \in \ker\Phi$

d'où $b = f(a)\phi(\Gamma)$

et $\ker\alpha \times \ker\Phi$ est isomorphe à K.

donc $\ker\Phi = 1$; ainsi Φ est un automorphisme. On tire de (SD5) que f est un épimorphisme soit en définitive que f est un automorphisme.

III - Quelques conséquences des résultats précédents.

Soit $G = K \times H$ un produit semi-direct où $K \trianglelefteq G$

on a : $\forall F \in \text{Int}(G)$, $F(K) \subseteq K$

autrement dit $\alpha(a) = 1 \ \forall a \in K$

F est alors déterminé par un élément (b,Λ) de G et on a :

$$\forall (a,\Gamma) \in G$$

$$F(a,\Gamma) = (b,\Lambda)(a,\Gamma)(b,\Lambda)^{-1}$$
$$= (b.\tilde{\Lambda}a.\widetilde{\Lambda\Gamma\Lambda^{-1}}b^{-1},\Lambda\Gamma\Lambda^{-1})$$
$$= (f(a)\phi(\Gamma),\Phi(\Gamma)) \quad \text{d'où, :}$$

$$\Gamma = 1 \Rightarrow f(a) = b.\gamma a.b^{-1}$$

$$a = 1 \Rightarrow \begin{cases} \Phi(\Gamma) = \Lambda\Gamma\Lambda^{-1} \\ \phi(\Gamma) = b\Lambda\Gamma\Lambda^{-1}b^{-1} \end{cases}$$

Dans le cas particulier où G est un produit direct, les relations précédentes entrainent que :

$$f \in Int(K)$$
$$\Phi \in Int(H)$$
$$\phi(\Gamma) = 1 \quad \forall \Gamma \in H$$

<u>Proposition</u> : Une condition nécessaire et suffisante pour que $F = (f,\alpha,\phi,\Phi)$ soit un automorphisme intérieur du produit direct $G = K \times H$ est que :

$$f \in Int(K), \ \Phi \in Int(H), \quad \alpha(K) = 1 \text{ et } \phi(H) = 1$$

Considérons maintenant le cas où $G = K \times H$ est un produit semi-direct avec $K \triangleleft G$.

$$F \in Int(G) \Rightarrow F(K) \subsetneq K \Rightarrow \alpha(K) = 1$$

il existe (b,Λ) appartenant à G tel que

$$\forall (a,\Gamma) \in G, \ F(a,\Gamma) = (b,\Lambda)(a,\Gamma)(b,\Lambda)^{-1}$$

d'où

$$\begin{cases} f(a)\phi(\Gamma) = b\,\chi a.\ \widetilde{\Lambda\Gamma\Lambda^{-1}}b^{-1} \\ \Phi(\Gamma) = \Lambda\,\Gamma\Lambda^{-1} \end{cases}$$

$$a = 1 \Rightarrow \phi(\Gamma) = b\ \widetilde{\Lambda\Gamma\Lambda^{-1}}\ b^{-1} \ \forall \Gamma \in H$$

$$\Gamma = 1 \Rightarrow f(a) = b\ \lambda\ ab^{-1}$$

$$\Phi(\Gamma) = \Lambda\Gamma\Lambda^{-1}$$

Cette dernière relation entraine que Φ est un automorphisme intérieur de H. Si on désigne par $(a,\Gamma)^*$ l'automorphisme intérieur induit par (a,Γ) on tire des relations précédentes les suivantes :

$$(I^*)\quad \begin{cases} f = b^* \tilde{\Lambda} \\ \phi = b^* \Lambda^* \quad \text{avec } b^*\Lambda^*(\Gamma) = b\widetilde{\Lambda\Gamma\Lambda^{-1}}(b^{-1}) \\ \Phi = \Lambda^* \end{cases}$$

La restriction de b^* à K est un automorphisme intérieur de K ; f est par conséquent le produit de deux automorphismes de K dont l'un au moins est intérieur. Donc f appartient à Aut(K).

Il est évident que les relations précédentes caractérisent un automorphisme intérieur de G. Autrement dit si le quadruplet type de F appartenant à Aut(G) dégénère en un triplet où ne figure pas α et si les éléments du triplet vérifient les relations ci-dessus, relations qui constituent désormais la condition (I^*), alors F est un automorphisme intérieur de G

En particulier si K n'a que des automorphismes intérieurs ce qui est le cas lorsque K est complet, f est alors un automorphisme intérieur de K. Lorsque K est un sous-groupe caractéristique de G, on a par définition :

$$F(K) \subseteq K \qquad \forall\ F \in \mathrm{Aut}(G)$$

par conséquent $\qquad \alpha(K) = 1$

et le quadruplet type de F dégénère en un triplet où ne figure pas α nous désignerons désormais un tel triplet, un α-triplet. On a alors dans ce cas entre autres trivialités les suivantes :

soit $G = K \times H$ un produit semi-direct où $K \triangleleft G$

(T1) si K est fini et H infini et simple alors K est un sous-groupe caractéristique de G.

(T2) si H est fini et simple, et K fini désignons par O(H) et O(K) les ordres de H et K.

a/ si $o(K) < o(H)$, K est un sous-groupe caractéristique de G

b/ si $o(K) = o(H)$ et si K n'est pas simple alors K est caractéristique dans G.

c/ si $o(H) < o(K)$ et si les deux ordres sont premiers entre-eux K est caractéristique.

(T3) si K et H sont infinis, si H est simple, et K abélien, alors K est un sous-groupe caractéristique.

Chapitre II

Les automorphismes de $\mathcal{P} = T \times L$

I. Applications du chapitre I.

1.1. Soit $G = K \times H$ un produit semi-direct où K est le sous-groupe normal. Si K est en outre caractéristique alors le quadruplet type de tout automorphisme F de G dégénère en un triplet (f,ϕ,Φ) où ne figure pas α.ou α-triplet. D'après les résultats du chapitre I on a alors

$$f \in \mathrm{Aut}(K) \ , \qquad \Phi \in \mathrm{Aut}(H)$$

et ϕ est par définition une 1-cochaine. [18]

Dans le cas particulier où K est caractéristique et abélien, la relation de base (5) devient :

$$(5') \qquad f(\tilde{\Gamma} a) = \widetilde{\Phi(\Gamma)} f(a)$$

1.2. Cas du groupe de Poincaré général.

Le groupe de Poincaré général est le produit semi-direct $P = T \times \mathcal{L}$, $\mathcal{L}$, opère à gauche sur T. L étant simple [10] T est un sous-groupe caractéristique de $\mathcal{P}$ d'après la trivialité (T3). $\mathcal{P}$ composante connexe de l'élément neutre de P est un sous-groupe caractéristique de P ; il en résulte que T est un sous-groupe caractéristique de P. Ce résultat peut être également obtenu à partir de la décomposition de $\mathcal{L}$ en produit de ses sous-groupes (voir chapitre III) $\alpha(T)$

étant un sous-groupe normal abélien de $\mathcal{L}$, on en déduit que $\alpha(T) \subset Z(\mathcal{L})$ le centre de $\mathcal{L}$; on prouve alors aisément que $\alpha(a) = 1 \quad \forall a \in T$.

On peut appliquer les résultats du I.1.,

A tout automorphisme $\bar{F}$ de P est associé un unique α-triplet tel que :

$\bar{f} \in \mathrm{Aut}(T)$

$\bar{\Phi} \in \mathrm{Aut}(L)$

$\bar{\phi}$: 1. cochaine [5] [18]

Compte tenu de la loi de groupe de P (la même que celle de $\mathcal{P}$), $\tilde{\Gamma} = \Gamma$ d'où

$$\bar{f}(\Gamma b) = \bar{\Phi}(\Gamma)\bar{f}(b)$$

$$\bar{\phi}(\Gamma\Lambda) = \bar{\phi}(\Gamma) + \bar{\Phi}(\Gamma)\bar{\phi}(\Lambda)$$

$$\bar{F}(a,\Gamma) = (\bar{f}(a) + \bar{\phi}(\Gamma), \bar{\Phi}(\Gamma))$$

<u>Caractérisation des éléments de triplet</u> (f,ϕ,Φ) [2]

