PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

JACQUES BERRUYER

Opérateurs réguliers spectraux et opérateurs réguliers décomposables

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1968, tome 5, fascicule 2
, p. 1-56

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1968__5_2_1_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1968 t. 5-2

OPERATEURS REGULIERS SPECTRAUX ET OPERATEURS REGULIERS DECOMPOSABLES

par Jacques BERRUYER

INTRODUCTION.

La théorie de I.M. GELFAND est la clef de voûte de toute la théorie spectrale classique dans les algèbres de Banach. Son importance est due en partie aux applications qu'elle trouve dans l'étude des algèbres d'opérateurs L(X) sur un espace de Banach X. Citons en particulier la théorie des opérateurs spectraux de N. DUNFORD (6), généralisée par la théorie des opérateurs décomposables de C. FOIAS (8).

Pour prolonger ces théories au cas d'un e.l.c. X, il convient d'abord d'étendre la théorie de GELFAND à une algèbre localement convexe A. Cette extension a été réalisée dans l'article (13') par L. WAELBROECK qui impose à A d'être quasi-complète et à produit séparément continu. Pour appliquer ces résultats à une algèbre d'opérateurs L(X), on est amené à supposer X quasi-complet et tonnelé ; c'est d'ailleurs ce que fait TULCEA dans (12) lorsque, sans donner de démonstration, il développe la théorie des opérateurs spectraux sur un e.l.c. X.

Nous reprenons le sujet en donnant la priorité au point de vue bornologique sur le point de vue topologique, ce qui nous permet de nous libérer de la condition "tonnelé" sur X.

Dans un premier chapitre, nous montrons que l'article de L. WAELBROECK (13') n'utilise en fait que les deux hypothèses suivantes sur l'algèbre A :

1) La bornologie sur A est complète.

2) Le produit de deux bornés de A est borné.

Cette remarque nous permet au chapitre II, de traiter le cas d'une algèbre d'opérateurs sur un e.l.c. X, en ne faisant intervenir sur X que la seule hypothèse de semi-complétude, laquelle entraîne que la bornologie équicontinue de L(X) vérifie les conditions imposées 1) et 2).

Le troisième chapitre étend la théorie des opérateurs spectraux (réguliers) au cas d'un e.l.c. X semi-complet en introduisant, suivant une idée de B. WALSH (14), une résolution spectrale équicontinue sur X.

Enfin le dernier chapitre prolonge la théorie des opérateurs décomposables à un e.l.c. X quasi-complet, et donne quelques propriétés de ces opérateurs ainsi qu'un exemple d'opérateur (régulier) décomposable non spectral sur un expace de Fréchet. Cependant, à la fin de ce quatrième chapitre, une difficulté est soulignée qui nous amène à croire que la notion d'opérateur décomposable introduite, intéressante en soi, ne constitue pas la "bonne" généralisation de la théorie de C. FOIAS, à partir du moment où les e.l.c. X ne sont plus tonnelés. On est donc conduit, suivant l'idée de départ, qui s'attache à supprimer cette condition, à renforcer la notion d'opérateur décomposable. On introduit alors la notion d'opérateur fortement décomposable ; on montre immédiatement, d'une part que sur un espace de Fréchet (et a fortiori sur un espace de Banach) les opérateurs réguliers décomposables et les opérateurs réguliers fortement décomposables sont exactement les mêmes, d'autre part que tout opérateur régulier spectral est fortement décomposable. C'est en ce sens que la notion d'opérateur fortement décomposable est considérée comme la "bonne" généralisation cherchée.

A ce propos, un problème reste ouvert : celui de savoir si sur un espace tonnelé, quasi-complet, les deux extensions coïncident.

SOMMAIRE

Chapitre I : THEORIE SPECTRALE DANS UNE ALGEBRE BORNOLOGIQUE CONVEXE COMPLETE.

§ 1 Algèbre bornologique.

§ 2 Spectre d'un élément.

§ 3 Eléments réguliers.

Chapitre II : SPECTRE D'UN OPERATEUR DANS UN E.L.C.- OPERATEURS REGULIERS.

§ 1 L'algèbre L(X).

§ 2 Spectre d'un opérateur.

§ 3 Exemples d'opérateurs réguliers : les opérateurs complètement bornés.

§ 4 Opérateurs quasi-nilpotents.

§ 5 Propriétés du spectre d'un opérateur.

Chapitre III : OPERATEURS REGULIERS SPECTRAUX.

§ 1 Définition des opérateurs réguliers spectraux.

§ 2 Propriétés des opérateurs réguliers spectraux.

§ 3 Caractérisation des opérateurs réguliers spectraux.

Chapitre IV : OPERATEURS REGULIERS DECOMPOSABLES.

§ 1 Espaces spectraux maximaux.

§ 2 Opérateurs réguliers décomposables.

§ 3 E.S.M. d'un opérateur régulier décomposable.

§ 4 Fermés spectraux d'un opérateur régulier décomposable.

§ 5 Opérateurs réguliers décomposables et opérateurs quasi-nilpotents.

§ 6 Opérateurs fortement décomposables.

§ 7 Exemple d'opérateurs réguliers décomposables non spectraux.

Bibliographie.

Chapitre I : THEORIE SPECTRALE DANS UNE ALGEBRE BORNOLOGIQUE CONVEXE COMPLETE.

§ 1. Algèbre bornologique.

La théorie de Gelfand s'applique aux algèbres de Banach commutatives. Dans (13) L. WAELBROECK prolonge cette théorie aux algèbres localement convexes, commutatives, quasi-complètes, à produit séparément continu, les spectres étant supposés compacts. Si une algèbre A vérifie ces conditions, la bornologie sur A définie par les bornés de A est complète et le produit de deux bornés est borné. Nous nous proposons de montrer dans ce chapitre que les propriétés bornologiques des algèbres considérées permettent à elles seules le prolongement de la théorie de Gelfand.

Pour l'étude des espaces vectoriels bornologiques le lecteur pourra se référer aux articles de H. BUCHWALTER (3) et L. WAELBROECK (13). Rappelons ici quelques définitions.

(1.1.1) Définition : Une algèbre unitaire $A(I \neq o)$ sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est bornologique convexe si :

1) A est espace vectoriel bornologique convexe.

2) Le produit de deux bornés de A est borné.

Dans l'espace vectoriel A, on associe à tout disque B de A l'espace vectoriel $A_B = \bigcup_{r>o} rB$ qui est l'espace vectoriel engendré par B. On munit cet espace A_B de la semi-norme jauge de B :

$$x \in A_B \quad , \quad p_B(x) = \operatorname*{Inf}_{\substack{r>o \\ x \in rB}} r$$

(1.1.2) Définition : On dit que B est un disque complétant lorsque A_B est un espace de Banach.

(1.1.3) Définition : Une algèbre bornologique convexe A est complète s'il existe un système fondamental de bornés, formé de disques complétants.

§ 2. Spectre d'un élément.

Jusqu'à la fin de ce chapitre A désigne une algèbre bornologique convexe complète.

(1.2.1) Définition : Soit a un élément de A. On appelle $\rho(a)$ l'ensemble des éléments λ de la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ pour lesquels il existe un voisinage ouvert V de λ tel que :

1) $R_a : \lambda \longrightarrow (\lambda-a)^{-1}$ est définie sur **V** à valeurs dans A.

2) $R_a(V)$ est borné.

$\sigma(a)$ désigne le complémentaire de $\rho(a)$ dans la sphère de Riemann et s'appelle "spectre de a ".

Notation : Les ouverts V de $\hat{\mathbb{C}}$ vérifiant les conditions 1) et 2) de la définition précédente seront dits "convenables" pour a. Tout ouvert convenable pour a est évidemment contenu dans l'ouvert $\rho(a)$.

(1.2.2) Proposition : Soit $a\in A$ et soit ω un ouvert de $\rho(a)$ tel que $\bar{\omega}\subset\rho(a)$ ($\bar{\omega}$ est l'adhérence de ω dans $\hat{\mathbb{C}}$). Il existe un disque borné complétant B tel que

1) $R_a(\bar{\omega})\subset B$ et $R_a(\bar{\omega}).R_a(\bar{\omega})\subset B$.

2) R_a est une fonction holomorphe de ω dans l'espace de Banach A_B.

Démonstration : $\bar{\omega}$ est un compact dans $\hat{\mathbb{C}}$, il existe donc un nombre fini d'ouverts V_i "convenables" pour a tels que $\bar{\omega}\subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$. R_a est définie sur $\bar{\omega}$ et $R_a(\bar{\omega})\subset \bigcup_{i=1}^{n} R_a(V_i)$. $R_a(\bar{\omega})$ est donc borné et contenu dans un disque borné complétant B' (on peut, quitte à agrandir B' , supposer que $I\in B'$). B'.B' est borné dans A donc contenu dans un disque borné complétant B. Ce disque B satisfait à la condition 1) de la proposition (1.2.2.). Si λ et μ appartiennent à ω on a :

$$(\lambda-a)^{-1} - (\mu-a)^{-1} = - (\lambda-\mu)(\lambda-a)^{-1}(\mu-a)^{-1}$$

Si λ tend vers μ, le deuxième membre tend vers o dans l'espace de Banach A_B puisque $(\lambda-a)^{-1}(\mu-a)^{-1}$ reste dans la boule unité de cet espace de Banach. On a de plus en divisant les deux membres par $(\lambda-\mu)$, pour $\lambda \neq \mu$:

$$\frac{(\lambda-a)^{-1} - (\mu-a)^{-1}}{\lambda - \mu} = -(\lambda-a)^{-1}(\mu-a)^{-1}$$

Si λ tend vers μ, le second membre tend vers $-(\mu-a)^{-2}$ dans A_B, le premier membre vers $\frac{d}{d\mu}(\mu-a)^{-1}$. R_a est donc une application holomorphe de ω dans l'espace de Banach A_B.

(1.2.3) Proposition : Soit $a \in A$. Si $\infty \in \rho(a)$ alors $R_a(\lambda) = (\lambda-a)^{-1}$ tend bornologiquement vers o quand λ tend vers l'infini.

Démonstration : Soit V un voisinage ouvert de l'infini "convenable" pour a. Si $\lambda \in V$, $\lambda \neq \infty$, on a :

$$(\lambda-a)^{-1} = \lambda^{-1}\,(1+a(\lambda-a)^{-1})$$

Quand λ décrit V, $1+a(\lambda-a)^{-1}$ parcourt un borné que l'on peut toujours supposer disqué complétant et noter B. Il devient évident que $(\lambda-a)^{-1}$ tend vers o dans l'espace de Banach A_B.

(1.2.4) Corollaire : Soit $a \in A$. Si $\infty \in \rho(a)$ alors $\lambda R_a(\lambda)$ tend bornologiquement vers 1 quand λ tend vers l'infini.

(1.2.5.) Proposition : Soit $a \in A$, on a : $\sigma(a) \neq \emptyset$.

Démonstration : Raisonnons par l'absurde, en supposant $\sigma(a) = \emptyset$; alors R_a est définie sur $\hat{\mathbb{C}}$ et $R_a(\hat{\mathbb{C}})$ est contenu dans un disque borné complétant B (proposition (1.2.2)). De plus R_a est une application entière tendant vers o à l'infini à valeurs dans l'espace de Banach A_B. D'après le théorème de Liouville, R_a est nulle ce qui est absurde puisque chaque élément $R_a(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, est inversible donc en particulier non nul.

§ 3. Eléments réguliers.

(1.3.1) Définition : Un élément a de A est dit régulier si $\infty \notin \sigma(a)$ (le spectre de a est alors un compact de $\mathbb{C}$). Si a est un élément régulier de A on appelle rayon spectral de a le réel positif r(a) défini par :

$$r(a) = \operatorname{Sup} \{|\lambda| / \lambda \in \sigma(a)\}.$$

(1.3.2) Proposition : Soit a un élément régulier de A. Pour tout nombre complexe λ tel que $|\lambda| > r(a)$ on a :

$$(\lambda-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}}$$

où la série converge bornologiquement dans A.

Démonstration : Soit ε un réel, $\varepsilon > 0$ et soit $F_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} / |\lambda| \geq r(a)+\varepsilon\}$ F_ε est un fermé de $\hat{\mathbb{C}}$ contenu dans $\rho(a)$. Il existe (proposition (1.2.2)) un disque borné complétant B_ε tel que $R_a(F_\varepsilon) \subset B_\varepsilon$ et tel que la fonction R_a soit holomorphe sur $\overset{\circ}{F}_\varepsilon$ à valeurs dans l'espace de Banach A_{B_ε}. Il en résulte que $(\lambda-a)^{-1}$ se développe en série convergeant dans A_{B_ε}. Par un calcul évident on obtient pour $\lambda \in \overset{\circ}{F}_\varepsilon$: $(\lambda-a)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} a^n$ où la série converge dans l'espace de Banach A_{B_ε}.

Remarque : La série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} a^n$ converge bornologiquement dans A pour λ fixé tel que $|\lambda| > r(a)$, mais pour $|\lambda| > r(a) + \varepsilon$ elle converge dans le même espace de Banach A_{B_ε} qui ne dépend que de ε .

(1.3.3) Proposition : Un élément $a \in A$ est régulier si et seulement si il existe un réel $M > 0$ tel que la suite $(a^n/M^n)_{n \in N}$ soit bornée. De plus si a est régulier on a :

$$r(a) = \operatorname{Inf} \{M \in R_+^* / (a^n/M^n)_{n \in N} \text{ bornée}\}.$$

Démonstration : Supposons la suite $(a^n/M^n)_{n\in N}$ bornée pour un réel $M > o$. Il existe un disque borné complétant B tel que $(a^n/M^n)_{n\in N} \subset B$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > M$, la série $\sum_{n=o}^{\infty} \lambda^{-n-1}a^n$ converge dans l'espace de Banach A_B. On a par un calcul évident $(\lambda-a)^{-1} = \sum_{n=o}^{\infty}\lambda^{-n-1}a^n$. Soit alors $\lambda_o \in \mathbb{C}$, $|\lambda_o|>M$, montrons que $\lambda_o \in \rho(a)$. Soient α et ε deux réels vérifiant : $o<\alpha<|\lambda_o| - M$, $\varepsilon>o$, $M+\varepsilon \leqslant |\lambda_o| - \alpha$, et soit $V(\lambda_o) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}/|\lambda-\lambda_o|<\alpha\right\}$. Pour $\lambda \in V(\lambda_o)$ on a :

$$\frac{a^n}{\lambda^n} \in k^n \ B \text{ où } k = \frac{N}{\lambda_o-\alpha}$$

donc $R_a(\lambda) \in \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1-k} \ B \subset \frac{1}{M}\ \frac{1}{1-k}\ B$ et $\lambda_o \in \rho(a)$.

Pour montrer que $\infty \in \rho(a)$ il suffit de remarquer que pour $\lambda \in C, |\lambda|>2M$

On a $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}} = R_a(\lambda) \in 2B$.

Avec ce qui précède on conclut :

-a est un élément régulier puisque $\infty \in \rho(a)$

- $r(a) \leqslant \mathrm{Inf}\left\{M \in R_+^* \ / \ (a^n/M^n)_{n\in N} \text{ bornée}\right\}$.

Réciproquement, soit a un élément régulier de A. Pour $\lambda \quad C, |\lambda| > r(a)$ la série $\sum_{n=o}^{\infty} \lambda^{-n-1}a^n$ converge bornologiquement dans A (proposition (1.3.2)). (a^n/λ^n) tend donc bornologiquement vers o et a fortiori la suite $(a^n/\lambda^n)_{n\in N}$ est bornée ce qui implique :

$$\mathrm{Inf}\left\{M \in R_+^* \ / \ (a^n/M^n)_{n\in N} \text{ bornée}\right\} \leqslant r(a).$$

(1.3.4) Proposition : Soit $a \in A$. $\lambda_o \in \rho(a)$ si et seulement si (λ_o-a) a un inverse régulier.

Démonstration : Soit λ_o un nombre complexe tel que $(\lambda_o-a)^{-1}$ existe. On a l'identité : $(\lambda-a)^{-1} = (\lambda_o-a)^{-1} - (\lambda_o-a)^{-2}((\lambda_o-a)^{-1} + \frac{1}{\lambda-\lambda_o})^{-1}$ pour tout nombre complexe $\lambda \neq \lambda_o$ tel que $(\lambda-a)^{-1}$ ou $((\lambda_o-a)^{-1} + \frac{1}{\lambda-\lambda_o})^{-1}$ existe.

Si $\lambda_o \in \rho(a)$ soit V un voisinage ouvert de λ_o "convenable" pour a, alors : $\left\{\frac{1}{\lambda-\lambda_o} \ / \ \lambda \in V, \ \lambda \neq \lambda_o\right\}$ est un voisinage ouvert de l'infini "convenable" pour a, donc $\infty \in \rho(R_a(\lambda_o))$. On démontre de la même manière la réciproque.

(1.3.5) Proposition : Si A est commutative, l'ensemble A^* des éléments réguliers de A est une sous-algèbre unitaire de A, et $r(.)$ est une semi-norme sous-multiplicative sur A^* telle que $r(1) = 1$.

