PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

G. MAURY

Σ-compléments

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1968, tome 5, fascicule 1
, p. 37-62

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1968__5_1_37_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1968 T.5-1

Σ - COMPLEMENTS

par

G. MAURY

INTRODUCTION :

Nous introduisons et étudions dans cet article les notions de Σ- complément, de Σ- complément fort d'un module et la notion de module Σ- quasi-injectif. Les propriétés énoncées généralisent celles données pour les compléments d'un module par G. Renault dans sa thèse (1) (chapitres I et III). Outre la thèse (1), cet article utilise le mémoire (2) de Sanderson "a generalisation of divisibility and injectivity in modules". Les résultats des cinq premiers paragraphes sont résumés dans une note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences (3).

I. RAPPELS DES RESULTATS DE SANDERSON :

Définition 1 : Soit Σ un ensemble non vide d'idéaux à gauche d'un anneau A unitaire. Un A-module à gauche M sera dit Σ-injectif si et seulement si pour tout idéal $I \in \Sigma$, chaque A-homomorphisme de I dans M peut s'étendre à un A-homomorphisme de A dans M.

Remarque 1 : Tout A-module à g-injectif est Σ -injectif.

$$\begin{tikzcd} \forall I \in \Sigma \arrow[r] \arrow[d, "\forall f"'] & A \arrow[dl, dashed, "g"] \\ M & \end{tikzcd}$$

Définition 2 : Soit M un sous-module d'un A-module à gauche N, M est dit Σ -essentiel dans N (notation $M \underset{\Sigma}{\overset{\Delta}{\subset}} N$) si et seulement si pour chaque $x \neq 0$, $x \in N$, l'idéal à gauche $I_M(x) = \{a \mid a \in A, ax \in M\}$ appartient à Σ et $I_M(x)x \neq 0$

Remarque 2 : Chaque extension Σ-essentielle est une extension essentielle.

Théorème fondamental 1 (Sanderson) :

Supposons que Σ satisfasse aux trois conditions suivantes :

C 1 : Si $I \in \Sigma$ et si J est un idéal à gauche de A avec $J \supseteq I$ alors $J \in \Sigma$.

C 2 : Si $I \in \Sigma$ et $a \in A$, $Ia^{-1} = \{b \in A \mid ba \in I\} \in \Sigma$

C 3 : Si I est un idéal à gauche et si $J \in \Sigma$ et si $Ij^{-1} \in \Sigma \, \forall j \in J$, alors $I \in \Sigma$.

alors : a) la relation $\underset{\Sigma}{\triangleq}$ est transitive : $M \underset{\Sigma}{\triangleq} N \underset{\Sigma}{\triangleq} P \Longrightarrow M \underset{\Sigma}{\triangleq} P$

b) Soit M un A-module à gauche, il existe à un isomorphisme près, une unique extension N de M satisfaisant aux conditions équivalentes suivantes :

i) N est une extension Σ-essentielle maximale de M.

ii) N est une extension Σ-injective de M minimale.

iii) N est une extension Σ-essentielle, Σ-injective de M.

Définition 3 : L'extension N de M dont il est question au b) du théorème s'appellera l'enveloppe Σ-injective de M.

Théorème 2 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que Q soit Σ-injectif est que pour toute extension Σ-essentielle M de N et pour tout $f : N \longrightarrow Q$, il existe $g : M \longrightarrow Q$ prolongeant f.

Démonstration : la démonstration s'inspire de celle classique lorsque Q est injectif et M extension essentielle de N et utilise les lemmes suivants :

L 1 : Sous la condition C 3 et si $A \in \Sigma$, soit $J \underset{\Sigma}{\triangleq} A$, alors $J \in \Sigma$.

En effet, $\forall a \in A$, $I_J(a) = \{\mu \mid \mu_a \in J\} \in \Sigma$ donc $I_J(a) = Ja^{-1} \in \Sigma$; d'après C 3, $J \in \Sigma$.

L 2 : Sous la condition C 2, $J \triangleleft A$ et $A, J \in \Sigma \Longrightarrow J \underset{\Sigma}{\triangleq} A$.

En effet, $\forall a \in A \quad I_J(a) = \{\mu \in A \mid \mu a \in J\} = Ja^{-1} \in \Sigma$ d'après C 2 et $\exists \mu$ si $a \neq 0$ tel que $\mu a \neq 0$ et $\mu a \in J, \mu \in I_J(a)$.

L 3 : Sous la condition C 1, si $N \leqslant N_o \leqslant M$ et $N \underset{\Sigma}{\overset{\Delta}{=}} M$, alors $N_o \underset{\Sigma}{\overset{\Delta}{=}} M$.

- La condition est suffisante : Soit $I \in \Sigma$ et soit I_o un complément relatif de I dans A, on sait que $I \oplus I_o \triangleleft A$, de plus $I \oplus I_o \supseteq I$ donc d'après C 1 et d'après L 2, $I \oplus I_o \underset{\Sigma}{\overset{\Delta}{=}} A$. Soit $f : I \longrightarrow Q$, f se prolonge en $\overline{f} : I \oplus I_o \longrightarrow Q$, $\overline{f}$ étant nul sur I_o et égal à f sur I. Par hypothèse $\overline{f}$ se prolonge en $g : A \longrightarrow Q$ et g prolonge f : Q est bien Σ -injectif.

- La condition est nécessaire : Si Q est Σ-injectif, soit $f: N \longrightarrow Q$. Considérons la famille $\mathcal{F}$ de tous les couples (N_1, f_1) où N_1 est un sous-module de M contenant N et $f_1 : N_1 \longrightarrow Q$ prolonge f. On introduit dans $\mathcal{F}$ la relation d'ordre évidente et on montre que $\mathcal{F}$ est inductif. Soit (N_o, f') un couple maximal. Si $N_o \neq M$, $\exists\, x \in M$, $x \notin N_o$. $I_{N_o}(x) \in \Sigma$ car $N_o \underset{\Sigma}{\overset{\Delta}{=}} M$ d'après L 3. Considérons $f'_o : I_{N_o}(x) \rightarrow Q$ défini par $f'_o(\lambda) = f'(\lambda x)$, $\forall \lambda \in I_{N_o}(x)$: c'est un homomorphisme. Par hypothèse il existe donc $x' \in Q$ tel que $f'(\lambda x) = \lambda x'$, $\forall \lambda \in I_{N_o}(x)$. Soit $n_o \in N_o$, posons :

$$\overline{f}(n_o + \lambda_1 x) = f'(n_o) + \lambda_1 x' \qquad \forall n_o \in N_o,\ \lambda_1 \in A$$

c'est bien une application de N_o + ax dans Q car si $n_o + \lambda_1 x = n'_o + \lambda'_1 x$, $\lambda_1 - \lambda'_1 \in I_{N_o}(x)$, $\overline{f}[n_o - n'_o + (\lambda'_1 - \lambda_1)x] = f'(n_o - n'_o) + (\lambda'_1 - \lambda_1)x' = f'(n_o - n'_o) + f'[(\lambda'_1 - \lambda_1)x] = f'(n_o - n'_o) + f'(n'_o - n_o) = 0$

par ailleurs $\overline{f}$ est visiblement un homomorphisme, prolongeant f' donc f, et ceci contredit la maximalité du couple (N_o, f'). Donc $N_o = M$.

II. DEFINITION ET QUELQUES PROPRIETES DES Σ-COMPLEMENTS :

Définition 4 : Un sous-module N de M est dit un Σ-complément s'il n'admet pas d'extensions Σ-essentielles propres.

Dans toute la suite nous supposerons les trois conditions C 1, C 2, C 3 vérifiées. Le but de ce qui suit est d'étendre aux Σ-compléments, quelques propriétés données par G. Renault au chapitre I de sa thèse.

Proposition 1 : Soit X un sous-module de M, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) X est un sous-module Σ-complément dans M.

(2) $\forall M_0$ et N sous-module de M contenant X et $N \underset{\Sigma}{\triangleq} M_0$, M_0/X est extension Σ-essentielle de N/X.

Démonstration :

(2)$\Longrightarrow$ (1) : Faisons N = X alors si $X \underset{\Sigma}{\triangleq} M_0$, $0 \underset{\Sigma}{\triangleq} M_0/X$ et ceci entraîne : $\exists \lambda \in A, \forall \bar{x} \in M_0/X, \bar{x} \neq 0, \lambda \bar{x} \neq 0$ et $\lambda \bar{x} = 0$, il y a contradiction : ainsi $\bar{x} = 0$ et $M_0 = X$.

(1)$\Longrightarrow$ (2) : Si (2) n'est pas vérifié, $\exists \bar{y} \in M_0/X, \bar{y} \neq 0$ tel que $I_{N/X}(\bar{y}) \notin \Sigma$ ou bien $I_{N/X}(\bar{y})\bar{y} = 0$.

