PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

ACHILLE ACHACHE

Sur la génération

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1968, tome 5, fascicule 2
, p. 57-72

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1968__5_2_57_0>

Publications du
Départem ent de
Mathématiques
Lyon 1968 t. 5-2

SUR LA GENERATION

par Achille ACHACHE

Cette note est un essai de généralisation de certaines définitions et certains résultats de la théorie de la génération. Un axiome plus faible que l'axiome d'échange de Steinitz est introduit : il est dit "axiome d'échange affaibli". De même, deux niveaux de liberté apparaissent : le plus fort est désigné par le mot "indépendance".

I - Préliminaires.

L'ensemble des majorants d'un élément x d'un ensemble ordonné $(E,\leqslant)$ sera noté r(x). L'ensemble des minorants de x sera noté s(x). L'ensemble des éléments de E qui majorent x et minorent y sera noté $[x,y]$ L'ensemble des éléments de E qui majorent strictement x et minorent y sera noté $]x,y]$.

Un ensemble ordonné est dit inductif au sens fort si chacune de ses parties totalement ordonnées a un supremum. Un ensemble ordonné est dit inductif si chacune de ses parties totalement ordonnées est majorée. Si un ensemble est inductif au sens fort, il est évidemment inductif. L'ensemble des majorants d'un élément donné d'un ensemble inductif est évidemment un ensemble inductif (pour l'ordre induit).

1. Lemme de Zorn : Si un ensemble ordonné est inductif, il possède au moins un élément maximal.

2. Corollaire : Si E est un ensemble ordonné inductif, et x un élément donné de E, l'ensemble des éléments de E qui mojorent x possède au moins un élément maximal.

Un ensemble ordonné E est dit réticulé supérieurement si toute partie finie de E a un supremum. Si E est réticulé supérieurement, sa partie vide a en particulier un supremum ; comme l'ensemble des majorants de la partie vide est E, il en résulte que E a un minimum, qui sera noté 0.

3. Définition : Etant donné un treillis complet E, un élément a de E sera dit fin si :

$$(X \subseteq E \text{ et } a \leqslant \vee X) \Longrightarrow (\exists Y, \text{ finie}, \subseteq X, \text{ avec } a \leqslant \vee Y) \quad (*)$$

Nous désignerons le minimum du treillis complet par o, et son maximum par e. Le minimum d'un treillis complet est fin, car il est égal au supremum de la partie vide.

4. Proposition : Le supremum d'un ensemble fini d'éléments fins d'un treillis complet est un élément fin.

Preuve. Soit A un ensemble fini d'éléments fins du treillis complet E. Soit $\vee A = p$. Supposons $p \leqslant \vee X$. Si a est un élément de A, on a : $a \leqslant p \leqslant \vee X$, donc $a \leqslant \vee X$. Comme a est fin, on en déduit l'existence d'une partie finie X_a de X telle que : $a \leqslant \vee X_a$. Nous pouvons associer à chaque $a \in A$ une telle partie, notée X_a. Posons $\bigcup_{a \in A} X_a = Y$. On a déjà $Y \subseteq X$. En outre : $p = \vee A \leqslant \bigvee_{a \in A} (\vee X_a)$
Mais $\bigvee_{a \in A} (\vee X_a) = \vee (\bigcup_{a \in A} X_a) = \vee Y$. On a donc pu trouver une partie finie Y de X telle que $p \leqslant \vee Y$. Ceci étant vrai quelle que soit X telle que $p \leqslant \vee X$, on en conclut que p est fin.

5. Définition : Une partie A du treillis complet E est dite à caractère fin si, pour qu'un élément appartienne à A, il faut et il suffit que tout ses minorants fins appartiennent à A.

Il en résulte que, si A est une partie non vide à caractère fin, tout minorant fin de A appartient à A ; en particulier, 0 appartient à A.

(*) Autrement dit si a est compact pour la "topologie" dont les ouverts sont les éléments de E (topologie discrète).

Enonçons le lemme évident suivant.

6. Lemme : Si une partie X du treillis complet E est telle que, quelle que soit la partie totalement ordonnée C de X, on ait $\bigvee C \in X$; alors X est un ensemble inductif au sens fort (pour l'ordre induit).

7. Proposition : Toute partie non vide à caractère fin d'un treillis complet est inductive au sens fort (pour l'ordre induit).