Démonstration : Soient a et b deux éléments réguliers de A. Soient M et N deux réels positifs tels que $M > r(a)$, $N > r(b)$. On va prouver que les suites $\left\{(\frac{a+b}{M+N})^n\right\}_{n\in N}$ et $\left\{(\frac{ab}{MN})^n\right\}_{n\in N}$ sont bornées ce qui montrera déjà que A^* est une sous-algèbre de A.

La suite double $(\frac{a^p b^q}{M^p N^q})_{(p,q)\in N^2}$ est bornée, car le produit de deux bornés est borné. En particulier la suite $\left\{(\frac{ab}{MN})^n\right\}_{n\in N}$ est bornée.

A étant une algèbre commutative, la formule du binôme permet d'écrire :

$$(\frac{a+b}{M+N})^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \frac{M^p N^{n-p}}{(M+N)^n} \frac{a^p b^{n-p}}{M^p N^{n-p}}$$, donc la suite $\left\{(\frac{a+b}{M+N})^n\right\}_{n\in N}$

est bornée d'après la première partie de la démonstration.

A^* est une sous-algèbre unitaire car $\sigma(1) = \{1\}$.

Le choix de M et N dans la démonstration précédente prouve de plus :

$$r(ab) \leqslant r(a)r(b)$$

$$r(a+b) \leqslant r(a)+r(b)$$

$$r(\lambda a) = |\lambda| r(a) \text{ pour } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Remarque : $r(.)$ est une semi-norme et non pas une norme. Les éléments $a \in A$ tels que $r(a) = o$ sont dits quasi-nilpotents.

(1.3.6) Définition : On suppose A commutative ; soit A^* la sous-algèbre unitaire de A formée des éléments réguliers de A. On appelle caractère de A^* toute forme linéaire χ multiplicative unitaire ($\chi(1) = 1$) sur A^*.

(1.3.7) Proposition : On suppose A commutative ; soit A^* la sous-algèbre unitaire de A formée des éléments réguliers de A.

pour $a \in A^*$ on a : $\sigma(a) = \left\{\chi(a) \;/\; \chi \text{ caractère de } A^*\right\}$.

Démonstration : A^* est une sous-algèbre commutative avec unité, tout idéal propre est contenu dans un idéal maximal. Si m est un idéal maximal, A^*/m est un corps. Soit m un idéal maximal et $m' = \left\{ a \in A^* / \inf_{b \in m} r(a-b) = o \right\}$. m' est un idéal de A^* : d'une part c'est évidemment un sous-groupe (r est une semi-norme sur A^*), d'autre part si $a \in m'$, $a' \in A^*$, pour tout réel $\varepsilon > o$ il existe $b \in m$ tel que $r(a-b) \leqslant \frac{\varepsilon}{r(a')}$ donc $r(aa'-ba') \leqslant r(a-b)r(a') \leqslant \varepsilon$, ce qui montre que $aa' \in m'$.

$1 \notin m'$, car si $b \in m$, $(1-(1-b)) = b$ n'est pas inversible, et $r(1-b) > 1$. On en déduit que m' est un idéal propre de A^*. De plus $m' \supset m$, m est un idéal maximal, donc $m' = m$.

Soit $\tilde{r}(.)$ la semi-norme sur A^*/m quotient de la semi-norme $r(.)$. C'est une norme: pour $\tilde{a} \in A^*/m$ tel que $\tilde{r}(\tilde{a}) = o$, on a $a \in m'$ donc $a \in m$ car $\inf_{b \in m} r(a-b) = o$.

Le quotient A^*/m est donc un anneau normé commutatif qui contient $\mathbb{C}$ (1 est régulier et $1 \notin m$). On sait alors (S. MAZUR (10)) que A^*/m est isomorphe à $\mathbb{C}$ cet isomorphisme étant unique puisqu'il existe un seul automorphisme linéaire sur $\mathbb{C}$.

A chaque élément $a \in A^*$ et à chaque idéal maximal m on peut associer un unique scalaire $\hat{a}(m)$ tel que $a - \hat{a}(m) \in m$.

Lemme : A tout idéal maximal m de A^* on peut associer un caractère χ de A^* tel que $m = \operatorname{Ker}\chi$. Réciproquement à tout caractère χ de A^* on peut faire correspondre un idéal maximal $m = \operatorname{Ker}\chi$.

Démonstration du lemme : Soit m un idéal maximal de A^* ; A^*/m est isomorphe à $\mathbb{C}$ d'après les résultats précédents. On définit alors le caractère χ cherché par $\chi(a) = \hat{a}(m)$. On vérifie que χ est un caractère et que $\operatorname{Ker}\chi = m$.

Réciproquement soit χ un caractère de A^*. $\operatorname{Ker}\chi$ est un idéal maximal si et seulement si pour tout élément $a \notin \operatorname{Ker}\chi$ il existe $b \in A^*$ tel que $1-ab \in \operatorname{Ker}\chi$.

Soit alors $a \in A^*$ tel que $\chi(a) \neq o$, posons $b = \frac{1}{\chi(a)}$, il vient : $\chi(1-ab) = o$ donc $1-ab \in \operatorname{Ker}\chi$.

Reprenons la démonstration de la proposition (1.3.7).

Soit $a \in A^*$, on sait (proposition (1.3.4)) que :

$$\lambda \in \sigma(a) \Longleftrightarrow (\lambda - a) \text{ n'a pas d'inverse dans } A^*.$$

Si $\lambda \in \sigma(a)$, l'idéal engendré dans A^* par $(\lambda-a)$ est propre, contenu dans un idéal maximal m. $(\lambda-a) \in m$ donc $\lambda = \hat{a}(m) = \chi(a)$ où χ est le caractère associé à m.

Réciproquement, soient χ un caractère de A^* , $\lambda = \chi(a)$ pour $a \in A^*$. $\lambda-a \in \operatorname{Ker}\chi$ $\operatorname{Ker}\chi$ est un idéal maximal, donc $\lambda-a$ n'a pas d'inverse dans A^* et $\lambda \in \sigma(a)$.

(1.3.8) Corollaire : On suppose A commutative. Soient a et b deux éléments réguliers dans A, alors :

$$\sigma(a+b) \subset \sigma(a) + \sigma(b)$$

$$\sigma(ab) \subset \sigma(a)\ \sigma(b).$$

(1.3.9) Proposition : Soit $b \in A$ tel que $b^2 = b$. L'élément b est régulier dans A et $\sigma(b) \subset \{o\} \cup \{1\}$.

Démonstration : Pour tout nombre complexe λ, $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq o$, on a :

$$(\lambda-a)^{-1} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda(\lambda-1)}\ a.$$

Il est alors évident que $\sigma(a) \subset \{o\} \cup \{1\}$. A fortiori, a est un élément régulier de A.

(1.3.10) Proposition : Soit B une sous-algèbre de A unitaire (son unité n'étant pas nécessairement celle de A). On suppose que B muni de la bornologie induite est une algèbre bornologique complète. Or désigne par $A^\times$ la sous-algèbre des éléments réguliers de A, par B^* la sous-algèbre des éléments réguliers de B dans l'algèbre bornologique complète B. On a :

1) $B^* = A^* \cap B$.

2) Pour tout élément $b \in B^*$: $r_B(b) = r(b)$, où $r_B(b)$ désigne le rayon spectral de b dans l'algèbre bornologique complète B.

Démonstration : Cette proposition n'est qu'un corollaire évident de la proposition (1.3.3).

(1.3.11) Corollaire : On suppose A commutative ; soit $b \in A$ tel que $b^2 = b$. On pose $A_b = \{ab \ / \ a \in A\}$. Si la sous-algèbre A_b de A (d'unité b), munie de la bornologie induite est complète, pour tout élément ab de A_b on a :

$$\sigma_{A_b}(ab) = \{\chi(a) \ / \chi \text{ caractère de } A^*, \ \chi(b) = 1\}$$

où l'on désigne par $\sigma_{A_b}(ab)$ le spectre de ab dans l'algèbre bornologique complète A_b et A^* la sous-algèbre des éléments réguliers de A.

Démonstration : Soit A_b^* la sous-algèbre des éléments réguliers dans l'algèbre bornologique complète A_b. On sait (proposition (1.3.10)) que $A_b^* = A^* \cap A_b$. Soit χ un caractère de A^* tel que $\chi(b) = 1$, la restriction de χ à A_b^* est évidemment un caractère de A_b^*. Réciproquement, soit χ un caractère de A_b^*. Si $a \in A^*$ alors $ab \in A_b^*$ car ab est régulier dans A puisque b l'est (proposition (1.3.9)). Pour $a \in A^*$ posons $\chi'(a) = \chi(ab)$. χ' est un caractère de A^* tel que $\chi'(b) = 1$. Le corollaire résulte alors de la proposition (1.3.7).

Chapitre II : SPECTRE D'UN OPERATEUR DANS UN E.L.C. - OPERATEURS REGULIERS.

§ I. L'algèbre L(X).

Soit X un espace vectoriel topologique, localement convexe, séparé (en abrégé e.l.c.) sur le corps des complexes. L'algèbre L(X) est l'algèbre des opérateurs continus sur X. On peut placer différentes topologies sur L(X) mais aucune a priori ne joue un rôle particulier. Dans la théorie spectrale sur les e.l.c la topologie de la convergence simple semble pourtant mieux adaptée que les autres car $L_s(X)$ possède un dual que l'on connaît explicitement : $X \otimes X'$. Dans différents ouvrages par exemple : MAEDA (9), TULCEA (12), SCHAEFFER (11), c'est cette dernière topologie qui est retenue.

Afin d'utiliser les résultats du chapitre précédent, on préfère traiter L(X) en algèbre bornologique plutôt qu'en algèbre topologique. Ainsi on est amené à chercher sur $L(X)$ une bornologie convexe complète telle que le produit de deux bornés de $L(X)$ soit borné. Si X est un e.l.c. séparé, quasi-complet et tonnelé, $L_s(X)$ est une algèbre localement convexe séparée, quasi-complète, à produit séparément continu. Dans ce cas la bornologie sur $L(X)$ définie par les bornés de $L_s(X)$ convient. Afin de se libérer de la condition "tonnelé" on préfère utiliser la bornologie équicontinue sur $L(X)$ (une base de bornés étant décrite par les disques équicontinus fermés dans $L_s(X)$). Cette bornologie possède les propriétés demandées grâce à la proposition :

(2.1.1) Proposition : Si X est un e.l.c. séparé semi-complet, tout disque équicontinu simplement fermé est complétant.

Démonstration : Soit H un disque équicontinu simplement fermé, montrons que H est simplement semi-complet, il sera alors complétant. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans H. Pour tout $x \in X$, $(u_n(x))$ est une suite de Cauchy ; elle converge, puisque X est semi-complet, vers un point $u(x)$. L'application linéaire $u : X \to X$ appartient à l'adhérence de H dans l'espace X^X donc $u \in H$ car H est équicontinu. La suite (u_n) tend simplement vers u par construction donc converge dans H.

Dans tout ce chapitre : X est un e.l.c. séparé semi-complet non réduit à $\{o\}$; l'algèbre $L(X)$ munie de la bornologie équicontinue, est considérée comme une algèbre bornologique convexe complète dans laquelle le produit de deux bornés est borné (ce qui est évident). On pourra donc appliquer tous les résultats obtenus au chapitre I.

§ II. Spectre d'un opérateur.

Les définitions et les résultats de ce paragraphe ne sont que des transcriptions des résultats du chapitre I dans le cas particulier où A est l'algèbre bornologique $L(X)$.

(2.2.1). Définition : Soit $T \in L(X)$; $\rho(T)$ désigne l'ensemble des éléments ξ de la sphère de Riemann $\tilde{\mathbb{C}}$ tels qu'il existe un voisinage ouvert V de ξ satisfaisant à :

1) $R_T : \lambda \to (\lambda - T)^{-1}$ est définie sur V à valeurs dans L(X).

2) $R_T(V)$ est équicontinue.

$\sigma(T)$ désigne le complémentaire de $\rho(T)$ dans $\hat{\mathbb{C}}$.

Notation : Les ouverts V vérifiant les conditions de la définition précédente sont dits "convenables" pour T.

Remarque : Si X est un espace de Banach, $\sigma(T)$ est le spectre habituel de la théorie des opérateurs dans les espaces de Banach.

Si X est un e.l.c. séparé quasi-complet et tonnelé, on retrouve la définition du spectre donnée par TULCEA (12).

(2.2.2) Proposition : Soit $T \in L(X)$ et soit ω un ouvert de $\rho(T)$ tel que $\bar{\omega} \subset \rho(T)$ ($\bar{\omega}$ est l'ahdérence de ω dans $\hat{\mathbb{C}}$). Il existe un disque équicontinu complétant H tel que

1) $R_T(\bar{\omega}) \subset H$ et $R_T(\bar{\omega}).R_T(\bar{\omega}) \subset H$.

2) R_T est une fonction holomorphe de ω dans L_H (espace de Banach engendré par H).

Remarque : L'application $R_T : \rho(T) \cap \mathbb{C} \to L_s(X)$ est une application holomorphe à valeurs dans un e.l.c. donc aussi analytique (WAELBROECK (13)). En particulier, et cela servira dans les chapitres suivants, l'application $R_T(x) : \rho(T) \cap \mathbb{C} \to X$ définie par $R_T(x)(\lambda) = (\lambda - T)^{-1}x$ où x est un vecteur fixé de X, est une application holomorphe, donc analytique.

(2.2.3) Définition : Un opérateur T sur X est dit régulier si $\infty \in \rho(T)$. Si T est un opérateur régulier, on appelle rayon spectral de T le réel positif r(T) défini par :

$$r(T) = \operatorname{Sup} \left\{ |\lambda| \,/\, \lambda \in \sigma(T) \right\}.$$

§ III. Exemples d'opérateurs réguliers :

Les opérateurs complètement bornés.

X désigne toujours un e.l.c. séparé semi-complet ; nous allons donner des exemples d'opérateurs réguliers de X : les opérateurs complètement bornés.

(2.3.1) Définition : Un opérateur T de X sera dit complètement borné s'il existe un voisinage V de o dans X tel que T(V) soit borné.

Notation : Soit $T \in L(X)$; on appelle $\rho_c(T)$ l'ensemble des nombres complexes λ tels que $(\lambda - T)^{-1} \in L(X)$. $\sigma_c(T)$ désigne le complémentaire de $\rho_c(T)$ dans $\mathbb{C}$.

(2.3.2) Proposition : Si T est un opérateur complètement borné sur X alors $\sigma_c(T)$ est une partie compacte de $\mathbb{C}$ et $\sigma_c(T) = \sigma(T)$. En particulier T est un opérateur régulier.

Démonstration : Soit V un voisinage de o dans X tel que T(V) soit borné. $B = \bar{\Gamma}(T(V))$ est un disque borné fermé semi-complet de X, B est donc complétant. Soit X_B l'espace de Banach engendré par B muni de la jauge de B. Soit J l'injection canonique de X_B dans X. $T \circ J \in L(X_B)$, montrons que $\sigma_c(T) = \sigma_c(T \circ J)$. Si $o \notin \sigma_c(T)$, T est un isomorphisme de X sur X_B, on est ramené au cas où X est un espace de Banach, et la proposition est alors évidente. Même remarque si $o \notin \sigma_c(T \circ J)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq o$. Il faut montrer que "$\lambda - J \circ T$ inversible dans $L(X)$" est équivalent à "$\lambda - T \circ J$ inversible dans $L(X_B)$". Montrons d'abord que "$I+T$ inversible dans $L(X)$" équivaut à "$I + T \circ J$ inversible dans $L(X_B)$".

Si $I + J \circ T$ a un inverse dans $L(X)$, $(I + J \circ T)^{-I}$ peut s'écrire $I+R$ avec $R \in L(X)$.

On a : $J \circ T + R + R \circ J \circ T = J \circ T + R + J \circ T \circ R = o$.

De la dernière égalité on tire $R = -J \circ T(I+R) = J \circ S$ avec $S = -T(I+R)$ S est une application continue de X dans X_B. Il vient en remplaçant R par sa valeur :

$J(T + S + S \circ J \circ T) = J(T + S + T \circ J + S) = o$.

On simplifie par J à gauche, ceci est possible car J est une injection, et on multiplie par J à droite. On obtient :

$$T_\circ J+S_\circ J+S_\circ J_\circ T_\circ J = T_\circ J+S_\circ J+T_\circ J_\circ S_\circ J = o.$$

Ceci exprime que $I_{X_B}+S_\circ J$ est l'inverse de $I+T_\circ J$ dans $L(X_B)$.

On a $(I+J_\circ T)^{-I} = I-(I+T_\circ J)^{-I}T$.

Plus généralement pour $\lambda\in\rho_c(T)$:

$$(\lambda-T)^{-I} = \lambda^{-I} - (\lambda-T_\circ J)^{-I}T \ .$$

Montrons maintenant que $\sigma_c(T) = \sigma(T)$. Il est évident que $\sigma_c(T) \subset \sigma(T)$

Réciproquement si $\lambda_\circ \in\rho_c(T) = \rho_c(T_\circ J)$ il existe un voisinage $V(\lambda_\circ)$ de $\lambda_\circ$ et un réel positif k tels que :

$$\lambda\in V(\lambda_\circ) \Longrightarrow (\lambda-T_\circ J)^{-I}B\subset kB$$

car $\rho_c(T_\circ J) = \rho(T_\circ J)$ puisque X_B est un espace de Banach.