$I_{N/X}(\bar{y}) = \{ a \in A \mid a\bar{y} \in N/X \}$. Soit y un représentant de $\bar{y}$ dans M_0, $a\bar{y} \in N/X \Longleftrightarrow ay \in N$ donc $I_{N/X}(\bar{y}) = I_N(y) \in \Sigma$.

On a donc $I_{N/X}(\bar{y})\bar{y} = 0$ ou encore $\underline{\forall a \in I_N(y),\ ay \in X}$. Soit alors $P = Ay + X$. Je dis que $X \underset{\Sigma}{\triangleq} P$. Soit $\lambda y + x$, $\lambda \in A$

$I_X(\lambda y + x) = I_N(\lambda y + x)$, $[I_X(\lambda y + x) \subseteq I_N(\lambda y + x)$ et si $\mu \in I_N(\lambda y + x), \mu\lambda y + \mu x \in N \Longrightarrow \mu\lambda y \in N \Longrightarrow \mu\lambda y \in X \Longrightarrow \mu(\lambda y + x) \in X]$.

Mais $I_N(\lambda y + x) \in \Sigma$ puisque $N \underset{\Sigma}{\triangleq} M_0$ donc $I_X(\lambda y + x) \in \Sigma$.

Si $\lambda y + x \neq 0$, $I_N(\lambda y + x)(\lambda y + x) \neq 0$ donc $I_X(\lambda y + x)(\lambda y + x) \neq 0$.

Ainsi $X \underset{\Sigma}{\triangleq} P$ et d'après l'hypothèse P = X donc $y \in X$ et $\bar{y} = 0$: il y a une contradiction.

Proposition 2 : Soit M_o une extension Σ-essentielle dans M, les assertions suivantes sont équivalentes :

i) X est un Σ-complément dans M.

ii) X est la trace sur M d'un Σ-complément dans M_o.

Démonstration :

Remarquons avant tout que l'ensemble des extensions Σ-essentielles de X dans un module M_o contenant X comme sous-module est inductif donc il existe dans M_o une extension Σ-essentielle maximale de X.

Première partie : Soit X un Σ-complément dans M, X_o une extension Σ-essentielle maximale de X dans M_o, X_o est un Σ-complément dans M_o et $X \underset{\Sigma}{\triangleq} X_o$ et $M \underset{\Sigma}{\triangleq} M_o$: il suffit de montrer que $X_o \cap M$ est extension Σ-essentielle de X. Soit $x_o \in X_o \cap M$, $x_o \neq 0$, on a $I_X(x_o) \in \Sigma$ $I_X(x_o).x_o \neq 0$ puisque $X \underset{\Sigma}{\triangleq} X_o$ (on ne se sert pas ici du fait que $M \underset{\Sigma}{\triangleq} M_o$ mais seulement du fait que $M \leqslant M_o$). On note dorénavant $M \leqslant M_o$ si M est un sous-module de M_o.

Deuxième Partie : Soit X_o un Σ-complément dans M_o, X' une extension Σ-essentielle de $X_o \cap M$ dans M : considérons $P = X' + X_o$ et montrons que P est une extension Σ-essentielle de X_o, ce qui entraînera $P = X_o$ et $X' = X_o \cap M$.

- Soit $x' + x_o$, $x' \in X'$, $x_o \in X_o$, $x' + x_o \in M_o$ et

$$I_{X_o}(x' + x_o) = \{a \in A \mid a(x' + x_o) \in X_o\} = \{a \in A \mid ax' \in X_o \cap M\}$$
$$= I_{X_o \cap M}(x') \in \Sigma \text{ car } X_o \cap M \underset{\Sigma}{\triangleq} X'$$

- Il reste à montrer que si $x' + x_o \neq 0$ on a :

$$I_{X_o}(x' + x_o).(x' + x_o) \neq 0.$$

Servons-nous de $M \underset{\Sigma}{\triangleq} M_o$: $\exists\, \mu \in I_M(x' + x_o)$ tel que $\mu(x' + x_o) \neq 0$ et $\mu(x' + x_o) \in M$ donc $\mu x_o \in M$ et $\mu x_o \in X_o \cap M \subseteq X'$ donc $\mu(x' + x_o) \in X'$. Puisque $X_o \cap M \underset{\Sigma}{\triangleq} X'$, $\exists\, \tau$ tel que

$\tau \in I_{X_o \cap M}(\mu x' + \mu x_o)$ et $\tau\mu(x' + x_o) \neq 0$. Mais

$\tau\mu(x' + x_o) \in X_o \cap M \Rightarrow \tau\mu \in I_{X_o}(x' + x_o)$ et $I_{X_o}(x' + x_o)(x' + x_o) \neq 0$.

Théorème 3 : Les sous-modules Σ-compléments d'un module M sont les traces des sous-modules Σ-injectifs de l'enveloppe Σ-injective de M.

Démonstration :

Il suffit de prouver que les Σ-injectifs sont les Σ-compléments d'un module Σ-injectif et d'appliquer ensuite la proposition précédente. Or si M est Σ-injectif soit N un sous-module Σ-injectif de M d'après le théorème 1 du I. b) i), N est extension Σ-essentielle maximale de N dans n'importe quel module donc N est un Σ-complément dans M. Si maintenant N est Σ-complément dans M, M Σ-injectif, montrons que N est une extension Σ-essentielle maximale de N dans n'importe quel module : soit N' une extension Σ-essentielle de N dans un certain surmodule P de N. D'après le premier point de la démonstration du théorème 1, I. b) telle qu'elle est faite par exemple en (3), N' peut être plongé dans le Σ-injectif M et par suite N n'est pas un Σ-complément de M si $N' \neq N$.

Corollaire : Pour qu'un sous-module X de M soit un sous-module Σ-complément dans M, il faut et il suffit que tout sous-module Σ-complément dans X soit un sous-module Σ-complément dans M.

Démonstration :

La condition est évidemment suffisante car X est lui-même un sous-module Σ-complément dans X donc dans M.

La condition est nécessaire car soit E(X) une enveloppe Σ-injective de X contenue dans E(M) enveloppe Σ-injective de M. D'après le théorème précédent un sous-module Σ-complément dans X est de la forme $I \cap X$ où I est un sous-module Σ-injectif de E(X) donc un sous-module Σ-injectif de E(M) et l'on a $I \cap X = I \cap E(X) \cap M = I \cap M$, car $X = E(X) \cap M$, d'où le résultat d'après le théorème 1.

Remarque 3 : Si I et J sont des Σ-injectifs compris dans l'enveloppe Σ-injective de M, soit E(M), avec $I \supseteq J$, alors $I \cap M = J \cap M = X$ entraîne I = J. Cela résulte immédiatement de la proposition suivante.

Proposition 3 : Si $M \underset{\Sigma}{\overset{\Delta}{\leqslant}} M_0$ et si I et J sont des Σ-compléments dans M_0 avec $I \supseteq J$, alors $I \cap M = J \cap M$ entraîne $I = J$.

Démonstration :

Il suffit de démontrer que J (respectivement I) est extension Σ-essentielle de $J \cap M = I \cap M = X$. En effet si cela est, on peut écrire d'après le lemme 3 :

$$X \leqslant J \leqslant I \text{ et } X \underset{\Sigma}{\overset{\Delta}{\leqslant}} I \text{ entraîne } J \underset{\Sigma}{\overset{\Delta}{\leqslant}} I \text{ et par suite } J = I.$$

Or comme $J \leqslant M_0$ et $M \underset{\Sigma}{\overset{\Delta}{\leqslant}} M_0$, on a $\forall j \in J$, $I_M(j) \in \Sigma$, or $\mu j \in M \Longrightarrow \mu j \in M \cap J$ et réciproquement $\mu j \in M \cap J$ entraîne $\mu j \in M$ donc $I_{M \cap J}(j) = I_M(j)$ et par suite $I_{M \cap J}(j) \in \Sigma$. De plus il existe $\mu \in A$, si $j \neq 0$ tel que $\mu j \neq 0$, $\mu j \in M$ donc $\mu j \in J \cap M$.

Définition 5 : Un Σ-injectif Q sera dit Σ-simple s'il n'admet pas de sous-modules Σ-injectifs propres.

Théorème 4 : Soit M un A-module et X un sous-module Σ-complément de M, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) X est un sous-module Σ-complément minimal.

(2) E(X) est un Σ-injectif Σ-simple.

Démonstration :

(1) $\Longrightarrow$ (2) : Tout sous-module Σ-complément propre de X est un sous-module Σ-complément de M (corollaire du théorème 3) donc il n'existe pas de sous-modules Σ-injectifs propres de E(X) (remarque 3).

(2) $\Longrightarrow$ (1) : E(X) étant Σ-simple, d'après le théorème 3, il n'y a pas de Σ-complément dans X donc dans M (corollaire du théorème 3).

Théorème 5 : Soit X un Σ-complément maximal d'un A-module M . Alors l'enveloppe Σ-injective E(M/X) de M/X est isomorphe à un sous-module Σ-injectif, Σ-simple de E(M).