Preuve. Soit A une partie non vide du treillis complet E, supposée à caractère fin. Soit C une partie totalement ordonnée de A. Soit a un minorant fin non nul de $\bigvee C$. L'élément a étant fin, on peut, d'après la définition (3), trouver une partie finie D de C telle que $a \leqslant \bigvee D$. Si D était vide, son supremum serait 0, et a serait nul, ce qui n'est pas. Donc D n'est pas vide. Par ailleurs, D étant une partie de C, est, comme C, totalement ordonnée. D étant une chaîne finie non vide, on a donc ;$\bigvee D \in D$. L(élément a est fin et minore l'élément $\bigvee D$ de A. Donc, d'après la définition (5), a appartient à A. En résumé, tout minorant fin non nul de $\bigvee C$ appartient à A. Mais 0 appartient aussi à A (d' après la remarque qui a suivi la définition (5)). Donc, tout minorant fin de $\bigvee C$ appartient à A. Donc, d'après la définition (5), $\bigvee C \in A$. En utilisant à présent le lemme (6), on voit que A est un ensemble inductif au sens fort.

8. Lemme : Si y est un élément du treillis complet E, l'ensemble s(y) des minorants de y est un treillis complet (pour l'ordre induit).

Preuve. Si P est une partie non vide de s(y), l'ensemble des minorants de P qui appartiennent à s(y) se confond avec l'ensemble des minorants de P, et a donc pour maximum $\bigwedge P$. Si P est vide, l'ensemble des minorants de P qui appartiennent à s(y) est s(y), et a donc pour maximum y. Enfin, quelle que soit la partie P de s(y), l'ensemble des majorants de P qui appartiennent à s(y) a pour minimum $\bigvee P$.'

9. Lemme : Si A est une partie à caractère fin du treillis complet E, et y un élément de E, l'ensemble $A \cap (s(y))$ est une partie à caractère fin du treillis complet $s(y)$.

Preuve. Pour qu'un minorant m de y appartienne à A, il faut et il suffit, d'après la définition (5) que tous ses minorants fins appartiennent à A. Mais l'ensemble des minorants de m est identique à l'ensemble des minorants de m qui appartiennent à l'ensemble $s(y)$. Donc, pour qu'un minorant m de y appartienne à $A \cap (s(y))$, il faut et il suffit que tous les éléments de $s(y)$ qui sont des minorants fins de m appartiennent à $A \cap (s(y))$. La définition (5) permet de conclure.

10. Proposition : Si A est une partie non vide à caractère fin du treillis complet E, si y est un élément de E, si enfin a est un élément de A qui minore y ; alors l'ensemble $A \cap [a,y]$ possède au moins un élément maximal.

Preuve. D'après (9), $A \cap (s(y))$ est une partie à caractère fin du treillis complet $s(y)$. Donc, d'après (7), $A \cap (s(y))$ est un ensemble inductif. Enfin, d'après (2), l'ensemble $(A \cap (s(y))) \cap r(a)$ possède au moins un élément maximal.

II. Génération dans un ensemble réticulé supérieurement.

11. Définition : On appelle fermeture d'un ensemble ordonné E une application f de E dans E telle que :

1) $\forall a.b \in E \qquad a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \leqslant f(b)$

2) $\forall x \in E \qquad x \leqslant f(x)$

3) $\qquad f_{\circ} f = f.$

12. Définitions: Etant donné une fermeture f de l'ensemble réticulé supérieurement E

1) Un élément de E est dit f-fermé (ou fermé s'il n'y a pas risque d'équivoque) s'il appartient à f(E)).

2) On dit que x f-engendre y (ou est un f-générateur de y) si $y = f(x)$.

3) 1 est dit f-libre si, quel que soit $u \in E$:

$$(u < (1) \Longrightarrow (f(u) < f(1)).$$

4) x est dit une f base de y si x est un f-générateur libre de y.

5) x est dit f-lié s'il n'est pas f-libre.

Dans toute la suite de cette partie, il sera question, comme dans (12), d'une fermeture f d'un ensemble réticulé supérieurement. Il résulte de (12) que, pour que x soit une base de y, il faut et il suffit que x soit un élément minimal de l'ensemble des générateurs de y. Il en résulte que, si deux éléments distincts sont bases d'un même élément, ils ne sont pas comparables. On désignera par L l'ensemble des libres.