Soit Λ un élément du centralisateur de Γ dans $\mathcal{L}$ (celui-ci n'est jamais vide dans un groupe) on a :

$$\bar{\phi}(\Gamma\Lambda) = \bar{\phi}(\Lambda\Gamma)$$

d'où

$$\bar{\phi}(\Gamma) + \bar{\Phi}(\Gamma)\bar{\phi}(\Lambda) \equiv \bar{\phi}(\Lambda) + \bar{\Phi}(\Lambda)\,\bar{\phi}(\Gamma)$$

soit $\quad (1- \bar{\Phi}(\Lambda))\bar{\phi}(\Gamma) = (1-\bar{\Phi}(\Gamma))\bar{\phi}(\Lambda)$

comme $\quad -\mathbb{1} \in Z(\mathcal{L})$ où $Z(\mathcal{L})$ désigne le centre de $\mathcal{L}$ on a :

$$\forall \Gamma \in \mathcal{L} \qquad -\mathbb{1}.\Gamma = \Gamma.-\mathbb{1}$$

d'où

$$(\mathbb{1}-\bar{\Phi}(-\mathbb{1})\bar{\phi}(\Gamma) = (\mathbb{1}-\bar{\Phi}(\Gamma))\bar{\phi}(-\mathbb{1})$$

mais

$$\bar{\Phi}(-\mathbb{1}) = -\mathbb{1}$$

car

$\bar{\Phi}$ appartient à $\mathrm{Aut}(\mathcal{L})$

d'où

$$2\,\bar{\phi}(\Gamma) = (\mathbb{1}-\bar{\Phi}(\Gamma))\bar{\phi}(-\mathbb{1})$$

il existe a_0 appartenant à T tel que $\bar{\phi}(-\mathbb{1}) = 2a_0$ d'où :

$$\forall \Gamma \in \mathcal{L} \ , \quad \bar{\phi}(\Gamma) = (\mathbb{1}-\bar{\Phi}(\Gamma))a_0$$

I-3. <u>Cas du groupe de Poincaré connexe</u> $\mathcal{P} = T \times L$

$\mathcal{P} = T \times L$ est un sous-groupe normal de $P = T \times \mathcal{L}$ mieux est un sous groupe caractéristique de P. En effet L : composante connexe de l'élément neutre de $\mathcal{L}$, est un sous-groupe caractéristique de $\mathcal{L}$ (voir Bourbaki [9] §1 n°3) donc $\mathcal{P}$ est la composante connexe de l'élément neutre de P.

Soit F un automorphisme de P on a

$$\bar{F} = (\bar{f},\bar{\phi},\bar{\Phi}) \quad , \quad \bar{f} \in \mathrm{Aut}(P), \quad \bar{\Phi} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{L})$$

soit Φ la restriction de $\bar{\Phi}$ à L on a $\bar{\Phi} \in \mathrm{Aut}(L)$ si ϕ est la restriction de $\bar{\phi}$ à L, il est clair que $F = (f,\phi,\Phi) \in \mathrm{Aut}(\mathcal{P})$ compte tenu de la relation (7) on a :

$$\phi(\Gamma) = (1-\Phi(\Gamma))a_0$$

<u>Caractérisation de Φ.</u>

$\forall \Gamma \in L$, $\forall a \in T$ et $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{P})$ tel que f est associé à un automorphisme de $\mathcal{P}$

$$f\Gamma f^{-1}(a) = f(\Gamma f^{-1}a) = \Phi(\Gamma)a$$

par conséquent

$$\Phi(\Gamma) = f\Gamma f^{-1}$$

et

$$f\Gamma f^{-1} \in L$$

les éléments de Aut(T) associés à un automorphisme de $\mathcal{P}$(ou P) appartiennent donc au normalisateur de L dans Aut(T) .

Dans son cours professé à l'Ecole deété de Physique théorique de Cargèse [2] Monsieur Louis Michel démontre que f est alors un endomorphisme de l'espace vectoriel T. Cependant la dernière partie de sa démonstration est incomplète, la preuve selon laquelle l'application η_a de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (page 18) est un automorphisme de R étant insuffisante ; nous y accorderons un peu plus d'attention.

Nous désignerons par $N(L)$ le normaliseur de L dans $Ant(T)$.

D'après ce qui précède, tout élément f de $N(L)$ est associé à un automorphisme de $\mathcal{P}$.

Proposition : f est un endomorphisme de l'espace vectoriel T.

Démonstration.

$$\Gamma \in L \text{ , } b \in T \Longrightarrow f(\Gamma b) = \Phi(\Gamma)f(b)$$

Soit S_b le stabilisateur de b dans L.

$$\Gamma \in S_b \Longrightarrow f(\Gamma b) = f(b)$$

d'où

$$\Phi(\Gamma)f(b) = f(b)$$

par conséquent

$$\Phi\Phi(\Gamma) \in S_{f(b)}$$

L'automorphisme Φ transforme donc S_b en $S_{f(b)}$. De façon plus précise on a :

$$\Phi(S_b) = S_{f(b)}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ il est évident que $f(b)$ et $\lambda f(b)$ ont le même stabilisateur dans L.

d'où

$$S_{f(b)} = S_{\lambda f(b)}$$

comme il en est de même b et λb on a

$$\Phi(S_b) = \Phi(S_{\lambda b})$$

soit

$$S_{f\ (b)} = S_{f(\lambda b)}$$

T est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$; b et λb considérés comme éléments de l'espace vectoriel T sont deux vecteurs colinéaires.

Or $f(b)$ et $f(\lambda b)$ ayant le même stabilisateur dans L sont donc colinéaires. Par conséquent f transforme deux vecteurs parallèles en deux vecteurs parallèles, en d'autres termes, f conserve la colinéarité. Dans ces conditions il est manifeste que deux vecteurs non parallèles ont des transformées par f non parallèles.

b, et λb ($\lambda \in \mathbb{R}^*$) étant colinéaires $f(b)$ et $f(\lambda b)$ sont colinéaires, par conséquent : $\exists\, k \in \mathbb{R}^*$

tel que : $f(\lambda b) = kf(b)$

On définit ainsi une application χ de $\mathbb{R}^*$ dans R^* telle que :

$$\chi(\lambda) = k \quad , \quad \chi(1) = 1 \ ,$$

comme $f(0.b) = f(0) = 0 \quad \forall\, b \in T$

on a $\chi(0) = 0$

donc χ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

<u>Propriétés de</u> χ.

$$\begin{aligned} \forall \lambda \ ,\mu \in \mathbb{R} \ , \ f((\lambda+\mu)b) &= f(\lambda b + \mu b) \\ &= f(\lambda b) + f(\mu b) \\ &= kf(b) + k'f(b) \\ &= (k+k')f(b) \end{aligned}$$

d'où $\chi(\lambda+\mu) = \chi(\lambda) + \chi(\mu)$

χ est donc un homomorphisme du groupe additif $\mathbb{R}$. On définit de la même façon l'homomorphisme χ' associé à f^{-1} on a alors :

$$f^{-1}(\lambda b) = \chi'(\lambda)\, f^{-1}(b)$$

mais

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(\lambda b)) &= f(\chi'(\lambda) f^{-1}(b)) \\ &= \chi(\chi'(\lambda))b \end{aligned}$$

d'où

$$\lambda b = \chi . \chi'(\lambda) b \qquad \forall\, b \in T \ , \quad \lambda \in R \text{ donc } \quad \chi\chi'(\lambda) = \lambda$$

on a de même

$$\chi'\chi(\lambda) = \lambda$$

par conséquent χ et χ' sont section et rétraction l'une de l'autre, χ est donc une bijection de $\mathbb{R}$ donc en définitive un automorphisme du groupe additif $\mathbb{R}$.

Le scalaire k dépend évidemment de λ et de f, et à priori de b.

Montrons qu'en fait, k ne dépend que de λ pour f donné.

Pour cela nous considérerons deux cas :

Soient a et b deux éléments quelconques non nuls de T ; alors, ou a et b sont parallèles, ce que nous pouvons assimiler à co-linéaires, ou a et b ne sont pas parallèles.

1/ a et b ne sont pas colinéaires, alors il en est de même de f(a) et f(b).

Soient λ appartenant à $\mathbb{R}^*$

$$f(\lambda b) = kf(b)$$

$$f(\lambda a) = k'f(a)$$

d'où $$f(\lambda(b-a)) = \alpha f(b-a)$$

f étant un homomorphisme on a :

$$f(\lambda(b-a)) = kf(b)-k'f(a)$$

d'où $$kf(b) - k'f(a) = \alpha f(b)-\alpha f(a)$$

$$(k-\alpha)f(b) = (k'-\alpha)f(a)$$

comme f(a) et f(b) ne sont pas parallèles on en déduit que :

$$k - \alpha = o = k'- \alpha$$

donc $k = k'$.