Soit W un voisinage disqué de o dans X, il existe $\nu>o$ tel que $B\subset\nu W$. Soit α un réel tel que $\alpha<|\lambda/2|$ et $\alpha<I/2k\nu$;

posons $U = \alpha(V\cap W)$. Pour tout $\lambda\in V(\lambda_\circ)$ on a alors :

$$(\lambda-T)^{-I}(U)\subset\frac{\alpha}{\lambda} W + \alpha kB\subset\frac{\alpha W}{\lambda} + \alpha k\nu W\subset W.$$

En résumé R_T est définie sur $V(\lambda_\circ)$ et $R_T(V(\lambda_\circ))$ est équicontinue dans $L(X)$ donc $\lambda_\circ\in\rho(T)$.

(2.3.3) Corollaire : Les opérateurs compacts sur X sont complètement bornés donc réguliers.

§ IV. Opérateurs quasi-nilpotents.

(2.4.1) Définition : Un opérateur Q sur X est dit quasi-nilpotent si $r(Q) = o$.

(2.4.2) Proposition : Soit $Q\in L(X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes .

1) Q est quasi-nilpotent.

2) $\sigma(Q) = \{o\}$.

3) Pour tout réel $\varepsilon>o$, la suite $(Q^n/\varepsilon^n)_{n\in N}$ est équicontinue.

Démonstration : On a supposé X non réduit à {o}. Pour montrer (I⟺2) il suffit de remarquer que $\sigma(Q) \neq \emptyset$. Si la suite $(Q^n/\varepsilon^n)_{n\in N}$ est équicontinue pour un réel $\varepsilon>o$, la suite $(Q^n/\eta^n)_{n\in N}$ est équicontinue pour tout réel $\eta>\varepsilon$ ce qui montre : 2⟺ 3.

§ V. Propriétés du spectre d'un opérateur.

Soit A une sous-algèbre commutative unitaire de L(X). Si A, munie de la bornologie induite par la bornologie équicontinue de L(X), est une algèbre bornologique convexe complète, on note, pour $T\in A$, $\sigma_A(T)$ le spectre (défini au chapitre I) de T dans l'algèbre bornologique complète A.

Si A^* désigne la sous-algèbre de A formée des éléments réguliers de A on sait que :

(2.5.I.) Proposition : Si $T\in A^*$: $\sigma_A(T) = \left\{ \chi(T) \,/\, \chi \text{ caractère de } A^* \right\}$.

(2.5.2) Proposition : Soit M une partie commutative de L(X), soit A le bicommutant de M. A est une sous-algèbre unitaire commutative de L(X) contenant M. Si A est munie de la bornologie induite par la bornologie équicontinue de L(X), A est une algèbre bornologique convexe complète. Enfin si $T\in A$ on a :

$\sigma_A(T) = \sigma(T)$.

Démonstration : A est évidemment une sous-algèbre commutative de L(X) contenant M. A est fermée dans $L_s(X)$; la bornologie sur A induite par la bornologie équicontinue de L(X) est donc complète. Soit $T\in A$, montrons que $\sigma_A(T) = \sigma(T)$. $\rho_A(T)\subset\rho(T)$ de manière évidente. Réciproquement soit $\lambda_o\in\rho(T)$. Il existe un voisinage ouvert V de λ_o "convenable" pour T. Pour tout scalaire $\lambda\in V$, $(\lambda-T)^{-I}$ existe dans L(X). Soit S un opérateur appartenant au commutant de M; S commute avec T donc aussi avec $(\lambda-T)^{-I}$ ce qui montre que $(\lambda-T)^{-I}\in A$ pour tout scalaire $\lambda\in V$. Pour $\lambda\in V$, $(\lambda-T)$ est inversible dans A et $\left\{(\lambda-T)^{-I}\right\}_{\lambda\in V}$ est équicontinu donc $\lambda_o\in\rho_A(T)$.

(2.5.3) Proposition : Soit T un opérateur régulier de $L(X)$, Q un opérateur quasi-nilpotent commutant avec T alors :

1) $\sigma(T+Q) = \sigma(T)$

2) TQ est un opérateur quasi-nilpotent.

Démonstration : Soit M la partie commutative de $L(X)$ réduite aux trois opérateurs I, T, Q. Soit A le bicommutant de M, A^* l'ensemble des éléments réguliers de A ; T et Q appartiennent à A^* car $\sigma_A(T) = \sigma(T)$ et $\sigma_A(Q) = \sigma(Q) = \{o\}$ (proposition (2.5.2)).

On a alors (proposition (2.5.1)) :

$$\sigma(T+Q) = \{\chi(T+Q) \ / \ \chi \text{ caractère de } A^*\} = \sigma(T)$$

$$\sigma(TQ) = \{\chi(TQ) \ / \ \chi \text{ caractère de } A^*\} = \{o\}.$$

Jusqu'à la fin de ce chapitre, P désigne un projecteur sur X ($P^2=P$), X_P le sous-espace fermé $P(X)$ image de P, J l'injection canonique de X_P dans X. X_P est un sous-e.l.c. semi-complet de X, $L(X_P)$ est donc une algèbre bornologique complète. On note L_P la sous-algèbre bornologique de $L(X)$, formée des opérateurs $T \in L(X)$ tels que $TP = PT = T$. L_P est unitaire et d'unité P. Elle est simplement fermée dans $L(X)$, c'est donc une sous-algèbre bornologique complète. Si $T \in L(X)$, l'opérateur PTJ sur X_P sera noté T_P ; enfin, par abus de notation, on confondra l'opérateur $P : X \longrightarrow X$ et l'application linéaire $P : X \longrightarrow X_P$.

(2.5.4) Théorème : l'algèbre bornologique $L(X_P)$ est bornologiquement isomorphe à la sous-algèbre bornologique L_P de $L(X)$, dans les isomorphismes d'algèbres (réciproques) suivants :

Φ : $L_P \longrightarrow L(X_P)$ défini par $\Phi(T) = PTJ = T_P$

Ψ : $L(X_P) \longrightarrow L_P$ défini par $\Psi(R) = JRP$.

Démonstration : Φ est évidemment un morphisme d'algèbres de L_P dans $L(X_P)$, Ψ un morphisme d'algèbres de $L(X_P)$ dans L_P. L'opérateur $\Phi \circ \Psi$ est l'identité de $L(X_P)$ donc Ψ est injectif. Soit $T \in L_P$, posons $R = \Phi(T) = PTJ$; $\Psi(R) = JPTJP = PTP = TP = T$ donc $T = \Psi(R)$.

Il est enfin évident que Φ et Ψ sont des isomorphismes d'algèbres bornologiques.

(2.5.5) Corollaire : Si $T \in L_P$ alors $\sigma(T_P) = \sigma_{L_P}(T)$.

(2.5.6) Corollaire : Soit T un opérateur sur X commutant avec P. On a :

$$\sigma(T_P) = \sigma_{L_P}(TP) \subset \sigma(T) .$$

Démonstration : Soit $R = TP = PT$; $R \in L_P$ et $R_P = T_P$ donc (corollaire (2.5.5)) $\sigma(T_P) = \sigma(R_P) = \sigma_{L_P}(R) = \sigma_{L_P}(TP)$.

Si $(\lambda - T)^{-1}$ existe dans $L(X)$ alors $(\lambda - T)^{-1}P$ est l'inverse de $(\lambda P - R)$ dans L_P.

L_P étant une sous-algèbre bornologique de $L(X)$, on a : $\sigma_{L_P}(TP) = \sigma_{L_P}(R) \subset \sigma(T)$.

(2.5.7) Proposition : Soit A le bicommutant d'une partie commutative M de $L(X)$. On désigne par A^* la sous-algèbre des opérateurs réguliers de A. Soient $T \in A^*$, P un projecteur appartenant à A ; on a : $\sigma(T_P) = \{\chi(T) \ / \ \chi$ caractère de A^*, $\chi(P) = 1\}$.

Démonstration : Posons $A_P = A \cap L_P$. Si $(\lambda P - TP)$ est inversible dans A_P, son inverse appartient a fortiori à L_P. Réciproquement si $(\lambda P - TP)$ est inversible dans L_P son inverse commute avec tous les éléments du commutant de M donc appartient à A. L'algèbre A_P étant une sous-algèbre bornologique de L_P on a : $\sigma_{A_P}(TP) = \sigma_{L_P}(TP)$.

La proposition est alors une conséquence du corollaire (2.5.6) et de la proposition (1.3.11).

Chapitre III : OPERATEURS REGULIERS SPECTRAUX

Dans (6), N. DUNFORD définit et caractérise les opérateurs spectraux dans les espaces de Banach. TULCEA, dans (12), prolonge (sans donner de démonstration) cette théorie au cas des e.l.c. quasi-complets et tonnelés pour des opérateurs ayant un spectre non nécessairement borné dans C. Dans ce chapitre nous étendons la théorie de DUNFORD au cas des e.l.c. séparés, semi-complets, en nous restreignant au cas des opérateurs réguliers.

Dans tout ce chapitre X désigne un e.l.c. séparé, semi-complet, L(X) l'algèbre des opérateurs continus sur X. Deux structures sont considérées sur L(X) : la topologie de la convergence simple et la bornologie équicontinue.

§ 1. Définition des opérateurs réguliers spectraux.

(3.1.1) Définition : On appelle résolution spectrale équicontinue sur X, une application μ de l'ensemble $b_o(\mathbb{C})$ des boréliens du plan complexe dans L(X) vérifiant :

a) $\mu(\mathbb{C}) = I$ (I est l'application identique dans X)

b) $\mu(r \cup s) = \mu(r) + \mu(s)$ pour r et s boréliens disjoints.

c) $\mu(r \cap s) = \mu(r)\mu(s)$ pour r et s boréliens quelconques.

d) $\mu(\cup s_n) = \lim \mu(s_n)$ pour toute suite croissante dans $b_o(\mathbb{C})$, la limite étant prise dans $L_s(X)$.

e) Il existe une partie équicontinue H, $H \subset L(X)$ (que l'on peut supposer disquée complétante puisque X est semi-complet) telle que $\mu(s) \in H$ pour tout borélien s de $\mathbb{C}$.

Remarque : Si X est un e.l.c. séparé, tonnelé, WALSH démontre dans (14) p. 300 que les quatre premières conditions de la définition précédente entraînent la dernière.

(3.1.2) Définition : Soit μ une résolution spectrale équicontinue sur X.

On dit qu'un opérateur T sur X commute avec μ si pour tout borélien s de $\mathbb{C}$: $\mu(s)T = T\,\mu(s)$.

Notation : Soit μ une résolution spectrale équicontinue sur X.

Pour tout borélien s de $\mathbb{C}$ on pose $\mu(s)X = X_s$.

$X_s = \mu(s)X = \mathrm{Im}\mu(s) = \mathrm{Ker}(I-\mu(s)) = \mathrm{Ker}(\mu(\complement s))$, donc pour tout borélien s de $\mathbb{C}$, X_s est un sous-espace fermé semi-complet de X. Si T est un opérateur sur X commutant avec μ, et s un borélien de $\mathbb{C}$, T_s désigne l'opérateur de X_s dans X_s restriction de T à X_s. $\sigma(T_s)$ désigne le spectre de T_s dans l'algèbre bornologique complète (car X_s est semi-complet) $L(X_s)$.

Remarque : Soit s un borélien de $\mathbb{C}$; $\mu(s)$ est un projecteur sur X donc $\sigma(T_s) \subset \sigma(T)$ (corollaire (2.5.6)).

(3.1.3) Théorème : Soit $B_a(\mathbb{C})$ l'algèbre de Banach des fonctions Baire-mesurables et bornées. $B_a(\mathbb{C})$ sera traitée en algèbre bornologique complète. Soit μ une résolution spectrale équicontinue sur X. μ définit un unique morphisme d'algèbres bornologiques (noté encore μ) $\mu : B_a(\mathbb{C}) \to L(X)$ tel que $\mu(1_s) = \mu(s)$ pour tout borélien s de $\mathbb{C}$ (1_s est la fonction caractéristique de s). De plus il existe une partie équicontinue complétante H (égale à 4 fois celle de la définition (3.1.1)) telle que :

$$\mu(f) \in \|f\| H \text{ pour toute application } f \in B_a(\mathbb{C}).$$

Démonstration : La partie H de la définition (3.1.1) peut être prise disquée, complétante, multiplicativement stable. En effet $\mu(B_o(\mathbb{C}))$ est une partie multiplicativement stable et équicontinue de L(X) donc aussi son enveloppe disquée simplement fermée, car le produit dans $L_s(X)$ est séparément continu. Quitte à remplacer H par $\overset{*}{\Gamma}(\mu(b_o(\mathbb{C})))$, on peut supposer H équicontinue, multiplicativement stable et simplement fermée. Il en résulte que l'espace de Banach engendré par H est une algèbre L_H commutative, unitaire. Pour toute fonction simple $\emptyset = \sum \lambda_k 1_{s_k}$ on peut poser (ce qui est cohérent comme on sait)

$$\mu(\emptyset) = \sum \lambda_k \mu(s_k)$$

On définit ainsi une application μ sur l'ensemble $S(\mathbb{C})$ des fonctions simples sur $\mathbb{C}$, dans l'algèbre de Banach L_H. Pour prolonger μ à $B_a(\mathbb{C})$ il suffit de vérifier que $\mu : S(\mathbb{C}) \rightsquigarrow L_H$ est continue. Par ailleurs μ est linéaire et multiplicative sur $S(\mathbb{C})$, donc il en sera de même sur $B_a(\mathbb{C})$. Montrons donc, et cela achèvera la démonstration, que :

$$\emptyset \in S(C) \Rightarrow \mu(\emptyset) \in 4||\emptyset||H.$$

Soit $y' \in H^\circ \subset [L_s(X)]'$; soit $\emptyset = \sum \lambda_k 1_{s_k}$. Pour $s \in b_\circ(\mathbb{C})$: $|<\mu(s),y'>| \leq 1$. Or $<\mu(\emptyset),y'> = \sum \lambda_k <\mu(s_k),y'>$ donc :

$$|<\mu(\emptyset),y'>| \leq ||\emptyset|| \sum |<\mu(s_k),y'>|.$$

Posons $m(s) = <\mu(s),y'>$. La fonction m est une mesure complexe sur la tribu $b_\circ(\mathbb{C})$. On peut supposer m réelle à un facteur 2 près, puis partitionner l'ensemble des indices k intervenant dans la décomposition de $\emptyset$ en $J_1 \cup J_2 \cup J_3$ où

$$k \in J_1 \Rightarrow m(s_k) \quad o \ ; \ k \in J_2 \Rightarrow m(s_k) \in o \ ; \ k \in J_3 \Rightarrow m(s_k) = o$$

Alors $\sum |m(s_k)| = m(\bigcup_{k \in J_1} s_k) - m(\bigcup_{k \in J_2} s_k) \leq 2.$

Ainsi pour $y' \in H^\circ$ on a :

$$|<\mu(\emptyset),y'>| \leq 4||\emptyset|| \quad \text{ce qui montre que } \mu(\emptyset) \in 4||\emptyset||H^{\circ\circ}$$

mais H étant un disque simplement fermé est égal à son bipôlaire $H^{\circ\circ}$, d'où le résultat qu'on se proposait de montrer.

<u>Notation</u> : Si $f \in B_a(\mathbb{C})$ on écrit indifféremment : $\mu(f)$ ou $\int f d\mu$.

(3.1.4) <u>Proposition</u> : Soit μ une résolution spectrale équicontinue sur X et soit $f \in B_a(\mathbb{C})$, alors $\sigma(\mu(f)) \subset \overline{f(C)}$.

Démonstration : Soit $\lambda_o \in \hat{\mathbb{C}}$, $\lambda_o \notin \overline{f(\mathbb{C})}$. Il existe un voisinage ouvert V de λ_o tel que $\overline{V} \cap \overline{f(\mathbb{C})} = \emptyset$. Si $\lambda \in V$, $(\lambda - f)^{-1}$ est une fonction Baire-mesurable bornée et $\left\{(\lambda-f)^{-1}\right\}_{\lambda \in V}$ est bornée dans $B_a(\mathbb{C})$. μ étant un morphisme d'algèbres bornologiques, pour $\lambda \in V$: $\mu(\lambda-f)^{-1} = (\lambda-\mu(f))^{-1}$, et $\left\{(\lambda-\mu(f))^{-1}\right\}_{\lambda \in V}$ est borné donc équicontinue dans L(X). Ainsi V est un voisinage ouvert de λ_o "convenable" pour $\mu(f)$ donc $\lambda_o \in \rho(\mu(f))$.

(3.1.5) Corollaire : Soit μ une résolution spectrale équicontinue sur X et soit $f \in B_a(\mathbb{C})$. $\mu(f)$ est un opérateur régulier et $r(\mu(f)) \leq \|f\|$.

(3.1.6) Corollaire : Soit μ une résolution spectrale équicontinue sur X et s un borélien de $\mathbb{C}$, alors :

$$\sigma(\mu(s)) \subset \{o\} \cup \{1\}.$$

(3.1.7) Définition : Un opérateur régulier T sur X est dit spectral s'il existe une résolution spectrale équicontinue μ sur X telle que :

1) T commute avec μ.

2) $\sigma(T_s) \subset s$ pour tout fermé s de $\mathbb{C}$.