13. Lemme : 1) Si $a \leqslant b$, on a : $f(a) = f(b) \Longleftrightarrow b \leqslant f(a)$.

2) Quels que soient a et c, on a : $[f(a) = f(a \vee c)] \Longleftrightarrow c \leqslant f(a)$.

Preuve. Si $a \leqslant b$: $f(a) = f(b) \Longleftrightarrow f(b) \leqslant f(a) \Longleftrightarrow b \leqslant f(a)$.

La deuxième partie du lemme résulte de la première.

14. Proposition : Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(1) a est lié

(2) $\exists\, u \in E$ tel que $u < a$ et $f(u) = f(a)$

(3) $\exists\, u \in E$ tel que $a \in \,]u, f(u)]$

Preuve. Cela résulte de la définition (12) et du lemme (13).

15. Proposition et définition : Etant donné un élément u de E, les deux situations suivantes sont équivalentes :

(1) $u \leqslant v \Longrightarrow \exists b$, base de $f(v)$, avec $b \in [u,v]$

(2) $u \leqslant f(y) \Rightarrow \exists m$, base de $f(y)$, avec $m \in [u, u \vee y]$.

On dira, par définition, dans ce cas, que u est indépendant.

Preuve. (1) $\Longrightarrow$ (2) : Comme $u \leqslant u \vee y$, on peut trouver b, base de $f(u \vee y)$, avec $b \in [u, u \vee y]$. Mais, d'après (13), $f(u \vee y) = f(y)$. En résumé, b est base de $f(y)$, et $b \in [u, u \vee y]$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) : On a : $u \leqslant v \leqslant f(v)$. Donc, on peut trouver une base m de $f(v)$, avec $m \in [u, u \vee v]$, c'est-à-dire $m \in [u,v]$

16. Proposition: Tout élément indépendant est libre.

Preuve. Supposons u indépendant. On a $u \leqslant u$. Donc, d'après (15), on peut trouver une base b de $f(u)$ avec $b \in [u,u]$. Donc u est une base de $f(u)$. Donc u est libre.

17. Proposition. Si b est une base de $f(q)$ et que $b \in [p,q]$; b est un élément maximal de $L \cap [p,q]$.

Preuve. Supposons $b \leqslant 1$, avec $1 \in L \cap [p,q]$. D'après (12) on a : $f(b) \leqslant f(1)$ et aussi : $f(1) \leqslant f(q)$. Soit : $f(1) \in [f(b), f(q)]$. Mais $f(b) = f(q)$. Donc $f(1) = f(q)$. 1 est donc une base de $f(q)$. b et 1 sont donc deux bases comparables de $f(q)$. Donc $b = 1$.

En envisageant les cas particuliers : $p = o$; q fermé ; q fermé et $p = o$, on a :

18. Corollaires: 1) si b est une base de $f(q)$ et minore q, b est un élément maximal de $L \cap (s(q))$

2) Si b est une base de l'élément fermé q, et majore p ; b est un élément maximal de $L \cap [p,q]$.

3) Toute base de l'élément fermé q est un maximal de l'ensemble $L \cap (s(q))$.

19. Proposition : Si b est une base de $f(y)$ vérifiant : $b \in [p, pVy]$,

1) Les deux situations $f(y) = f(yVp)$ et $p \leq f(y)$ sont équivalentes.

2) Dans ce cas, b est maximal pour l'ensemble $L \cap [p, pVy]$.

Preuve. On a, d'après (13), $(f(y) = f(yVp)) \Longleftrightarrow (p \leq f(y))$. Posons alors $q = pVy$.

On se trouve dans les hypothèses de (17). Ce qui permet de conclure.

En supposant y fermé, cet énoncé devient le suivant

20. Corollaire : Si b est une base de l'élément fermé y, et que b $|p, pVy|$,

alors :

1) Les deux situations $y = f(yVp)$ et $p \leq y$ sont équivalentes.

2) Dans ce cas, b est maximal pour $L \cap [p, pVy]$.