2/ a et b ne sont pas nuls mais colinéaires.

Posons comme précédemment pour λ appartenant à $\mathbb{R}^*$

$$f(\lambda b) = kf(b)$$

$$f(\lambda a) = k'f(a)$$

La dimension de T en tant qu'espace vectoriel sur R étant 4 donc strictement plus grande que 1 ; il existe au moins un élément c non nul de T tel que : c n'appartient pas à la droite $\mathbb{R}a$. Par conséquent le vecteur b + c n'est pas parallèle à a. En posant

$$f(\lambda c) = k''f(c)$$

on est ramené au premier cas ;

en considérant d'une part b et c qui sont non parallèles on a $k = k'$; et d'autre part a et c on en déduit $k' = k''$ d'où $k = k'$.

Ainsi, pour f donné, $\chi(\lambda) = k$ ne dépend que de λ

Comme $\chi(o) = 0$ on en déduit que

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad f(\lambda\mu a) = \chi(\lambda)\chi(\mu)f(a)$$

donc χ est un automorphisme du corps $\mathbb{R}$ d'où $\chi = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$

et $\qquad f(\lambda a) = \lambda f(a)$

pour tout λ appartenant à $\mathbb{R}$ et tout a appartenant à T.

Conclusion :

f est par définition une application linéaire.

Comme T est de dimension finie, f est continue.

Remarque. Etant donné qu'en définitive on ne considère que les automorphismes des groupes topologiques P et $\mathcal{G}$. f est nécessairement un automorphisme du groupe topologique T, donc continue. La démonstration précédente se simplifie alors en remarquant que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall a \in T \quad , \quad f(na) = nf(a)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall m \in \mathbb{N} \quad , \quad f(\frac{m}{n} a) = \frac{m}{n} f(a)$$

d'où par passage à la limite

$$f(\lambda a) = \lambda f(a) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

II- La tour des automorphismes de $\mathcal{P}$.

Soit G un groupe, $G' = \mathrm{Aut}(G)$ le gourpe des automorphismes de G ; $G'' = \mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(G))$ le groupe des automorphismes de G', on construit ainsi une suite de groupes : la suite G, G', G'',...

Soit Z(G) le centre de G, on sait que $\mathrm{Int}(G) \simeq G/Z(G)$ par conséquent si le centre de G est réduit à l'élément unité, on a $G \simeq \mathrm{Int}(G)$;

on peut alors identifier dans G', G et Int(G) qui est normal dans G'

Définition.

Si le centre de G est réduit à l'élément neutre, la suite normale

$$G \subset G' \subset G'' \subset \dots \subset G^n \subset \dots .$$

est appelée la tour des automorphismes de G [1]

Nous désignerons désormais par N le normalisateur de L dans Aut(T).

Proposition. : Aut($\mathcal{P}$) est égal au produit semi-direct T × N.

Démonstration.

$$F \in \mathrm{Aut}(\mathcal{P}) \quad , \quad (a,\Gamma) \in \mathcal{P}$$

$$F(a,\Gamma) = (f(a) + \phi(\Gamma), \Phi(\Gamma))$$

mais

$$\phi(\Gamma) = (1-\Phi(\Gamma))a_o$$

et $$\Phi(\Gamma) = f\Gamma f^{-1}$$

d'où

$$F(a,\Gamma) = (f(a) + a_o - f\Gamma f^{-1}a_o \ , \ f\Gamma f^{-1})$$

$$= (a_o,1)(f(a), f\Gamma f^{-1})(a_o,1)^{-1}$$

Il est évident que le couple (a_o, f) détermine F de façon unique par conséquent à tout $F \in \mathrm{Aut}(\mathcal{P})$ correspond $(a_o, f) \in T \times N$ on démontre aisément que cette correspondance est un isomorphisme de Aut($\mathcal{P}$) sur T × N on peut par conséquent identifier Aut($\mathcal{P}$) et T × N.

On en déduit en particulier que Aut($\mathcal{P}$) est un sous-groupe de T × Aut(T) holomorphe de T.

Le normalisateur N de L dans Aut(T).

Soit N_1 le normalisateur $\mathcal{L}$ dans Aut(T)

on a $N \subsetneq N_1$

L étant un sous-groupe caractéristique de $\mathcal{L}$ on a $L \vartriangleleft N_1$ donc :

$$\forall f \in N_1 \quad fLf^{-1} = L$$

ce qui entraine $f \in N$

d'où $N = N_1$

compte tenu de ce qui précède on a en identifiant f à sa matrice

$$^{t}(fJ\bar{f}^{1})J(fJ\bar{f}^{1}) = J$$

soit comme

$$^{t}J = J^{-1} = J \ , \ J\,^{t}fJfJ = {}^{t}fJf$$

posons $A = {}^{t}fJf$

d'où

$$\forall\ \Gamma \in \mathcal{L} \quad {}^{t}(f\Gamma\bar{f}^{1})J(f\Gamma\bar{f}^{1}) = J$$

$$^{t}\Gamma\,^{t}fJf\Gamma = {}^{t}fJf$$

soit $^{t}\Gamma A\Gamma = A \Longrightarrow {}^{t}\Gamma A = A\Gamma^{-1}$

or $^{t}\Gamma J\Gamma = J$, donc $^{t}\Gamma = J\Gamma^{-1}J$

ainsi $\Gamma^{-1}JA = JA\Gamma^{-1} \Longleftrightarrow J\Lambda\Gamma = \Gamma JA \quad \forall\ \Gamma \in \mathcal{L}$

La représentation de $\mathcal{L}$ dans GL(4,R) étant irréductible, on a :

$$JA = \lambda.\mathbb{1} \qquad \text{où} \qquad \lambda \in \mathbb{R}^{*}$$

$\mathbb{R}^{*}$ groupe multiplicatif des réels et $\mathbb{1}$ la matrice unité de GL(4,R)

$$J\,^{t}fJf = \lambda.\mathbb{1} \Longrightarrow {}^{t}fJf = \lambda J \Longrightarrow (\det f) = \lambda^{4} \Longrightarrow \det f = \pm\lambda^{2}$$

Considérons l'application $\psi : N \longrightarrow \mathbb{R}^{*}.1$ qui à f, fait correspondre $\lambda.\mathbb{1}$

Soient f_1 et f_2 deux éléments de N tels que :

$$J\,^{t}f_1Jf_1 = \lambda_1.\mathbb{1} \Longleftrightarrow \psi\,(f_1) = \lambda_1.\mathbb{1}$$

$$J\,^{t}f_2Jf_2 = \lambda_2.\mathbb{1} \Longleftrightarrow \psi\,(f_2) = \lambda_2.\mathbb{1}$$

$$\begin{aligned} J\,^{t}(f_1f_2)Jf_1f_2 &= J\,^{t}f_2\,^{t}f_1Jf_1f_2 \\ &= J\,^{t}f_2J(J\,^{t}f_1Jf_1)f_2 \\ &= J\,^{t}f_2J\lambda_1\,\mathbb{1}\,f_2 \\ &= \lambda_2\,\mathbb{1}.\,\lambda_1\,\mathbb{1} \\ &= \lambda_1\,\mathbb{1}.\,\lambda_2.\mathbb{1} \end{aligned}$$

par conséquent ψ est un homomorphisme.

$$\lambda = 1 \Longrightarrow {}^t fJf = J$$

comme $\det f = \pm 1$

on en déduit que f appartient à $\mathscr{L}$ par définition de $\mathscr{L}$.

donc $\ker.\psi \subseteq \mathscr{L}$

mais $f \in \mathscr{L} \Rightarrow {}^t fJf = J \longrightarrow \lambda = I \Longrightarrow f \in \ker\psi$

d'où $\ker\psi = \mathscr{L}$

D'après le premier théorème d'isomorphisme des groupes on a :

$$N/\mathscr{L} \simeq N/\psi$$

Comme $\mathbb{R}^*.\mathbb{1}$ n'est autre que $Z(N)$ le centre de N, ψ est une application de N dans N.

$\mathrm{Im}\psi \longrightarrow N/\mathscr{L}$ étant un isomorphisme, il en résulte que

$\mathrm{Im}\psi \cap \mathscr{L} = \{\mathbb{1}\}$

or $-\mathbb{1} \in \mathscr{L}$ donc $-\mathbb{1} \notin \mathrm{Im}\psi$

on en déduit aisément que :

$$\mathrm{Im}\psi = \{\lambda.\mathbb{1} \;/\; \lambda \in \mathbb{R}^*_+\}$$

où $\mathbb{R}^*_+$ est le groupe multiplicatif des réels strictement positifs. Il est facile de voir que $R^*_+.1$ est un sous-groupe normal de N d'où :

$$N = \mathscr{L} \times \mathbb{R}^*_+.\mathbb{1} \text{ produit direct}$$
$$= \mathbb{R}_+ \times \mathscr{L}$$

Théorème.