Démonstration :

Soit E' un Σ-injectif propre de E(M/X), $E' \neq E(M/X)$ $E' \cap M/X$ est un Σ-complément propre de M/X que l'on peut noter X'/X, $X' \neq M$ X' contenant X strictement.

Si X' n'est pas un Σ-complément dans M, il existe $X'' \supset X'$ tel que $X' \underset{\Sigma}{\triangleq} X''$ donc puisque X est un Σ-complément dans M contenu dans X', d'après la proposition (1) $X'/X \underset{\Sigma}{\triangleq} X''/X$ et ceci entraîne $X'' = X'$ et ceci contredit l'hypothèse : X' est donc un Σ-complément mais alors $X = X'$ et ceci entraîne $E' = 0$.

III. MODULE Σ-QUASI-INJECTIF :

Définition 6 : Soit $\mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont les sous-modules de M, A-module donné, les morphismes de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N,N')$, N,N' appartenant à $\mathcal{C}$ étant tous les homomorphismes de N dans N'. Un objet X de $\mathcal{C}$ sera dit Σ-injectif dans $\mathcal{C}$ si : $\forall P \in \mathcal{C}$, $P \underset{\Sigma}{\triangleq} M$, $\forall f : P \longrightarrow X$ $\exists g : M \longrightarrow X$, g prolongeant f.

Proposition 4 : (cf. (2) page 9) : Soit X un Σ-complément dans M et I une enveloppe Σ-injective de X contenue dans E(M) enveloppe Σ-injective de M. Pour que X soit Σ-injectif dans $\mathcal{C}$, il faut et il suffit que M soit stable par tout élément g de $\mathrm{Hom}(E(M) \longrightarrow I)$.

Démonstration :

La condition est suffisante : soit P un sous-modùle de M tel que $P \underset{\Sigma}{\triangleq} M$ et $f : P \longrightarrow X$:
I étant Σ-injectif et $P \underset{\Sigma}{\triangleq} E(M)$, $\exists g : E(M) \longrightarrow I$ qui prolonge f d'après le théorème 2. On a $gmp = if$ (voir figure) p, m, i sont les injections canoniques soit $f' = gm$, $f'p = if$. Or $f'(M) \subseteq M$, $f'(M) \subseteq M \cap I = X$ et $f'p = f$.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[r, "m"] \arrow[dl, dashed] \arrow[ddl, "f'"] & E(M) \arrow[ddll, "g"] \\
X \arrow[d, "i"'] & & \\
I & &
\end{tikzcd}$$

La condition est nécessaire : soit $f : E(M) \longrightarrow I$: on a $X' = f^{-1}(X) \cap M \underset{\Sigma}{\triangleq} M$: car si $e' \in E(M)$, $I_X(f(e')) \in \Sigma$ et si $f(e') \neq 0$, $\exists \lambda \in A$ tel que $\lambda f(e') \neq 0$ et $\lambda f(e') \in X$; d'ailleurs si $m \in M$,

$I_{X'}(m) = \{\lambda \in A \mid \lambda m \in X'\}$ et $\lambda m \in X' \Longrightarrow \lambda f(m) \in X$ réciproquement $\lambda f(m) \in X \Rightarrow \lambda m \in X'$ et $I_{X'}(m) = I_X(f(m)) \in \Sigma$ et si $m \neq 0$, si $f(m) = 0$ alors $m \in X'$ et $I_{X'}(m) = A$ et $1.m = m \neq 0$. Si $f(m) \neq 0$ alors $\exists \lambda$, $\lambda f(m) \neq 0$ tel que $\lambda f(m) \in X$ et $\lambda m \in X'$ avec $\lambda m \neq 0$. Soit donc, comme sur la figure, m et p les injections canoniques, posons $f' = fmp$, par hypothèse $\exists g$ tel que $gp = f'$. Soit $\bar{f} = fm$, $\bar{f}p = fmp = f' = gp$. Soit $x \in X'$, on a donc : $(\bar{f} - g)(x) = 0$ alors $\mathrm{Ker}\ (\bar{f} - g) \supseteq X'$.

$$\begin{tikzcd}
X' = f^{-1}(X)\cap M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[r, "m"] \arrow[dl, "g"] \arrow[ddl, "\bar{f}"] & E(M) \arrow[ddll, "f"] \\
X \arrow[d] & & \\
I & &
\end{tikzcd}$$

Si $n \in M$ et $n \in \mathrm{Ker}(\bar{f} - g)$, $\bar{f}(n) = g(n) \in X$ donc $n \in f^{-1}(X) \cap M = X'$ et $\mathrm{Ker}(\bar{f} - g) = X'$. Si $M \neq X'$, $\exists\, n \in M$, $n \notin X'$ tel que $(\bar{f} - g)(n) \neq 0$, $(\bar{f} - g)(n) \in I$. Comme $X \underset{\Sigma}{\overset{A}{\subseteq}} I$ on a, pour un $\lambda \in A$, $\bar{f}(\lambda n) - g(\lambda n) \neq 0$ et $(\bar{f} - g)(\lambda n) \in X$ donc $\bar{f}(\lambda n) \in X$ et $\lambda n \in X'$, mais alors $(\bar{f} - g)(\lambda n) = 0$ contrairement à ce qui précède : il y a une contradiction. On a donc $M = X'$.

<u>Définition 7</u> : M sera dit Σ-quasi-injectif si pour tout sous-module P de M tel que $P \underset{\Sigma}{\overset{A}{\subseteq}} M$ et pour tout $f : p \longrightarrow M$, $\exists\, g\ M \longrightarrow M$ qui prolonge f.

<u>Corollaire</u> : M est Σ-quasi-injectif si et seulement si il est stable par les endomorphismes de E(M), enveloppe Σ-injective de M.

<u>Démonstration</u> : Dire que M est Σ-quasi-injectif c'est dire que M est un objet Σ-injectif de $\mathcal{C}$. Par ailleurs c'est un Σ-complément dans M et il suffit d'appliquer la proposition 4.

<u>Proposition 5</u> : Les A-modules M tels que tout sous-module Σ-complément est un objet Σ-injectif de $\mathcal{C}$ sont les modules Σ-quasi-injectifs.

<u>Démonstration</u> : M est un Σ-complément dans M donc est un objet Σ -injectif de $\mathscr{C}$ et par suite il est Σ-quasi-injectif, mais alors d'après le corollaire et la proposition 4, tout module Σ-complément est un objet Σ -injectif de $\mathscr{C}$.

<u>Remarque 4</u> : Un Σ-injectif est a fortiori Σ-quasi-injectif. Un quasi-injectif est a fortiori Σ-quasi-injectif.

<u>Proposition 6</u> : Soit E(M) une enveloppe Σ-injective de M, il existe dans E(M) un plus petit sous-module $\overline{M}$ Σ-quasi-injectif de E(M) contenant M, parfaitement déterminé.

<u>Démonstration</u> : L'intersection $\overline{M}$ de tous les sous-modules de E(M) contenant M et stable par les endomorphismes de E(M) (il y a déjà E(M)) a les mêmes propriétés et $E(\overline{M}) = E(M)$: $\overline{M}$ a les propriétés voulues.

<u>Définition 8</u> : $\overline{M}$ s'appelle l'enveloppe Σ-quasi-injective de M.

Nous allons maintenant nous préoccuper de l'anneau des endomorphismes $\mathscr{E}$ d'un A-module Σ-quasi-injectif E.

Notons R le radical de Jacobson de $\mathscr{E}$, J l'ensemble des endomorphismes de E dont le noyau est Σ-essentiel dans E.

<u>Lemme 4</u> : Soient $f \in J$, $g \in \mathscr{E}$, on a : $(1 - gf)(E) \underset{\Sigma}{\triangleq} E$.

<u>Démonstration</u> : Soit $x \in E$, $I_{\mathrm{Ker} f}(x) \in \Sigma$ et si $x \neq 0$ $I_{\mathrm{Ker} f}(x).x \neq 0$. Posons $P = (1 - gf)(E)$, $I_P(x) \supseteq I_{\mathrm{Ker} f}(x)$ donc $I_P(x) \in \Sigma$ et si $x \neq 0$ $\exists \lambda$, tel que $\lambda x \in P$ et $\lambda x \neq 0$.

<u>Lemme 5</u> : Soit u un monomorphisme de E dans E et $u(E) \underset{\Sigma}{\triangleq} E$, E étant Σ-quasi-injectif, u est rétractable.

<u>Démonstration</u> : $\tilde{u}$ étant l'isomorphisme canonique $E \to u(E)$, $u = i\tilde{u}$, i étant un monomorphisme $u(E) \to E$. On a le diagramme ci-contre et $u(E) \underset{\Sigma}{\triangleq} E$ et E Σ-quasi-injectif entraîne l'existence de v tel que $vi = \tilde{u}^{-1}$ donc $vu = vi\tilde{u} = \tilde{u}^{-1}\tilde{u} = 1$.

$$\begin{tikzcd} u(E) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\tilde{u}^{-1}"'] & E \arrow[dl, dashed, "v"] \\ E & \end{tikzcd}$$

Théorème 6 : J est un idéal bilatère de $\mathcal{E}$ contenu dans R.