21. Proposition et définition : Etant donné une fermeture f de l'ensemble réticulé supérieurement E, les deux assertions suivantes, où L désigne l'ensemble des éléments f-libres de E, sont équivalentes :

1) $\forall\, l \in L,\ \forall\, x \in E \qquad (]l, lVx] \cap L = \emptyset) \Rightarrow (x \leq f(l))$

2) $\forall\, l \in L \qquad (l \leq m \text{ et }]l, m] \cap L = \emptyset) \Rightarrow m \leq f(l)$

Si la fermeture f vérifie l'une ou l'autre de ces deux propriétés équivalentes, elle est dite vérifier l'axiome d'échange affaibli.

La proposition (21) est évidente.

22. Théorème : Si f est une fermeture, vérifiant l'axiome d'échange affaibli, de l'ensemble réticulé supérieurement E, et si $p \leq f(y)$; alors, pour $b \in [p, pVy]$, les deux situations suivantes sont équivalentes :

(1) b est une base de $f(y)$.

(2) b est un élément maximal pour l'ensemble $L \cap [p, pVy]$.

Preuve. Etant donné f vérifiant l'axiome d'échange affaibli, faisons les hypothèses suivantes : $p \leq f(y)$, et m est un maximal de $L \cap [p, pVy]$, m or y p et y minorent tous deux $f(y)$. Donc $p \vee y \leqslant f(y)$. Donc $m \leqslant p \vee y \leqslant f(y)$.

y et m minorent tous deux $p \vee y$. Donc $y \vee m \leqslant p \vee y$. Donc $]m, m \vee y] \subsetneq]m, p \vee y]$.

Par suite, d'après l'hypothèse de maximalité tous les éléments de $]m, m \vee y]$ sont liés. Donc $]m, m \vee y] \cap L = \emptyset$ En invoquant l'axiome d'échange affaibli, on obtient $y \leqslant f(m)$.

On a donc obtenu les 2 relations $m \leqslant f(y)$ et $y \leqslant f(m)$, d'où $f(m) \leqslant f(y)$ et $f(y) \leqslant f(m)$ Donc $f(m) = f(y)$. L'élément m est donc un générateur libre de $f(y)$, donc une base de $f(y)$.

On a donc établi jusqu'ici que, si $p \leqslant f(y)$, tout maximal de $L \cap [p. p \vee y]$ est une base de $f(y)$. En joignant ce résultat à (19), qui en est une réciproque, on obtient le résultat annoncé.

En prenant comme cas particulier $p = o$; y fermé ; $p = o$ et y fermé, on obtient les corollaires suivants :

23. Corollaires : Si f est une fermeture, vérifiant l'axiome d'échange affaibli, de l'ensemble réticulé supérieurement E.

1) Pour qu'un minorant de y soit une base de $f(y)$, il faut et il suffit que ce soit un élément maximal pour $L \cap (s(y))$.

2) Si y est fermé et que $p \leqslant y$, pour qu'un élément de $[p, y]$ soit une base de y, il faut et il suffit qu'il soit maximal pour $L \cap [p, y]$.

3) Pour qu'un minorant du fermé y soit une base de y, il faut et il suffit que ce soit un élément maximal pour $L \cap (s(y))$.

III. Génération dans un treillis complet.

24. Définition : Soit un treillis complet E, et soit T l'ensemble des triplets (x, y, z) d'éléments de E tels que $x \leqslant z$ et $y \leqslant z$.

Le treillis complet E sera dit vérifier l'hypothèse (H1) si l'on peut trouver au moins une application w de T dans E telle que :

1) $\forall (x,y,z) \in T \quad w(x,y,z) \geqslant y$

2) $\forall (x,y,z) \in T \quad (x(x,y,z)) \vee x = z.$

3) $\forall (x,y,z) \in T \quad (w(x,y,z) = z) \Longrightarrow x \leqslant y.$

Conséquences. $\forall (o,y,z) \in T \quad w(o,y,z) = z$

$\forall (x,y,z) \in T \quad w(x,y,z) \in [y,z]$

25. Définition : Un treillis complet E est dit vérifier l'hypothèse (H2) si, quels que soient ses éléments a et x :

$$a < x \Longrightarrow \exists\, p, \text{ fin}, \neq o, \text{ tel que } p \wedge a = 0 \text{ et } p \vee a \leqslant x.$$

26. Définition : Un treillis complet est dit spécial s'il vérifie à la fois l'hypothèse (H1) et l'hypothèse (H2).

27. Définition : Une fermeture f du treillis complet E est dite algèbrique si :

$(a \text{ fin et } a \leqslant f(x)) \Longrightarrow (\exists b, \text{ fin, tel que } b \leqslant x \text{ et } a \leqslant f(b)).$

28. Proposition : Etant donné un treillis complet E vérifiant l'hypothèse (H2), et une fermeture f de ce treillis complet, tout majorant d'un élément f-lié est f-lié (en d'autres termes, tout minorant d'un élément f-libre est f-libre).

