

J. P. BAUER

Sur les multiples et les contremultiples d'un système d'entiers donnés

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1967, tome 4, fascicule 4
, p. 1-60

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1967__4_4_A1_0

© Université de Lyon, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES MULTIPLES ET LES CONTREMULTIPLES

D'UN SYSTEME D'ENTIERS DONNES

J. P. BAUER

Il est classique de construire un crible d'ERATOSTENE pour former la suite des nombres premiers. On écrit la suite des entiers positifs dans l'ordre naturel de croissance (les entiers croissant dans le même sens que leur rang dans la suite) ; on barre successivement les multiples des nombres premiers déjà connus, rangés dans l'ordre naturel, 2, 3, ... Les nouveaux nombres premiers apparaissent successivement dans l'ordre naturel, comme entiers non barrés.

Si l'on arrête la recherche des nombres premiers (c'est à dire si l'on ne barre plus de multiples) après avoir obtenu n nombres premiers $u_1 = 2$, $u_2 = 3, \dots, u_n$, on obtient, en omettant ces nombres u_1, u_2, \dots, u_n , les entiers qui ne sont multiples d'aucun des nombres u_1, u_2, \dots, u_n , rangés dans l'ordre naturel. Corrélativement, la suite des nombres barrés en y comprenant les nombres u_1, u_2, \dots, u_n donne la suite des multiples d'un ou plusieurs nombres u_1, u_2, \dots, u_n rangés dans l'ordre naturel.

L'objet de ce travail est l'étude de telles suites : recherche du rang d'un nombre connu de la suite, recherche du nombre de la suite ayant un rang donné. Il était naturel de généraliser cette étude aux suites analogues obtenues en remplaçant l'ensemble des n nombres premiers 2, 3, ... par un ensemble d'entiers quelconques supérieurs à 1 : a, b, \dots, ℓ . Il est d'autre part utile d'introduire les nombres nul ou négatifs dans l'ordre naturel de décroissance et en les affectant de rangs nul ou négatifs.

L'essentiel des résultats de ce travail a été résumé dans une Note aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences t. 250, p. 3098-3100, séance du 9 mai 1960.

Première partie.I. Notations et résultats préliminaires

Nous considérons essentiellement des entiers positifs, négatifs ou nuls. Lorsque les nombres considérés ne seront pas entiers, ils seront réels. Nous utiliserons couramment les quotients entiers par défaut de 2 entiers, ou de 2 nombres réels, et quelques opérations voisines. Pour avoir des conventions cohérentes, nous utiliserons les notations et propriétés suivantes.

1) Nous appellerons "sérielles" les suites que nous considérons, pour rappeler le caractère arithmétique de leur définition. En général, ces sérielles seront formées par des nombres entiers rangés par ordre de croissance.

2) A et B \neq 0 étant 2 nombres réels quelconques, nous désignerons par $\lfloor \frac{A}{B} \rfloor$ (ou A divisé entièrement par B, ou A sur B entièrement), le quotient entier par défaut de A par B, c'est-à-dire le nombre entier qui vérifie la double inégalité :

$$\frac{A}{B} - 1 < \lfloor \frac{A}{B} \rfloor \leq \frac{A}{B} \quad (1)$$

Nous désignerons par $A \overline{\lfloor} B$ (ou A contre B entièrement) le reste de la division entière de A par B, c'est-à-dire :

$$A \overline{\lfloor} B = A - B \lfloor \frac{A}{B} \rfloor$$

3) Nous désignerons par $\lceil \frac{A}{B} \rceil$ (ou A divisé premièrement par B, ou A sur B premièrement), l'entier immédiatement inférieur ou quotient entier par excès de A par B, c'est-à-dire l'entier qui vérifie la double inégalité :

$$\frac{A}{B} - 1 \leq \lceil \frac{A}{B} \rceil < \frac{A}{B}$$

(1) C'est pour des raisons de cohérence que nous n'utilisons pas la notation classique $\left[\frac{A}{B} \right]$

Nous désignerons par $A \overline{B}$ (ou A contre B premièrement) le reste de la division première de A par B , c'est-à-dire

$$A \overline{B} = A - B \overline{\frac{A}{B}}$$

4) Lemme 1 : le quotient entier d'une somme de n nombres réels a_1, a_2, \dots, a_n

par un nombre réel C :

$$\overline{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{C}}$$

est égal à la somme :

$$\overline{\frac{b_1}{C}} + \overline{\frac{b_2}{C}} + \dots + \overline{\frac{b_n}{C}}$$

où les b_i sont déterminés par la formule de récurrence :

$$b_{i+1} = b_i \overline{C + a_{i+1}} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

avec $b_1 = a_1$.

Démonstration : Pour une somme de 2 termes ($n=2$), la propriété est triviale :

$$\overline{\frac{a_1 + a_2}{C}} = \overline{\frac{a_1}{C}} + \overline{\frac{a_1 \overline{C + a_2}}{C}}$$

Démontrons donc la propriété par récurrence : supposons qu'elle soit vérifiée pour une somme de n termes et considérons une somme de $n+1$ termes.

D'après la propriété relative à une somme de 2 termes :

$$\begin{aligned} \overline{\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n+1}}{C}} &= \overline{\frac{a_1}{C}} + \overline{\frac{a_1 \overline{C + a_2 + a_3 + \dots + a_{n+1}}}{C}} \\ &= \overline{\frac{b_1}{C}} + \overline{\frac{b_2 + a_3 + \dots + a_{n+1}}{C}} \end{aligned}$$

mais, d'après la propriété admise pour une somme de n termes :

$$\overline{\frac{b_2 + a_3 + \dots + a_{n+1}}{C}} = \overline{\frac{b_2}{C}} + \overline{\frac{b_3}{C}} + \dots + \overline{\frac{b_{n+1}}{C}}$$

où

$$b_{i+1} = b_i]C + a_{i+1} \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

ce qui démontre la propriété pour une somme de $n+1$ termes et complète le raisonnement par récurrence.

Lemme I bis. Le reste de la division entière d'une somme de n nombres réels a_1, a_2, \dots, a_n par un nombre réel C .

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)]C$$

est égal au reste

$$b_n]C$$

où b_n est déterminé par la formule de récurrence :

$$b_{i+1} = b_i]C + a_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

avec $b_1 = a_1$.

Démonstration : Pour une somme de 2 termes, la propriété est triviale :

$$(a_1 + a_2)]C = (a_1]C + a_2)]C.$$

Démontrons la propriété par récurrence. Supposons qu'elle soit vérifiée pour une somme de n termes, et considérons une somme de $n+1$ termes. D'après la propriété relative à une somme de 2 termes

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1})]C &= (a_1]C + a_2 + a_3 + \dots + a_{n+1})]C \\ &= (b_2 + a_3 + \dots + a_{n+1})]C. \end{aligned}$$

Mais d'après la propriété admise pour une somme de n termes,

$$(b_2 + a_3 + \dots + a_{n+1})]C = b_{n+1}]C$$

où

$$b_{i+1} = b_i]C + a_{i+1} \quad (i = 2, 3, \dots, n),$$

ce qui démontre la propriété pour $n+1$ termes.

5) Lemme II.

Le quotient premièrement d'une somme de n nombres réels a_1, a_2, \dots, a_n par un nombre réel C :

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{C}$$

est égal à la somme

$$\frac{b_1}{C} + \frac{b_2}{C} + \dots + \frac{b_n}{C}$$

où les b_i sont déterminés par la formule de récurrence :

$$b_{i+1} = b_i C + a_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

avec $b_1 = a_1$.

La démonstration est analogue à celle du lemme I.