Dans ces conditions, μ sera dite "résolution spectrale de T".

§ 2. Propriétés des opérateurs réguliers spectraux.

(3.2.1) Proposition : Soit T un opérateur régulier spectral sur X, μ une résolution spectrale de T alors :

$$\mu(\sigma(T)) = 1.$$

Démonstration : Soit s un fermé de $\mathbb{C}$ contenu dans $\rho(T)$. $\mu(s)$ étant un projecteur sur X on a : $\sigma(T_s) \subset s \subset \rho(T) \subset \rho(T_s)$. Donc $\sigma(T_s) = \emptyset$, ce qui entraîne $\mu(s)X = \{o\}$ d'après la proposition (1.2.5), c'est-à-dire $\mu(s) = o$. D'autre part il existe une suite croissante (s_n) de fermés telle que $\rho(T) \cap \mathbb{C} = \bigcup_{n=o}^{\infty} s_n$.

Pour tout $x \in X$ on a : $\mu(\rho(T) \cap \mathbb{C})x = \lim \mu(s_n)x = o$

donc $\mu(\rho(T) \cap \mathbb{C}) = o$ et enfin $\mu(\sigma(T)) = 1$.

(3.2.2) Corollaire : Soit $f \in B_a(\mathbb{C})$, T un opérateur régulier spectral, μ une résolution spectrale de T, alors :

$$\sigma(\mu(f)) \subset \overline{\{o\} \cup f(\sigma(T))}.$$

Démonstration : D'après la proposition précédente :

$$\mu(f) = \mu(f)\mu(1_{\sigma(T)}) = \mu(f1_{\sigma(T)}).$$

Le corollaire n'est alors qu'une conséquence de la proposition (3.1.4)

Remarque : Soit T un opérateur régulier spectral, μ une résolution spectrale de T. Le théorème (3.1.3) et la proposition (3.2.1) donnent un sens à $\int$. De plus $\int \lambda d\mu(\lambda)$ est un opérateur régulier.

(3.2.3) Définition : On dit qu'un opérateur T de X possède la propriété d'unique extension si pour toute fonction analytique f définie sur un ouvert D_f du plan complexe à valeurs dans X et telle que $(\lambda-T)f(\lambda) \equiv o$ sur D_f, on a : $f = o$.

(3.2.4) Proposition : Un opérateur régulier spectral T sur X possède la propriété d'unique extension.

Démonstration : Raisonnons par l'absurde. Soit $\lambda_o \in D_f$ tel que $f(\lambda_o) \neq o$. f étant continue, il existe un voisinage ouvert $V(\lambda_o)$ de λ_o contenu dans D_f, tel que $f(\lambda) \neq o$ pour tout $\lambda \in V(\lambda_o)$. Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de points de $V(\lambda_o)$ convergeant vers λ_o et telle que $\lambda_n \neq \lambda_o$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Nous obtiendrons la contradiction cherchée en démontrant que :

$$\mu(\{\lambda_o\})f(\lambda_o) = f(\lambda_o)$$

$$\mu(\{\lambda_o\})f(\lambda_n) = o \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Montrons que $\mu(\{\lambda_o\})f(\lambda_n) = o$. Pour tout entier $n \geq 1$ on a : $(\lambda_n-T)f(\lambda_n) = o$ ou encore $(\lambda_n-T)\mu(\{\lambda_o\})f(\lambda_n) = o$, ce qui peut s'écrire :

$$(\lambda_n-T_{\{\lambda_o\}})\mu(\{\lambda_o\})f(\lambda_n) = o.$$

Mais $\sigma(T_{\{\lambda_0\}}) \subset \{\lambda_0\}$, donc $\lambda_n \in \rho(T_{\{\lambda_0\}})$, car $\lambda_n \neq \lambda_0$.

$\lambda_n - T_{\{\lambda_0\}}$ est injective, ce qui montre que $\mu(\{\lambda_0\})f(\lambda_n) = o$.

Montrons que $\mu(\{\lambda_0\})f(\lambda_0) = f(\lambda_0)$. Par un raisonnement analogue $\mu(s)f(\lambda_0) = o$ pour tout fermé s ne contenant pas λ_0. μ étant dénombrablement additive et $\mathbb{C}-\{\lambda_0\}$ pouvant s'écrire comme réunion d'une suite croissante de fermés, on a :

$$\mu(\mathbb{C}-\{\lambda_0\})f(\lambda_0) = o, \text{ ou encore } f(\lambda_0) - \mu(\{\lambda_0\})f(\lambda_0) = o.$$

<u>Notation</u> : Soit $x \in X$, T un opérateur sur X possédant la propriété d'unique extension. On désigne par $\rho_T(x)$ le plus grand ouvert de $\mathbb{C}$ sur lequel on peut définir une fonction analytique $\tilde{x}^T$ à valeurs dans X telle que $(\lambda-T)\tilde{x}^T(\lambda) \equiv x$ sur $\rho_T(x)$. $\sigma_T(x)$ désigne le fermé complémentaire de $\rho_T(x)$ dans C. Si aucune confusion n'est à craindre, on supprimera l'indice T.

(3.2.5) <u>Proposition</u> : Soient T un opérateur régulier spectral sur X et x un point de X. On a $\sigma(x) = \emptyset$ si et seulement si $x = o$.

<u>Démonstration</u> : Si $x = o$ il est évident que $\sigma(x) = \emptyset$. Réciproquement si $\sigma(x) = \emptyset$, $\tilde{x}$ est définie sur tout le plan complexe, elle est analytique. T étant un opérateur régulier, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > r(T)$ on a : $\tilde{x}(\lambda) = (\lambda-T)^{-1}x$ (propriété d'unique extension) donc $\tilde{x}(\lambda)$ tend vers o à l'infini. Pour tout $x' \in X'$, la fonction $(\lambda \to \langle\tilde{x}(\lambda), x'\rangle)$ est entière, tend vers o à l'infini donc est nulle (Liouville). X étant séparé par son dual, $\tilde{x}$ est nulle. Si λ est un scalaire quelconque, il vient : $x = (\lambda-T)\tilde{x}(\lambda) = o$.

(3.2.6) <u>Proposition</u> : Soit T un opérateur régulier spectral sur X, μ une résolution spectrale de $\mathbb{C}$, on a :

$$X_s = \mu(s)X = \{x \in X \,/\, \sigma(x) \quad s\} \text{ , pour tout fermé s de } \mathbb{C}.$$

<u>Démonstration</u> : Un calcul simple montre que $x \in \mu(s)X$ est équivalent à : $x = \mu(s)x$. Soit $x \in \mu(s)X$, pour tout $\lambda \in \rho(T_s) \cap \mathbb{C}$ on a $\tilde{x}(\lambda) = (\lambda - T_s)^{-1}x$, donc $\rho(T_s) \cap \mathbb{C} \subset \rho(x)$ ou $\sigma(x) \subset \sigma(T_s) \subset s$. Réciproquement soit x un élément de X vérifiant $\sigma(x) \subset s$; montrons que $\mu(s)x = x$. Soit r un fermé contenu dans $\mathbb{C} - s$.

$$\mu(r)\tilde{x}(\lambda) = \widetilde{\mu(r)x}(\lambda) \text{ pour tout } \lambda \in \rho(x).$$

$$(\lambda - T_r)^{-1}\mu(r)x = \widetilde{\mu(r)x}(\lambda) \text{ pour tout } \lambda \in \rho(T_r) \cap \mathbb{C}.$$

On a donc : $\rho(\mu(r)x) \supset \rho(x) \cup (\rho(T_r) \cap \mathbb{C}) \supset r \cup \complement_{\mathbb{C}} r = \mathbb{C}$, et en passant aux complémentaires dans $\mathbb{C}$: $\sigma(\mu(r)x) = \emptyset$, ce qui entraîne : $\mu(r)x = o$ pour tout fermé r contenu dans $\mathbb{C} - s$. Un raisonnement déjà fait deux fois montre que $\mu(\mathbb{C}-s)x = o$, ou $x - \mu(s)x = o$.

(3.2.7) <u>Proposition</u> : Soit T un opérateur régulier spectral sur X. Soit R un opérateur commutant avec T ; alors R commute avec toute résolution spectrale de T.

<u>Démonstration</u> : il faut montrer que pour tout borélien s de $\mathbb{C}$: $\mu(s)R = R\mu(s)$. l'ensemble des boréliens satisfaisant à cette égalité étant une tribu, il suffit de montrer que pour tout fermé s de $\mathbb{C}$ on a l'égalité. Soit s un fermé, r un autre fermé contenu dans $\mathbb{C} - s$. Pour tout $x \in X$ et t fermé dans $\mathbb{C}$, on a : $\sigma(R\mu(t)x) \subset \sigma(\mu(t)x) \subset t$. Il vient : $\mu(t)R\mu(t)x = R\mu(t)x$ (proposition (3.2.6)). Cette égalité étant vraie pour tout $x \in X$, $\mu(t)R\mu(t) = R\mu(t)$ pour tout fermé t de $\mathbb{C}$. En particulier $\mu(r)R\mu(r) = R\mu(r)$ et en multipliant par $\mu(s)$: $\mu(s)R\mu(r) = \mu(s)\mu(r)R\mu(r) = o$. Ceci étant vrai pour tout fermé r de $\mathbb{C} - s$, $\mu(s)R\mu(\mathbb{C}-s) = o$ donc $\mu(s)R = R\mu(s)$.

(3.2.8) <u>Proposition</u> : Si T est un opérateur régulier spectral sur X, il existe une seule résolution spectrale de T.

Démonstration : Soient μ_1 et μ_2 deux résolutions spectrales de T. Pour tout fermé s de $\mathbb{C}$ et tout élément x de X : $\mu_2(s)x \in \mu_2(s)X$ donc $\sigma(\mu_2(s)x) \subset s$ d'après la proposition (3.2.6). $\mu_1(s)\mu_2(s)x = \mu_2(s)x$ puisque μ_1 est aussi une résolution spectrale de T. De même $\mu_2(s)\mu_1(s)x = \mu_1(s)x$. μ_2 commute avec T donc avec μ_1, par suite, pour tout $x \in X$ et tout fermé s de $\mathbb{C}$: $\mu_1(s)\mu_2(s)x = \mu_1(s)x = \mu_2(s)x$. Pour tout fermé s de $\mathbb{C}$, donc aussi pour tout borélien de $\mathbb{C}$: $\mu_1(s) = \mu_2(s)$.

§ 3. Caractérisation des opérateurs réguliers spectraux.

(3.3.2) Définition : Un opérateur régulier spectral S sur X est dit scalaire si $S = \int \lambda d\mu(\lambda)$ où μ est la résolution spectrale de S.

Exemple : Tout projecteur P sur X est un opérateur régulier spectral scalaire.

Démonstration : P est un opérateur régulier sur X et $\sigma(P) \subset \{o\} \cup \{1\}$ (proposition (1.3.9)). Soit μ la résolution spectrale équicontinue sur X concentrée aux points o, 1 et définie par :

$$\mu(\{o\}) = 1-P \ , \ \mu(\{1\}) = P.$$

L'opérateur P commute avec μ et :

$$\sigma(P/\mu(\{o\})X) = \sigma(P/(1-P)X) = \sigma(0/(1-P)X) = \{o\}.$$

$$\sigma(P/\mu(\{1\})X) = \sigma(P/P(X)) = \sigma(1/P(X)) = \{1\}.$$

P est un opérateur spectral de résolution spectrale μ, c'est de plus un opérateur spectral scalaire car $P = 1\mu(\{1\}) + o\mu(\{o\})$.

(3.3.3) Théorème : Soit T un opérateur régulier sur X. L'opérateur T est spectral si et seulement si T = S+N où S est un opérateur régulier spectral scalaire, N un opérateur quasi-nilpotent commutant avec S.

Démonstration :

1) Soient S un opérateur scalaire, N un opérateur quasi-nilpotant commutant avec S. Montrons que T = S+N est un opérateur régulier spectral. On a :

TS = (S+N)S = ST ; T commute avec S donc aussi avec la résolution spectrale μ de S.

Soient s un fermé de $\mathbb{C}$, A le bicommutant de la partie commutative décrite par S, N, I, $\mu(s)$.

La sous-algèbre A de L(X), munie de la bornologie induite, est une algèbre bornologique convexe complète commutative. Soit A^* la sous-algèbre des éléments réguliers de A. On a (proposition (2.5.7)) :

$$\sigma(T_s) = \{\chi(T) \ / \ \chi \text{ caractère de } A^*, \chi(\mu(s)) = 1\}.$$

$$\sigma(T_s) = \{\chi(S)+\chi(N) \ / \ \chi \text{ caractère de } A^*, \ \chi(\mu(s)) = 1\}.$$

$$\sigma(T_s) = \sigma(S_s) \subset s.$$

T est donc un opérateur régulier spectral, il admet μ pour résolution spectrale.

2) Réciproquement, soit T un opérateur régulier spectral sur X, μ sa résolution spectrale. On pose $S = \int \lambda d\mu(\lambda)$, N = T-S.

a) S est un opérateur régulier (remarque suivant le corollaire (3.2.2)).

b) S commute avec T, donc aussi avec N.

c) Montrons que N est quasi-nilpotent. Soit A le bicommutant de la partie commutative décrite par T, S, I, $\mu(s)$, s décrivant la tribu borélienne. A^* désigne la sous-algèbre des opérateurs réguliers de A. L'opérateur N est quasi-nilpotent si et seulement si $\chi(T) = \chi(S)$ pour tout caractère χ de A^*. Soit χ un caractère fixé de A^*. L'application $\chi_o\mu$ de l'algèbre $b_o(\mathbb{C})$ des boréliens du plan complexe dans {o,1} est additive. Prouvons qu'il existe un point $\lambda_o \in \mathbb{C}$ tel que pour tout voisinage borélien s de λ_o on ait $\chi_o\mu(s) = 1$. Raisonnons par l'absurde. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, soit $V(\lambda)$ un voisinage de λ tel que $\chi_o\mu(V(\lambda)) = o$. Soit $\{V(\lambda_i)\}_{1\leq i\leq n}$ un recouvrement disjoint, fini, du compact $\sigma(T)$. On a :

$$\chi_o\mu(\sigma(T)) = \left[\chi_o\mu(\sigma(T))\right]\left[\chi_o\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} V(\lambda_i)\right)\right] = o.$$

Ceci est absurde puisque $\chi_{\circ}\mu(\sigma(T)) = 1$.

On achève la démonstration de c) en prouvant que $\chi(S) = \chi(T) = \lambda_{\circ}$

* $\chi(T) = \lambda_{\circ}$: soit $s_n = \{\lambda \in \mathbb{C} \;/\; |\lambda-\lambda_{\circ}| \leq 1/n\}$, on a $\chi_{\circ}\mu(s_n) = 1$ d'après ce qui précède, d'où $\chi(T) \in \sigma(T_{s_n})$ (proposition (2.5.7)), puis $\chi(T) \in s_n$ (T est un opérateur régulier spectral), et enfin $\chi(T) = \lambda_{\circ}$.

* $\chi(S) = \lambda_{\circ}$ car :

$$\chi(S-\lambda_{\circ}) = \chi(S\mu(s_n) - \lambda_{\circ}\mu(s_n)) = \chi(\int_{s_n} (\lambda-\lambda_{\circ})d\mu(\lambda)) = 0.$$

En effet soit $R_n = \int_{s_n} (\lambda-\lambda_{\circ})d\mu(\lambda) = \mu((\lambda-\lambda_{\circ})1_{\sigma(T)\cap s_n})$.

$r(R_n) \leq ||(\lambda-\lambda_{\circ})1_{\sigma(T)\cap s_n}|| \leq \frac{1}{n}$ (corollaire (3.1.5)).

Pour χ caractère de A^{*} , $\chi(R_n) \in \sigma_A(R_n) = \sigma(R_n)$, donc $|\chi(R_n)| \leq r(R_n) \leq \frac{1}{n}$. La suite $\chi(R_n)$ tend vers o quand n tend vers l'infini et $\chi(S-\lambda_{\circ}) = 0$.

d) Montrons que S est un opérateur régulier, spectral, scalaire.

S commute avec T donc aussi avec μ (proposition (3.2.7)). Soit r un fermé de $\mathbb{C}$ et A le bicommutant de la partie commutative décrite par T, S, I, $\mu(r)$. A^{*} désigne la sous-algèbre des éléments réguliers de A. On a (proposition (2.5.7)) :

$$\sigma(S_r) = \{\chi(S) \;/\; \chi \text{ caractère de } A^{*} \text{ , } \chi(\mu(s)) = 1\}$$

$$\sigma(S_r) = \{\chi(T) \;/\; \chi \text{ caractère de } A^{*} \text{ , } \chi(\mu(s)) = 1\}$$

$$\sigma(S_r) = \sigma(T_r) \subset r.$$

<u>Remarque :</u> Si T est un opérateur régulier, spectral sur X, la décomposition de T obtenue dans le théorème (3.3.3) est unique et l'opérateur scalaire associé à T dans la décomposition a la même résolution spectrale que T.

Chapitre IV : OPERATEURS REGULIERS DECOMPOSABLES.