Preuve. Soit p un élément lié, et supposons $p \leqslant q$. L'élément p étant lié, on peut d'après (14), trouver k tel que : $k < p \leqslant f(k) = f(p)$. Posons $w(k,o,p) = a$. On a, d'après la définition de w : $a \vee k = p$. Comme $a \leqslant p \leqslant q$ et $k < p \leqslant q$, on a : $(a,k,q) \in T$. On peut donc poser $w(a,k,q) = b$, on a, d'après la définition de w, $b \vee a = q$ et $b \geqslant k$. Si on avait $a \leqslant k$, l'égalité $a \vee k = p$ entraînerait $k = p$, ce qui n'est pas. Donc $a \nleqslant k$, et par suite, d'après (24), $b = w(a,k,q) \neq q$. C'est-à-dire $b < q$. D'autre part, d'après (13), $f(p) = f(k) \Longleftrightarrow f(k) = f(a \vee k) \Longleftrightarrow a < f(k) \Longrightarrow a \leqslant f(b) \Longleftrightarrow f(b) = f(a \vee b) \Longleftrightarrow f(b) = f(q)$. Les deux conditions $b < q$ et $f(b) = f(q)$ montrent alors, d'après (14), que q est lié.

29. Proposition : Etant donné un treillis complet E vérifiant l'hypothèse (H2) et une fermeture algèbrique f de ce treillis complet, tout élément lié de E possède un minorant fin et lié (en d'autres termes, si tous les minorants fins d'un élément sont libres, celui-ci est libre).

Preuve. Soit s un élément lié. D'après (14), on peut trouver a tel que $a<s\leq f(a) = f(s)$. Mais, E vérifiant (H2), on peut trouver p fin, non nul, tel que $p\wedge a = o$ et $p\vee a\leq s$. On déduit : $p\leq s\leq f(a)$. Donc $p\leq f(a)$. Donc, d'après la définition (27), on peut trouver un minorant fin de a, m, tel que $p\leq f(m)$. D'où : $p\vee m\leq f(m)$. On a de plus $p\wedge m\leq p\wedge a = o$. Donc $p\wedge m = 0$. Il en résulte que $m<p\vee m$, car si on avait $m = p\vee m$, on aurait $p\leq m$, donc $p\wedge m = p$, donc $p = o$, ce qui n'est pas.

En résumé $m<p\vee m\leq f(m)$. Donc, d'après (14), $p\vee m$ est lié.

Par ailleurs, comme $m\leq a<s$ et $p\leq s$, on a : $p\vee m\leq s$

Mais, p et m étant fins, l'élément $p\vee m$ est fin d'après (4). En résumé $p\vee m$ est un élément fin, lié, qui minore s.

30. Proposition. Si E est un treillis complet spécial, et f une fermeture algébrique de E, l'ensemble L des éléments f-libres est une partie à caractère fin du treillis complet E.

Preuve. D'après (29), si tous les minorants fins d'un élément sont libres, cet élément est libre. Mais, d'après (28), tout minorant d'un libre est libre. Donc, pour qu'un élément soit libre, il faut et il suffit que tous ses minorants fins soient libres.

Donc, d'après (5), L est une partie à caractère fin.

31 : Théorème : si E est un treillis complet spécial, f une fermeture algébrique de E, y un élément de E, et l un minorant libre de y ; alors $L\cap[l,y]$ possède au moins un élément maximal.

Preuve. Ce résultat résulte immédiatement de la proposition (10).

En faisant $l = o$; $y = e$; $l = o$ et $y = e$, on a les corollaires suivants :

32. Corollaires : Si f est une fermeture algébrique du treillis complet spécial E ,

1) $\forall\, y \in E$, $L \cap s(y)$ possède un maximal.

2) $\forall\, l \in L$ $L \cap r(l)$ possède un maximal.

3) L'ensemble L possède un maximal.