Lemme II bis. Le reste premièrement d'une somme de n nombres réels a_1, a_2, \dots, a_n par un nombre réel C :

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \text{ r } C$$

est égal au reste premièrement :

$$b_n \text{ r } C$$

où b_n est déterminé par la formule de récurrence :

$$b_{i+1} = b_i C + a_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

avec $b_1 = a_1$.

La démonstration est analogue à celle du lemme I bis.

6) Lemme III. Si A et B sont des entiers, $B > 1$ et A non multiple de B , ils vérifient la relation :

$$\frac{A}{B} = \frac{A - \frac{A}{B}}{B-1}$$

Démonstration. Posons :

$$\left\lfloor \frac{A}{B} \right\rfloor = q.$$

Si B n'est pas multiple de A, q vérifie la double inégalité :

$$\frac{A}{B} - 1 < q < \frac{A}{B}$$

ou encore, si B est positif :

$$A - Bq < B < A.$$

En retranchant l'entier q aux 3 membres, on en déduit :

$$A - q - B < q(B-1) < A - q$$

et aussi, puisque les 3 membres sont entiers :

$$A - q - B + 1 \leq q(B-1) < A - q.$$

Si B-1 est positif, on en déduit encore :

$$\frac{A-q}{B-1} - 1 \leq q < \frac{A-q}{B-1}$$

ce qui exprime bien que :

$$q = \left\lfloor \frac{A-q}{B-1} \right\rfloor$$

(Remarquons que la formule n'est plus valable lorsque A est multiple de B ; on a dans ce cas : $\left\lfloor \frac{A}{B} \right\rfloor = \frac{A}{B} = \frac{A - \left\lfloor \frac{A}{B} \right\rfloor}{B-1}$).

Lemme IIIbis. Réciproque. Si A, B et q sont entiers, B > 1, et qu'ils vérifient la relation :

$$q = \left\lfloor \frac{A-q}{B-1} \right\rfloor$$

q est le quotient entier $\left\lfloor \frac{A}{B} \right\rfloor$, et A n'est pas multiple de B.

Démonstration. Par définition de la division première :

$$\frac{A-q}{B-1} - 1 \leq q < \frac{A-q}{B-1}$$

ou encore, B-1 étant positif :

$$A - q - B + 1 \leq q(B-1) < A - q$$

et puisque les 3 membres de cette relation sont entiers :

$$A - q - B + 1 \leq q(B-1) \leq A - q - 1.$$

En ajoutant q aux trois membres :

$$A - B + 1 \leq q B \leq A - 1$$

et, comme B est positif :

$$\frac{A}{B} - 1 + \frac{1}{B} \leq q \leq \frac{A}{B} - \frac{1}{B} < \frac{A}{B}$$

ce qui montre bien que

$$q = \frac{A}{B}$$

et que $q \neq \frac{A}{B}$, que la fraction $\frac{A}{B}$ n'est pas entière, et donc que A n'est pas multiple de B .

Lemme III ter. Si A et B sont des entiers $B > 1$, et A non multiple de B , le reste

entièrement de A par B et le reste premièrement de $A - \frac{A}{B}$ par

$B-1$ sont égaux, selon la relation :

$$A \text{ r } B = (A - \frac{A}{B}) \text{ r } (B-1).$$

Démonstration. Posons $\frac{A}{B} = q$.

$$A \text{ r } B = A - B q$$

par ailleurs :

$$(A - \frac{A}{B}) \text{ r } (B-1) = A - q - (B-1) \frac{A-q}{B-1}$$

Mais, d'après le lemme III,

$$\frac{A-q}{B-1} = q.$$

D'où :

$$(A - \frac{A}{B}) \text{ r } (B-1) = A - q - (B-1)q = A - Bq = A \text{ r } B$$

ce qui termine la démonstration.

II - Contremultiples d'un système d'entiers donnés.

1) Soit a, b, \dots, ℓ un ensemble de λ nombres entiers supérieurs à 1, distincts ou non, que nous appellerons "entiers de base".

Désignons par $\Gamma_{e, \dots, j}$ le plus petit commun multiple des entiers e, \dots, j choisis parmi ces nombres de base, $\gamma_{e, \dots, j}$ désignera le nombre des entiers e, \dots, j . Les plus petits communs multiples Γ constituent un ensemble de $2^\lambda - 1$ entiers que nous appellerons "entiers de référence".

2) Pour une fonction $F(\Gamma)$, dont l'argument Γ prend ses valeurs parmi les entiers de référence Γ , nous écrirons :

$$\begin{aligned} \Sigma F(\Gamma) = & F(a) + \dots + F(1) - F(\Gamma_{abb}) - \dots - F(\Gamma_{k, \ell}) \\ & + \dots + (-1)^{\lambda+1} F(\Gamma_{a, \dots, \ell}). \end{aligned}$$

et :

$$\Sigma' F(\Gamma) = \Sigma F(\Gamma) - F(\Gamma).$$

3) Nous appellerons contremultiple du système d'entiers a, b, \dots, ℓ tout entier positif ou négatif qui n'est multiple d'aucun des entiers a, b, \dots, ℓ . Nous appellerons multiple de ce système d'entiers tout entier positif, nul ou négatif qui est multiple d'un ou plusieurs de ces entiers.

Les contremultiples du système a, b, \dots, ℓ rangés dans l'ordre de croissance constituent la sériale $\alpha_{a, b, \dots, \ell}$. L'ordre de cette série est le nombre λ de ses entiers de base. Chaque terme de la série est affecté d'un rang s positif, nul ou négatif. Par convention, l'entier λ est de rang 1 et l'entier -1 de rang 0. $N = \alpha_{a, \dots, \ell}(s)$ désigne le terme de rang s dans la série ; la fonction inverse de la fonction $\alpha(s)$ est désignée par $\psi_{a, \dots, \ell}^{(N)} = s$.

Exemple : sériale α_3

$$s = \psi(N) \dots -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 \dots$$

$$N = \alpha(s) \dots -7 -5 -4 -2 -1 1 2 4 5 7 \dots$$

Nous étudions les propriétés des 2 fonctions inverses $\psi(N)$ et $\alpha(s)$.

4) Théorème I

La fonction $\alpha(s)$ est la somme d'une fonction périodique et d'une fonction linéaire croissante.

Démonstration. Si l'entier N appartient à la sériale, l'entier $N+KP$ appartient aussi à la sériale, si K est un entier arbitraire positif, nul ou négatif, et si $P = \Gamma_{a, \dots, \ell}$ est le plus petit commun multiple de tous les entiers de base a, \dots, ℓ . De plus si le rang de N dans la sériale est s , le rang de $N+KP$ est $s+KF$ où F désigne le nombre de termes de la sériale compris entre 0 et P . Les conventions pour les rangs $\psi(1) = 1$, et $\psi(-1) = 0$ ont été choisies pour que cette périodicité s'étende aux rangs nuls ou négatifs. La fonction $\alpha(s)$ vérifie ainsi la relation fonctionnelle :

$$\alpha(s + KF) = \alpha(s) + KP$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\alpha(s) = \alpha\left(s \frac{F}{P}\right) + \frac{s}{F} P.$$

De la première de ces relations, on tire :

$$\alpha(s + KF) - \frac{P}{F} (s + KF) = \alpha(s) - \frac{P}{F} s$$

ce qui démontre le théorème puisque F est inférieur à P .

Propriété corrélatrice.