La tour des automorphismes de P n'a qu'un étage.

Nous commencerons par démontrer le lemme suivant :

Lemme.

T est un sous-groupe caractéristique de $T \times N$.

Démonstration.

En conservant la notation du chapitre I et en les appliquant au groupe $T \times N$, soit $F \in \mathrm{Aut}(T \times N)$

$$F = (f,\alpha,\phi,\Phi) \quad , \quad (a,\Gamma) \in T \times N$$

$\alpha(T)$ est un sous-groupe normal abélien de N donc d'après l'étude précédente $\alpha(T)$ est contenu dans le centre de N d'où :

$$\alpha(a) = \lambda \mathbb{1}$$

D'après la 6e relation de base, on a :

$$\alpha(\Gamma a)\Phi(\Gamma) = \Phi(\Gamma)\alpha(a)$$

$$= \Phi(\Gamma)\ \lambda.\mathbb{1}$$

$$= \lambda\Phi(\Gamma)$$

d'où $\alpha(\Gamma a) = \lambda.\mathbb{1}\ \forall \Gamma \in N$

on a donc en particulier

$$\alpha(-a) = \lambda.\mathbb{1}$$

d'où

$$\alpha(a-a) = \lambda^2.\mathbb{1}$$

Mais $\alpha(o) = 1$ d'où $\lambda^2 = \mathbb{1} \Rightarrow \lambda^2 = \pm 1$

or $2.\mathbb{1} \in N$

$$\alpha(a+a) = \alpha(a)^2$$

$$= \lambda^2 \quad \text{comme} \quad \alpha(a+a) = \alpha(2.\mathbb{1}a)$$

$$\alpha(a+a) = \lambda$$

par conséquent $\lambda = 1$ donc $\alpha(a) = \mathbb{1}\ \forall a \in T$

donc T est un sous-groupe caractéristique de $T \times N$. Nous pouvons donc appliquer à $T \times N$ le même traitement qu'à $T \times L$. Il est clair que nous aboutirons aux mêmes conclusions, à savoir :

tout automorphisme de $T \times N$ est de la forme $F = (a_o, f)$

où $a_o \in T$ et $f \in \mathcal{N}$ le normalisateur de N dans $GL(4,\mathbb{R})$.

si on note $\bar{\Gamma}$ un élément de N et Γ l'élément de $\mathcal{L}$ associé, on a :

$$\forall f \in \mathcal{N} \quad , \quad f\,\bar{\Gamma}\,f^{-1} \in N$$

donc $\exists\ \bar{\Lambda} \in N\ ,\ f\,\bar{\Gamma}\,f^{-1} = \bar{\Lambda}$ or $\bar{\Gamma} = \gamma\Gamma$

d'où

$$\gamma\, f\, \Gamma\, F^{-1} = \lambda \Lambda \qquad \text{soit } f\, \Gamma\, f^{-1} = (\lambda\gamma^{-1}) \Lambda$$

$$\det(f\, \Gamma\, f^{-1}) = \pm 1 \implies (\lambda\gamma^{-1})^4 = 1.$$

Puisque λ, $\gamma \in \mathbb{R}^*$ on en déduit $\lambda\gamma^{-1} = 1$ d'où $\lambda = \gamma$

donc $f\, \Gamma\, f^{-1} \in \mathcal{L}$, $\forall \Gamma \in \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{N} \subsetneq N$

d'où $\mathcal{N} = N$ or $\mathrm{Aut}(T \times N) = T \times \mathcal{N}$

d'où $\mathrm{Aut}(T \times N) = T \times N \iff \mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(\mathcal{P})) = \mathrm{Aut}(\mathcal{P})$

Le centre de $\mathcal{P}$ étant réduit à l'élément unité, ceci achève la démonstration du théorème.

Corollaire : $\mathrm{Aut}(\mathcal{P})$ est un groupe complet.

Chapitre III.

Extension de $\mathcal{P}$ par H fini.

Nous commencerons par exprimer $\mathrm{Aut}(\mathcal{P})$ en fonction de T et L, autrement dit en fonction de $\mathcal{P}$.

Considérons dans $\mathcal{L}$, le groupe L_1 des relations autrement dit :

$$L_1 = \{\Gamma,\ \Gamma \in \mathcal{L} / \det\Gamma = 1\}$$

Il est évident qu'on a les inclusions

$$L \subset L_1 \subset \mathcal{L}$$

Il est donc clair que L étant la composante connexe de l'élément neutre dans $\mathcal{L}$, l'est dans L_1 par conséquent L est un sous-groupe caractéristique de L_1.

I- Sous-groupes normaux de L_1.

Soit H un sous-groupe normal de L_1. L étant un sous-groupe normal simple [10] on a :

$$H \cap L = 1 \qquad \text{ou} \qquad H \cap L = L$$

1°/ $H \cap L = \mathbb{1}$

soit $\Gamma \in H$, $\Gamma \neq \mathbb{1}$

on a : $\Gamma_{14}^2 + \Gamma_{24}^2 + \Gamma_{34}^2 - \Gamma_{44}^2 = -1$

d'où $\Gamma_{44}^2 > 1$ or $H \cap L = \mathbb{1}$

donc $\Gamma_{44} \leqslant -1$

par conséquent $-\Gamma \in L$ ce qui entraine $-\Gamma . -\Gamma = \Gamma^2 \in L$

or $\Gamma \in H$ donc $\Gamma^2 \in H$

on en déduit que : $\Gamma^2 \in H \cap L = \mathbb{1}$

d'où $\Gamma^2 = \mathbb{1}$

Tout élément de H est donc involutif.

Soit : $\Lambda \in H$, $\Lambda \neq \mathbb{1}$

comme précédemment $-\Lambda \in L$

donc $-\Lambda . -\Gamma = \Lambda \Gamma \in L \cap H = \mathbb{1} \Rightarrow \Lambda\Gamma = \mathbb{1}$

d'où $\Lambda = \Gamma$

H est par conséquent réduit à deux éléments $\mathbb{1}$ et Γ

H étant normal dans L_1 $\forall \Lambda \in L_1$, $\forall \Gamma \in H$, $\Gamma \neq 1$

$$\Lambda \Gamma \Lambda^{-1} = \mathbb{1}$$

ou $$\Lambda \Gamma \Lambda^{-1} = \Gamma$$

si $$\Lambda \Gamma \Lambda^{-1} = \mathbb{1}$$

alors $$\Gamma \Lambda = \Lambda$$

donc $\Gamma = \mathbb{1}$ or $\Gamma \neq \mathbb{1}$ par hypothèse il en résulte que $\Lambda\Gamma\Lambda^{-1} = \Gamma$

d'où $\Lambda\Gamma = \Gamma\Lambda$

donc $\Gamma \in Z(L_1)$ le centre de L_1 :

or ce drenier est un sous-groupe caractéristique de L_1 donc à fortiori un sous-groupe normal. On en déduit en passant que $Z(L_1)$ n'a que deux éléments d'où $Z(L_1) = (-\mathbb{1}, \mathbb{1})$

2°/ $H \cap L = L$

on a alors $L \subsetneq H$

Il est facile de voir que si l'on note par $\overline{<-\mathbb{1},L>}$ le sous-groupe de L_1 engendré par $-\mathbb{1}$ et L, on a $L_1 = <-\mathbb{1},L>$ comme $\overline{<-1>} = Z(L_1) \lhd L_1$

et que $L \cap Z(L_1) = \mathbb{1}$

on en déduit aisément que

$$L_1 = Z(L_1) \times L \text{ (produit direct)}$$

si $L \subsetneq H$ alors il existe $\Gamma \in H$, $\Gamma \notin L$ donc $-\Gamma \in L$

par conséquent $\Gamma^{-1}.-\Gamma = -\mathbb{1} \in H$

ce qui entraine $L_1 \subseteq H$ d'où $H = L_1$.

L_1 n'a en conclusion que deux sous-groupes normaux propres : L et son centre $Z(L_1)$ qui sont donc aussi caractéristiques.