33. Théorème : Si f est une femeture algébrique, vérifiant l'axiome d'échange affaibli, du treillis complet spécial E, l'ensemble des éléments libres est identique à l'ensemble des éléments indépendants.

Preuve. Les théorèmes (22) et (31) s'appliquent tous deux ici. Soit p un élément libre, et y tel que $p \leqslant f(y)$. D'après (31), l'ensemble $L \cap [p, p \vee y]$ possède un maximal m. D'après (22), m est une base de f(y). En résumé, à tout y tel que $p \leqslant f(y)$, on peut associer m, base de f(y), avec $m \in [p, p \vee y]$. D'après (15), p est donc indépendant. Donc, tout élément libre est indépendant. Mais, d'après (16), tout élément indépendant est libre. Ce qui permet de conclure.

En écrivant qu'un élément libre p est indépendant, et en faisant dans (15) successivement y fermé : $y = e$; $p = o$; $p = o$ et y fermé ; $p = o$ et $y = e$; on obtient les corollaires suivants :

34. Corollaires : Si f est une fermeture algébrique, vérifiant l'axiome d'échange affaibli, du treillis complet spécial E:

1) quel que soit l'émément fermé y, et le minorant libre p de y, on peut trouver au moins une base m de y telle que : $m \in [p, y]$.

2) quel que soit l'élément libre p, il existe une base de e qui majore p.

3) quel que soit l'élément y de E, il existe une base m de f(y) telle que $m \leqslant y$.

4) Tout élément fermé a une base.

5) L'élément e a une base.

Remarquons enfin que (23) se particularise en prenant $y = e$:

35. Corollaires de (23) : Si f est une fermeture, vérifiant l'axiome d'échange affaibli, d'un treillis complet E :

1) Quel que soit l'élément p de E, l'ensemble des bases de e qui majorent p est identique à l'ensemble des éléments maximaux de $L \cap (r(p))$.

2) L'ensemble des bases de e est identique à l'ensemble des éléments maximaux de L.

IV. Génération dans le treillis complet des parties d'un ensemble.

Soit E le treillis complet $\mathcal{P}(e)$ des parties d'un ensemble e. Le maximum de E est e. Son minimum, qui sera toujours noté 0, est la partie vide de e. Le symbole Ø sera réservé à la partie vide de E.

36. Proposition : L'ensemble des éléments fins du treillis complet $E = \mathcal{P}(e)$ des parties d'un ensemble e est identique à l'ensemble des parties finies de e.

Preuve. Soit x un élément fin de E. Soit X l'ensemble des éléments $\{\lambda\}$ de E, où λ parcourt x. On a évidemment $x = \bigvee_{\lambda \in x} \{\lambda\} = \bigvee X$. D'après (3), on peut trouver Y, fini, $\subseteq X$, avec $x \leqslant \bigvee Y$. Comme $\bigvee Y \leqslant \bigvee X = x$, on a : $x = \bigvee Y$. Mais $\bigvee Y$ est une partie finie de e. Donc x est une partie finie de e.

Inversement, si x est une partie finie de e, il est évident que e est un élément fin de E.

37. Proposition : Le treillis complet des parties d'un ensemble est spécial.

Preuve. Il résulte de (25) et (36) que $E = \mathcal{P}(e)$ vérifie l'hypothèse (H2). Par ailleurs, il suffit de prendre $W(x,y,z) = z - (x-y)$ pour constater que l'hypothèse (H1) est également vérifiée.

38. Proposition :

1) Pour qu'une partie x d'un ensemble e soit liée (par rapport à une fermeture donnée f de $\mathcal{P}(e)$), il faut et il suffit que :

$$\exists \nu \in x \quad \text{tel que} \quad \nu \in f(x-\nu).$$

2) Pour qu'une partie x de e soit libre, il faut et il suffit que :

$$\forall \nu \in x \quad , \text{ on ait : } \quad \nu \notin f(x-\nu).$$

Preuve. Il suffit de démontrer 1). Soit x une partie liée de e. D'après (14), on peut trouver une partie k de e telle que : $k < x \leqslant f(k)$. Soit $\nu \in x-k$. On a : $\nu \in x \leqslant f(k) \leqslant f(x-\nu)$. Donc $\nu \in f(x-\nu)$.