La fonction $\psi(N)$ vérifie la relation corrélatrice :

$$\psi(N + KP) = \psi(N) + KF$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\psi(N) = \psi\left(N \frac{F}{P}\right) + \frac{N}{P} F$$

Nous appellerons $P = \Gamma_{a, \dots, l}$ la période de la sériale, et F la fréquence de la sériale. Nous donnerons plus loin une expression de la fréquence en fonction des entiers de base.

Théorème II complémentaire.

La courbe représentant en coordonnées cartésiennes la fonction $\alpha(s)$ admet une infinité dénombrable de centres de symétrie situés sur la droite $Y = \frac{PX}{F} - \frac{P}{2F}$ et d'abscisses $X = K \frac{F}{2} + \frac{1}{2}$ où K est un nombre entier positif, nul ou négatif.

Démonstration.

Soit P_1 le point de la courbe représentant la sériale $\alpha(s)$ d'abscisse $X_1 = s$ et d'ordonnée $Y_1 = \alpha(s)$. Soit M le point de la droite définie ci-dessus de coordonnées :

$$X_0 = K \frac{F}{2} + \frac{1}{2}$$

$$Y_0 = \frac{P}{F} \left(K \frac{F}{2} + \frac{1}{2} \right) - \frac{P}{2F} = \frac{KP}{2}.$$

On a :

$$X_1 - X_0 = s - K \frac{F}{2} - \frac{1}{2}$$

$$Y_1 - Y_0 = \alpha(s) - K \frac{P}{2}.$$

Considérons les coordonnées du point P_2 symétrique de P_1 par rapport à M :

$$X_2 = K \frac{F}{2} + \frac{1}{2} - \left(s - K \frac{F}{2} - \frac{1}{2} \right) = KF - s + 1$$

$$Y_2 = K \frac{P}{2} - \left[\alpha(s) - K \frac{P}{2} \right] = KP - \alpha(s).$$

Le nombre $KP - \alpha(s)$ fait partie de la sériale α , et y_2 le rang $KF - s + 1$.

En effet, on peut, en raison du caractère de périodicité de la sériale α , supposer $s > 0$ et $K = 0$.

Par ailleurs, en raison de nos conventions, on a :

$$\alpha(0) = -1 = -\alpha(1)$$

$$\alpha(-1) = -\alpha(2),$$

et, en continuant :

$$\alpha(-s+1) = -\alpha(s)$$

ce qui démontre le théorème II. (1).

III - Calcul du rang d'un terme d'une série α .

Le problème le plus simple que nous traiterons d'abord est le calcul du rang d'un terme donné d'une série α , donc le calcul des valeurs de la fonction $\Psi(N)$ pour les entiers N de la série.

1) Lemme IV. Si N est un entier positif arbitraire, le nombre de multiples

d'un système d'entiers a, b, \dots, ℓ compris entre 1 et N et pouvant

être égaux à N est :

$$r = \sum \frac{N}{\Gamma}$$

Démonstration. Si N est un entier positif arbitraire, le nombre des multiples d'un entier positif a compris entre 1 et N et pouvant valoir N est :

$$\frac{N}{a}$$

le nombre des multiples, soit de a , soit de b compris entre les mêmes limites est :

$$\frac{N}{a} + \frac{N}{b} - \frac{N}{\Gamma_{a,b}}$$

(1) A de Polignac a étudié des suites qu'il appelle "diatomiques". En employant nos notations, ce sont celles formées par les différences $\alpha(s) - \alpha(s-1) - 1$, s croissant. Il ne les envisage que dans le domaine positif, et les entiers de base étant les n premiers nombres premiers $2, 3, \dots$. Il note les caractères de périodicité et de symétrie de ces suites diatomiques. (A. de Polignac : nouvelles recherches sur les nombres premiers, J. de Math. 19 - 1854 p. 305).

puisque les multiples de $\Gamma_{a,b}$ figurent à la fois parmi les multiples de a et ceux de b . La définition de l'expression $\Sigma F(\Gamma)$, (II,2) a été choisie de manière que le nombre des multiples d'un système d'entiers a,b,\dots,ℓ compris entre 1 et N et pouvant valoir N soit :

$$r = \Sigma \left\lfloor \frac{N}{\Gamma} \right\rfloor$$

pour abrégé, nous désignerons aussi cette fonction de N par :

$$\Xi_{a,b,\dots,\ell}(N)$$

2) Lemme V. Si N est un terme positif de la série α , si $\Xi(N)$ désigne l'expression $\Sigma \frac{N}{\Gamma}$, et si $\Psi(N)$ désigne le rang de N dans la série α , la somme $\Xi(N) + \Psi(N)$ est égale à N selon la relation :

$$N = \Xi(N) + \Psi(N).$$

Cette relation est encore vérifiée si N est un entier quelconque positif, nul ou négatif, et si $\Psi(N)$ désigne le rang dans la série α du plus grand terme de cette série inférieur ou égal à N .

Démonstration. Supposons d'abord que N soit un terme positif de la série α .

La somme du nombre des multiples et du nombre des contremultiples d'un système d'entiers a,b,\dots,ℓ compris entre 1 et N et pouvant valoir 1 ou N est évidemment N . Or la définition des rangs des termes des séries α a été choisie pour que le rang $s = \Psi(N)$ d'un terme positif N soit égal au nombre de termes de la série compris entre 1 et N et pouvant être égaux à 1 et à N . On en déduit :

$$N = \Xi(N) + \Psi(N)$$

Supposons maintenant que N soit un multiple positif du système d'entiers a,\dots,ℓ et désignons par N_1 le terme de la série α qui lui est immédiatement inférieur. On a :

$$N - N_1 = \Xi(N) - \Xi(N_1)$$

puisque entre N et N_1 il n'y a que des multiples du système d'entiers considéré.

Par ailleurs, nous venons de démontrer que :

$$N_1 = \Xi(N_1) + \Psi(N_1)$$

Additionnons membre à membre ces deux relations. Nous obtenons :

$$N = \Xi(N) + \Psi(N_1)$$

Si nous désignons par $\Psi(N)$ le rang dans la série α du plus grand terme de cette série inférieur ou égal à N , nous avons par définition :

$$\Psi(N) = \Psi(N_1)$$

On en déduit finalement :

$$N = \Xi(N) + \Psi(N).$$

Soit enfin N un entier quelconque, positif, nul ou négatif. Comme les fonctions $\frac{N}{T}$ et par suite $\Xi(N)$, ont le même caractère de périodicité que la fonction $\Psi(N)$, cette formule reste vraie pour les valeurs nulles ou négatives de N , ce qui termine la démonstration du lemme V.

Nous noterons encore la formule précédente sous la forme de l'identité :

$$N = s + \sum \frac{N}{T} \quad (1)$$

où N est un entier donné positif, nul ou négatif, et où $s = \Psi(N)$ est le rang du plus grand terme de la série α qui soit inférieur ou égal à N .

3) Théorème III. Si N est un terme d'une série α , son rang s dans cette série est donné par la formule :

$$s = N - \sum \frac{N}{T} \quad (1 \text{ bis})$$

Si N est un entier qui ne fait pas partie de la série α , cette formule donne le rang du plus grand terme de cette série qui lui soit inférieur.