Il est bien connu que L_1 est un sous-groupe normal de $\mathcal{L}$ puisqu'il est d'indexe 2. Le groupe quotient $\mathcal{L}/L_1$ est isomorphe à un groupe à deux éléments, posons $\mathcal{L}/L_1 = K = (1,\Omega)$.

Ω est alors involutif et n'appartient pas à L_1.

Si pour Ω on prend l'élément J, il est aisé de voir que tout élément de $\mathcal{L}$ décompose d'une manière unique sous la forme de produit d'un élément de L_1 et de $K = (\mathbb{1},J)$. Comme $(\mathbb{1},J) \cap L_1 = \{\mathbb{1}\}$ et que $(\mathbb{1},J)$ n'est pas un sous-groupe normal de $\mathcal{L}$, on en déduit que $\mathcal{L}$ est produit semi-direct de ses sous-groupes L_1 et $(\mathbb{1},J)$.

L'homomorphisme associé à l'extension $\mathcal{L}$ de L_1 par $(\mathbb{1},J)$ est alors :

$J \longrightarrow J^*$ où J^* est l'automorphisme intérieur induit par J.

Notons par $\otimes$ le produit direct et conservons le signe $\times$ pour le produit semi-direct, appelons encore $\mathbb{Z}_2$ le groupe à deux éléments $(\mathbb{1},J)$; il vient

$$\mathcal{L} = L_1 \times \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2^{} L_1$$

d'où $\mathcal{L} = (L \otimes \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2$

et par conséquent $N = ((L \otimes \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2) \otimes \mathbb{R}_+^*.1$

donc $\mathrm{Aut}(\mathcal{P}) = T \times \left[((L \otimes \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2) \otimes \mathbb{R}_+^*.1\right]$

Le centre de P étant réduit à l'élément neutre, on en déduit :

$$\mathrm{Int}(\mathcal{P}) \simeq \mathcal{P}$$

d'où $\mathrm{Aut}(\mathcal{P})/\mathrm{Int}(\mathcal{P}) \simeq \mathrm{Aut}(\mathcal{P})/\mathcal{P} \simeq \mathbb{Z}_2 \quad \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{R}^*_{\cdot}$ 1

$\mathbb{Z}_2$ n'ayant qu'un automorphisme on a :

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{P})/\mathrm{Int}(\mathcal{P}) \simeq \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{R}^*_+$$

Soit donc H un groupe fini et θ un homomorphisme de H dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{P})/\mathrm{Int}(\mathcal{P})$. $\theta(H)$ est un sous-groupe fini de $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{R}^*_+$ par conséquent $\theta(H)$ est contenu dans $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$.

On sait alors d'après la condition d'Eilenberg-Mac-Lane-Fadeev qu'il existe une extension unique de $\mathcal{P}$ par H associée à θ: le produit semi-direct $\mathcal{P} \times_\theta H$. D'où :

<u>Théorème</u>. Soit H un groupe fini, il existe une extension de $\mathcal{P}$ par H si et seulement s'il existe un sous-groupe de $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ homomorphe à H. Mais on sait que, quelque soit H, fini ou non, le sous-groupe trivial de $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ réduit à l'élément neutre (1) est homomorphe à H. Ceci nous conduit donc à déterminer les groupes finis H pour lesquels on a des extensions non triviales de $\mathcal{P}$.

Nous commencerons par déterminer tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$.

Tous les éléments de $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ étant involutifs, on établit sans difficulté que les sous-groupes de $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ sont :

$(\mathbb{1})$; $(-\mathbb{1},\mathbb{1})$; $(J,\mathbb{1})$; $(-J,\mathbb{1})$ et

$\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 = (-\mathbb{1},J,-J,\mathbb{1})$

On a alors la conséquence suivante :

Théorème. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une extension non triviale de $\mathcal{P}$ par H (fini) est que H possède un sous-groupe normal d'index 2 ou 4.

Démonstration.

Supposons qu'il existe une extension non triviale G de $\mathcal{P}$ par H. Soit σ l'homomorphisme associé à l'extension $G = \mathcal{P} \times_{\sigma} H$

$\sigma(H)$ est alors l'un des sous-groupes non triviaux de $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ ou à $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ lui-même. D'après le premier théorème d'isomorphisme des groupes on a :

$$H/\ker\sigma \simeq \operatorname{Im}\sigma (= \sigma(H))$$

Comme $\sigma(H)$ a deux ou quatre éléments et que $\ker\sigma$ est un sous-groupe normal de H, on en déduit que $\ker\sigma$ est d'index 2 ou 4.

Réciproquement si H possède un sous-groupe normal K d'index 2 ou 4 alorsù H/K est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ différent de $(\mathbb{1})$; il existe par conséquent un homomorphisme σ de H dans $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ dont K est le noyau. On a alors :

Corollaire :

Une condition nécessaire pour qu'il existe une extension non triviale de $\mathcal{P}$ par H est que l'ordre de H soit pair.

Ceci est évident par application du théorème précédent et du théorème de Lagrange.

Il résulte en particulier de cette étude que, si on désigne par S_n le groupe des permutations de n éléments, il existe toujours une extension non triviale de $\mathcal{P}$ par S_n car le groupe alterné A_n des permutations paires est un sous-groupe normal de S_n d'index 2.

Exemple.

Soit $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs de $H = \mathbb{Z}/(n) = \mathbb{Z}_n$ le groupe des entiers relatifs modulo n où n est de la forme $n = 2p$; $\mathbb{Z}_n$ est abélien et cyclique pour construire l'image homomorphe de $\mathbb{Z}_n$ il nous suffira de connaitre l'image dans $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ de l'élément générateur de $\mathbb{Z}_n$ notons $\tilde{x}$ les éléments de $\mathbb{Z}_n$ et $\tilde{0}$ l'élément neutre de ce groupe ;

posons $\sigma(\bar{1}) = (o,f)$ ou $f = -\mathbb{1}$

et $\sigma(\bar{x}) = (o,f^x)$ $\forall \bar{x} \in \mathbb{Z}_n$

d'où l'extension $G = \mathcal{P} \times \mathbb{Z}_n$ dont la loi de groupe est :

$$((a,\Gamma),\bar{x})((b,\Lambda),\bar{y}) = (a+\Gamma b,\Gamma\Lambda,\overline{x+y})$$

Deuxième partie.

Sur les représentations unitaires irréductibles des extensions du groupe de Poincaré connexe par un groupe fini.

Chapitre I.

§.1. Préliminaires.

1.1. Rappels et notations.

Soit G un groupe localement compact et séparable (au sens fort, c'est-à-dire ayant une base dénombrable d'ouverts).

- On appelle représentation de G, un homomorphisme continu R de G dans le groupe des opérateurs inversibles d'un espace vectoriel complexe $\mathcal{H}$.

Autrement dit :

$$\forall g,g' \in G$$

$$R(gg') = R(g)R(g')$$

$$R(e) = \mathbb{1}$$

et $g \longrightarrow R(g)(h)$ est une application continue de G dans $\mathcal{H}$

- $\mathcal{H}$ est l'espace de la représentation et la dimension de $\mathcal{H}$ est par définition la dimension de la représentation.
- Une représentation de G dans un espace de Hilbert complexe séparable est appelée unitaire si tous les opérateurs de la représentation sont unitaires.

- Une représentation est dite irréductible si les seuls sous-groupe espaces fermés de $\mathcal{H}$ invariants par la représentation sont $\{0\}$ et $\mathcal{H}$ lui-même.

Désignons par $\mathcal{H}(R)$ l'espace d'une représentation de R et $\mathcal{U}(H)$ le groupe des opérateurs unitaires de $\mathcal{H}$.

Deux représentations R_1 et R_2 sont dites équivalentes s'il existe une application unitaire $\mathcal{U}$ de $\mathcal{H}(R_1)$ dans $\mathcal{H}(R_2)$ telle que :

$$\forall g \in G \quad , \quad R_2(g) = UR_1(g)U^{-1}$$

cette relation est évidemment une relation d'équivalence dans l'ensemble des représentations du groupe G ; on pourra alors identifier deux relations équivalentes.

- Si G est abélien ou compact, toute représentation irréductible de G est de dimension 1.
- Si G est abélien, on appelle caractère de G toute représentation de G dans le groupe des nombre complexes de valeur absolue 1.

Notion de représentation induite.