S'inspirant d'un article de BISHOP (2), FOIAS (8) introduit la notion d'espaces spectral maximal et définit une nouvelle classe d'opérateurs dans un espace de Banach : les opérateurs décomposables, qui généralisent les opérateurs spectraux de DUNFORD (6). Dans ce chapitre, nous reprenons la théorie des opérateurs décomposables dans un e.l.c. X séparé, quasi-complet. L'hypothèse de quasi-complétude (assurant la compacité de l'enveloppe disquée fermée d'un compact) permet de donner un sens à l'intégrale de Riemann d'une fonction continue à valeurs dans X définie sur une courbe fermée tracée dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, et suffisamment régulière (par exemple différentiable par morceaux). Dans tout ce chapitre X désigne un e.l.c. séparé, quasi-complet ; L(X) l'algèbre des opérateurs sur X munie de sa bornologie équicontinue.

§ 1. Espaces spectraux maximaux.

Notation : Soit Z un sous-espace vectoriel fermé de X, T un opérateur sur X. Si Z est un sous-espace stable par T, T/Z désigne la restriction de l'opérateur T à Z. Z étant fermé dans X est, pour la topologie induite, un e.l.c. séparé, quasi-complet. $\sigma(T/Z)$ désigne le spectre, défini au chapitre 2, de T/Z dans l'algèbre L(Z).

(4.1.1) Définition : Soit T un opérateur régulier sur X, Y un sous-espace de X.

Y est dit espace spectral maximal de T (en abrégé E.S.M.) si :

1) Y est un sous-espace fermé, stable par T.

2) Pour tout sous-espace fermé Z stable par T : $\sigma(T/Z) \subset \sigma(T/Y) \Rightarrow Z \subset Y$.

(4.1.2) Théorème : Soit T un opérateur régulier sur X, Y un E.S.M. de T, R un opérateur régulier sur X commutant avec T ; alors Y est stable par R.

Démonstration : R étant régulier, $\sigma(R)$ est compact dans $\mathbb{C}$. Soit $\lambda \in \rho(R)$, $(\lambda-R)Y$ est un sous-espace fermé de X car $(\lambda-R)^{-1}$ est une application continue ; il est invariant par T puisque T commute avec R. De plus $T/(\lambda-R)Y = (\lambda-R)(T/Y)(\lambda-R)^{-1}$ ce qui se vérifie sur chaque élément. On a : $\sigma(T/(\lambda-R)Y) = \sigma(T/Y)$. Y étant un E.S.M. de T on obtient $(\lambda-R)Y \subset Y$ c'est-à-dire $RY \subset Y$.

(4.1.3) Corollaire : Soit T un opérateur régulier sur X, Y un E.S.M. de T ; alors : $\sigma(T/Y) \subset \sigma(T)$. En particulier T/Y est un opérateur régulier sur Y.

Démonstration : Soit $\lambda_o \notin \sigma(T)$, V un voisinage ouvert de λ_o "convenable" pour T. Si $\lambda \in V$, $(\lambda-T)^{-1}$ est un opérateur régulier (proposition (1.3.4)) qui commute avec T. Le théorème (3.1.2) assure que $(\lambda-T)^{-1}Y \subset Y$ donc $(\lambda-T/Y)^{-1} = (\lambda-T)^{-1}/Y$; V est alors un voisinage ouvert de λ_o "convenable" pour T/Y et $\lambda_o \in \rho(T/Y)$.

(4.1.4) Corollaire : Soit T un opérateur régulier sur X ; Y_1 et Y_2 deux E.S.M. de T. On a :

$$\sigma(T/Y_1) \subset \sigma(T/Y_2) \Longleftrightarrow Y_1 \subset Y_2.$$

Démonstration : Si $\sigma(T/Y_1) \subset \sigma(T/Y_2)$, Y_2 étant un E.S.M. de T, $Y_1 \subset Y_2$. Réciproquement, si $Y_1 \subset Y_2$, Y_1 est un E.S.M. de T/Y_2 ; d'après le corollaire (4.1.3) on a : $\sigma(T/Y_1) \subset \sigma(T/Y_2)$.

(4.1.5) Théorème : soient T un opérateur régulier sur X, Y un E.S.M. de T, f une fonction analytique définie sur un ouvert connexe D_f du plan complexe à valeurs dans X. On suppose $f \not\equiv o$.

on a :

$$(\lambda-T)f(\lambda) \in o \Rightarrow (D_f \cap \sigma(T/Y) = \emptyset \text{ ou } D_f \subset \sigma(T/Y)).$$

<u>Démonstration</u> : Soit $A = \{\lambda \in D_f \ / \ f(\lambda),\ f'(\lambda), \dots, f^{(n)}(\lambda), \dots, \in Y\}$.

a) A est ouvert, car $f, f', \dots, f^{(n)}, \dots$ sont des fonctions développables en série.

b) A est fermé dans D_f car $A = \bigcap_{n>0} |f^{(n)}|^{-1}(Y)$.

c) Montrons que $D_f \cap \sigma(T/Y) \subset A$. On a :

(1) $Tf(\lambda) \equiv \lambda f(\lambda)$ sur D_f d'où l'on déduit :

(2) $Tf^{(n)}(\lambda) = \lambda f^{(n)}(\lambda) + nf^{(n-1)}(\lambda)$.

Soit $\lambda_0 \in D_f \cap \sigma(T/Y)$ et $Y_n = ev(f(\lambda_0), \dots, f^{(n)}(\lambda_0))$ (sous-espace vectoriel de X engendré par ces vecteurs).

- Y_n est un sous-espace vectoriel de dimension finie donc complet, et par suite fermé.

- Y_n est stable par T d'après les formules (1) et (2).

- $\sigma(T/Y_n) \subset \{\lambda_0\}$. En effet, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda-\lambda_0)f(\lambda_0) = \lambda-T)f(\lambda_0)$ (formule(1)). Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq \lambda_0$, montrons que $(\lambda-T)$ est une application surjective de Y_n sur Y_n. La relation précédente montre déjà que $f(\lambda_0) \in (\lambda-T)Y_n$. Supposons alors que $f^{(i)}(\lambda_0) \in (\lambda-T)Y_n$, et montrons que $f^{(i+1)}(\lambda_0) \in (\lambda-T)Y_n$ pour $o<i<n$. On peut écrire en utilisant les formules (1) et (2) :

$$(\lambda-\lambda_0)f^{(i+1)}(\lambda_0) = \lambda f^{(i+1)}(\lambda_0) - (i+1)f^{(i)}(\lambda_0) - Tf^{(i+1)}(\lambda_0)$$
$$(\lambda-\lambda_0)f^{(i+1)}(\lambda_0) = (\lambda-T)f^{(i+1)}(\lambda_0) - (i+1)f^{(i)}(\lambda_0).$$

Ceci montre que $f^{(i+1)}(\lambda_0) \in (\lambda-T)Y_n$. Y_n étant de dimension finie est un espace de Banach, $\sigma(T/Y_n)$ est le spectre de T/Y_n au sens habituel dans les espaces de Banach. Enfin $(\lambda-T)$, qui est surjective, est aussi un isomorphisme, car Y_n est de dimension finie, donc $\lambda \in \rho(T/Y_n)$, ce qui prouve bien : $\sigma(T/Y_n) \subset \{\lambda_0\}$.

$-\sigma(T/Y_n) \subset \sigma(T/Y)$ car $\lambda_o \notin \sigma(T/Y)$.

- Y étant un E.S.M. de T, de ce qui précède on conclut $Y_n \subset Y$, donc $f^{(n)}(\lambda_o) \in Y$ pour tout entier n, ce qui démontre entièrement c).

d) Montrons que $A \subset D_f \cap \sigma(T/Y)$. Si $\lambda \in A$, les vecteurs $f^{(n)}(\lambda)$ ne sont pas tous nuls ($f \neq o$ et D_f connexe). Soit p le plus petit entier positif ou nul tel que $f^{(p)}(\lambda) \neq o$.

Si $p=o$, $Tf(\lambda) = \lambda f(\lambda)$ (formule (1)).

Si $p \geqslant 1$, $Tf^{(p)}(\lambda) = \lambda f^{(p)}(\lambda)$ (formule (2)).

$f^{(p)}(\lambda)$ est un vecteur propre non nul de T/Y relativement à la valeur propre λ donc $\lambda \in D_f \cap \sigma(T/Y)$.

e) Conclusion : A est ouvert et fermé dans D_f, on a donc :

$$A = D_f \cap \sigma(T/Y) = \emptyset \text{ ou } A = D_f \cap \sigma(T/Y) = D_f.$$

§ 2. Opérateurs réguliers décomposables.

(4.2.1) Définition : Un opérateur régulier T sur X est dit décomposable si pour tout recouvrement ouvert, fini, $(G_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de $\sigma(T)$ il existe un système $(Y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'E.S.M. de T tels que :

1) $\sigma(T/Y_i) \subset G_i$ pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

2) Tout $x \in X$ admet une décomposition $x = \sum_{i=1}^{n} y_i$ où $y_i \in Y_i$ pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

(4.2.2) Proposition ; Soit T un opérateur régulier spectral de résolution spectrale μ.

1) Pour tout fermé s de $\mathbb{C}$, $X_s = \mu(s)X$ est un E.S.M. de T.

2) T est un opérateur régulier décomposable.

Démonstration :

1) Soit s un fermé du plan complexe $\mathbb{C}$. On sait déjà que X_s est un sous-espace vectoriel fermé, stable par T. Soit Z un sous-espace fermé de X stable par T,

tel que :

$$\sigma(T/Z) \subset \sigma(T/\mu(s)X) = \sigma(T_s).$$

On a vu (proposition (3.2.6)) que $X_s = \{x \in X/\sigma(x) \subset s\}$. Si z Z, on a $\sigma(z) \subset \sigma(T/Z) \subset \sigma(T_s) \subset s$, donc $z \in X_s$ et $Z \subset X_s$. Ce qui précède montre que X_s est un E.S.M. de T.

2) Soit $(G_i)_{1 \leq i \leq n}$ un recouvrement ouvert fini du spectre $\sigma(T)$.

On sait (Bourbaki, topologie générale, chap. IX, 2e éd. p. 87, th;3) qu'il existe un recouvrement ouvert $(\omega_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\sigma(T)$ tel que $\overline{\omega}_i \subset G_i$ pour tout i. Posons $s_1 = \omega_1$ et $s_i = \omega_i - \bigcup_{j<i} \omega_j$ pour $1 < i \leq n$. On obtient ainsi un recouvrement borélien disjoint, fini (s_i) de $\sigma(T)$.

Les sous-espaces $\mu(\overline{s}_i)X$ sont des E.S.M. de T, de plus :

$$\sigma(T_{\overline{s}_i}) \subset \overline{s}_i \subset \overline{\omega}_i \subset G_i$$

$$1 = \mu(1_{\sigma(T)}) = \sum_{i=1}^{n} \mu(\overline{s}_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(\overline{s}_i)\mu(\overline{s}_i)$$

Ceci montre que T est un opérateur décomposable.

(4.2.3) Proposition : Soit T un opérateur régulier décomposable sur X.

Si G est un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $G \cap \sigma(T) \neq \emptyset$, il existe un E.S.M. Y de T tel que :

$$Y \neq o, \ \sigma(T/Y) \subset G \cap \sigma(T).$$

Démonstration : Soient $G_1 = G$ et G_2 deux ouverts de $\mathbb{C}$ couvrant $\sigma(T)$, Y_1 et Y_2 les E.S.M. de T correspondant à ce recouvrement. $\sigma(T/Y_1) \subset G_1$ et $Y_1 \neq o$ sinon $Y_1 = \{o\}$, $X = Y_2$, mais alors $\sigma(T) = \sigma(T/Y_2) \subset G_2$ ce qui est absurde.

(4.2.4) Théorème : Un opérateur régulier décomposable T sur X possède la propriété d'unique extension.

Démonstration : Rappelons qu'un opérateur T possède la propriété d'unique extension si pour toute fonction analytique f définie sur un ouvert D_f du plan complexe à valeurs dans X et vérifiant : $(\lambda-T)f(\lambda) \equiv o$ on a $f(\lambda) \equiv o$.

On peut supposer D_f ouvert connexe car D_f est de toute façon localement connexe. Soit f une telle fonction. Raisonnons par l'absurde. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f(\lambda) \neq o$ et $(\lambda-T)f(\lambda) = o$. $\lambda \notin \sigma(T)$ et par suite $D_f \cap \sigma(T) \neq \emptyset$, donc (proposition (3.2.3)) il existe un E.S.M. Y de T tel que $Y \neq o$ et $\sigma(T/Y) \subset D_f$. Montrons que cela entraîne $\sigma(T/Y) = \emptyset$ ce qui est absurde puisque $Y \neq o$. D'après le théorème (3.1.5) deux cas sont possibles :

- ou $D_f \subset \sigma(T/Y)$ mais alors $\sigma(T/Y) = D_f$ et $\sigma(T/Y)$ est compact-ouvert dans $\mathbb{C}$ donc vide.
- ou $\sigma(T/Y) \cap D_f = \emptyset$ mais alors $\sigma(T/Y)$ est vide.

Notation : Soit $x \in X$, T un opérateur possèdant la propriété d'unique extension. On pose $D_T(x) = \overrightarrow{ev}(\tilde{x}^T(\lambda) \ / \ \lambda \in \rho_T(x))$ (sous-espace vectoriel fermé de X engendré par les vecteurs $\tilde{x}^T(\lambda)$ quand λ parcourt $\rho_T(x)$).

(4.2.5) Proposition : Soient T un opérateur régulier décomposable sur X, Y un E.S.M. de T. Si $x \in Y$ alors $D_T(x) \subset Y$.

Démonstrationù:

1) Fixons $x \in Y$. La fonction $h : \lambda \longrightarrow (\lambda-T/Y)^{-1}x$, définie sur $\rho(T/Y)$ à valeurs dans Y, est analytique. De plus :

$$(\lambda-T)h(\lambda) \equiv (\lambda-T/Y)h(\lambda) \equiv x.$$

Puisque T possède la propriété d'unique extension on a :

$$\rho(T/Y) \subset \rho(x) \quad \text{et} \quad x(\lambda) = h(\lambda) \in Y \text{ pour tout } \lambda \in \rho\ T/Y).$$

2) Il reste à prouver que $\tilde{x}(\lambda) \in Y$ pour $\lambda \in \rho(x) \cap \sigma(T/Y)$. Fixons un tel λ et raisonnons par l'absurde en supposant $\tilde{x}(\lambda) \notin Y$. Posons pour simplifier $z_o = \tilde{x}(\lambda)$ et $Z = Y \oplus \mathbb{C}z_o$. Z est la somme d'un sous-espace fermé Y et d'un sous-espace de dimension finie, c'est donc un sous-espace vectoriel fermé de X. De plus, Z est une somme directe topologique de Y et $\mathbb{C}z_o$. Z est stable par T car $TY \subset Y$ et $Tz_o = \lambda z_o - x \in Z$.

L'absurdité cherchée sera obtenue en montrant $Z \subset Y$. Comme Y est un E.S.M. de T, il suffit de prouver l'inclusion $\rho(T/Y) \subset \rho(T/Z)$.

Soit ω un ouvert relativement compact de $\rho(T/Y)$, "convenable" pour T/Y. Il s'agit de prouver que ω est "convenable" pour T/Z. Pour faciliter les calculs utilisons une représentation "matricielle" en identifiant T/Z à la "matrice-blocs". :

$$T/Z : \left[\begin{array}{c|c} T/Y & -x \\ \hline 0 & \lambda \end{array}\right]$$

puisque $(T/Z)/Y = T/Y$ et $Tz_o = -x + \lambda z_o$.

our $\eta \in \omega$ on a :

$$\eta - T/Z : \left[\begin{array}{c|c} \eta-T/Y & x \\ \hline 0 & \eta-\lambda \end{array}\right]$$

$\eta-T/Y$ est inversible dans $L(Y)$, et $\lambda \notin \bar{\omega}$ (car $\lambda \in \sigma(T/Y)$).

On voit alors aisément que $\eta-T/Z$ est inversible dans $L(Z)$ et que :

$$(\eta-T/Z)^{-1} : \left[\begin{array}{c|c} (\eta-T/Y)^{-1} & -\dfrac{(\eta-T/Y)^{-1}x}{\eta - \lambda} \\ \hline 0 & \dfrac{1}{\eta-\lambda} \end{array}\right]$$

La famille $((\eta-T/Y)^{-1})_{\eta\in\omega}$ est équicontinue dans $L(Y)$; de plus $\sup_{\eta\in\omega} \left|\frac{1}{\eta-\lambda}\right| < \infty$ et $\left(\frac{(\eta-T/Y)^{-1}x}{\eta-\lambda}\right)_{\eta\in\omega}$ est bornée dans Y. Comme Z est la somme directe topologique de Y et de $\mathbb{C}\, z_0$, il en résulte facilement que la famille $((\eta-T/Z)^{-1})_{\eta\in\omega}$ est équicontinue dans $L(Z)$; ceci démontre bien que ω est "convenable" pour T/Z, et termine la démonstration.

§ 3. E.S.M. d'un opérateur régulier décomposable.

(4.3.1) Définition : Soit T un opérateur régulier décomposable sur X, F un fermé contenu dans $\sigma(T)$; on appelle $X_T(F)$ le sous-espace vectoriel de X défini par :

$$X_T(F) = \{x\in X \;/\; \sigma(x)\subset F\}.$$

(4.3.2) Proposition : Soit T un opérateur régulier, décomposable sur X. Soit F un fermé contenu dans $\sigma(T)$. On désigne par $\mathcal{T}_F$ l'ensemble des couples $\tau = (G,G')$ d'ouverts tels que :

1) $G\cup G' \supset \sigma(T)$.