Démonstration. De la relation (1) du lemme V précédente, on tire :

$$s = \Psi(N) = N - \Xi(N) = N - \sum \frac{N}{T} \quad (1 \text{ bis})$$

où

$s = \Psi(N)$ désigne le rang du plus grand terme de la série inférieure ou égal à N , ce qui termine la démonstration. (1)

4) En particulier, la formule (1 bis) donne, pour $N = P$ une expression de la fréquence :

$$F = \Psi(P) = P - \sum \frac{P}{\Gamma} = \Gamma_{a, \dots, l} - \sum \frac{\Gamma_{a, \dots, l}}{\Gamma}$$

Exemple : série $\alpha_{4,6}$

$$P = \Gamma_{4,6} = 12$$

$$F = 12 - \left\lfloor \frac{12}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{12}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{12}{12} \right\rfloor = 8$$

5) Théorème IV. Si N est un entier donné, positif, nul ou négatif,

et si $\alpha(s)$ est le terme de rang s de la série α , on a :

$$\begin{aligned} (2) \quad N - \lfloor N \rfloor &< s & , & \quad \text{si } N < \alpha(s). \\ N - \lfloor N \rfloor &= s & , & \quad \text{si } \alpha(s) \leq N < \alpha(s+1) \\ N - \lfloor N \rfloor &> s & , & \quad \text{si } N \geq \alpha(s+1) \end{aligned}$$

Démonstration. Soit N un entier donné, positif, nul ou négatif, et soit N_1 le plus grand terme de la série α qui lui soit inférieur ou égal, et s le rang de N_1 dans la série. D'après la première partie du théorème III (3),

$$s = \Psi(N_1) = N_1 - \lfloor N_1 \rfloor$$

où s peut être défini par la double inégalité :

$$N_1 = \alpha(s) \leq N < \alpha(s+1)$$

Comme les fonctions $\alpha(s)$ et $\Psi(N)$ sont non décroissantes, on peut donc encore généraliser la formule (1 bis) par l'ensemble des 3 relations (2).

(1) Legendre a noté cette formule (1), mais seulement dans le cas où les entiers a, \dots, l sont des nombres premiers distincts les uns des autres, comme un cas particulier d'une formule donnant le nombre de termes d'une progression arithmétique limitée non divisible par les nombres premiers. (Legendre, Théorie des Nombres, 4ème édit. Librairie Blanchard t. II p. 94. - L. E. DICKSON, History of the Theory of numbers Vm I pp 115 et 429).

IV. Première formule pour le calcul de $\alpha(s)$.

1) La formule (1) exprimant le lemme V (III,2) peut être traduite par une relation fonctionnelle vérifiée par la fonction $\alpha(s)$

$$\alpha(s) = s + \Xi [\alpha(s)] .$$

Pour calculer la valeur de $\alpha(s)$ correspondant à un choix donné de l'entier s , on peut essayer de résoudre cette relation par approximations successives.

Théorème V. Les approximations successives ϕ_i définies par la formule de récurrence

$$\phi_{i+1} = s + \Xi(\phi_i)$$

à partir d'un entier arbitraire ϕ_0 convergent vers $\alpha(s)$ si $\phi_0 < \alpha(s)$, sont constantes pour $\alpha(s) < \phi_0 < \alpha(s+1)-1$, et convergent vers $\alpha(s+1)-1$ si $\phi_0 > \alpha(s+1)$.

Démonstration. Choisissons un entier arbitraire ϕ_0 et définissons la i -ième approximation successive ϕ_{i+1} par la formule de récurrence :

$$\phi_{i+1} = s + \Xi(\phi_i),$$

et cherchons la limite de ϕ_i lorsque i croit indéfiniment.

Les relations (2) montrent que :

$$\begin{aligned} s + \Xi(\phi_i) &> \phi_i & , & \quad \text{si } \phi_i < \alpha(s), \\ s + \Xi(\phi_i) &= \phi_i & , & \quad \text{si } \alpha(s) \leq \phi_i < \alpha(s+1) \\ s + \Xi(\phi_i) &< \phi_i & , & \quad \text{si } \phi_i > \alpha(s+1). \end{aligned}$$

D'autre part, la fonction $\Xi(N)$ étant non décroissante, la relation

$$\alpha(s) = s + \Xi[\alpha(s)]$$

montre que

$$s + \Xi(\phi_i) \leq \alpha(s) \quad \text{si } \phi_i < \alpha(s).$$

De même la relation

$$\alpha(s+1) = s+1 + \Xi[\alpha(s+1)]$$

montre que

$$s + \Xi(\phi_i) \geq \alpha(s+1)-1 \quad \text{si } \phi_i > \alpha(s+1)$$

Donc, si ϕ_0 a été choisi inférieur à $\alpha(s)$, les approximations successives croissent avec l'indice i , jusqu'à atteindre $\alpha(s)$ puis restent invariantes. Si ϕ_0 a été choisi supérieur ou égal à $\alpha(s+1)$, elles décroissent lorsque l'indice i croit, jusqu'à atteindre $\alpha(s+1)-1$, puis restent invariantes. Enfin si ϕ_0 a été choisi entre $\alpha(s)$ et $\alpha(s+1)-1$, elles restent invariantes.

La méthode des approximations successives conduit donc effectivement au calcul de $\alpha(s)$, si s est positif, en choisissant par exemple $\phi_0 = 0$ ou s (car $0 < s < \alpha(s)$). Si s est négatif, on peut par exemple appliquer la méthode des approximations successives à l'entier $s' = s-1$, en partant de l'approximation $\phi_0 = 0$; le résultat obtenu n'est toutefois pas $\alpha(s)$, mais l'entier inférieur $\alpha(s'+1)-1 = \alpha(s)-1$.

2) La méthode précédente conduit facilement à une formule explicite pour la fonction $\alpha_a(s)$.

Théorème VI. Le terme de rang $\frac{s}{a}$ d'une sériale α définie par un seul entier de base a est donné par la formule :

$$\alpha_a(s) = s + \left\lfloor \frac{s}{a-1} \right\rfloor .$$

Démonstration. Supposons s positif et choisissons pour première approximation $\phi_0 = s$. Les approximations suivantes sont :

$$\phi_1 = s + \left\lfloor \frac{s}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(a+1)s}{a} \right\rfloor$$

$$\phi_2 = s + \left\lfloor \frac{(a+1)s}{a^2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(a^2+a+1)s}{a^2} \right\rfloor$$

d'après le lemme I (I,4), pour une somme de 2 termes. Par récurrence, on obtient la formule générale :

$$\phi_n = \left\lfloor \frac{(a^n + a^{n-1} + \dots + 1)s}{a^n} \right\rfloor$$

or pout tout n :

$$\frac{(a^n + a^{n-1} + \dots + 1)s}{a^n} < \frac{as}{a-1}$$

et le premier nombre tend vers le second. Par suite, pour n suffisamment grand, le premier n'est pas entier et diffère du second nombre de moins d'une unité ; donc, pour ces valeurs de n :

$$\frac{as}{a-1} - 1 < \phi_n < \frac{(a^n + a^{n-1} + \dots + 1)s}{a^n} < \frac{as}{a-1}$$

ce qui démontre la formule :

$$\alpha_a(s) = \lim. de \phi_n = \frac{as}{a-1} = s + \frac{s}{a-1}$$

Cette formule est vraie pour $s > 0$. Elle est également vraie pour $s < 0$ à cause du caractère de périodicité des fonctions qui interviennent.

3) On peut modifier le calcul des approximations successives ϕ_n et obtenir ainsi un développement de $\alpha(s)$ sous forme d'une somme (limitée).