Démonstration :

Premier point : Soit $f \in J$, c'est-à-dire $\operatorname{Ker} f \underset{\Sigma}{\Delta} E$, E Σ-quasi-injectif. Pour démontrer que f appartient au radical de Jacobson R de $\mathcal{E}$, il suffit de démontrer que 1 - gf est inversible à gauche c'est-à-dire rétractable et ce quel que soit $g \in \mathcal{E}$. Or $f(x) = 0$ et $x - gf(x) = 0$ implique $x = 0$ donc $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker}(1 - gf) = 0$ donc $\operatorname{Ker}(1 - gf) = 0$ car $\operatorname{Ker} f \underset{\Sigma}{\Delta} E$ implique $\operatorname{Ker} f \Delta E$. Le résultat découle alors du lemme 4 et du lemme 5.

Deuxième point : J est un groupe additif car $\operatorname{Ker}(f + g) \supseteq \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$, or on vérifie facilement que $\operatorname{Ker} f \underset{\Sigma}{\Delta} E$ entraîne $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \underset{\Sigma}{\Delta} \operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Ker} g \underset{\Sigma}{\Delta} E$ entraîne alors $\operatorname{Ker}(g + f) \underset{\Sigma}{\Delta} E$.

Par ailleurs, on peut écrire : $gf \in J$ si $f \in J$. $\forall g \in \mathcal{E}$. Soit enfin fg, $f \in J$ et $g \in \mathcal{E}$. Soit $x \in E$ si $g(x) = 0$ on a $x \in \operatorname{Ker}(fg)$. Si $g(x) \neq 0$, $I_{\operatorname{Ker} f}(g(x)) \in \Sigma$ et $\exists \lambda$, $\lambda \in A$ tel que $\lambda g(x) \in \operatorname{Ker} f$, $\lambda g(x) \neq 0$ donc $fg(\lambda x) = 0$ donc $\lambda x \in \operatorname{Ker}(fg)$ et $\lambda x \neq 0$.
Par ailleurs $I_{\operatorname{Ker} f}(g(x)) = I_{\operatorname{Ker}(fg)}(x) \in \Sigma$. Par suite fg appartient à J si $f \in J$, $\forall g \in \mathcal{E}$ et J est un idéal bilatère.

IV. - COMPLEMENTS FORTS :

Définition 9 : Soit E(M) une enveloppe Σ-injective de M, X sous-module de M est dit Σ-complément fort (de M), si $E(M) = E(X) \oplus Z$ $X = E(X) \cap M$, E(X) désignant une enveloppe Σ-injective de X contenue dans E(M).

Définition 10 : Un Σ-complément fort (de M) est dit un facteur direct absolu si $E(M) = E(X) \oplus Z \Rightarrow M = X \oplus (Z \cap M)$.

Proposition 7 : Si $E = X \oplus Y$, E est Σ-injectif si et seulement si X et Y le sont.

Démonstration : Elle est à peu de choses près la même que celle classique sur les injectifs.

Proposition 8 : Une condition nécessaire et suffisante pour que tout Σ-complément fort de M soit un facteur direct absolu est que M soit stable par les endomorphismes idempotents de l'enveloppe Σ-injective de E(M).

- La condition est suffisante : Soit $X = I \cap M$, I facteur direct de E(M) est Σ-injectif d'après la propriété précédente : d'ailleurs I = E(X) enveloppe Σ-injective de X dans E(M). Il faut montrer $M = X \oplus (J \cap M)$ si $E(M) = I \oplus J$. Soit e la projection canonique de E(M) sur J de noyau I, soit $m \in M$ $m = i + j$, $i \in I$, $j \in J$, $e(m) = j$, mais $e(M) \subseteq M$, donc $j \in J \cap M$ et par suite $i \in I \cap M = X$ et $m = i + j$, $i \in X$, $j \in J \cap M$ d'une façon et d'une seule.

- La condition est nécessaire : Soit e un idempotent de Hom(E(M), E(M)) d'image I et de noyau J alors $E(M) = I \oplus J$ et soit $X = I \cap M$, I = E(X) et X est un Σ-complément fort de M donc facteur direct absolu $M = X \oplus (J \cap M)$ et pour $m \in M$, $m = x + j$, $x \in X$, $j \in J$, donc $e(m) = x$ et $e(M) \subseteq M$.

Corollaire : Le plus petit sous-module de E(M) contenant M tel que tout Σ-complément fort soit facteur direct absolu est $M = \sum p_i(M)$ où p_i est un produit fini d'idempotents de E(M).

La démonstration est très facile.

Définition 11 : Notons $\Lambda_X = \{ f$, endomorphisme de E(M) tel que $f(X) = 0 \}$ X sous-module de M.

Proposition 9 : Soit M un A-module d'enveloppe Σ-injective E, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) X est un Σ-complément fort de M.

(2) (a) $X = X_E \cap M$ où $X_E = \bigcap_{f \in \Lambda_X} \operatorname{Ker} f$.

(b) $\Lambda_X = Bp + \Lambda_M$ où p est un projecteur de E et B l'anneau des endomorphismes de E.

Démonstration :

(2) $\Rightarrow$ (1) : Notons $X_E = \bigcap_{f\in\Lambda_X} \mathrm{Ker} f$ alors $X \subseteq X_E$ et $f \in \Lambda_{X_E}$ entraîne $f \in \Lambda_X$ donc $\Lambda_{X_E} \subseteq \Lambda_X$. Si $f \in \Lambda_X$, $X_E \subseteq \mathrm{Ker} f$ et $f \in \Lambda_{X_E}$ d'où l'égalité $\Lambda_{X_E} = \Lambda_X$. La condition b) entraîne que $X = X_E \cap M \subseteq \mathrm{Ker} p \cap M$ car $X_E = \bigcap_{f\in\Lambda_X} \mathrm{Ker} f$ et $p \in \Lambda_X$, si $f \in \Lambda_X$, $f = \tau p + \tau'$, $\tau \in B$, $\tau' \in \Lambda_M$ donc si $x \in \mathrm{Ker} p \cap M$, $f(x) = 0$: on a donc $\mathrm{Ker} p \cap M \subseteq \mathrm{Ker} f$ donc $\mathrm{Ker} p \cap M \subseteq X_E \cap M$ et finalement $X = \mathrm{Ker} p \cap M$. p étant un projecteur de E, Kerp est donc un sous-module Σ-injectif de E et X est un Σ-complément fort par définition.

(1) $\Rightarrow$ (2) : Il existe un facteur direct de E, I, tel que $X = I \cap M$. Si $E = I \oplus K$ appelons p la projection de E sur K parallèlement à I. Soit φ un endomorphisme de E dont le noyau contient X. On a $X = \mathrm{Ker} p \cap M \subseteq \mathrm{Ker}\varphi \cap M$, il existe donc un homomorphisme $\bar{h}$ de p(M) dans E tel que $\varphi = \bar{h} \circ p$: $M \underset{\Sigma}{\triangleq} E$ entraîne $p(M) \underset{\Sigma}{\triangleq} K$ car soit $k \in K$, $I_{p(M)}(k) = \{ \lambda \in A \mid \lambda k \in p(M) \} \supseteq I_M(k) = \{ \mu \in A \mid \mu k \in M \}$ car $k = p(k)$, on en déduit d'après C 1 que $I_{p(M)}(k) \in \Sigma$. Si de plus $k \neq 0$, $\exists \lambda \in A$, $\lambda k \in M$ donc $\lambda k \in p(M)$ avec $\lambda k \neq 0$. On montre ensuite facilement que $p(M) \oplus I \underset{\Sigma}{\triangleq} K \oplus I = E$. L'homomorphisme $\bar{h} : P(M) \longrightarrow E$ se prolonge de façon évidente à $p(M) \oplus I$ donc E étant Σ-injectif, $\bar{h}$ se prolonge suivant $h : E \longrightarrow E$ et on a $\varphi - hp \in \Lambda_M$, ce qui montre que $\Lambda_X \subseteq Bp + \Lambda_M$. Comme d'autre part tout élément de $Bp + \Lambda_M$ annule X, on a $\Lambda_X = Bp + \Lambda_M$. Notons enfin que $X \subseteq X_E \subseteq \mathrm{Ker} p$ et $X \subseteq X_E \cap M \subseteq \mathrm{Ker} p \cap M = X$ d'où $X_E \cap M = X$.

Corollaire : Les sous-modules Σ-compléments forts de M_E sont les sous-modules X_E de M_E où X parcourt l'ensemble des Σ-compléments forts de M.

Démonstration : $X = X_E \cap M$, $\Lambda_X = \Lambda_{X_E}$, $\Lambda_{M_E} = \Lambda_M$ donc $\Lambda_{X_E} = Bp + \Lambda_{M_E}$, lorsque l'on suppose que X est un Σ-complément fort de M. D'après la proposition 8, X_E est un sous-module Σ-complément fort de M_E.