2) $G\supset F$, $\bar{G}'\cap F = \emptyset$.

Désignons enfin par Y_τ , et Y'_τ des E.S.M. de T subordonnés au recouvrement G,G' de $\sigma(T)$. Alors :

$$X_T(F) = \bigcap_{\tau\in\mathcal{T}_F} Y_\tau \;.$$

Démonstration :

1) Soient $x\in X_T(F)$, $\tau\in\mathcal{T}_F$. On a $x = y_\tau + y'_\tau$ avec $y\in Y_\tau$ et $y'\in Y'_\tau$.
F étant compact, il existe un chemin Γ séparant F et G' tel que F soit à l'intérieur de Γ. Si $\lambda\in\Gamma$ on a d'une part $\lambda\notin F$, donc $\lambda\notin\sigma(x)$, d'autre part $\lambda\notin G'$, donc $\lambda\notin\sigma(T/Y'_\tau)$. De plus $y_\tau = x-y'_\tau$, par suite : $\rho(y_\tau)\supset\rho(x)\cap\rho(y'_\tau)$. Si $\lambda\in\Gamma$ on a :

$$\tilde{y}_\tau(\lambda) = \tilde{x}(\lambda) - (\lambda-T/Y'_\tau)^{-1}y'_\tau \;.$$

En intégrant sur Γ il vient :

$$\frac{1}{2\Pi i}\int_{\Gamma} \tilde{y}_{\tau}(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\Pi i}\int_{\Gamma}\tilde{x}(\lambda)d\lambda - \frac{1}{2\Pi i}\int_{\Gamma}(\lambda-T/Y'_{\tau})^{-1}y'_{\tau}d\lambda.$$

Faisons alors les deux remarques suiventes :

a) $-\frac{1}{2\Pi i}\int_{\Gamma}(\lambda-T/Y'_{\tau})^{-1}y'_{\tau}d\lambda = o$ car $\sigma(T/Y'_{\tau})$ est à l'extérieur de Γ .

b) Soit Γ' un cercle entourant $\sigma(T)$; $\frac{1}{2\Pi i}\int_{\Gamma\cup\Gamma'}\tilde{x}(\lambda)d\lambda = o$ car le domaine compris entre Γ et Γ' est d'analycité.

Il vient : $\frac{1}{2\Pi i}\int_{\Gamma}\tilde{x}(\lambda)d\lambda = -\frac{1}{2\Pi i}\int_{\Gamma'}\tilde{x}(\lambda)d\lambda = -\frac{1}{2\Pi i}\int_{\Gamma'}(\lambda-T)^{-1}xd\lambda.$

Pour $\lambda\notin\sigma(T)$ on a :

$$(\lambda-T)^{-1} = \lambda^{-1}(1 + \lambda^{-1}T + \lambda^{-2}T^{2} + \dots)$$

où la série converge bornologiquement dans $L(X)$ (proposition (1.3.2)).

Il existe donc un disque complétant H tel que la série converge dans l'espace de Banach L_H. On a :

$$\frac{1}{2\Pi i}\int_{\Gamma'}(\lambda-T)^{-1}d\lambda = \frac{1}{2\Pi i}\int_{\Gamma'}\lambda^{-1}d\lambda = I$$

Il vient donc : $\frac{1}{2\Pi i}\int_{\Gamma}\tilde{x}(\lambda)d\lambda = x.$

La relation (1), compte tenu des remarques précédentes, devient :

$$x = \frac{1}{2\Pi i}\int_{\Gamma}\tilde{y}_{\tau}(\lambda)d\lambda.$$

Pour $\lambda\in\Gamma$, $\tilde{y}_{\tau}(\lambda)\in D_T(y_{\tau})$; $D_T(y_{\tau})$ est un sous-eapce fermé de X ; l'intégrale $\frac{1}{2\Pi i}\int_{\Gamma}\tilde{y}_{\tau}(\lambda)d\lambda$ étant une limite de sommes finies, on obtient $x\in D_T(y_{\tau})$. On sait (proposition (4.2.5)) que : $(y_{\tau}\in Y_{\tau}\Longrightarrow D_T(y_{\tau})\subset Y_{\tau})$ donc $x\in Y_{\tau}$, et $X_T(F)\subset\bigcap_{\tau\in T_F} Y_{\tau}$.

2) Réciproquement, soit $x\in\bigcap_{\tau\in T_F}Y_{\tau}$; $\sigma(x)\subset\sigma(T/Y_{\tau})\subset G$ pour tout ouvert $G\supset F$, par suite $\sigma(x)$ est contenu dans F et $x\in X_T(F)$.

(4.3.3) Proposition : Soit T un opérateur régulier, décomposable sur X.

Soit F un fermé contenu dans $\sigma(T)$. Alors :

1) $X_T(F)$ est un E.S.M. de T.

2) $\sigma(T/X_T(F)) \subset F$.

3) Pour tout E.S.M. Y de T : $Y = X_T(\sigma(T/Y))$.

Démonstration :

1) D'après la proposition (4.3.2), $X_T(F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de X, invariant par T (la dernière propriété étant d'ailleurs évidente).

2) Montrons que $\sigma(T/X_T(F)) \subset F$. Pour cela, posons pour simplifier $T_F = T/X_T(F)$. Fixons un point $\lambda \notin F$, et prouvons déjà que $(\lambda - T_F)$ est inversible dans $L(X_T(F))$, son inverse étant l'application R_λ définie par : $R_\lambda(x) = \tilde{x}(\lambda)$ pour tout $x \in X_T(F)$.

a) R_λ est définie sur $X_T(F)$ car $\sigma(x) \subset F$ lorsque $x \in X_T(F)$, donc $\lambda \in \rho(x)$ et $\tilde{x}(\lambda)$ a un sens.

b) Fixons $x \in X_T(F)$. Soit f la fonction analytique à valeurs dans X définie sur $\complement F$ par :

$$\begin{cases} f(\eta) = -\dfrac{\tilde{x}(\eta)-\tilde{x}(\lambda)}{\eta-\lambda} & \text{si } \eta \neq \lambda, \\ f(\lambda) = -\tilde{x}'(\lambda)\,. \end{cases}$$

Pour $\eta \neq \lambda$ on a :

$$(\eta - T)f(\eta) = \frac{-x}{\eta-\lambda} + \tilde{x}(\lambda) + \frac{x}{\eta-\lambda} = \tilde{x}(\lambda)\,.$$

L'égalité se prolonge lorsque η tend vers λ. Autrement dit $(\xi - T)f(\xi) = \tilde{x}(\lambda)$ pour tout $\xi \in \complement F$. Ceci prouve l'inclusion $\complement F \subset \rho(\tilde{x}(\lambda))$, donc $\sigma(\tilde{x}(\lambda)) \subset F$ et $\tilde{x}(\lambda) = R_\lambda(x) \in X_T(F)$.

On a donc : $R_\lambda(X_T(F)) \subset X_T(F)$.

c) R_λ est l'inverse (a priori non continu) de $(\lambda - T_F)$ car, pour $x \in X_T(F)$:

$$R_\lambda((\lambda - T_F)x) = \widetilde{((\lambda - T_F)x)}(\lambda) = (\lambda - T_F)\tilde{x}(\lambda) = (\lambda - T_F)R_\lambda(x) = x ,$$

donc $R_\lambda(\lambda - T_F) = (\lambda - T_F)R_\lambda = I.$

d) $R_\lambda \in L(X_T(F))$. En effet, soient (avec les notations de la proposition (4.3.2)) $\lambda \in F$ et $\tau \in T_F$ tel que $\lambda \notin G$. $\lambda \in \rho(T/Y_\tau)$ car $\sigma(T/Y_\tau) \subset G$.

Pour tout $x \in X_T(F)$ on a :

$$R_\lambda(x) = \tilde{x}(\lambda) = (\lambda - T/Y_\tau)^{-1}x ,$$

c'est-à-dire $R_\lambda = (\lambda - T/Y_\tau)^{-1}/X_T(F)$, donc $R_\lambda \in L(X_T(F))$.

Il reste encore à prouver que λ possède un voisinage ouvert V_λ "convenable" pour T_F. Pour cela utilisons d) ; puisque $\lambda \in \rho(T/Y_\tau)$ il existe un voisinage ouvert V_λ de λ "convenable" pour T/Y_τ que l'on peut supposer contenu dans $\complement F$. Pour $\eta \in V_\lambda$ on a : $R_\eta = (\eta - T/Y_\tau)^{-1}/X_T(F)$, donc V_λ est "convenable" pour T_F.

3) Soit Z un sous-espace fermé de X, stable par T, tel que $\sigma(T/Z) \subset \sigma(T_F)$.

Pour $z \in Z$, on a : $\sigma(z) \subset \sigma(T/Z) \subset \sigma(T_F) \subset F$, donc $z \in X_T(F)$ et $Z \subset X_T(F)$.

Ceci montre que $X_T(F)$ est un E.S.M. de T.

4) Si Y est un E.S.M. de T, montrons l'égalité : $Y = X_T(\sigma(T/Y))$.

Puisque $\sigma(T/Y)$ est un fermé de $\sigma(T)$ on peut poser :

$Z = X_T(\sigma(T/Y))$. On a déjà $Y \subset Z$ car $(x \in Y \Longrightarrow \sigma(x) \subset \sigma(T/Y))$. De plus $\sigma(T/Z) \subset \sigma(T/Y)$ donc $Z \subset Y$ puisque Y est un E.S.M. de T.

<u>Remarque</u> : Plus généralement, si F est un fermé quelconque de $\mathbb{C}$, on peut poser $X_T(F) = X_T(F \cap \sigma(T))$. On a encore :

$$x \in X_T(F) \Longleftrightarrow \sigma(x) \subset F$$

car de toute façon : $\sigma(x) \subset \sigma(T)$.

(4.3.4) <u>Corollaire</u> : Soit T un opérateur régulier, décomposable sur X.

L'intersection d'une famille quelconque d'E.S.M. de T est un E.S.M. de T.

Démonstration : Soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'E.S.M. de T ; on a :

$$\bigcap_{i\in I} Y_i = \bigcap_{i\in I} X_T(\sigma(T/Y_i)) = X_T(\bigcap_{i\in I}\sigma(T/Y_i)).$$

La proposition (4.3.3) fournit également la caractérisation d'un E.S.M. d'un opérateur régulier spectral selon :

(4.3.5) Corollaire : Soit T un opérateur régulier spectral sur X de résolution spectrale μ. Si Y est un E.S.M; de T on a :

$$Y = X_T(\sigma(T/Y)) = \mu(\sigma(T/Y))X.$$

Il y a identité entre l'ensemble des E.S.M. de T et celui des sous-espaces $\mu(s)X$ de X, où s est un fermé de $\mathbb{C}$.

Démonstration : T est un opérateur régulier, décomposable (proposition (4.2.2)), donc $Y = X_T(\sigma(T/Y))$. De plus (proposition (3.2.6)), on a : $\mu(\sigma(T/Y))X = X_T(\sigma(T/Y))$. Réciproquement : si s est un fermé de $\mathbb{C}$, on sait (proposition (4.2.2)) que $\mu(s)X$ est un E.S.M. de T.

§ IV. Fermés spectraux d'un opérateur régulier décomposable.

Soit T un opérateur régulier décomposable. Pour tout fermé $F \subset \sigma(T)$ on a $\sigma(T/X_T(F)) = \sigma(T_F) \subset F$ (proposition (4.3.3)). On introduit alors la définition :

(4.4.1) Définition : Soient T un opérateur régulier décomposable, F un fermé contenu dans $\sigma(T)$. On dit que F est un fermé spectral de T si: $F = \sigma(T_F)$.

Remarque : les fermés spectraux d'un opérateur régulier décomposable sont exactement les ensembles $\sigma(T/Y)$ où Y est un E.S.M. de T. En particulier $\sigma(T)$ et $\emptyset$ sont des fermés spectraux.

(4.4.2) Proposition : Soit T un opérateur régulier décomposable. Tout fermé F de $\sigma(T)$ contient un plus grand fermé spectral $\tilde{F} = \sigma(T_F)$; de plus $X_T(\tilde{F}) = X_T(F)$.

<u>Démonstration</u> : $\tilde{F} = \sigma(T_{\tilde{F}})$ est un fermé spectral contenu dans F. Soit $\sigma(T/Y)$ un fermé spectral contenu dans F ; il faut montrer $\sigma(T/Y) \subset \tilde{F}$. Puisque $\sigma(T/Y) \subset F$ on a : $Y = X_T(\sigma(T/Y)) \subset X_T(F)$ donc $\sigma(T/Y) \subset \sigma(T_F) = \tilde{F}$ (corollaire (4.1.4)). On a de plus les équivalences suivantes : $x \in X_T(F) \Longleftrightarrow [\sigma(x) \subset \sigma(T_F) = \tilde{F} \subset F] \Longleftrightarrow x \in X_T(\tilde{F})$.

(4.4.3) <u>Proposition</u> : Soit T un opérateur régulier décomposable sur X. Soit F un fermé de $\sigma(T)$. On désigne par $\mathring{F}$ l'intérieur de F dans $\sigma(T)$. On a :

$$\bar{\mathring{F}} \subset \tilde{F} \subset F.$$

<u>Démonstration</u> : Soit $\lambda \in \bar{\mathring{F}}$; pour tout voisinage ouvert $V(\lambda)$ de λ dans $\sigma(T)$, l'ensemble $V(\lambda) \cap \mathring{F}$ est un ouvert non vide de $\sigma(T)$. Il existe (proposition (4.2.3)) un fermé spectral $F_V \neq \emptyset$ tel que $F_V \subset V(\lambda) \cap \mathring{F}$. On a $F_V \subset \mathring{F} \subset F$ donc $F_V \subset \tilde{F}$ et par suite $F_V \subset V(\lambda) \cap \tilde{F}$ donc $\lambda \in \bar{\tilde{F}} = \tilde{F}$.

(4.4.4) <u>Corollaire</u> : Soient T un opérateur régulier décomposable, F un fermé de $\sigma(T)$ tel que $F = \bar{\mathring{F}}$; alors F est un fermé spectral. En particulier tout of de $\sigma(T)$ est un fermé spectral.

(4.4.5) <u>Corollaire</u> : Soit T un opérateur régulier décomposable. Soit F un fermé contenu dans $\sigma(T)$. L'intérieur dans $\sigma(T)$ de $F-\tilde{F}$ est vide.

§ V. <u>Opérateurs réguliers décomposables et opérateurs quasi-nilpotents.</u>

Nous généralisons dans ce paragraphe le théorème (3.3.3) qui caractérise les opérateurs spectraux.

(4.5.1) <u>Théorème</u> : Soit T un opérateur régulier décomposable ; soit Q un opérateur quasi-nilpotent commutant avec T ; alors T+Q est un opérateur régulier décomposable et pour tout fermé F de $\mathbb{C}$ on a :

$$X_T(F) = X_{T+Q}(F).$$

<u>Lemme 1</u> : Dans les conditions du théorème (4.5.1), T+Q possède la propriété d'unique extension.

Démonstration : Soit f une fonction analytique définie sur un ouvert connexe D_f du plan complexe à valeurs dans X et vérifiant : $(\lambda-T-Q)f(\lambda) \equiv o$ sur D_f. Soit $\lambda_o \in D_f$, montrons que $\sigma_T(f(\lambda_o)) = \emptyset$, on pourra alors appliquer la proposition (3.2.5) qui n'utilise en réalité que la propriété d'unique extension de T, et en conclure $f(\lambda_o) = o$ ce qui démontrera le lemme.

Déjà pour $\lambda \in D_f$, $\sigma_T(f(\lambda)) \subset \{\lambda\}$; en effet, pour $\eta \neq \lambda$ on a :

$(\eta-\lambda+Q)f(\lambda) = (\eta-T)f(\lambda) - (\lambda-T-Q)f(\lambda) = (\eta-T)f(\lambda)$;

donc $f(\lambda) = (\eta-T)(\eta-\lambda+Q)^{-1}f(\lambda)$, ce qui démontre l'inclusion :

$\rho_T(f(\lambda)) \supset \mathbb{C}-\{\lambda\}$. D'autre part, f étant analytique, si r est un nombre réel tel que $\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} \;/\; |\lambda-\lambda_o| = r\} \subset D_f$ on a :

$$f(\lambda_o) = \frac{1}{2\Pi i}\int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda-\lambda_o}\, d\lambda .$$

On sait que $\sigma_T(\frac{f(\lambda)}{\lambda-\lambda_o}) \subset \Gamma$ d'après ce qui précède, donc $\frac{f(\lambda)}{\lambda-\lambda_o} \in X_T(\Gamma)$. $f(\lambda_o)$ étant la limite d'une somme finie d'éléments de $X_T(\Gamma)$, on a : $f(\lambda_o) \in X_T(\Gamma)$. Il vient : $\sigma_T(f(\lambda_o)) \subset \{\lambda_o\} \cap \Gamma = \emptyset$.