En effet :

Théorème VII. La $n^{\text{ème}}$ approximation ϕ_n est égale à la somme :

$$\phi_n = \phi_0 + \Delta_s + \sum \left| \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right| + \sum \left| \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right| + \dots + \sum \left| \frac{v_{n-2,\Gamma}}{\Gamma} \right|$$

$$\text{où } \Delta_s = s - \Psi(\phi_0)$$

et où les $v_{1,\Gamma}$ sont définis par la formule de récurrence :

$$v_{i+1,\Gamma} = v_{i,\Gamma} \left[\Gamma + \sum \left| \frac{v_{i,\Gamma}}{\Gamma} \right| \right]$$

$$\text{avec } v_{0,\Gamma} = \phi_0 \left[\Gamma + \Delta_s \right]$$

Démonstration. Posons $\Psi(\phi_0) = s_0$, et

$s = s_0 + \Delta_s$, et remarquons que :

$$\phi_0 = s_0 + \sum \left| \frac{\phi_0}{\Gamma} \right| \quad ((1), (III, 2)).$$

En utilisant le lemme I (1,4) pour une somme de 2 termes, nous pouvons écrire les premières approximations :

$$\begin{aligned} \phi_0 & \\ \phi_1 &= s + \Sigma \left| \frac{\phi_0}{\Gamma} \right| = s_0 + \Delta s + \Sigma \left| \frac{\phi_0}{\Gamma} \right| = \phi_0 + \Delta s. \\ \phi_2 &= s + \Sigma \left| \frac{\phi_1}{\Gamma} \right| = s_0 + \Delta s + \Sigma \left| \frac{\phi_0 + s}{\Gamma} \right| \\ &= s_0 + \Delta s + \Sigma \left| \frac{\phi_0}{\Gamma} \right| + \Sigma \left| \frac{\phi_0 \int \Gamma + \Delta s}{\Gamma} \right| \\ &= \phi_0 + \Delta s + \Sigma \left| \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right| \\ \phi_3 &= s + \Sigma \left| \frac{\phi_2}{\Gamma} \right| = s_0 + \Delta s + \Sigma \left| \frac{\phi_0 + \Delta s + \Sigma \left| \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right|}{\Gamma} \right| \\ &= s_0 + \Delta s + \Sigma \left| \frac{\phi_0}{\Gamma} \right| + \Sigma \left| \frac{\phi_0 \int \Gamma + \Delta s + \Sigma \left| \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right|}{\Gamma} \right| \\ &= \phi_0 + \Delta s + \Sigma \left| \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right| + \Sigma \left| \frac{v_{0,\Gamma} \int \Gamma + \Sigma \left| \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right|}{\Gamma} \right| \\ &= \phi_0 + \Delta s + \Sigma \left| \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right| + \Sigma \left| \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right|. \end{aligned}$$

Démontrons donc la formule générale par récurrence. Supposons que la $n^{\text{ème}}$ approximation soit égale à la somme :

$$\phi_n = \phi_0 + \Delta s + \Sigma \left| \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right| + \Sigma \left| \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right| + \dots + \Sigma \left| \frac{v_{n-2,\Gamma}}{\Gamma} \right| \quad (3)$$

et calculons la $(n+1)^{\text{ème}}$ approximation :

$$\phi_{n+1} = s + \Sigma \left| \frac{\phi_n}{\Gamma} \right| = s_0 + \Delta s + \Sigma \left| \frac{\phi_0 + \Delta s + \Sigma \left| \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right| + \Sigma \left| \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right| + \dots + \Sigma \left| \frac{v_{n-2,\Gamma}}{\Gamma} \right|}{\Gamma} \right|$$

en utilisant le lemme I pour chacun des quotients entiers par les différents nombres de référence Γ , cette approximation peut s'écrire

$$\phi_{n+1} = s_0 + \Delta s + \Sigma \left(\left| \frac{\phi_0}{\Gamma} \right| + \left| \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right| + \left| \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right| + \left| \frac{v_{2,\Gamma}}{\Gamma} \right| + \dots + \left| \frac{v_{n-1,\Gamma}}{\Gamma} \right| \right) \quad (3_1)$$

ou

$$\phi_{n+1} = s_0 + \Delta s + \Sigma \left| \frac{\phi_0}{\Gamma} \right| + \Sigma \left| \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right| + \Sigma \left| \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right| + \Sigma \left| \frac{v_{2,\Gamma}}{\Gamma} \right| + \dots + \Sigma \left| \frac{v_{n-1,\Gamma}}{\Gamma} \right|$$

puisque les $v_{i,\Gamma}$ se calculent par la formule de récurrence :

$$v_{i+1,\Gamma} = v_{i,\Gamma} \left[\Gamma + \Sigma \left| \frac{v_{i,\Gamma}}{\Gamma} \right| \right], \text{ et que } v_{0,\Gamma} = \phi_0 \left[\Gamma + \Delta s. \right]$$

Comme $s_0 + \Sigma \left| \frac{\phi_0}{\Gamma} \right| = \phi_0$, ceci termine la démonstration par récurrence.

4) Le théorème permet de calculer $\alpha(s)$ comme la limite :

$$\alpha(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\phi_0 + \Delta s + \Sigma \left| \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right| + \Sigma \left| \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right| + \dots + \Sigma \left| \frac{v_{n-2,\Gamma}}{\Gamma} \right| \right]$$

en prenant $\phi_0 < \alpha(s)$.

Mais cette limite est celle d'un nombre entier non décroissant, qui ne peut tendre vers l'infini ; il atteint donc sa limite pour une valeur finie n_0 de n . Pour constater que cette limite est atteinte, il suffit d'ailleurs de vérifier que :

$$\Sigma \left| \frac{v_{n-1,\Gamma}}{\Gamma} \right| = 0$$

on a alors $n \geq n_0$.

5) Théorème VII bis. La $n^{\text{ème}}$ approximation ϕ_n est aussi égale à l'expression :

$$\phi_n = \Gamma \left(\left| \frac{\phi_0}{\Gamma} \right| + \left| \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right| + \left| \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right| + \dots + \left| \frac{v_{n-1,\Gamma}}{\Gamma} \right| \right) + v_{n-1,\Gamma} \left[\Gamma \right] \quad (4)$$

où les $v_{i,\Gamma}$ sont définis comme ci-dessus.

Démonstration. La relation (3_I) montre que :

$$\left| \frac{\phi_n}{\Gamma} \right| = \left| \frac{\phi_0}{\Gamma} \right| + \left| \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right| + \left| \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right| + \dots + \left| \frac{v_{n-1,\Gamma}}{\Gamma} \right| \quad (4_I).$$

Or la formule de récurrence déterminant les $v_{i,\Gamma}$ permet d'appliquer le lemme

I bis (I,4) et d'écrire :

$$\phi_n \left[\Gamma \right] = v_{n-1,\Gamma} \left[\Gamma \right],$$

ce qui termine la démonstration, puisque

$$\phi_n = \Gamma \left| \frac{\phi_n}{\Gamma} \right| + \phi_n \left[\Gamma \right],$$

6) Théorème VII ter complémentaire.

Pour que $\Sigma \left\lfloor \frac{v_{n-1, \Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor = 0$, il faut et il suffit que chaque $v_{n-1, \Gamma}$ soit inférieur au nombre de référence Γ correspondant.

Démonstration. Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Soit :

$$\Sigma \left\lfloor \frac{v_{n-1, \Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor = 0$$

D'où $n \geq n_0$ ((4) ci-dessus).

On a :

$$\phi_n = s + \Sigma \left\lfloor \frac{\phi_{n-1}}{\Gamma} \right\rfloor$$

Mais on a aussi, d'après le théorème V : $\phi_n = s + \Sigma \left\lfloor \frac{\phi_n}{\Gamma} \right\rfloor$.