Réciproquement, soit X' un sous-module Σ-complément fort dans M_E, on a $X' = X'_E$, $\Lambda_{X'} = Bq + \Lambda_{M'_E}$ pour un endomorphisme q idempotent de E et on a $X' = \mathrm{Ker} q \cap M_E$, $X' \cap M = \mathrm{Ker} q \cap M = X$, $\Lambda_X = Bq + \Lambda_M$ et $X_E = X'$.

V. A-MODULE TEL QUE L'INTERSECTION DE DEUX Σ-COMPLEMENTS EST UN Σ-COMPLEMENT :

Proposition 10 : Soit M un A-module, les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) l'intersection de deux sous-modules Σ-compléments dans M est un sous-module Σ-complément.

(2) Pour que X sous-module de M soit un sous-module Σ-complément il faut et il suffit qu'il vérifie la condition suivante :

(I) $\forall x \notin X \Longrightarrow \exists a \in A$ avec $ax \neq 0$ et avec $I_X(ax) \notin \Sigma$ ou bien $I_X(ax).ax = 0$.

(3) Toute intersection de sous-modules Σ-complément dans M est un Σ-complément.

Démonstration :

(1) $\Longrightarrow$ (2) : Si M est tel que son enveloppe Σ-injective est Σ-simple c'est évident car X Σ-complément est 0 ou M et (I) est bien vérifiée.

Supposons que l'enveloppe Σ-injective de M n'est pas Σ-simple, il existe un Σ-complément propre X dans M. Supposons que (I) ne soit pas vrai : il existe $x \in M$, $x \notin X$ tel que $\forall a \in A$ avec $ax \neq 0$, $I_X(ax) \in \Sigma$, $I_X(ax).ax \neq 0$.

On peut d'abord supposer que $Ax \not\trianglelefteq_{\Sigma} M$ car si $Ax \trianglelefteq_{\Sigma} M$, soit $y \in M$, $I_{Ax}(Y) \in \Sigma$, $I_X(Y) = \{\mu \mid \mu y \in X\}$, si $\lambda y \in Ax$, $I_X(\lambda y) = \{\tau \mid \tau\lambda y \in X = \{\tau \mid \tau\lambda \in I_X(y) = I_X(y)\lambda^{-1} \in \Sigma$ par hypothèse et comme ceci a lieu $\forall \lambda \in I_{Ax}(y) \in \Sigma$ d'après C 3, on a $I_X(y) \in \Sigma$ et $I_X(y).y \neq 0$ si $y \neq 0$ car $by \in Ax$, $by \neq 0, \exists \lambda \in A$ tel que $\lambda by \in X$ et $\lambda by \neq 0$ par hypothèse : tout ceci prouve que $Ax \trianglelefteq_{\Sigma} M$ entraîne $X \trianglelefteq_{\Sigma} M$ d'où $X = M$ puisque X est un Σ-complément, mais ceci contredit que X est propre.

Considérons une extension Σ-essentielle maximale de Ax, soit X', on peut écrire $X' \cap X \trianglelefteq_{\Sigma} X'$: en effet soit $x' \in X'$, $I_{X' \cap X}(x') = \{\lambda \mid \lambda x' \in X' \cap X\} = \{\lambda \mid \lambda x' \in X\} = I_X(x')$. Mais $I_{Ax}(x') = \{\mu \mid \mu x' \in Ax\} \in \Sigma$ et $I_{X' \cap X}(\mu x') = \{\tau \in A \mid \tau\mu x' \in X\} = \{\tau \mid \tau\mu \in I_X(x')\} = I_X(x')\mu^{-1} \in \Sigma$ car $\mu x' \in Ax$ et $I_{X' \cap X}(\mu x') = I_X(\mu x') \in \Sigma$ par hypothèse. Comme $I_X(x')\mu^{-1} \in \Sigma, \forall \mu \in I_{Ax}(x') \in \Sigma$ on en déduit d'après C 3 que $I_X(x') \in \Sigma$. D'autre part, il existe $b \in A$ tel que $bx' \in Ax$, $bx' \neq 0$ si $x' \neq 0$ et par suite il existe $\tau \in A$ tel que $\tau bx' \in X$ et $\tau bx' \neq 0$. Mais alors on peut écrire d'après (1) $X' \cap X = X'$ et $X' \subseteq X$ donc $x \in X$ contrairement à l'hypothèse.

(2) $\Longrightarrow$ (3) : Soit X_i $i \in I$ une famille de sous-modules Σ-compléments dans M et soit $X = \bigcap_{i \in I} X_i$; si $x \notin X, \exists X_i$ tel que $x \notin X_i$. Il existe $a \in A$ avec $ax \neq 0$ avec $I_{X_i}(ax) \notin \Sigma$ ou bien $I_{X_i}(ax).ax = 0$: si on a $I_{X_i}(ax) \notin \Sigma$ $I_{X_i}(ax) = \{\lambda \in A \mid \lambda\, ax \in X_i\} \supseteq I_X(ax)$ donc si $I_X(ax) \in \Sigma$ on aurait $I_{X_i}(ax) \in \Sigma$ contrairement à l'hypothèse donc on a dans ce cas $I_X(ax) \notin \Sigma$. Si $I_{X_i}(ax) \in \Sigma$ alors $I_{X_i}(ax).ax = 0$ donc si $I_X(ax).ax \neq 0$ on a $\lambda\, ax \in X$, $\lambda\, ax \neq 0$ pour un $\lambda \in A$ et $\lambda\, ax \in X_i$ et ceci contredit $I_{X_i}(ax).ax = 0$, dans ce cas on a donc $I_X(ax).ax = 0$ X ne peut admettre d'extension Σ-essentielle propre : c'est un Σ-complément dans M.

Définition 11 : Soit M un A-module, un sous-module X de M sera dit Σ-fermé s'il possède la propriété suivante :

$\forall x \notin X$, $\exists\ a \in A$ avec $ax \neq 0$ tel que $I_X(ax) \notin \Sigma$ ou bien $I_X(ax).ax = 0$.

Remarque 5 : Un sous-module Σ-fermé X est en particulier un sous-module Σ-complément.

Démonstration : X est évidemment sans extension Σ-essentielle propre.

Proposition 11 : Soit M un A-module, ces conditions suivantes sont équivalentes :

(1) L'intersection de deux sous-modules Σ-compléments dans M est un sous-module Σ-complément.

(2) Pour tout sous-module X de M, il existe un plus petit sous-module Σ-complément $\overline{X}$ contenant X.

Démonstration :

(1) $\Rightarrow$ (2) : D'après la proposition 10 l'intersection $\overline{X}$ de tous les sous-modules Σ-compléments contenant X est un Σ-complément contenant X et c'est visiblement le plus petit.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Soient X_1 et X_2 deux sous-modules Σ-compléments dans M, on a les inclusions suivantes :

$$\overline{X_1 \cap X_2} \subseteq \overline{X_1} = X_1 \quad ; \quad \overline{X_1 \cap X_2} \subseteq \overline{X_2} = X_2 \text{ et donc } \overline{X_1 \cap X_2} = X_1 \cap X_2$$

Proposition 12 : Les propositions (1) et (2) sont équivalentes :

(1) Toute intersection de Σ-compléments est un Σ-complément.

(2) Pour tout sous-module Σ-complément X dans M et pour tout $x \in M$, $x \notin X$, $X^{\bullet}.x/\mathrm{An}^n(x)$ est un sous-module Σ-fermé de $A/\mathrm{An}^n(x)$.

Démonstration :

(1) $\Rightarrow$ (2) : Si $\alpha \in A$, $\bar{\alpha}$, désigne l'image de α dans $A/An^n(x)$. Si $\bar{\alpha} \notin X^\bullet.x/An^n(x)$, alors $\alpha \notin X^\bullet.x$ et $\alpha x \notin X$. Comme X est Σ-fermé, il existe $a \in A$ avec $a\alpha x \neq 0$, $I_X(a\alpha x) \notin \Sigma$ ou $I_X(a\alpha x)\, a\alpha x = 0$. On a donc $a\bar{\alpha} \neq 0$ et en notant par des lettres surlignées les classes modulo $An^n(x)$:

a) $I_{\overline{X^\bullet.x}}(a\bar{\alpha}) \in \Sigma \Rightarrow \{\lambda \mid \lambda a\bar{\alpha} \in \overline{X^\bullet.x}\} = \{\lambda \mid \lambda a\alpha x \in X\} = I_X(a\alpha x) \in \Sigma$

b) Si $I_{\overline{X^\bullet.x}}(a\bar{\alpha}).a\bar{\alpha} \neq 0$, $\exists \lambda$, $\lambda a\alpha x \in X$ et $\lambda a\alpha x \neq 0$ et $I_X(a\alpha x).a\alpha x \neq 0$

on ne peut avoir donc en même temps les conditions a) et b).