Lemme 2 : Dans les conditions du théorème (4.5.1), pour $x \in X$ on a :

$$\sigma_{T+Q}(x) \subset \sigma_T(x).$$

Démonstration : Fixons $\lambda \in \sigma_T(x)$; soit $\tau = (G;G') \in \mathcal{T}_{\sigma_T(x)}$ tel que $\lambda \notin G$. On sait (proposition (4.3.2)) que $X_T(\sigma_T(x)) \subset Y_\tau$.

Montrons l'égalité :

$$x = (\lambda-T-Q)(1-Q/Y_\tau(\lambda-T/Y_\tau)^{-1})^{-1}\tilde{x}(\lambda).$$

a) $(\lambda-T/Y_\tau)^{-1}$ existe car $\sigma(T/Y_\tau) \subset G$ et $\lambda \notin G$; d'autre part Q étant un opérateur quasi-nilpotent il en est de même de Q/Y_τ et de $Q/Y_\tau(\lambda-T/Y_\tau)^{-1}$ (proposition (2.5.3)). Ceci montre que :

$(1-Q/Y_\tau(\lambda-T/Y_\tau)^{-1})^{-1}$ existe. Enfin, $\tilde{x}(\lambda) \in D_T(x)$, mais $x \in X_T(\sigma_T(x)) \subset Y_\tau$ donc $D_T(x) \subset Y_\tau$ et $\tilde{x}(\lambda) \in Y_\tau$.

b) La formule ayant un sens, il reste à la vérifier :

$$(\lambda-T-Q)(1-Q/Y_\tau(\lambda-T/Y_\tau)^{-1})^{-1}\tilde{x}(\lambda) = (\lambda-T-Q)(\lambda-T/Y_\tau)(\lambda-T/Y_\tau-Q/Y_\tau)^{-1}\tilde{x}(\lambda)$$
$$= (\lambda-T/Y_\tau-Q/Y_\tau)(\lambda-T/Y_\tau)(\lambda-T/Y_\tau-Q/Y_\tau)^{-1}\tilde{x}(\lambda) = x.$$

Ceci montre $\lambda\notin\sigma_{T+Q}(x)$ et prouve le lemme 2.

<u>lemme 3</u> : Dans les conditions du théorème (4.5.1), pour $x\in X$ on a :

$$D_{T+Q}(x)\subset X_T(\sigma_T(x)).$$

<u>Démonstration</u> : On doit montrer que pour tout $\lambda_o\in\rho_{T+Q}(x)$ on a : $\tilde{x}^{T+Q}(\lambda_o)\in X_T(\sigma_T(x))$, c'est-à-dire $\sigma_T(\tilde{x}^{T+Q}(\lambda_o))\subset\sigma_T(x)$. Soit $\lambda\notin\sigma_T(x)$ et $\lambda\neq\lambda_o$ alors $\lambda\notin\sigma_{T+Q}(x)$ (lemme 2) et :

$$\tilde{x}^{T+Q}(\lambda_o) = (1+(\lambda_o-Q-T)(\lambda-\lambda_o+Q)^{-1})\tilde{x}^{T+Q}(\lambda_o)-(\lambda-\lambda_o+Q)^{-1}x$$
$$\tilde{x}^{T+Q}(\lambda_o) = (\lambda-\lambda_o+Q)^{-1}(\lambda-\lambda_o+Q+\lambda_o-Q-T)(\tilde{x}^{T+Q}(\lambda_o)-\tilde{x}^T(\lambda))$$
$$\tilde{x}^{T+Q}(\lambda_o) = (\lambda-T)(\lambda-\lambda_o+Q)^{-1}(\tilde{x}^{T+Q}(\lambda_o)-\tilde{x}^T(\lambda)).$$

Cette dernière formule prouve que $\lambda\notin\sigma_T(\tilde{x}^{T+Q}(\lambda_o))$ et par suite que :

$$\sigma_T(\tilde{x}^{T+Q}(\lambda_o))\subset\sigma_T(x)\cup\{\lambda_o\}.$$

Soit Γ un cercle centré en λ_o, contenu dans $\rho_{T+Q}(x)$ on a :

$$\tilde{x}^{T+Q}(\lambda_o) = \frac{1}{2\Pi i}\int_\Gamma \frac{\tilde{x}^{T+Q}(\lambda)}{\lambda-\lambda_o}\, d\lambda \in X_T(\Gamma\cup\sigma_T(x)).$$

Ceci prouve $\sigma_T(\tilde{x}^{T+Q}(\lambda_o))\subset(\sigma_T(x)\cup\Gamma)\cap(\sigma_T(x)\cup\{\lambda_o\})\subset\sigma_T(x)$ et $\tilde{x}^{T+Q}(\lambda_o)\in X_T(\sigma_T(x))$.

<u>Lemme 4</u> : Dans les conditions du théorème (4.5.1), pour $x\in X$ on a :

$$\sigma_{T+Q}(x) = \sigma_T(x).$$

<u>Démonstration</u> : Soient $\lambda_o\notin\sigma_{T+Q}(x)$ et $F = \{\lambda\in\mathbb{C} \;/\; |\lambda-\lambda_o| \leq r\}\subset\rho_{T+Q}(x)$, $G_1 = \{\lambda\in\mathbb{C} \;/\; |\lambda-\lambda_o| < \frac{2r}{3}\}$, $G_2 = \{\lambda\in\mathbb{C} \;/\; |\lambda-\lambda_o| > \frac{r}{3}\}$. Les ouverts G_1 et G_2 forment un recouvrement de $\sigma(T)$. Soient Y_1 et Y_2 les E.S.M. de T subordonnés à G_1 et G_2 dans ce recouvrement. Soient enfin $\Gamma = \{\lambda\in\mathbb{C} \;/\; |\lambda-\lambda_o| = \frac{2r}{3}\}$ et $x\in X$, $x = y_1 + y_2$ avec $y_1\in Y_1$, $y_2\in Y_2$. Pour $\lambda\in\Gamma$ on a $\lambda\in\rho(T/Y_1) = \rho((T+Q)/Y_1)$, $\lambda\in\rho_{T+Q}(x)$, donc $\rho(y_2)\supset\rho(T/Y_1)\cap\rho_{T+Q}(x)$ et, pour $\lambda\in\Gamma$:

$$\tilde{y}_2^{T+Q}(\lambda) = (\lambda-T/Y_1-Q/Y_1)^{-1}y_1 - \tilde{x}^{T+Q}(\lambda).$$

soit encore, en intégrant sur Γ les deux membres :

$$(1)\quad \frac{1}{2\Pi i}\int \tilde{y}_2^{T+Q}(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\Pi i}\int_\Gamma (\lambda-T/Y_1-Q/Y_1)^{-1}y_1 d\lambda - \frac{1}{2\Pi i}\int_\Gamma \tilde{x}^{T+Q}(\lambda)d\lambda.$$

De plus $-\frac{1}{2\Pi i}\int_\Gamma \tilde{x}^{T+Q}(\lambda)d\lambda = o$ et $\frac{1}{2\Pi i}\int_\Gamma (\lambda-T/Y_1-Q/Y_1)^{-1}y_1 d\lambda = y_1$.

La formule (1) peut alors s'écrire : $y_1 = \frac{1}{2\Pi i}\int_\Gamma \tilde{y}_2^{T+Q}(\lambda)d\lambda$; ceci montre que $y_1 \in D_{T+Q}(y_2)$. D'autre part, $y_2 \in D_{T+Q}(y_2)$ car pour le cercle Γ', centré à l'origine, de rayon égal à $r(T+Q)+1$ où $r(T+Q)$ est le rayon spectral de $T+Q$, on a : $y_2 = \frac{1}{2\Pi i}\int_{\Gamma'} (\lambda-T-Q)^{-1}y_2 d\lambda$.

Comme $x = y_1+y_2$, on a $x \in D_{T+Q}(y_2) \subset Y_2$; ceci montre que $\sigma_T(x) \subset G_2$ ou $\lambda_o \in \rho_T(x)$.

Démonstration du théorème (4.5.1) :

Pour tout fermé $F \subset \sigma(T)$, on a : $X_{T+Q}(F) = X_T(F)$ puisque $\sigma_{T+Q}(x) = \sigma_T(x)$ pour tout $x \in X$. Soit Y un E.S.M. de T, montrons que Y est un E.S.M. de T+Q. Les opérateurs T et Q commutent, donc Y est un sous-espace fermé de X stable par T+Q. Soit Z un sous-espace fermé de X stable par T+Q tel que : $\sigma((T+Q)/Z) \subset \sigma((T+Q)/Y)$. Si $z \in Z$, on a $\sigma_{T+Q}(z) \subset \sigma((T+Q)/Z) \subset \sigma((T+Q)/Y) = \sigma(T/Y)$; donc $z \in X_{T+Q}(\sigma(T/Y)) = X_T(\sigma(T/Y)) = Y$.

Soit $(G_i)_{1\leq i\leq n}$ un recouvrement ouvert de $\sigma(T+Q) = \sigma(T)$. Soit Y_i un E.S.M. de T correspondant à G_i pour ce recouvrement. Les sous-espaces Y_i sont des E.S.M. de T+Q vérifiant :

a) $\sigma((T+Q)/Y_i) = \sigma(T/Y_i) \subset G_i$

b) Tout $x \in X$ admet une décomposition $x = \sum_{i=1}^{n} y_i$, où $y_i \in Y_i$ pour tout i, $1\leq i\leq n$.

Ceci montre que T+Q est un opérateur régulier décomposable.

(4.5.2) Théorème : On suppose X tonnelé. Soient T_1 et T_2 deux opérateurs réguliers décomposables vérifiant :

1) T_1 et T_2 commutent.

2) Pour tout fermé F de $\mathbb{C}$: $X_{T_1}(F) = X_{T_2}(F)$.

Alors T_2-T_1 est un opérateur quasi-nilpotent.

Démonstration : Soit ε un réel positif ; soit $(G_i)_{1\leqslant i\leqslant n(\varepsilon)}$ un recouvrement fini du spectre de T_1 par des ouverts de diamètre plus petit que ε . Soit $(Y_i)_{1\leqslant i\leqslant n(\varepsilon)}$ le système d'E.S.M. de T_1 subordonné à ce recouvrement. Pour tout i : $\sigma(T_1/Y_i)\subset G_i$ et $Y_i = X_{T_2}(\sigma(T_1/Y_i)\cap\sigma(T_2))$ est un E.S.M. de T_2 , donc $\sigma(T_2/Y_i)\subset\sigma(T_1/Y_i)\cap\sigma(T_2)\subset G_i$. Puisque T_1 et T_2 commutent, on a :

$$\sigma((T_2-T_1)/Y_i) = \sigma(T_2/Y_i-T_1/Y_i)\subset\{\lambda-\eta\ /\ \lambda\in\sigma(T_1/Y_i),\ \eta\in\sigma(T_2/Y_i)\}$$
$$\subset\{\lambda-\eta\ /\ \lambda\in G_i\ ,\ \eta\in G_i\}\subset\{\lambda\in\mathbb{C}\ /\ |\lambda|<2\varepsilon\}.$$

Ceci montre que la suite $\left\{\left(\frac{(T_2-T_1)/Y_i}{2\varepsilon}\right)^n\right\}_{n\in N}$ est équicontinue, donc simplement bornée. La suite $\left\{\left(\frac{T_2-T_1}{2\varepsilon}\right)^n\right\}_{n\in N}$ est alors simplement bornée donc équicontinue puisque X est tonnelé. ε étant arbitraire, $\sigma(T_2-T_1) = \{o\}$ et T_2-T_1 est un opérateur quasi-nilpotent.

§ VI. Opérateurs fortement décomposables.

Afin d'éliminer l'hypothèse "tonnelé" intervenant dans le théorème (4.2.10) introduisons une nouvelle notion, légèrement plus restrictive que celle d'opérateur régulier décomposable.

(4.6.1) Définition : Un opérateur régulier sur X sera dit fortement décomposable si pour tout recouvrement ouvert, fini $(G_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ du spectre de T, il existe un système $(Y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'E.S.M. de T tel que :

1) $\sigma(T/Y_i)\subset G_i$ pour tout i, $1\leqslant i\leqslant n$.
2) Tout $x\in X$ admet une décomposition $x = \sum_{i=1}^{n} y_i$ où $y_i\in Y_i$ pour tout i.
3) La topologie de X est la topologie finale associée au système d'injections J_i de Y_i dans X.

<u>Remarque</u> : On a simplement rajouté à la défin ition d'un opérateur régulier décomposable la condition topologique 3). Tout opérateur régulier fortement décomposable sur X est évidemment décomposable.

FOIAS, dans (8) a, en réalité, introduit des opérateurs fortement décomposables.
En effet :

(4.6.2) <u>Proposition</u> : Tout opérateur régulier décomposable sur un espace de Fréchet (en particulier sur un espace de Banach) est fortement décomposable.

<u>Démonstration</u> : Soient $(G_i)_{1\leq i\leq n}$ un recouvrement ouvert de $\sigma(T)$, $(Y_i)_{1\leq i\leq n}$ un système d'E.S.M. de T subordonné à ce recouvrement. On note $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} Y_i$ la somme directe topologique des espaces Y_i. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
Y_i \arrow[r, "J_i"] \arrow[d, "\phi_i"'] & X \\
\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} Y_i \arrow[ur, "J"] \arrow[r, "\phi"'] & \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} Y_i/\mathrm{Ker}J \arrow[u, "\tilde{J}"']
\end{tikzcd}$$

X est un espace de Fréchet, donc aussi :

1) Y_i car Y_i est un sous-espace fermé de X.

2) $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} Y_i$ car $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} Y_i = \prod_{i=1}^{n} Y_i$.

3) $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} Y_i/\mathrm{Ker}J$ car KerJ est fermé puisque J est continue.

$\tilde{J}$ est une bijection continue entre espaces de Fréchet, c'est donc un isomorphisme topologique. $\bigoplus_{i=1}^{n} Y_i/\mathrm{Ker} f$ (resp. $\bigoplus_{i=1}^{n} Y_i$) est muni de la topologie finale associée au système d'applications ϕ_i (resp. à la surjection ϕ) donc, par transitivité, X est muni de la topologie finale associée au système d'injections J_i.

(4.6.3) Théorème : Soient X un e.l.c. séparé quasi-complet, T_1 un opérateur régulier fortement décomposable sur X, T_2 un opérateur régulier décomposable sur X. On suppose de plus que :

1) T_1 et T_2 commutent.

2) Pour tout fermé F de $\mathbb{C}$: $X_{T_1}(F) = X_{T_2}(F)$.

Alors T_2-T_1 est un opérateur quasi-nilpotent sur X.

Démonstration : Il suffit d'adapter la fin de la démonstration du théorème (4.5.2) ce qui ne présente aucune difficulté compte tenu du lemme suivant :

Lemme : Soit X un e.l.c., soient $(Y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un système de sous-e.l.c. , H une partie de L(X). On suppose que :

1) X est algèbriquement engendré par $\cup Y_i$.

2) La topologie de X est la topologie finale associée aux injections canoniques J_i de Y_i dans X.

3) Chaque Y_i est stable par H. On appelle H_i la partie de $L(Y_i)$ formée des restrictions à Y_i des fonctions de H.

Alors pour que H soit équicontinue dans L(X), il faut et il suffit que chaque H_i soit équicontinue dans $L(Y_i)$.

Démonstration : Si H est équicontinue dans L(X), il est évident que les parties H_i sont équicontinues dans $L(Y_i)$. Réciproquement soit V un voisinage disqué de O dans X ; il existe un voisinage V_i de O dans Y_i tel que $H_i(V_i)\subset V$ (condition 3)). On a $H(\Gamma(\cup V_i))\subset V$; mais $\Gamma(\cup V_i)$ est un voisinage de O dans X (condition 2)), donc H est une partie équicontinue de L(X).

(4.6.4) <u>Proposition</u> : Tout opérateur régulier spectral T sur X est fortement décomposable.

<u>Démonstration</u> : Pour tout recouvrement ouvert $(G_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\sigma(T)$, il existe (proposition (4.2.2)) une partition borélienne $(s_i)_{1\leq i\leq n}$ du spectre telle que : $\bar{s}_i \subset G_i$, $\sigma(T_{\bar{s}_i}) \subset \bar{s}_i$, $I = \sum_{i=1}^{n} \mu(\bar{s}_i)\, \mu(s_i)$. Posons $Z_i = \mu(s_i)X$; la difficulté de la démonstration provient du fait que Z_i n'est pas un E.S.M. de T, car il est clair que X est la somme directe topologique des sous-espaces Z_i. Posons $Y_i = \mu(\bar{s}_i)X$; il nous reste à montrer que la topologie de X est la topologie finale associée au système (J_i) d'injections canoniques de Y_i dans X. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
Z_i \arrow[r] \arrow[d] & Y_i \arrow[r, "J_i"] \arrow[d, "\phi_i"] & X \\
\bigoplus_{i=1}^{n} Z_i \arrow[r, "\psi"'] & \bigoplus_{i=1}^{n} Y_i \arrow[r, "\phi"'] \arrow[ur, "J"] & \bigoplus_{i=1}^{n} Y_i/\mathrm{Ker}J \arrow[u, "\tilde{J}"']
\end{tikzcd}$$

$\tilde{J}\circ\phi\circ\psi$ est un isomorphisme, $\tilde{J}$ une bijection continue dont la bijection réciproque $\tilde{J}^{-1} = \phi\circ\psi\circ(J\circ\phi\circ\psi)^{-1}$ est manifestement continue ; ceci démontre que X est muni de la topologie finale associée au système (J_i).