Etant donné un sous-groupe fermé H d'un groupe G, et une représentation R de H dans l'espace $\mathcal{H}_0$ on peut construire une représentation W de G de la manière suivante. On considère l'espace vectoriel complexe $\mathcal{H}$ de toutes les fonctions définies sur G prenant leurs valeurs dans $\mathcal{H}_0$ et vérifiant

$$f(hg) = R(h)f(g) \qquad \forall h \in H \quad \text{et} \quad g \in G$$

pour f quelconque dans $\mathcal{H}$ et a fixé dans G,

on pose $(W(a)f)(g) = f(ga)$

W est la représentation induite par R, on note $W = {}_GU^R$.

Notion de système d'imprimitivité.

Soit $\mathcal{E}$ un espace de Borel. Une mesure spectrale P sur $\mathcal{E}$ à valeur dans $\mathcal{H}$ associe à tout ensemble borélien E de $\mathcal{E}$ un projecteur P(E) de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, tel que :

(1) $P(\mathcal{E}) = \mathbb{1}$; $P(\emptyset) = 0$ (où $\emptyset$ est l'ensemble vide)

Si $(E_i)_{i\in N}$ est une famille dénombrable d'ensembles boréliens de deux à deux disjoints alors :

(2) $P(\bigcup_i E_i) = \sum_i P(E_i)$

(3) $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1).P(E_2)$

Définition.

Soit un groupe G ; localement compact U une représentation unitaire de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Un système d'imprimitivité de U est constitué par $(\mathcal{E},P)$ où $\mathcal{E}$ est un espace localement compact sur lequel opère G et d'une mesure spectrale P définie sur $\mathcal{E}$ à valeur dans $\mathcal{H}$ telle que :

$$U(g)P(E)U(g^{-1}) = P(gE)$$

pour tout $g \in G$ et tout ensemble de Borel E de $\mathcal{E}$.

Si G est un groupe localement compact séparable et H un sous-groupe fermé de G. Soit R une représentation unitaire de H dans un espace de Hilbert séparable ${}_GU^R$ la représentation induite de G, on associe à ${}_GU^R$ un système d'imprimitivité $(\mathcal{E},P)$ où $\mathcal{E} = G/H$ et P défini comme suit :

Soit E un ensemble de Borel de G/H et E' son inverse par l'application canonique $G \longrightarrow G/H$ alors l'application $P(E) : f \longrightarrow \chi(E')f$ est un projecteur dans $\mathcal{H}({}_GU^R)$, où $X(E')$ est la fonction caractéristique de E'. P(E) est la mesure spectrale associée à G/H.

De nombreux problèmes restent ouverts en ce qui concerne la théorie des représentations des groupes ; notre propos ici n'est pas de les soulever et encore moins d'apporter une quelconque solution à l'un d'entre eux. Nous nous contenterons, compte tenu des bonnes dispositions des groupes qui nous concernent d'appliquer les méthodes mises au point par d'illustres prédécesseurs. Il n'est peut-être pas inutile de rappeler que E. P Wigner est vraisemblablement le premier à avoir étudier les représentations d'un groupe, le groupe de Poincaré connexe (ou Lorentz inhomogène connexe), qui n'est ni compact, ni abélien, ni semi-simple [10]. Cependant ce n'est que beaucoup plus tard que ertaines de ses affirmations ont pu être légitimement justifiées, grâce à G.W. Mackey, à qui revient le mérite d'avoir mis au point la méthode des représentations induites. Celle -ci permet, sous réserve de certaines conditions edrégularité, de déterminer toutes les représentations irréductibles des produits semi-directs dits réguliers. [11] .

Critères dd régularité. [19]

Soit $G = N \times_\phi K$ un produit semi-direct dans lequel le sous-groupe normal N est abélien, désignons par $\hat{N}$ l'ensemble des caractères de N ; on sait que $\hat{N}$ est alors l'ensemble des représentations irréductibles de N.

Théorème. (Mackey)

S'il existe un ensemble de Borel [16] de $\hat{N}$ qui rencontre chaque orbite de $\hat{N}$ dans K (ce qui ~~de~~ est même que dans G), en un seul point, alors toute classe de mesure invariante et ergodique est concentrée dans une orbite. Lorsqu'il en est ainsi, on dit que le produit semi-direct $G = N \times_\phi K$ est régulier.

Rappelons qu'une mesure quasi-invariante μ sur $\hat{N}$ est ergodique si aucun sous-espace μ -mesurable n'est invariant sous l'action de K à moins qu'il ne soit de mesure nulle ou alors qu'il ait pour complémentaire un ensemble de mesure nulle.

Soit G un groupe localement compact séparable. N un sous-groupe normal fermé de G et $\hat{N}$ l'ensemble des représentations irréductibles de N.

Définition.

Le sous-groupe N est régulièrement immergé dans G si la structure borélienne quotient de N (ensemble des orbites de $\hat{N}$ sous G), induite par la structure borélienne de K est dénombrablement séparée.

§.2. Le groupe G = $\mathcal{P} \times H$.

2.L. Propriétés générales.

Il est bien connu que $\mathcal{P}$ est connexe, localement compact et métrique. Le groupe H, muni de la distance discrète est compact, on prouve alors [9] que G est un groupe localement compact et séparable.

- $H = G/\mathcal{P}$ étant discret, ceci entraine que $\mathcal{P}$ est ouvert dans G. Mais Mais H étant séparé, on en déduit [9] que $\mathcal{P}$ est fermé dans G. Comme T est fermé dans $\mathcal{P}$, il en résulte que T est fermé dans G : $\mathcal{P}$ étant ouvert et fermé G n'est donc pax connexe.

-b Soit $h \in H$, $\sigma(h) = F$ appartient à $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ donc F est involutif d'où $F^2 = \mathbb{1}$ or F est de la forme $(0,f)$ donc $f^2 = \mathbb{1}$.

Compte tenu de la loi de groupe de G, on démontre sans difficulté que :

$$G = T \times_{\tau} (L \times_{\sigma'} H)$$

où $\tau(\Gamma,h) = \Gamma.\sigma(h)$

si on pose $\sigma(h) = f$, σ' est l'homomorphisme $h \longrightarrow f^{*}/L$

où f^{*}/L est la restriction à L de l'automorphisme intérieur de N induit par f.

Nous pouvons donc considérer indifféremment

$$G = (T \times L) \times H$$

$$= T \times (L \times H)$$

Nature de G.

Le groupe G dépend de l'homomorphisme θ et de H ou de façon plus précise de l'image homomorphe de H dans $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ d'où les cas suivants :

1/ $\theta(H) = \mathbb{1}$

2/ $\theta(H) = (-\mathbb{1}, \mathbb{1})$

3/ $\theta(H) = (J, \mathbb{1})$

4/ $\theta(H) = (-J, \mathbb{1})$

5/ $\theta(H) = \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$

2-2. Mesure de Haar sur G.

$(p,h) \in \mathcal{P} \times H$, notons $d(\widetilde{hp}) = \delta(h)\, dp$

l'action de H sur la mesure de Haar sur $\mathcal{P}$ qui, on le sait est unimodulaire.

Mais, $d(\hat{h}(\hat{h}(p))) = \delta(h)^2 dp$

comme $\tilde{h}$ est involutif, on en déduit que :

$$\delta(h)^2 dp = dp$$

d'où $\delta(h)^2 = 1$

or si $\Delta(p,h)$ est le module de G on a

$$\Delta(p,h) = \delta(h) \text{ (voir exemple Loomis |15|)}$$

donc $\delta(h) > o$

par conséquent $\delta(h)^2 = 1$

entraine $\delta(h) = 1$

d'où $\Delta(p,h) = 1$; on a alors la proposition suivante :

Proposition.

Toute extension G du groupe de Poincaré connexe par un groupe fini est unimodulaire.

2-3. Action de G sur $\hat{T}$ et structure borélienne sur $\hat{T}$.

Nous adopterons dans tout ce qui suit, les notations de Mackey [12] . Nous désignerons par conséquent par $\hat{G}$ l'ensemble des représentations irréductibles de G. Et il ne sera question que de représentations unitaires.

T étant abélien et localement compact, on sait [13] [14] que $\hat{T}$ dual de T est abélien localement compact pour la topologie de convergence compact.

Si x appartient à $\mathbb{R}^4$, nous désignerons par t_x l'élément de $\hat{T}$ correspondant.