(2) $\Rightarrow$ (1) : Soit X un sous-module Σ-complément dans M et soit $x \notin X$; $X^\bullet.x/An^n(x)$ est un sous-module Σ-complément dans $A/An^n(x)$: il existe donc $\bar{a} \notin X^\bullet.x/An^n(x)$ tel que $I_{\overline{X^\bullet.x}}(\bar{a}) \notin \Sigma$ ou bien $I_{\overline{X^\bullet.x}}(\bar{a}).\bar{a} = 0$, on a $ax \neq 0$ sinon $a \in An^n(x)$, et $\bar{a} = \bar{0} \in \overline{X^\bullet.x}$. De plus $I_X(ax) \in \Sigma$ et $I(ax).ax \neq 0$ sont impossibles en même temps :
$I_X(ax) = \{\lambda \mid \lambda\, ax \in X\} = \{\lambda \mid \lambda a \in X^\bullet.x\} = \{\lambda \mid \lambda\, \bar{a} \in \overline{X^\bullet.x}\} = I_{\overline{X^\bullet.x}}(\bar{a})$
ainsi $I_{\overline{X^\bullet.x}}(\bar{a}) \in \Sigma$ si $I_X(ax) \in \Sigma$. Si $I_X(ax).ax \neq 0$, $\exists \lambda$, $\lambda\, ax \neq 0$ donc $\lambda a \notin An^n(x)$ et $\lambda \bar{a} \neq 0$ avec $\lambda a \in X^\bullet.x$ donc $\lambda\, \bar{a} \in \overline{X^\bullet.x}$. C. Q. F. D.

Définition 12 : Deux sous-modules N et N' de M seront dits équivalents : notation $N \rho N'$ s'ils sont tous deux extensions Σ-essentielles de $N \cap N'$.

Justification : Il faut prouver que ρ est une relation d'équivalence : la symétrie et la réflexibilité de la relation sont évidentes.
Pour démontrer la transivité, rappelons que N_1, N_2, C étant des sous-modules de M avec $N_1 \underset{\Sigma}{\triangleq} N_2$, on a $N_1 \cap C \underset{\Sigma}{\triangleq} N_2 \cap C$. Soit alors $N \rho N'$, $N' \rho N''$ on a $N \rho N''$, $N \cap N' \underset{\Sigma}{\triangleq} \left.\begin{matrix} N \\ N' \end{matrix}\right\}$ entraîne $\left.\begin{matrix} N \cap N' \cap N'' \underset{\Sigma}{\triangleq} N \cap N'' \\ N' \cap N'' \underset{\Sigma}{\triangleq} \left.\begin{matrix} N' \\ N'' \end{matrix}\right\} \end{matrix}\right\}$

donc $N \cap N' \cap N'' \underset{\Sigma}{\triangleq} N''$ et par suite $N \cap N'' \underset{\Sigma}{\triangleq} N''$. En échangeant le rôle de N et N'' on a aussi $N \cap N'' \underset{\Sigma}{\triangleq} N$.

Théorème 7 : Pour un A-module M, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) Toute intersection de sous-modules Σ-compléments dans M est un sous-module Σ-complément.

(2) Si N, N', P, P' sont des sous-modules de M, alors :

$$N \,\rho\, N' \text{ et } P \,\rho\, P' \Longrightarrow (N + P) \,\rho\, (N' + P') \quad \text{(I)}$$

(3) Si N, N', S sont des sous-modules de M, alors :

$$N \subseteq S \text{ et } N \,\rho\, N' \Longrightarrow (N' + S) \,\rho\, S \quad \text{(II)}$$

Démonstration :

(2) $\Longrightarrow$ (3) est évident.

(3) $\Longrightarrow$ (2) : Prenons $S = N + P$, on a donc $(N' + N + P) \,\rho\, (N + P)$ de même la relation $N' \subseteq N' + P$ entraîne $(N' + N + P) \,\rho\, (N' + P)$ et finalement $(N + P) \,\rho\, (N' + P)$; en faisant jouer à P et P' le rôle de N et N', on démontrerait la relation $(N' + P) \,\rho\, (N' + P')$ d'où $(N + P) \,\rho\, (N' + P')$.

(1) $\Longrightarrow$ (3) : Soient N, N', P des sous-modules de M vérifiant $N \subset P$ et $N \,\rho\, N'$. On déduit de la définition de la relation ρ et de la proposition 11, que $\overline{N \cap N'} = \overline{N} = \overline{N'} \subseteq \overline{P}$, donc $N' \leqslant \overline{P}^{\bullet}$ et $P \underset{\Sigma}{\triangleq} P + N' \underset{\Sigma}{\triangleq} \overline{P}$ et $P \,\rho\, (N' + P)$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) : Soit N un sous-module de M, montrons qu'il existe un seul sous-module $\overline{N}$ extension Σ-essentielle de N.

Soient X_1 et X_2 deux sous-modules Σ-compléments extensions Σ-essentielles de N, on a $N \subset X_2$; $N \,\rho\, X_1$ donc $(X_1 + X_2) \,\rho\, X_2$ donc $X_1 + X_2$ est extension Σ-essentielle de X_2 donc $X_1 + X_2 = X_2$ et $X_1 = X_2$

Remarque 6 : Soit X un sous-module Σ-complément non Σ-fermé dans un A-module M, il existe donc $x \notin X$ tel que pour tout $a \in A$ avec $ax \neq 0$, $I_X(ax) \in \Sigma$ et $I_X(ax).ax \neq 0$, il s'en suit que $X^{\bullet}.x \underset{\Sigma}{\triangleq} A$ car $\lambda \in A$ $\{\mu \in A \mid \mu\lambda x \in X\} = I_X(\lambda x) \in \Sigma$ et si $\lambda x \neq 0$, il existe $\mu \in A$, $\mu\lambda x \neq 0$ et $\mu\lambda \neq 0$, $\mu\lambda \in X^{\bullet}.x$.

Lemme 5 : Si X est un sous-module de M, l'ensemble des éléments x de M tels que $X^{\bullet}.x$ soit Σ-essentiel dans A est un sous-module X_{Σ} contenant X.

Démonstration : En effet, on a les relations :

$$X^{\bullet}.(x + y) \supset (X^{\bullet}.x) \cap (X^{\bullet}.y)$$
$$X^{\bullet}.(ax) = (X^{\bullet}.x)^{\bullet}.a$$

$\forall x, y \in M$ et $a \in A$. Il suffit de montrer que si J est un idéal à gauche Σ-essentiel dans A, $J^{\bullet}.a$ est un idéal Σ-essentiel pour tout $a \in A$: soit $\lambda \in A$, $I_{J^{\bullet}.a}(\lambda) = \{\mu \mid \mu\lambda\ a \in J\} = J(\lambda a)^{-1} \in \Sigma$ d'après C 2 et si $\lambda \neq 0$, ou bien $\lambda a = 0$ et $1.\lambda \in J^{\bullet}.a$, ou bien $\lambda a \neq 0$ et $\exists \mu, \mu\lambda a \neq 0$, $\mu\lambda a \in J$ donc $\mu\lambda \neq 0$ et $\mu\lambda \in J^{\bullet}.a$.

Proposition 13 : Si M est un A-module, on appelle ensemble Σ-singulier de M, l'ensemble des éléments $x \in M$ tel que $\mathrm{Ann}(x)$ soit un idéal à gauche Σ-essentiel dans A. C'est un sous-module de A, noté $j_{\Sigma}(M)$.

Démonstration : La proposition 13 est un cas particulier du lemme 5 (faire X = 0).

Proposition 14 : Dans un A-module M tel que $j_{\Sigma}(M) = 0$, l'intersection de deux Σ-compléments est un Σ-complément.
La démonstration se trouvera dans l'article de Hudry (4).

Proposition 15 : Soit M un A-module, supposons qu'il existe deux éléments x et y appartenant à M tels que :

(a) $Ax \cap Ay = (0)$, $\mathrm{Ann}x \supseteq \mathrm{Ann}y$

(b) $A/\mathrm{Ann}(y)$ est extension essentielle de $\mathrm{Ann}(x)/\mathrm{Ann}(y)$.

Alors il existe un Σ-complément de M non Σ-fermé.

Démonstration : Soit X une extension Σ-essentielle maximale de Ay. On a en particulier : $Ay \triangleleft X$ et $Ax \cap X = 0$. D'autre part : $X^{\bullet}.(x + y) = X^{\bullet}.x = \mathrm{Ann}(x)$.

La relation (b) s'écrit donc :« $A/_{Ann(x+y)} = A/_{Ann(y)}$ est extension Σ-essentielle de $X^{\bullet}.(x+y)/_{Ann(x+y)}$ » et d'après la proposition 12 et la proposition 10 ceci prouve qu'il existe un Σ-complément de M qui n'est pas Σ-fermé.