Les propositions précédentes nous donnent à penser que la notion introduite dans ce paragraphe est la bonne généralisation de la théorie des opérateurs décomposables de C.FOIAS. Une question reste toutefois ouverte : tout opérateur régulier décomposable sur un espace X quasi-complet est-il fortement décomposable ? Si la réponse, probablement négative, l'est vraiment, est-elle positive en rajoutant l'hypothèse "tonnelé" sur X ?

§ VII. Exemples d'opérateurs réguliers décomposables non spectraux.

Exemple I (X est un espace de Banach).

Soit $X = C([o;1])$ l'espace de Banach des fonctions complexes continues sur l'intervalle fermé $[o,1]$, muni de la topologie de la convergence uniforme. Soit T l'opérateur de multiplication par t défini sur X par $(Tx)(t) = tx(t)$ pour toute fonction $x \in X$.

(4.7.1) Proposition : T est un opérateur décomposable non spectral, nécessairement régulier puisque X est un espace de Banach.

Démonstration :

1) X étant un espace de Banach, le spectre de l'opérateur T est le spectre habituel dans les espaces de Banach.

a) Montrons que $\sigma(T) = [o,1]$.

Pour tout nombre complexe $\lambda \notin [o,1]$, $(\lambda - T)$ est inversible dans $L(X)$ et son inverse est défini par :

$[(\lambda-T)^{-1}x](t) = (\lambda-t)^{-1}x(t)$ pour tout $x \in X$. Ceci montre déjà que $\sigma(T) \subset [o,1]$.

Réciproquement, pour $\lambda \in \rho(T)$, $(\lambda-T)$ est inversible. Soit $x = (\lambda-T)^{-1}1$; alors $(\lambda-T)x = 1$, donc $(\lambda-t)x(t) = 1$ pour tout $t \in [o,1]$ et $\lambda \notin [o,1]$.

b) Soit F un fermé contenu dans $[o,1]$; posons

$$Y_F = \{x \in X \ / \ \mathrm{Supp}.x \subset F\}.$$

Y_F est un sous-espace vectoriel fermé de X, stable par T.

- Montrons que $\sigma(T/Y_F) \subset F$.

Soit $\lambda \notin F$; il suffit de prouver que $(\lambda - T/Y_F)$ est une application bijective (théorème de Baire-Banach). Soit $x \in Y_F$; si $(\lambda - T/Y_F)x = o$, on a $(\lambda-t)x(t) = o$ pour tout $t \in [o,1]$, donc

$x(t) = o$ pour $t \notin F$ car $\lambda \notin F$.

Comme Supp.$x \subset F$, $x(t) = o$ pour $t \in [o,1]$ et $x = o$.

Ceci montre dajà que $(\lambda - T/Y_F)$ est injectif.

Soient $x \in Y_F$, y la fonction définie sur $[o,1]$ par :

$$\begin{cases} y(t) = (\lambda - t)^{-1} x(t) & \text{si} \quad t \in F \\ y(t) = o & \text{si} \quad t \notin F. \end{cases}$$

Puisque Supp.$x \subset F$, il est clair que y est continue de sorte que $(\lambda - T/Y_F)$ est surjectif car $y \in Y_F$ (Supp.$y \subset F$).

- Montrons que Y_F est un E.S.M. de T. C'est évident si $F = \sigma(T) = [o,1]$; on peut donc supposer $F \neq [o,1]$.

Soit Z un sous-espace vectoriel fermé de X stable par T tel que $\sigma(T/Z) \subset \sigma(T/Y_F) \subset F$. Soit $x \in Z$; fixons $\lambda \in [o,1]$ et $\lambda \notin F$. Alors $\lambda \in \rho(T/Z)$ donc $(\lambda - T/Z)$ est en particulier surjectif ; d'où l'existence d'une fonction $z_\lambda \in Z$ telle que $(\lambda - T/Z)z_\lambda = x$ c'est-à-dire $[(\lambda - T/Z)z_\lambda](t) = x(t)$ pour tout $t \in [o,1]$. En particulier si $t = \lambda$ on obtient $x(\lambda) = o$ ce qui prouve l'inclusion Supp.$x \subset F$ d'où $x \in Y_F$ et $Z \subset Y_F$. Y_F est bien un E.S.M. de T.

c) Montrons enfin que T est un opérateur décomposable.

Soient $(G_i)_{1 \leq i \leq n}$ un recouvrement ouvert fini de $\sigma(T) = [o,1]$ dans $\mathbb{C}$, ω_i la trace de G_i sur $[o,1]$. Soit $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n}$ une partition continue de l'unité subordonnée au recouvrement $(\omega_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $[o,1]$. Le système $(Y_{\text{Supp.}\phi_i})_{1 \leq i \leq n}$ est un système fini d'E.S.M. tels que :

1) $\in (T/Y_{\text{Supp.}\phi_i}) \subset \text{Supp.}\phi_i \subset \omega_i \subset G_i$.

2) Pour $x \in X$ on a : $x = \sum_{i=1}^{n} \phi_i x$ avec $\phi_i x \in Y_{\text{Supp.}\phi_i}$

T est bien un opérateur régulier décomposable.

2) T n'est pas un opérateur spectral. En effet ; raisonnons par l'absurde en supposant T spectral de résolution spectrale μ. Pour un borélien s de $\mathbb{C}$ posons $y_s = \mu(s)1$; soit $e \in X$ la fonction : $t \to t$. Pour tout borélien s de $\mathbb{C}$ on a : $\mu(s)e = \mu(s)(T1) = Ty_s = ey_s$. De même pour tout entier $n>1$ on a : $\mu(s)e^n = \mu(s)(T^n 1) = T^n y_s = e^n y_s$. On a donc $\mu(s)P = Py_s$ pour tout polynôme $P \in X$, et par densité : $\mu(s)x = xy_s$ pour toute fonction $x \in X$. En particulier $y_s^2 = \mu(s)y_s = \mu(s)\mu(s)1 = y_s$.

De sorte que $\mu(s) = o$ ou $\mu(s) = 1$ (pour tout borélien s de C). De plus on sait que $\sigma(T_s) \subset s$ pour tout fermé s de $[o,1]$; or la condition $\mu(s) = 1$ implique $T_s = T$ et $\sigma(T_s) = [o,1]$ de sorte que nécessairement $\mu(s) = o$ pour tout fermé $s \subset [o,1]$ distinct de $[o,1]$ Ceci revient à dire encore $\mu(s) = o$ pour tout borélien s de $\mathbb{C}$ contenu dans $[o,1]$ tel que $\bar{s}$ soit différent de $[o,1]$. La contradiction est obtenue car $\sigma(T) = [o,1] = [o,1/2] \cup]1/2,1]$ et $\mu(\sigma(T)) = 1$.

<u>Les fermés spectraux de T</u> :

(4.7.2) <u>Proposition</u> : Soit $x \subset X$. Si $\overset{o}{F}$ désigne l'intérieur du fermé $F = \text{Supp}.x$ dans $\sigma(T) = [o,1]$, on a $\overline{\overset{o}{F}} = F$.

<u>Démonstration</u> : On a évidemment $\overline{\overset{o}{F}} \subset F$. Réciproquement si $t \in F$, c'est-à-dire si $t \in \text{Supp}.x$, pour tout intervalle de longueur 1/n centré en t, il existe un point $t_n \in [o,1]$ de cet intervalle tel que $x(t_n) \neq o$. Puisque x est continue, on a $t_n \in \overset{o}{F}$ donc $t \in \overline{\overset{o}{F}}$.

(4.7.3) <u>Proposition</u> : Soit $x \in X$; alors $\sigma(x) = \text{Supp}.x$.

<u>Démonstration</u> : On a déjà $\sigma(x) \subset \sigma(T/Y_{\text{Supp}.x}) \subset \text{Supp}.x$. Réciproquement, il existe une fonction analytique $\tilde{x}$ définie sur $\rho(x)$ à valeurs dans X telle que : $(\lambda-t)\tilde{x}(\lambda)(t) = x(t)$ pour tout $t \in [o,1]$ et tout $\lambda \in \rho(x)$. Ceci implique $x(\lambda) = o$ si $\lambda \in \rho(x) \cap [o,1]$ de sorte que la fonction x s'annule sur l'ouvert $\rho(x) \cap [o,1]$ de $[o,1]$ ce qui implique $\text{Supp}.x \subset \sigma(x)$.

(4.7.4) Proposition : Soient F un fermé de $\sigma(T)$, $\tilde{F}$ le plus grand fermé spectral contenu dans F, $\overset{\circ}{F}$ l'intérieur de F dans $\sigma(T)$. Alors $\tilde{F} = \overline{\overset{\circ}{F}}$.

Démonstration : pour $x \in X$, on a l'équivalence suivante, conséquence de la proposition (4.7.2) :

$$\mathrm{Supp}.x \subset F \Longleftrightarrow \mathrm{Supp}.x \subset \overline{\overset{\circ}{F}}$$

Ceci montre (proposition (4.7.5)) que : $X_T(F) = X_T(\overline{\overset{\circ}{F}})$; mais on sait (proposition (4.4.2)) que $X_T(F) = X_T(\tilde{F})$, donc :

$$\tilde{F} = \sigma(T/X_T(F)) = \sigma(T/X_T(\overline{\overset{\circ}{F}})) \subset \overline{\overset{\circ}{F}}$$

d'où on conclut $\tilde{F} = \overline{\overset{\circ}{F}}$ grâce à la proposition (4.4.3).

(4.7.5) Proposition : Soit F un fermé de $[0,1]$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) F est un fermé spectral de T

2) $\overline{\overset{\circ}{F}} = F$ ($\overset{\circ}{F}$ désigne l'intérieur de F dans $[0,1]$)

3) Il existe une fonction $x \in X$ telle que $F = \mathrm{Supp}x$

Démonstration : 1) $\Longrightarrow$ 2) car $F = \tilde{F} = \overline{\overset{\circ}{F}}$.

2) $\Longrightarrow$ 1) (corollaire (4.4.4))

3) $\Longrightarrow$ 2) (proposition (4.7.2))

2) $\Longrightarrow$ 3) soit $G = \overset{\circ}{F}$; $\complement G$ est un fermé de $[0,1]$, c'est donc un G_δ (car $[0,1]$ est métrisable). On sait alors qu'il existe une fonction $x \in X$ telle que $t \in \complement G \Longrightarrow x(t) = 0$; donc : $\mathrm{Supp}.x = \bar{G} = \bar{\overset{\circ}{F}} = F$.

Exemples II (X est maintenant un espace de Fréchet).

Soit $X = C(]0,1[)$ l'espace de Fréchet des fonctions complexes continues sur l'intervalle ouvert $]0,1[$, muni de la topologie de la convergence compacte sur $]0,1[$. Soit T l'opérateur de multiplication par t défini sur X par $(Tx)(t) = tx(t)$ pour toute fonction $x \in X$.

(4.7.6) Proposition : T est un opérateur régulier décomposable non spectral sur X.

Démonstration :

1) a) Montrons que $\sigma(T) = [o,1]$. Soit $\lambda_o \notin [o,1]$, V un voisinage ouvert de λ_o ne rencontrant pas $[o,1]$ Pour $\lambda \in V$, $(\lambda - T)$ est inversible et son inverse (continu car X est un espace de Fréchet) est défini par :
$[(\lambda - T)^{-1}x](t) = (\lambda - t)^{-1}x(t)$ pour tout $x \in X$.
La famille $H = \{(\lambda - T)^{-1}\}_{\lambda \in V}$ est équicontinue car elle est simplement bornée ; en effet pour $x \in X$ et pour K compact de $]o,1[$, Hx est bornée sur K. Ceci montre que $\lambda_o \in \rho(T)$. Réciproquement, pour $\lambda \in \rho(T)$, $(\lambda - T)$ est inversible. Soit $x = (\lambda - T)^{-1}1$; alors $(\lambda - T)x = 1$ donc $(\lambda - t)x(t) = 1$ pour tout $t \in [o,1]$ donc $\lambda \notin [o,1]$.

b) Pour couper court à toute ambiguïté précisons que pour toute $x \in X$, le support Suppx de x est un fermé de l'espace topologique $]o,1[$, mais Supp.x peut ne pas être fermé dans $[o,1]$. Dans ce cas on désignera par $\overline{\text{Supp.x}}$ l'adhérence dans $[o,1]$ de Supp.x ; de même on désignera par $\bar{F}$ l'adhérence dans $[o,1]$ d'un fermé F de l'espace $]o,1[$. Soit F un fermé de l'espace topologique $]o,1[$. Posons :
$Y_F = \{x \in X \ / \ \text{Supp.}x \subset F\}$. Y_F est un sous-espace vectoriel fermé de X, stable par T.

- Montrons que $\sigma(T/Y_F) \subset \bar{F}$. Soit $\lambda_o \notin \bar{F}$, V un voisinage ouvert de λ_o ne rencontrant pas $\bar{F}$. Pour $\lambda \in V$, $(\lambda - T/Y_F)$ est une application bijective donc un isomorphisme (théorème de Baire-Banach), dont l'inverse est l'opérateur défini pour $x \in X$ par :

$$\begin{cases} (\lambda - T/Y_F)^{-1}x(t) = (\lambda - t)^{-1}x(t) & \text{pour } t \in]o,1[\cap \complement V \\ (\lambda - T/Y_F)^{-1}x(t) = o & \text{pour } t \in]o,1[\cap V. \end{cases}$$

La justification est la même que dans l'exemple 1).

La famille $H_F = \left\{ (\lambda - T/Y_F)^{-1} \right\}_{\lambda \in V}$ est équicontinue dans $L(Y_F)$ car elle est simplement bornée. En effet pour tout $x \in Y_F$ et tout compact K de $]0,1[$, $H_F\, x$ est bornée sur $F \cap K$ et s'annule sur $\complement F \cap K$. Ceci montre $\lambda_0 \notin \rho(T/Y_F)$ et par suite $\sigma(T/Y_F) \subset \bar{F}$.

- Soit maintenant Z un sous-espace vectoriel fermé stable par T tel que : $\sigma(T/Z) \subset \sigma(T/Y_F) \subset \bar{F}$. Montrons $Z \subset Y$.

  Pour cela soit $z \in Z$; fixons $\lambda \in]0,1[$, $\lambda \notin F$. Alors $\lambda \notin \bar{F}$ (car $F \cap]0;1[= F$). On montre alors que Y_F est un E.S.M. de T comme dans l'exemple I.

c) Par un raisonnement analogue à celui de l'exemple I on démontre que T est un opérateur décomposable en remarquant toutefois que l'espace topologique $]0,1[$ isomorphe à R est normal.

2) Toujours par une démonstration analogue à celle de l'exemple I on démontre que T n'est pas un opérateur spectral.

Manuscrit remis en juillet 1968.

Jacques BERRUYER
Maître-assistant
Département de Mathématiques
43, bd du 11 novembre 1918
VILLEURBANNE

BIBLIOGRAPHIE

(1) C.APOSTOL : "Some properties of spectral maximal spaces and decomposables operators". Rew. Roumaine math. pures et appl., t.12, n° 5, 1967, p.607-610.

(2) E. BISHOP : "Spectral theory for operators on a Banach space". Trans. Amer. Math. Soc. 1957 (86) p. 414-445.

(3) H. BUCHWALTER : "Espaces vectoriels bornologiques ". Pub. Dép. Math. (Lyon) 1965, T.2-1.

(4) I.COLOJOARA-C.FOIAS : "The Riesz-Dunford functionnal calculus with decomposable operators". Rev. Roumaine math. pures - appl. 1967, t.12, n°5, p.627-641.

(5) H.R.DOWSON : "Restrictions of spectral operators". Proc. London Math. Soc. (3)15, 1965, p.437-457.

(6) N. DUNFORD : "Spectral operators". Pacific J. Math. 4 (1954), p.321-354.

(7) S.R.FOGUEL : "The relations between a spectral operaotr and it scalar part". Pacific J. Math. 8-1958,p.51-65.

(8) C.FOIAS : "Spectral maximal spaces and decompesable operators in Banach spaces". Arch. Math. (1963),14, 4-5.

(9) F.Y.MAEDA : "Spectral theory on locally convex spaces". Yale university, Ph.D., 1961.

(10) S.MAZUR : "Sur les anneaux linéaires". C.R. Paris. t.207, 1938,p.1025-1027.

(11) H.SCHAEFFER : "Spectral measures in locally convex algebras". Acta Math. 107 (1962), p.125-176.

(12) C.I. TULCEA : "Spectral operators on locally convex spaces". Bull. Amer. Math. Soc. t.67, (1961), p.125-128.

(13) 1. WAELBROECK : "Compacité et dualité en analyse linéaire". Pub. Dép. de Math. Lyon, 1965, t.2-1.

(13') L. WAELBROECK : "Locally convex algebras : spectral theory". Seminar on complex analysis. IAS, 1957-1958.

(13") L. WAELBROECK : "Differentiable mappings into b-spaces". J. of functional of analysis, t.1, n° 4, 1967.

(14) B. WALSH : "Structure of spectral measures on locally convex spaces". Trans. Amer. Math. Soc., 120, 1965, p.295-326.