$\hat{T}$ est alors l'ensemble des T^u, u appartenant à $\mathbb{R}^4$ tels que :

$$\forall\, t_x \in T \quad , \quad T^u(t_x) = e^{i(u,x)}$$

où $u.x = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 - u_4x_4$

G agit sur T de la manière suivante

posons : $\quad gT^u(t_x) = T^u(g(t_x g^{-1})$

il est alors aisé de voir que les axiomes des domaines d'opérateurs sont trivialement vérifiés.

$$T^u \in \hat{T}\ ,\ g \in G \ :\ g = t_x V \text{ où } V \in L \times H$$

$$\begin{aligned} t_x V T^u(t_y) &= T^u(t_x V t_y V^{-1} t_x^{-1}) \\ &= T^u(t_x + V\, t_y - t_x) \\ &= T^u(Vt_y) \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} t_x V T^u(t_y) &= e^{i(u.Vy)} \\ &= e^{i(V^{-1}u.y)} \end{aligned}$$

d'où $\quad t_x V T^u(t_y) = T^{V^{-1}u}(t_y)$

par conséquent la multiplication par $t_x V$ transforme u en $V^{-1}u$ (où en réalité $V^{-1}u = \widetilde{V}^{-1}u$ conformément aux notations la première partie) de la même manière on a :

$$\begin{aligned} Vt_x T^u(t_y) &= T^u(Vt_y V^{-1}) \\ &= T^u(Vt_y) \\ &= e^{i(u.Vy)} \\ &= e^{i(V^{-1}u.y)} \\ &= T^{V^{-1}u}(t_y) \end{aligned}$$

L'action de G sur $\hat{T}$ se réduit à celle de $L \times H$ sur T ce qui était prévu puisque T est abélien.

Soit V appartenant à $L \times H$ alors V est de la forme (Γ,h)

$V^{-1} = (f^{-1}\Gamma^{-1}f, h^{-1})$ où $f = \Theta(h)$

$\tilde{V}^{-1} = Z(V^{-1}) = f^{-1}\Gamma^{-1}ff^{-1}$

$= f^{-1}\Gamma^{-1}$

or $f \in \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ et Γ appartient à $\mathcal{L}$ donc $\hat{V}^{-1}$ appartient à $\mathcal{L}$ et il en est de même de $\tilde{V}$.

L'action de G sur $\hat{T}$ est identique à celle d'un sous-groupe de $\mathcal{L}$. Il en résulte alors que les orbites de T sous l'action de $L \times H$ sont contenues dans les orbites de $\hat{T}$ sous l'action de $\mathcal{L}$ or le produit semi-direct $T \times \mathcal{L}$ est régulier [12] par conséquent d'après le critère de régularité le produit semi-direct $T \times (L \times H)$ est régulier.

T est régulièrement immergé dans G, enn effet si l'on désigne par $\tilde{\hat{T}}$ l'ensemble des orbites de $\hat{T}$ sous l'action de $L \times H$, on sait que ces orbites forment une partition de $\hat{T}$. Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence associée, on a alors $\tilde{\hat{T}} = \hat{T}/R$. $\tilde{\hat{T}}$ est discret, et muni de la topologie quotient induite par l'application continue $\hat{T} \longrightarrow \hat{T}/R = \tilde{\hat{T}}$;

$\tilde{\hat{T}}$ est par définition l'espace borélien quotient de $\hat{T}$ par R. Comme $\hat{T}$ est séparable puisque T l'est et que dans le cas de $\mathbb{R}^n$ on peut identifier T et $\hat{T}$ [13] on en déduit que $\tilde{\hat{T}}$ est engendré par une famille dénombrable d'ensembles de Borel, $\tilde{\hat{T}}$ étant séparé, on en déduit que T est régulièrement immergé dans G. Nous pouvons amintenant appliquer la méthode de Mackey.

Chapitre II.

§.1. Représentations factorielles de G.

Soit W une représentation et R(W,W) l'ensemble des opérateurs bornés qui commutent avec les éléments de W.

Définition.

On dit que la représentation W est factorielle si le centre de R(W,W) est constitué des multiples de l'identité.

Si la représentation factorielle W contient une sous représentation irréductible on dit qu'elle est de type I.

D'après la théorie de Mackey, T étant régulièrement immergé dans G, toutes les représentations factorielles de G sont induites.

1-2. Les représentations irréductibles de G.

Le problème de la recherche des représentations irréductibles de G est réduit d'après la méthode mise au point par Mackey à la recherche de toutes les représentations irréductibles du stabilisateur $\mathcal{S}$ de T^{μ}, T^{μ} appartenant à $\hat{T}$, étant pris dans une orbite fixée Ω. En conséquence, à toute représentation unitaire irréductible de G est associé une orbite Ω de $\hat{T}$. Un élément T^u de cette orbite a pour stabilisateur un sous-groupe H_o de G de la forme $H_o = T\mathcal{S}$ où $\mathcal{S}$ est le stabilisateur de T^u dans L x H. On obtient alors ${}_GU^W$ à l'équivalence près, en induisant à G une représentation unitaire irréductible W de H_o telle que :

$$\begin{aligned} \forall t_x \in T,\ \forall s \in \mathcal{S},\ W(t_x s) &= T^u(t_x)R(s) \\ &= e^{i(u.x)}R(s) \end{aligned}$$

où R est une représentation unitaire irréductible de $\mathcal{S} \mp H_o/T$.

La représentation induite ${}_GU^W$ se réalise dans l'espace de Hilbert séparable des fonctions f définis sur G, de carré sommable pour la mesure quasi-invariante définie sur G/H_o, à valeurs dans $\mathcal{H}(W)$ et telles que :

(i) $< f(g), \phi >$ est une fonction de Borel de g pour tout ϕ dans $\mathcal{H}(W)$

(ii) $f(h_o g) = W(h_o) f(g)$ $\qquad h_o \in T\mathcal{S}$, $g \in G$

(iii) $\int_{G/H_o} ||f(g)||^2 d\mu \quad < +\infty$

Ceci nous amène donc à la détermination des orbites de $\hat{T}$ dans $L \times H$ et des stabilisateurs d'éléments de ces orbites.

Nous avons vu au chapitre précédent que toute orbite de $\hat{T}$ dans $L \times H$ est contenue dans une orbite de $\hat{T}$ dans $\mathcal{L}$. Les orbites de $\hat{T}$ dans $\mathcal{L}$ sont bien connues, elles sont de suatre sorte [12] [20] [2] .

On en déduit celles de $\hat{T}$ dans $L \times H$ suivant la nature de l'action de $L \times H$ sur $\hat{T}$. D'où les 5 cas suivants :

1/ $\sigma(H) = 1$

G est un produit direct de $\mathcal{P}$ et H.

$G = \mathcal{P} \otimes H$

$= (T \times L) \otimes H$ et

l'action de $L \otimes H$ sur T est réduite à l'action de L sur T ce qui nous ramène au cas du groupe de Poincaré connexe, toutes ses représentations sont connues

Toute représentation unitaire irréductible U de G est de la forme :

$$U = W_1 \times W_2 \text{ (produit de Kronecker)}$$

où W_1 est une représentation unitaire irréductible de $\mathcal{P}$ et W_2 une représentation unitaire irréductible de H.

2/ $\sigma(H) = (-\mathbb{1}, \mathbb{1})$

comme $-\mathbb{1}$ et $\mathbb{1}$ appartiennent au centre de $\mathcal{L}$ on en déduit que $G = T \times (L \otimes H)$

on a alors $\tilde{V} = \pm\Gamma$ $\qquad$ avec $V = (\Gamma, h)$ donc $\tilde{V} \in L_1$

par conséquent l'action de $L \otimes H$ sur $\hat{T}$ est identique à celle de L_1 sur $\hat{T}$.

3/ $\mathcal{O}(H) = (-J, \mathbb{1})$

$\tilde{\hat{V}} = -\Gamma J$ ou $\tilde{\hat{V}} = \Gamma$

donc $\tilde{\hat{V}}$ appartient au sous-groupe $\overset{\uparrow}{L}$ de $\mathcal{L}$ formé des éléments $\hat{\mathcal{G}}$ tels que :

- $\lambda_{44} \geqslant 1$
- $\det \Lambda = \pm 1$

comme on peut le voir aisément $L^{\uparrow}$ est produit semi-direct de L et $(-J, \mathbb{1})$ par conséquent dans ce cas l'action de L × H est identique à celle de $\overset{\uparrow}{L}$ sur $\hat{T}$.

4/ $\mathcal{O}(H) = \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$

$\tilde{\hat{V}} = \pm\Gamma$ ou $\tilde{\hat{V}} = \pm\Gamma J$

$\tilde{\hat{V}}$ appartient au groupe de Lorentz général et l'action de L × H s'identifie à celle de $\mathcal{L}$ sur $\hat{T}$.