Inversement, soit x une partie de e telle que : $\exists \nu \in x$, avec $\nu \in f(x-\nu)$. Posons alors $a = x-\nu$. On a : $a < x$, et, puisque $\nu \in f(a)$, et $x = a \vee \nu$: $x \leqslant f(a)$. En résumé : $a < x \leqslant f(a)$. Donc x est liée.

39. Proposition : Pour qu'une fermeture f de $\mathcal{P}(e)$ vérifie l'axiome d'échange affaibli, il faut et il suffit que :

$$\forall l \in L \; ; \quad \forall \alpha \in e \quad (l \vee \alpha \text{ liée} \Longrightarrow \alpha \in f(l)).$$

Preuve. Supposons que la fermeture f vérifie l'axiome d'échange affaibli. Supposons alors l libre, $\alpha \in e$, et $l \vee \alpha$ liée. Posons $a = \{\alpha\}$. On a nécessairement $\alpha \notin l$ (sans quoi, on aurait $l = l \vee \alpha$, et l serait donc liée). Donc $]l, l \vee a] = \{l \vee a\}$. Il en résulte que $]l, l \vee a] \cap L = \emptyset$. donc, d'après (21), $a \leqslant f(l)$, Soit : $\alpha \in f(l)$.

Inversement, soit f une fermeture telle que, $\forall l \in L$, $\forall \alpha \in e$, on ait : $(l \vee \alpha \text{ liée} \Longrightarrow \alpha \in f(l))$. Soient alors $l \in L$ et $x \in E$ tels que $]l, L \vee x] \cap L = \emptyset$. Si $\alpha \in x-l$, on a : $l \vee \alpha \in]l, l \vee x]$, donc $l \vee \alpha$ est liée, donc, d'après l'hypothèse faite, $\alpha \in f(l)$. Par suite, puisque, $\forall \alpha \in x-l$, $\alpha \in f(l)$, on a : $x \leqslant f(l)$. On a donc établi, d'après (21), que f vérifie l'axiome d'échange affaibli.

40. Proposition : Pour qu'une fermeture f de $\mathcal{P}(e)$ soit algébrique, il faut et il suffit que, quelle que soit la partie x de e, à tout $\lambda \in f(x)$, on sache associer une partie finie y de x telle que $\lambda \in f(y)$.

Preuve. Soit f une fermeture algébrique. Soit alors x une partie de e, et $\lambda \in f(x)$, c'est-à-dire $\{\lambda\} \leq f(x)$. $\{\lambda\}$ étant finie, on peut trouver, d'après (27) et (36), une partie finie b de x telle que $\{\lambda\} \leq f(b)$, c'est-à-dire $\lambda \in f(b)$.

Inversement, soit f une fermeture de $\mathcal{P}(e)$ telle que, quels que soient $x \in E$ et $\lambda \in e$, l'appartenance $\lambda \in f(x)$ implique l'existence d'une partie finie y de x telle que $\lambda \in f(y)$. Soit alors x une partie quelconque de e, et a une partie finie de $f(x)$. A chaque $\lambda \in a$, on peut, d'après l'hypothèse faite, associer une partie finie b_λ de x telle que $\lambda \in f(b_\lambda)$. On a : $a = \bigvee_{\lambda \in a} \{\lambda\} \leq \bigvee_{\lambda \in a} f(b_\lambda)$. Mais comme $b_\alpha \leq \bigvee_{\lambda \in a} (b_\lambda)$, on a, quel que soit $\alpha \in a$: $f(b_\alpha) \leq f(\bigvee_{\lambda \in a} (b_\lambda))$, de sorte que : $a \leq \bigvee_{\lambda \in a} f(b_\lambda) \leq f(\bigvee_{\lambda \in a} (b_\lambda))$. Donc $a \leq f(\bigvee_{\lambda \in a} (b_\lambda))$. Mais, a étant fini, l'ensemble $\bigvee_{\lambda \in a} (b_\lambda)$ est une partie finie de x. Donc, d'après (27), la fermeture f est algébrique.