Supposons que s soit positif, et que nous ayons également choisi ϕ_0 positif. Il en résulte que toutes les approximations successives ϕ_1 sont positives, puisque les ϕ_1 tendent de façon monotone soit vers $\alpha(s)$, soit vers $\alpha(s+1)-1$ qui sont positifs, ou restent égales à un nombre compris entre $\alpha(s)$ et $\alpha(s+1)-1$. $\Sigma \left\lfloor \frac{\phi_{n-1}}{\Gamma} \right\rfloor$ représente alors le nombre de multiples du système d'entiers a, \dots, l positifs et inférieurs ou égaux à ϕ_{n-1} , $\Sigma \left\lfloor \frac{\phi_n}{\Gamma} \right\rfloor$ le nombre de multiples du système a, \dots, l positifs et inférieurs ou égaux à ϕ_n .

Ces deux nombres étant égaux, entre ϕ_{n-1} et ϕ_n il n'y a aucun multiple d'aucun des entiers a, \dots, l , si bien que :

$$\left\lfloor \frac{\phi}{\Gamma} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\phi_{n-1}}{\Gamma} \right\rfloor \quad \text{quel que soit } \Gamma.$$

D'après la formule (4₃), il en résulte que chaque $\left\lfloor \frac{v_{n-1, \Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor$ est nul, chaque $v_{n-1, \Gamma}$ inférieur au nombre Γ correspondant.

Réciproquement, la condition est suffisante. En effet, si chaque

$$\left\lfloor \frac{v_{n-1, \Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor = 0, \quad \Sigma \left\lfloor \frac{v_{n-1, \Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor = 0 \quad \text{et } n \geq n_0.$$

En raison du caractère de périodicité des fonctions considérées, ce qui précède est vrai quel que soit s positif, nul ou négatif, et quel que soit ϕ_0 positif, nul ou négatif, ce qui termine la démonstration de ce théorème.

7) Les deux théorèmes VII bis et VII ter précédents permettent de calculer $\alpha(s)$ par une nouvelle formule.

Pour $n \geq n_0$, chaque $v_{n-1, \Gamma}$ est inférieur à Γ .

Pour $\phi_0 < \alpha(s)$, on peut donc écrire la relation (4) :

$$\alpha(s) = \phi_n = \Gamma \left(\left\lfloor \frac{\phi_0}{\Gamma} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{v_{0, \Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{v_{1, \Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{v_{n-2, \Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor \right) + v_{n-1, \Gamma}$$

$n \geq n_0$

8) Cas particuliers. Pour $s > 0$, on peut prendre $\phi_0 = 0$ qui est alors inférieur à $\alpha(s)$, et les formules précédentes se simplifient, car $\Psi(\phi_0) = 0$, $\Delta s = s$ et $\phi_0 \lfloor \Gamma = 0$.

D'où :

$$v_{0, \Gamma} = s \quad \text{et} \quad \phi_1 = s.$$

Il est alors aussi facile de partir de $\phi_0 = s$, ce qui décale de 1 les indices des $v_{1, \Gamma}$ par rapport à ceux des ϕ_1 . Nous obtenons ainsi finalement :

$$\alpha(s) = \lim_{n \text{ croissant}} \left[v_{0, \Gamma} + \sum \left\lfloor \frac{v_{0, \Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor + \sum \left\lfloor \frac{v_{1, \Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor + \dots + \sum \left\lfloor \frac{v_{n-1, \Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor \right]$$

avec $v_{0, \Gamma} = s$.

et $2^\lambda - 1$ fois

$$\alpha(s) = \Gamma \lim_{n \text{ croissant}} \left[\left\lfloor \frac{v_{0, \Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{v_{1, \Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{v_{n-1, \Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor \right] + \lim_{n \text{ croissant}} v_{n, \Gamma}$$

pour constater que les limites sont atteintes, il suffit de vérifier que chaque $v_{n, \Gamma}$ est inférieur au nombre Γ correspondant.

Exemple numérique.

soit à calculer $\alpha_{3,4}$ (8). ($\Gamma_3 = 3$, $\Gamma_4 = 4$, $\Gamma_{3,4} = 12$). Nous prendrons $\phi_0 = 8$ et $v_{0, \Gamma} = 8$ pour tous les Γ .

$$\left\lfloor \frac{v_{0,3}}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{8}{3} \right\rfloor = 2 \quad \left\lfloor \frac{v_{0,4}}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor = 2 \quad \left\lfloor \frac{v_{0,12}}{12} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{8}{12} \right\rfloor = 0$$

$$\Sigma \left| \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right| = 2 + 2 - 0 = 4$$

$$v_{1,3} = 8 \left[3 + 4 = 2 + 4 = 6 \right]$$

$$v_{1,4} = 8 \left[4 + 4 = 0 + 4 = 4 \right]$$

$$v_{1,12} = 8 \left[12 + 4 = 8 + 4 = 12 \right]$$

$$\left| \frac{v_{1,3}}{3} \right| = \left| \frac{6}{3} \right| = 2 \quad \left| \frac{v_{1,4}}{4} \right| = \left| \frac{4}{4} \right| = 1 \quad \left| \frac{v_{1,12}}{12} \right| = \left| \frac{12}{12} \right| = 1$$

$$\Sigma \left| \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right| = 2 + 1 - 1 = 2$$

$$v_{2,3} = 6 \left[3 + 2 = 0 + 2 = 2 \right]$$

$$v_{2,4} = 4 \left[4 + 2 = 0 + 2 = 2 \right]$$

$$v_{2,12} = 12 \left[12 + 2 = 0 + 2 = 2 \right]$$

Donc

$$\alpha_{3,4} = 8 + 4 + 12 = 14$$

$$= 3(2+2)+2 = 4(2+1)+2 = 12(0+1)+2.$$

Le calcul peut se disposer ainsi qu'il suit :

$$\begin{array}{r} 8 \\ 2 + 4 = 6 \\ 0 + 2 = 2 \end{array} \quad \left| \frac{3}{2+2} \right|$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 8 + 4 = 12 \\ 0 + 2 = 2 \end{array}$$

$$\left| \frac{12}{0+1} \right|$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 0 + 4 = 4 \\ 0 + 2 = 2 \end{array} \quad \left| \frac{4}{2+1} \right|$$

Les résultats sont alors immédiatement mis en évidence.

V - Seconde formule pour le calcul de $\alpha(s)$.

1) Nous appellerons "composantes divisionnaires" d'un entier N (pour le système d'entiers de base a, b, \dots, ℓ) les quotients entiers :

$$\rho_{\Gamma} = \left\lfloor \frac{N}{\Gamma} \right\rfloor$$

de N par les nombres de référence Γ . La relation fonctionnelle vérifiée par $\alpha(s)$ (IV,1) peut ainsi s'écrire :

$$\alpha(s) = s + \sum \rho_{\Gamma} \quad (5)$$

où les ρ_{Γ} sont les composantes divisionnaires de $\alpha(s)$. Par suite, les composantes divisionnaires d'un nombre $N = \alpha(s)$ de la sériale vérifient les relations fonctionnelles :

$$\rho_{\Gamma} = \left\lfloor \frac{s + \sum \rho_{\Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor \quad (6)$$

Théorème VIII. Les $2^{\lambda}-1$ composantes divisionnaires ρ_{Γ} de $\alpha(s)$ vérifient un

système de $2^{\lambda}-1$ relations de la forme :

$$\rho_{\Gamma} = \left\lfloor \frac{s + \sum' \rho_{\Gamma}}{\Gamma - 1} \right\rfloor \quad (7)$$

Démonstration. Si $N = \alpha(s)$ est un entier de la sériale, il n'est divisible par aucun des nombres de référence Γ ; nous pouvons donc appliquer le lemme III (I,6) aux seconds membres des relations (6) et écrire ces relations :

$$\rho_{\Gamma} = \left\lfloor \frac{s + \sum' \rho_{\Gamma}}{\Gamma - 1} \right\rfloor$$