5/ $\mathcal{O}(H) = (J, \mathbb{1})$

alors l'action de L × H sur $\hat{T}$ est identique à l'action du sous groupe L × $(\mathbb{1}, J)$ de $\mathcal{L}$ sur T.

Avant de nous fixer sur un cas particulier, rappelons quelle est la nature des orbites de $\mathcal{L}$ sur $\hat{T}$ et les stabilisateurs correspondant à un élément d'une orbite.

Les orbites de $\mathcal{L}$ sur $\hat{T}$ sont de quatre sortes :

a/ l'orbite réduite à T°.

Les représentations factorielles de P = T × $\mathcal{L}$ correspondant à cette orbite sont obtenues par relèvement à P des représentations factorielles de $\mathcal{L}$.

Les orbites de $\hat{T}$ distinctes de la précédente sont caractérisées par un nombre réel r. Ce sont celle des éléments u différents de zéro tels que :

$$u.u = r$$

Notons Ω_r une telle orbite ; on a alors trois cas.

b/ $r > o$

posons $r = m^2$ où $m \in \mathbb{R}^*$

soit Ω_r et $T^u \in \Omega_r$ où $= (m,o,o,o)$ alors $H_o/T = \mathcal{S}$ est isomorphe au groupe orthogonal dans $\mathbb{R}^3$ laissant invariant la forme quadratique

$$x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$$

c/ $r < o$ alors $-r = m^2$ avec $m \in \mathbb{R}^*$

Soit Ω_r l'orbite associée à r et T^u un élément de $_r$ tel que $u = (o,o,o,m)$ dans ce cas $H_o/T = \mathcal{S}$ est isomorphe au groupe orthogonal associé à la forme quadratique dans $\mathbb{R}^3$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

d/ $r = o \quad u \neq o$

prenons pour u l'élément $u = (o,o,1,1)$ le stabilisateur $H_o/T = \mathcal{S}$ est dans ce cas isomorphe au groupe euclidien du plan (réflections incluses).

<u>Etude d'un exemple.</u>

Examinons le cas où $\mathcal{O}(H) = (-\mathbb{1}, \mathbb{1})$

On a vu que $L \times H$ est alors un produit direct d'où :

$$G = T \times (L \otimes H)$$

L'action de $L \otimes H$ sur $\hat{T}$ s'identifie à celle de L_1 sur $\hat{T}$, on en déduit les stabilisateurs suivants :

a/ $u.u = o$ avec $u = o$ alors $H_o/T = \mathcal{S} \simeq L_1$ le sous-groupe des rotations de $\mathcal{L}$.

b/ $u.u = m^2$ prenons $u = (1,o,o,o)$

$H_o/1 = \mathcal{S}$ est le sous-groupe des rotations du groupe orthogonal associé à la forme quadratique $x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$

c/ $u.u = - m^2$ prenons $u = (o,o,o,1)$ $H_o/\mathbb{1} = \mathcal{S}$ est alors le sous-groupe des rotations du groupe orthogonal associé à la forme quadratique : $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

d/ $u.u = o$, $u \neq o$; prenons $u = (o,o,1,1)$ $H_o/1 = \mathcal{G}$ est alors la composante connexe du groupe euclidien du plan (qui est le produit semi-direct $\tau \times \rho$ où τ est le groupe des translations dans $\mathbb{R}^2$ et ρ le groupe des rotations autour de l'origine).

Les représentations unitaires de tous les stabilisateurs considérés ci-dessus sont connus (voir par exemple Wigner, [10] .

Soit donc χ une représentation irréductible de

$$T^u\chi \,:\, t_x s \longrightarrow T^u(t_x)\chi(s)$$

est une représentation de $H_o = T\mathcal{G}$ et la représentation induite ${}_GU^{T^u\chi}$ de G est irréductible et toute représentation unitaire irréductible de G est de cette forme.

On a alors par définition de la représentation induite :

$$({}_GU^{T^u\chi}(g_o)f)(g) = f(gg_o) \quad , \quad g, g_o \in G$$

posons $g_o = (t_{x_o}, V_o)$, $g = (t_x, V)$

où V_o et V sont des éléments de $L \otimes H$

on a alors

$$gg_o = (t_x \pm \Gamma\, t_{x_o} \ , \ VV_o)$$

d'où $({}_GU^{T^u\chi}(g_o)f)(g) = T^u(t_x \pm \Gamma t_{x_o})f(VV_o)$

posons :

$$t.\ t_x \pm \Gamma t_{x_o} = t_y$$

$$V = (\Gamma, h)$$

$$V_o = (\Gamma_o, h_o)$$

il vient :

$$VV_o = (\Gamma\Gamma_o, hh_o)$$

or $$f(VV_o) = (\underset{L\,\otimes\,H}{U^\chi}(V_o)f)(V)$$

L étant un sous-groupe fermé de $L \otimes H$ on peut appliquer l'induction en étage autrement dit, si on pose $M = {}_LU^\chi$

La représentation $U^{X}_{L \otimes H}$ est équivalente à $U^{M}_{1 \otimes H}$

d'où : $f(VV_o) = M(\Gamma\Gamma_o)(R(h_o)f)(h)$

où R est la représentation régulière à droite de H.

f appartient par conséquent à $L^2(H)$.ensemble des fonctions définies sur H, de carré sommable pour la mesure de Haar sur H, à valeurs dans $\mathbb{C}$ d'où :

$$({}_G U^{T^U}{}_X(g_o)f)(g) = T^U(t_X \pm \Gamma t_{X_o})M(\Gamma\Gamma_o)(R(h_o)f)(h)$$

BIBLIOGRAPHIE

1 J. BRACONNIER : Sur les suites de composition d'un groupe et la tour des automorphismes d'un groupe fini (d'après H. Wielandt). Séminaire Bourbaki, volume 1948/49.1949/50. Exposé.

2 L. MICHEL : Cours professé à l'école d'été de Physique théorique de Cargèse 1965 (Reproduit par le centre de Physique théorique de l'Ecole polytechnique).

3 M. FLATO : Symétries de types lorentzien et interactions fortes. (Gauthier-Villars, Paris).

4 EILENBERG S. O et MAC LAN S. : Cohomology theory in abstract groups. Annals of Maths. vol. 40 (1947).

5 KUROSH A.G. : The theory of groups. Tome 1 et 2.

6 L. MICHEL : Sur les extensions centrales du groupe de Lorentz inhomogène connexe. Reproduit par le centre de Physique théorique de l'Ecole polytechnique.

7 M. FLATO et D. STERNHEIMER : On the connection between External and Internal symmetries of strongly interacting particles. Journal of Mathematical Physics. Nov. 1966. Journal of Mathematical Physics. Nov. 1966.

8 M. FLATO et D. STERNHEIMER : Algebres unifiantes ; application à l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré. CR. Académie des Sciences. Tome 260. Pages 3532 à 3534.

9 BOURBAKI N. : Eléments de Mathématique.
Livre 3. Topologie générale. CH. 3, groupes topologiqu

10 E.P. WIGNER : On unitary representations of the inhomogeneous Lorent:
group.
Annals of Maths. Vol. 40. 1939.

11 W.G. MACKEY : Representations of locally groups.
Annals of Maths. Vol. 55; 1952.

12 W.G. MACKEY : Unitary represnetations of separable locally compact
groups on separable Hilbert spaces.
Summer 1955. Notes by Dr. Fell and Dr. Lowdenslager.
Department of Mathematics, University of Chicago.

13 J. BRACONNIER : L'analyse harmonique dans les groupes abéliens.
Institut de Mathématiques. Université de Genève.

14 F.A. BEREZIN
I.M. GELFAND
M.I. GRAEV
M.A. NAIMARK : Groups representations.
American Mathematical society translations series
vol. 16.

15 H. LOOMIS : An introduction to abstract harmonic analysis.

16 W.G. MACKEY : Borel structure in groups and their duals.
Translations of the American Mathematical society.
Vol 85. May to August 1957.

17 H. BOERNER : Representations of groups.

18 J.P. SERRE : Corps locaux.

19 I.E. SEGAL : Mathematical problems of relativistic Physics.
Appendix by Mackey W.G.

20 GUILLOT J.C. : Sur les fondements de la cinématique relativiste et
galiléenne.
Institut de Physique théorique de l'université de
Genève.

Manuscrit remis en novembre 1967.

S. D. EKONG
Assistant
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
43, bd du 11 novembre 1918
VILLEURBANNE