41. Définition : Une fermeture f de $\mathcal{P}(e)$ est dite vérifier l'axiome d'échange si, quels que soient $x \leq e$, $\alpha \in e$ et $\beta \in e$:

$$(\alpha \in f(x \vee \beta) \text{ et } \alpha \notin f(x) \Longrightarrow (\beta \in f(x \vee \alpha))$$

42. Proposition : Toute fermeture $\mathcal{P}(e)$ vérifiant l'axiome d'échange vérifie l'axiome d'échange affaibli.

Preuve. Soient une partie libre l de e, et un élément μ de x tels que $l \vee \mu$ soit liée. Alors, d'après (38), il existe $\nu \in l \vee \mu$ tel que $\nu \in f((l \vee \mu) - \nu)$. Ou bien $\nu = \mu$, et alors $\mu \in f(l)$. Ou bien $\nu \in l$. Alors, comme l est libre, on a, d'après (38) : $\nu \notin f(l - \nu)$. D'après l'axiome d'échange : $(\nu \in f((l-\nu) \vee \mu)$ et $\nu \notin f(l-\nu)) \Rightarrow \mu \in f((l-\nu) \vee \nu)$. En résumé, ($l$ libre, $l \vee \mu$ liée) $\Rightarrow \mu \in f(l)$. Donc, d'après (39), f vérifie l'axiome d'échange affaibli.

43. Définition : Une fermeture f de $\mathcal{P}(e)$ est dite vérifier l'axiome de liberté si : quelle que soit la partie x de e. on peut, quel que soit $\lambda \in f(x)$, trouver une partie libre l de x telle que $\lambda \in f(l)$.

44. Proposition : Si une fermeture de $\mathcal{P}(e)$ vérifie l'axiome de liberté, elle vérifie l'axiome d'échange si et seulement si elle vérifie l'axiome d'échange affaibli.

Preuve. Soit f une fermeture de $\mathcal{P}(e)$, supposée vérifier l'axiome de liberté et l'axiome d'échange affaibli. Supposons que l'on ait : $\alpha \notin f(x)$ et $\alpha \in f(x \vee \beta)$. D'après (43), on peut trouver une partie libre l de $x\vee\beta$ telle que $\alpha \in f(l)$. L'élément β appartient à l (car sinon, on aurait $l < x$, et par suite, $\alpha \in f(x)$, ce qui est contraire à l'hypothèse). Posons $l \wedge x = m$. On a : $\alpha \notin f(m)$ (car, sinon, α appartiendrait à f(x)). D'après (28), m est libre. Donc, d'après (39), puisque $\alpha \notin f(m)$, on peut conclure que $m\vee\alpha$ est libre. Si α n'appartient pas à l , $l\vee\alpha$ est liée(puisque $\alpha \in f(l)$) ; mais $l\vee\alpha = (m\vee\alpha)\vee\beta$; comme $m\vee\alpha$ est libre et $(m\vee\alpha)\vee\beta$ liée, on conclut, d'après (39), que $\beta \in f(m\vee\alpha)$, donc aussi $\beta \in f(x\vee\alpha)$. Si $\alpha \in l$, c'est que $\alpha = \beta$ (car α ne peut appartenir à x puisque $\alpha \notin f(x)$), donc on a encore $\beta \in f(m\vee\alpha)$. On a donc prouvé que :$(\alpha \notin f(x)$ et $\alpha \in f(x\vee\beta)) \Rightarrow \beta \in f(x\vee\alpha)$. Donc f vérifie l'axiome d'échange. Le résultat (42) permet de terminer la démonstration.

45. Lemme : Toute fermeture algébrique de $\mathcal{P}(e)$ vérifie l'axiome de liberté.

Preuve. Soit f une fermeture algébrique de $\mathcal{P}(e)$, x une partie de e, et λ un élément de f(x). D'après (40), on peut trouver une partie finie y de x telle que $\lambda \in f(y)$. L'ensemble des parties de y qui engendrent f(y) est fini, donc possède un élément minimal l. Celui-ci est visiblement un générateur minimal de f(y), c'est-à-dire une base, ou encore un générateur libre de f(y). La partie l est donc libre, et on a : $\lambda \in f(l)$.

46. Proposition : Pour qu'une fermeture algèbrique de $\mathcal{P}(e)$ vérifie l'axiome d'échange, il faut et il suffit qu'elle vérifie l'axiome d'échange affaibli.

Preuve. Ce résultat est une conséquence de (44) et (45).

BIBLIOGRAPHIE

P. M. COHN : Universal algebra (London) 1965.

Manuscrit remis en octobre 1968.

M. A. ACHACHE
Maître-assistant
Département de mathématiques
43, bd du 11 novembre 1918
VILLEURBANNE