Théorème VIII bis. Réciproque. Si $2^{\lambda}-1$ nombres entiers ρ_{Γ} vérifient le système constitué par les $2^{\lambda}-1$ relations (7), ce sont les $2^{\lambda}-1$ composantes divisionnaires de $\alpha(s)$, et par suite,

$$\alpha(s) = s + \sum \rho_{\Gamma} .$$

Démonstration. Par hypothèse, $\rho_{\Gamma} = \left\| \frac{s + \Sigma' \rho_{\Gamma}}{\Gamma-1} \right\|$

que l'on peut écrire :

$$\rho_{\Gamma} = \left\| \frac{(s + \Sigma \rho_{\Gamma}) - \rho_{\Gamma}}{\Gamma-1} \right\|$$

Regardons la somme $s + \Sigma \rho_{\Gamma}$ comme un entier N . D'après le lemme III bis (1,6) nous pouvons écrire $2^{\lambda}-1$ fois :

$$\rho_{\Gamma} = \left\| \frac{s + \Sigma \rho_{\Gamma}}{\Gamma} \right\|$$

et de plus en déduire que $N = s + \Sigma \rho_{\Gamma}$ n'est multiple d'aucun des entiers de référence Γ . N est donc un terme de la série α , et il y a le rang s . Sinon, d'après la relation (5), il faudrait supposer que deux termes distincts de la série α aient le même rang s , ce qui est contraire à nos conventions.

Le système des relations (7) caractérise donc les composantes divisionnaires ρ_{Γ} de $\alpha(s)$.

Théorème VIII ter. complémentaire. Le reste du quotient entièrement de $\alpha(s)$

par le nombre de référence Γ est égal au reste du quotient premièrement de la somme $s + \Sigma' \rho_{\Gamma}$ par $\Gamma-1$, où les ρ_{Γ} sont les composantes divisionnaires $\left\| \frac{\alpha(s)}{\Gamma} \right\|$ de $\alpha(s)$.

Démonstration. Nous pouvons écrire, en rapprochant les relations (6) et (7) :

$$\left\| \frac{s + \Sigma \rho_{\Gamma}}{\Gamma} \right\| = \left\| \frac{s + \Sigma \rho_{\Gamma} - \rho_{\Gamma}}{\Gamma-1} \right\| = \rho_{\Gamma}$$

En appliquant le lemme III ter (1,6), il vient :

$$(s + \Sigma \rho_{\Gamma}) \uparrow \Gamma = (s + \Sigma \rho_{\Gamma} - \rho_{\Gamma}) \uparrow (\Gamma-1) = (s + \Sigma' \rho_{\Gamma}) \uparrow (\Gamma-1) \quad (8)$$

ce qui démontre le théorème.

2) Nous pouvons considérer le système des relations (7) comme un système de $2^{\lambda}-1$ inconnues ρ_{Γ} et essayer de le résoudre dans l'intention de calculer $\alpha(s)$ par la formule :

$$\alpha(s) = s + \Sigma \rho_{\Gamma} .$$

Nous résoudrons d'abord de façon explicite le système (7) relatifs aux séries α_a et $\alpha_{a,b}$ ayant un seul et ayant deux entiers de base.

2₁) Théorème IX. La composante divisionnaire ρ_a de $\alpha_a(s)$ est égale à

$$\left\| \frac{s}{a-1} \right\|, \text{ et par suite :}$$

$$\alpha_a(s) = s + \left\| \frac{s}{a-1} \right\|$$

Démonstration. La relation (7) s'écrit pour la série α_a , puisque celle-ci n'a qu'un seul entier de base :

$$\rho_a = \left\| \frac{s + \sum \rho_\Gamma - \rho_a}{a-1} \right\| = \left\| \frac{s + \rho_a - \rho_a}{a-1} \right\| = \left\| \frac{s}{a-1} \right\|$$

D'où l'on déduit :

$$\alpha_a(s) = s + \sum \rho_\Gamma = s + \rho_a = s + \left\| \frac{s}{a-1} \right\|$$

Nous retrouvons ainsi la formule de $\alpha_a(s)$ établie en (IV.2).

Théorème IX bis. Complémentaire. $\alpha_a(s)$ est encore donné par la formule :

$$\alpha_a(s) = a \left\| \frac{s}{a-1} \right\| + s \int (a-1)$$

Démonstration. Si $\alpha(s) = s + \sum \rho_\Gamma$ et si $\rho_\Gamma = \left\| \frac{\alpha(s)}{\Gamma} \right\|$ on a, d'après la définition de la division et du reste entièrement :

$$\alpha(s) = \Gamma \rho_\Gamma + (s + \sum \rho_\Gamma) \int \Gamma.$$

Mais d'après (7) :

$$\rho_\Gamma = \left\| \frac{s + \sum \rho_\Gamma}{\Gamma-1} \right\|$$

et d'après (8) :

$$(s + \sum \rho_\Gamma) \int \Gamma = (s + \sum \rho_\Gamma) \int (-1).$$

Pour la série $\alpha_a(s)$, nous venons de voir que $s + \sum \rho_\Gamma = s$, ce qui montre bien que :

$$\alpha_a(s) = a \left\| \frac{s}{a-1} \right\| + s \int (a-1).$$

(2₂) Lemme VI. La composante divisionnaire ρ_p est égale au quotient

$$\text{premièrement } \rho_p = \left\| \frac{s}{F} \right\| \quad (P = \Gamma_a, \dots, \ell)$$

Démonstration. La fonction $\alpha(s)$ vérifie la relation fonctionnelle (II,4)

$$\alpha(s) = \alpha\left(s \frac{1}{F}\right) + \frac{s}{F-1} P$$

or :

$$0 < s \frac{1}{F} < F$$

et puisque la fonction $\alpha(s)$ est croissante :

$$0 < \alpha\left(s \frac{1}{F}\right) \leq \alpha(F) = P-1.$$

Ce qui montre bien que :

$$\rho_P = \frac{\alpha(s)}{s} = \frac{s}{F}$$

Lemme VII. Le système constitué par les $2^\lambda - 1$ relations (7) peut se mettre sous la forme d'un système de $2^\lambda - 1$ doubles inéquations du 1er degré par rapport aux $2^\lambda - 1$ inconnues ρ_Γ et également linéaires par rapport au paramètre s .

Démonstration. D'après la définition de la division première, la relation (7)

$$\rho_\Gamma = \frac{s + \sum' \rho_\Gamma}{\Gamma - 1}$$

peut s'écrire :

$$\frac{s + \sum' \rho_\Gamma}{\Gamma - 1} - 1 \leq \rho_\Gamma \leq \frac{s + \sum' \rho_\Gamma}{\Gamma - 1}$$

ou, comme $\Gamma - 1$ est positif.

$$s + \sum \rho_\Gamma - \rho_\Gamma - \Gamma + 1 \leq \rho_\Gamma(\Gamma - 1) < s + \sum \rho_\Gamma - \rho_\Gamma$$

et, puisqu'il s'agit de nombres entiers

$$s - \Gamma + 1 \leq \Gamma \rho_\Gamma - \sum \rho_\Gamma \leq s - 1$$

ou :

$$s - \Gamma + 1 \leq -\rho_a - \rho_b - \dots - \rho_\ell + \rho_{\Gamma a, b} + \dots + [\Gamma + (-1)^\lambda] \rho_\Gamma + \dots + (-1)^\lambda \rho_{\Gamma a, \dots, \ell} \leq s - 1 \quad (7bis)$$

Les lemmes VI et VII permettent d'établir une formule explicite de $\alpha_{a, b}(s)$ pour une série à deux entiers de base a et b dont on suppose seulement qu'ils ne sont pas tous deux égaux à 2.