<u>Proposition 16</u> : Soit M un A-module tel que l'intersection de deux Σ-compléments est un Σ-complément. Pour tout x appartenant à M tel que Ann(x) = 0, on a : $j_{\Sigma}(M) \subseteq \overline{Ax}$, $\overline{Ax}$ désignant la plus grande extension Σ-essentielle de Ax.

<u>Démonstration</u> :

Si $j_{\Sigma}(M)$ n'est pas contenu dans $\overline{Ax}$, il existe $y \in j_{\Sigma}(M)$, $y \notin \overline{Ax}$, et $\overline{Ax}$ étant Σ-fermé (proposition 10), il existe $a \in A$ tel que $I_{\overline{Ax}}(ay) \notin \Sigma$ ou bien $I_{\overline{Ax}}(ay).ay = 0$. On ne peut avoir $I_{\overline{Ax}}(ay).ay = 0$: en effet on aurait alors $\overline{Ax} \cap Ay = 0$ et $Ax \cap Ay = 0$, de plus on a $ann(ay) \underset{\Sigma}{\notin} A$ puisque ay appartient à $j_{\Sigma}(M)$. On pourrait alors appliquer la proposition 15 en faisant dans cette proposition x = ay et y = x : il existerait un Σ-complément de M qui n'est pas Σ-fermé et ceci contredirait l'hypothèse (proposition 10) : on a donc $I_{\overline{Ax}}(ay) \notin \Sigma$. Mais $I_{\overline{Ax}}(ay) \supseteq Ann(ay)$ entraîne $I_{\overline{Ax}}(ay) \in \Sigma$ d'après C 1 et le fait que $ann(ay) \in \Sigma$. Il y a contradiction et $j_{\Sigma}(M)$ est contenu dans $\overline{Ax}$.

<u>Proposition 17</u> : Si M est un A-module sur l'anneau A à idéal Σ-singulier nul ($j_{\Sigma}(A) = 0$), contenant un élément x avec Ann x = 0 les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) Toute intersection de sous-modules Σ-compléments est un sous-module Σ-complément.

(2) Le sous-module $j_{\Sigma}(M)$ est nul.

<u>Démonstration</u> :

(2) $\Longrightarrow$ (1) : Si $j_{\Sigma}(M) = 0$ on a vu que l'intersection de deux Σ-compléments est un Σ-complément (proposition 14).

(1) $\Rightarrow$ (2) : On a : $Ax \cap j_\Sigma(M) = 0$, car s'il existait $ax \neq 0$, $ax \in j_\Sigma(M)$, on aurait : $Ann(ax) = Ann(a)$ et $a \neq 0$ donc $Ann(a)$ n'est pas Σ-essentiel dans A contrairement à $Ann(ax) \underset{\Sigma}{\triangleq} A$. On déduit alors de la proposition précédente $\overline{Ax} \geq j_\Sigma(M)$ donc $\overline{Ax} \cap j_\Sigma(M) = j_\Sigma(M)$ et par ailleurs on déduit de $Ax \cap j_\Sigma(M) = 0$, $\overline{Ax} \cap j_\Sigma(M) = 0 = j_\Sigma(M)$.

VI. Σ-COMPLEMENTS FORTS ET Σ- COMPLEMENTS RELATIFS :

Hudry a introduit dans son article (4) la définition suivante :

Définition : On appelle Σ-complément relatif de X, sous-module de M, un sous-module Y de M, s'il en existe, maximal dans la famille $\mathcal{F}$, ordonné par inclusion, des sous-modules Z de M tels que $X \oplus Z \underset{\Sigma}{\triangleq} M$.
On vérifie sans peine, pour justifier cette définition, que si $\mathcal{F}$ n'est pas vide, $\mathcal{F}$ est inductif et X admet au moins alors un Σ-complément relatif.

Lemme = Soient E(X) et E(Y) des enveloppes Σ-injectives respectives de X et Y contenues dans E(M) enveloppe Σ-injective de M. Si $X \oplus Y \underset{\Sigma}{\triangleq} M$, on a $E(M) = E(X) \oplus E(Y)$.

Démonstration :

$0 = E(X) \cap E(Y)$. car $X \underset{\Sigma}{\triangleq} E(X)$ entraîne $Y \cap E(X) = 0$ et $Y \underset{\Sigma}{\triangleq} E(Y)$ entraîne $E(Y) \cap E(X) = 0$. De $X \underset{\Sigma}{\triangleq} E(X)$ on déduit $X \oplus Y \underset{\Sigma}{\triangleq} E(X) \oplus Y$ et de $Y \underset{\Sigma}{\triangleq} E(Y)$ on déduit $E(X) \oplus Y \underset{\Sigma}{\triangleq} E(X) \oplus E(Y)$, donc $X \oplus Y \underset{\Sigma}{\triangleq} E(X) \oplus E(Y)$ et $E(X \oplus Y) = E(M) = E(X) \oplus E(Y)$.

Proposition 18 : Tout Σ-complément relatif d'un module M est un Σ-complément fort de M.

Démonstration : Soit Y un Σ-complément relatif de X. Y est un Σ-complément car de $Y \underset{\Sigma}{\triangleq} Y'$, $Y' \leqslant M$, on déduit $X \cap Y' = 0$. De plus on peut écrire : $X \oplus Y \leqslant X \oplus Y' \leqslant M$ et $X \oplus Y' \underset{\Sigma}{\triangleq} M$ d'où il résulte $Y = Y'$. Enfin Y est un Σ-complément fort, car de $X \oplus Y \underset{\Sigma}{\triangleq} M$, on déduit, d'après le lemme : $E(M) = E(X) \oplus E(Y)$.

Proposition 19 : (démontrée simultanément par Hudry en [4]) :

Une condition nécessaire et suffisante pour que X admette un Σ-complément relatif, est que X admette un Σ-complément fort (c'est-à-dire qu'il existe X', Σ-complément fort de M, tel que $X \underset{\Sigma}{\triangleq} X'$).

Démonstration : Remarquons d'abord que si l'on a $X \underset{\Sigma}{\triangleq} X'$, les propositions (1) et (2) suivantes sont équivalentes :

(1) Y est Σ-complément relatif de X

(2) Y est Σ-complément relatif de X'

(2) $\Rightarrow$ (1) : $Y \cap X' = 0$ entraîne $Y \cap X = 0$ et $X \oplus Y \underset{\Sigma}{\triangleq} X' \oplus Y \underset{\Sigma}{\triangleq} M$ entraîne $X \oplus Y \underset{\Sigma}{\triangleq} M$. De plus, soit $Y \leqslant Z$, $X \oplus Z \underset{\Sigma}{\triangleq} M$, on en déduit $X' \oplus Z \underset{\Sigma}{\triangleq} M$ donc $Y = Z$.

(1) $\Rightarrow$ (2) : De $X \oplus Y \underset{\Sigma}{\triangleq} M$ on déduit $X' \oplus Y \underset{\Sigma}{\triangleq} M$. Soit $Z \geqslant Y$ tel que $X' \oplus Z \underset{\Sigma}{\triangleq} M$, on a $X \oplus Z \underset{\Sigma}{\triangleq} X' \oplus Z \underset{\Sigma}{\triangleq} M$ et $X \oplus Z \underset{\Sigma}{\triangleq} M$ donc $Y = Z$.
On peut donc dans la suite de la démonstration, supposer que X est un Σ-complément.-La condition est nécessaire : Supposons que X admette un Σ-complément relatif Y, d'après le lemme, $X \oplus Y \underset{\Sigma}{\triangleq} M$ entraîne $E(M) = E(X) \oplus E(Y)$ et X est un Σ-complément fort.

-La condition est suffisante : Si X est un Σ-complément fort, on a $E(X) \cap M = X$ et $E(M) = E(X) \oplus \mathcal{Q}$. Posons $\mathcal{Q} \cap M = Y$ et démontrons que $X \oplus Y \underset{\Sigma}{\triangleq} M$: on note d'abord que $X \cap Y = 0$ car $X \cap \mathcal{Q} = 0$ puisque l'on a $E(X) \cap \mathcal{Q} = 0$. Soit $m \in M$, $m = \bar{x} + q$, $\bar{x} \in E(X)$, $q \in \mathcal{Q}$,

$$I_{X \oplus Y}(m) = \{\lambda \mid \lambda(\bar{x} + q) \in X \oplus Y\} = \{\lambda \mid \lambda\bar{x} \in X \text{ et } \lambda q \in Y = \mathcal{Q} \cap M\} = \{\lambda \mid \lambda\bar{x} \in X\} = I_X(\bar{x}) \in \Sigma$$

Soit $m \neq 0$, soit $\bar{x} \neq 0$, il existe $\lambda \in A$ tel que $\lambda\bar{x} \neq 0$ et $\lambda\bar{x} \in X$, donc $\lambda m = \lambda\bar{x} + \lambda q$ appartient à $X \oplus Y$ et $m \neq 0$.
Soit $\bar{x} = 0$, alors nécessairement q n'est pas nul et appartient à M donc q appartient à Y et $1.m = 1.q \in X \oplus Y$ et $m = 1.m \neq 0$.

En résumé on peut donc bien écrire : $X \oplus Y \underset{\Sigma}{\triangleq} M$. De plus Y est maximal pour la famille $\mathcal{F}$ ordonné par inclusion des sous-modules Z de M tels que $X \oplus Z \underset{\Sigma}{\triangleq} M$. Soit en effet $Y' \geqslant Y$ et $X \oplus Y' \underset{\Sigma}{\triangleq} M$, on peut écrire $Y \underset{\Sigma}{\triangleq} Y'$ car soit $y' \in Y'$, $\{\lambda \mid \lambda y' \in Y\} = \{\lambda \mid \lambda y' \in X \oplus Y\} \in \Sigma$ et $I_Y(y')y' = I_{X \oplus Y}(y').y' \neq 0$ si $y' \neq 0$. Par suite, Y étant un Σ-complément, on a $Y = Y'$ et Y est un Σ-complément relatif de X.

<u>Proposition 20</u> : Soit X un Σ-complément fort, soit Y un Σ-complément relatif de X, X est un Σ-complément relatif de Y.

<u>Démonstration</u> : Soit $X \oplus Y \underset{\Sigma}{\triangleq} M$ et soit X' un Σ-complément relatif de Y contenant X, -il en existe-. Démontrons que l'on a $X \underset{\Sigma}{\triangleq} X'$: on a $X \oplus Y \underset{\Sigma}{\triangleq} X' \oplus Y$ et si x' appartient à X', on peut écrire : $I_X(x') = \{\lambda \in A \mid \lambda x' \in X \oplus Y\} \in \Sigma$ et $I_{X \oplus Y}(x') = I_X(x').x' \neq 0$, si $x' \neq 0$. X étant un Σ-complément, on en déduit $X'=X$.

<u>Proposition 21</u> : Tout Σ-complément fort est un complément. La réciproque n'est pas vraie en général. Tout complément est un Σ-complément, la réciproque n'est pas vraie en général.

<u>Démonstration</u> :

Soit X un complément, c'est un Σ-complément car si $X \underset{\Sigma}{\triangleq} X'$ on a $X \triangle X'$ donc $X = X'$.

Si l'on prend pour Σ la famille réduite à l'anneau A, elle vérifie les conditions C1, C2, C3 de Sanderson, la relation $\underset{\Sigma}{\triangleq}$ se réduit à l'égalité et tout sous-module est un Σ-complément car tout module est Σ-injectif. En général tout sous-module n'est pas un complément. Soit X un Σ-complément fort, soit Z un Σ-complément relatif de X, Z est un complément relatif de X car :

$X \oplus Z \underset{\Sigma}{\triangleq} M \Longrightarrow X \oplus Z \triangle M$ et $X \cap Z = 0$; de plus si $Z \leqslant Z'$ et $X \cap Z' = 0$ on déduit $X \oplus Z \leqslant X \oplus Z' \leqslant M$ donc $X \oplus Z' \underset{\Sigma}{\triangleq} M$ et $Z = Z'$.

On voit donc de même que X est un complément relatif de Z donc un complément. La réciproque est fausse en général car si Σ est la famille réduite à A, les Σ-compléments forts sont les facteurs directs de M et les compléments ne sont pas en général facteurs directs de M.

Proposition 22 : Tout Σ-complément relatif d'un sous-module Σ-complément fort de M, non Σ-fermé, contient un élément non nul dont l'annulateur est un idéal à gauche Σ-essentiel de A.

Démonstration :

Si X est un Σ-complément fort non Σ-fermé dans M, $X_\Sigma = \left\{x \in M \,\middle|\, X \underset{x}{\overset{\Delta}{\underset{\Sigma}{=}}} A\right\}$ contient strictement X (remarque 6 page 18). Si Y est un Σ-complément relatif de X, d'après la proposition 20, X est un Σ-complément relatif de Y donc, puisque M est extension Σ-essentielle de $X_\Sigma + Y$ (on a en effet $X \oplus Y \leqslant X_\Sigma + Y \leqslant M$), on a $X_\Sigma \cap Y \neq 0$ (sinon on pourrait écrire $X_\Sigma \oplus Y \underset{\Sigma}{\overset{\Delta}{=}} M$ et ceci contredirait la maximalité de X). Si $x \neq 0$ appartient à $X_\Sigma \cap Y$, $X^{\bullet}.x = \mathrm{Ann}(x)$ est Σ-essentiel dans A.

Corollaire :

Si X est un Σ-complément fort contenant le sous-module Σ-singulier $j_\Sigma(M)$ d'un A-module M, alors X est un sous-module Σ-fermé.

Démonstration :

Si X n'était pas Σ-fermé, d'après la propriété 22, dans tout Σ-complément relatif Y de X se trouverait un élément non nul de $j_\Sigma(M)$ ce qui est impossible car $Y \cap X = 0$.

Proposition 23 : Soit X un sous-module Σ-complément fort non Σ-fermé dans un A-module M, il existe un élément non nul y appartenant à M tel que $Ay \cap X = 0$ et un élément x non nul appartenant à X tel que $A(x + y)$ soit extension Σ-essentielle de $A(x + y) \cap X$.

Démonstration :

Il existe $z \in M$, $z \notin X$, tel que $\forall a \in A$ avec $az \neq 0$, on ait $I_X(az) \in \Sigma$ et $I_X(az).az \neq 0$. Soit Y un Σ-complément relatif de X dans M, $X + Az$ contient strictement X, donc $Y \cap (X + Az) \neq 0$ car X est un Σ-complément relatif de Y (Proposition 20).

Soit alors $y \neq 0$, $y \in Y$, $x \in X$ tels que $y = -x + bz$. On a $bz \neq 0$ sinon $y = -x = 0$ et ceci contredit $y \neq 0$. Par ailleurs $x \neq 0$, sinon on aurait $Abz \cap X = 0$ car si $x = 0$ on peut écrire $Abz \subseteq Ay \subseteq Y$ et comme $Y \cap X = 0$ on aurait $Abz \cap X = 0$ et ceci contredirait le choix de z. Alors, quel que soit $\alpha \in A$, tel que $\alpha(x + y) \neq 0$, on en déduit $A\alpha(x + y) \cap X \neq 0$ car $\alpha(x + y) = \alpha bz \neq 0$ et $A\alpha bz \cap X \neq 0$. De plus $I_{A(x+y)\cap X}[\alpha(x + y)] = \{\lambda \mid \lambda\alpha bz \in X\} = I_X(\alpha bz) \in \Sigma$.

<u>Proposition 24</u> : Soit M un A-module, soit X un sous-module Σ-complément fort de M non Σ-fermé, il existe deux éléments x et y non nuls de M tels que :

(a) $Ax \cap Ay = (0)$, $\mathrm{Ann}\, x \supseteq \mathrm{Ann}\, y$.

(b) $A/_{\mathrm{Ann}(x)}$ est extension Σ-essentielle de $\mathrm{Ann}(x)/_{\mathrm{Ann}(y)}$.

<u>Démonstration</u> :

Soit X un sous-module Σ-complément fort de M, non Σ-fermé dans M. D'après la proposition 23 il existe x non nul, y non nul, $y \in X$ tels que $Ax \cap X = (0)$ (on intervertit x et y par rapport à l'énoncé de la proposition 23) et $A(x + y)$ est extension Σ-essentielle de $A(x+y) \cap X$. Si β appartient à $\mathrm{Ann}(y)$, $\beta(x + y) = \beta x$ et $A\beta x \cap X = (0)$ puisque $Ax \cap X = (0)$ d'où $\beta x = 0$ puisque $A(x + y) \cap X \underset{\Sigma}{\overset{\Delta}{}} A(x + y)$ et on déduit finalement que ann(x) contient ann(y).
De plus on a $\mathrm{Ann}(x + y) = \mathrm{Ann}(x) \cap \mathrm{Ann}(y) = \mathrm{Ann}(y)$, car $Ax \cap Ay = (0)$, et $A(x + y) \cap X$ est isomorphe à $X^{\bullet}.(x + y)/_{\mathrm{Ann}(y)} = \mathrm{Ann}(x)/_{\mathrm{Ann}(y)}$, car $\lambda(x + y) \in X$ équivaut à $\lambda x \in X$ c'est-à-dire à $\lambda x = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

(1) G. Rinault : Etude des compléments d'un module. Thèse Faculté des Sciences de Paris 1966.

(2) Sanderson : "A generalisation of divisibility and injectivity in modules". Canad. Math. Bull. Volume 8, 1965, pages 505 à 513.

(3) G. Maury : Σ-compléments, C. R. Académie Sciences Paris, 22 Janvier 1968.

(4) Hudry : Sous-modules Σ - clos, Sous - module Σ-compléments relatifs. Σ- dimensions d'un module. Publications du département de mathématiques de la Faculté des Sciences de Lyon. Année 1968, tome 1

Nota bene : L'auteur se réserve la possibilité de publier ce qui précède dans un périodique imprimé.