Théorème X. Les composantes divisionnaires ρ_a , ρ_b et $\rho_{\Gamma_{a,b}}$ de $\alpha_{a,b}(s)$ où a et b ne sont pas simultanément égaux à 2 sont données par les formules :

$$\rho_a = \frac{b(s - \frac{s}{F} - 1)}{(a-1)(b-1) - 1} + \frac{1}{s - \frac{1}{F}}$$

$$\rho_b = \frac{a(s - \frac{s}{F} - 1)}{(a-1)(b-1) - 1} + \frac{1}{s - \frac{1}{F}}$$

$$\rho_{\Gamma_{a,b}} = \frac{s}{F}$$

$$(\Gamma_{a,b} = p)$$

$$F = \Gamma_{a,b} - \frac{\Gamma_{a,b}}{a} - \frac{\Gamma_{a,b}}{b} + 1$$

Le théorème permet d'expliciter la formule :

$$\alpha_{a,b} = s + \rho_a + \rho_b - \rho_{\Gamma_{a,b}}$$

Démonstration. Le système des relations (7) relatif à $\alpha_{a,b}$ s'écrit :

$$(7_{a,b}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_a = \frac{s + \rho_b - \rho_{\Gamma_{a,b}}}{a-1} \\ \rho_b = \frac{s + \rho_a - \rho_{\Gamma_{a,b}}}{b-1} \\ \rho_{\Gamma_{a,b}} = \frac{s + \rho_a + \rho_b - 2\rho_{\Gamma_{a,b}}}{\Gamma_{a,b} - 1} \end{array} \right.$$

D'après le lemme VI

$$\rho_{\Gamma_{a,b}} = \rho_p = \frac{s}{F}$$

D'après le lemme VII, les 2 premières relations peuvent aussi se mettre sous la forme :

$$s - a + 1 \leq (a-1) \rho_a - \rho_b + \rho_{\Gamma_{a,b}} \leq s-1$$

$$s - b + 1 \leq -\rho_a + (b-1) \rho_b + \rho_{\Gamma_{a,b}} \leq s-1$$

ou, en posant :

$$s - \rho_{\Gamma_{a,b}} = s'$$

$$s' - a + 1 \leq (a-1) \rho_a - \rho_b \leq s' - 1$$

$$s' - b + 1 \leq -\rho_a + (b-1) \rho_b \leq s' - 1$$

Appliquons à ces deux doubles inéquations la méthode de résolution d'un système de 2 équations du 1er degré à 2 inconnues. Nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{b(s' - 1)}{(a-1)(b-1) - 1} - 1 \leq \rho_a \leq \frac{b(s' - 1)}{(a-1)(b-1) - 1} \\ (2) \quad \frac{a(s' - 1)}{(a-1)(b-1) - 1} - 1 \leq \rho_b \leq \frac{a(s' - 1)}{(a-1)(b-1) - 1} \end{array} \right.$$

Nous faisons ici l'hypothèse que :

$$(a-1)(b-1) - 1 = ab - a - b \neq 0$$

c'est-à-dire que l'on n'a pas $a = b = 2$.

1°) Supposons d'abord qu'aucune des expressions $b(s' - 1)$ et $a(s' - 1)$ ne soit multiple de $(a-1)(b-1) - 1 = ab - a - b$.

Les relations ci-dessus déterminent ρ_a et ρ_b , et nous pouvons écrire :

$$\rho_a = \frac{b(s' - 1)}{(a-1)(b-1) - 1}$$

$$\rho_b = \frac{a(s' - 1)}{(a-1)(b-1) - 1}$$

2°) Soit maintenant :

$$b(s' - 1) = K(ab - a - b) = K(ab - b) - Ka,$$

K entier

La double inéquation 1) a 2 solutions. Ka doit être multiple de b , donc K doit être multiple de $\frac{b}{D_{a,b}}$, si $D_{a,b}$ est le plus grand commun diviseur de a et de b .

Pour $s' = 1$, il faut $K = 0$, et K est encore un multiple de $\frac{b}{D_{a,b}}$.

Posons :

$$K = K' \frac{b}{D_{a,b}}$$

D'où :

$$b(s' - 1) = K' \frac{b}{D_{a,b}} (ab - a - b),$$

$$s' - 1 = K' \frac{ab - a - b}{D_{a,b}}$$

D'où encore

$$a(s' - 1) = K' \frac{a}{D_{a,b}} (ab - a - b)$$

La double inéquation 2) a donc elle aussi 2 solutions. Réciproquement si 2) a deux solutions, par raison de symétrie, il en est de même de 1).

Remarquons que :

$$\frac{ab - a - b}{D_{a,b}} = \frac{\Gamma_{a,b}}{\Gamma_{a,b}} - \frac{a,b}{b} - \frac{\Gamma_{a,b}}{a} = F - 1.$$

puisque $\Gamma_{a,b}$ est le plus petit commun multiple de a et de b , et notons en conséquence que $F-1$ est différent de zéro.

L'égalité :

$$s' - 1 = \frac{K'(ab - a - b)}{D_{a,b}}$$

peut donc s'écrire :

$$s - \frac{s}{F} = K' (F - 1) + 1$$

ou

$$\frac{s}{F} = s - K' (F - 1) - 1.$$

Mais, d'après la définition de la division première :

$$\frac{s}{F} - 1 \leq \frac{s}{F} = s - K' (F - 1) - 1 \leq \frac{s-1}{F}$$

ou

$$K' (F - 1) \leq s - \frac{s}{F} \leq K' (F - 1) + 1 - \frac{1}{F}$$

et en divisant les 3 membres de cette relation par $\frac{F-1}{F}$ puisque $F-1$ est différent de zéro :

$$K' F \leq s \leq K' F + 1.$$

C'est donc pour :

$$s = K'F$$

$$s = K'F + 1$$

que 1) et 2) ont chacune 2 solutions, (On peut remarquer que ces 2 valeurs de s correspondent à une même valeur de s' :

$$s' = K'F - (K'-1) = (K'F + 1) - K'$$

Les deux solutions de chacune des relations 1) et 2)

sont alors :

$$\rho_{a,0} = \frac{b(s' - 1)}{ab - a - b} - 1 = \frac{K' b}{D_{a,b}} - 1$$

$$\rho_{a,1} = \frac{b(s' - 1)}{ab - a - b} = \frac{K' b}{D_{a,b}}$$

$$\rho_{b,0} = \frac{a(s' - 1)}{ab - a - b} - 1 = \frac{K' a}{D_{a,b}} - 1$$

$$\rho_{b,1} = \frac{a(s' - 1)}{ab - a - b} = \frac{K' a}{D_{a,b}}$$

Soit d'abord :

$$s = K'F$$

d'où

$$\rho_{\Gamma_{a,b}} = \frac{s}{F} = K' - 1.$$

Rappelons que :

$$s' = s - \rho_{\Gamma_{a,b}} = \frac{K' (ab - a - b)}{D_{a,b}} + 1.$$

Essayons la solution $\rho_a = \rho_{a,0}$, $\rho_b = \rho_{b,0}$ dans le système (7_{a,b}).

La première relation de ce système s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \rho_a &= \frac{\frac{K(ab - a - b)}{D_{a,b}} + \frac{K' a}{D_{a,b}}}{a - 1} = \frac{\frac{K'b(a - 1)}{D_{a,b}}}{a - 1} \\ &= \frac{K' b}{D_{a,b}} - 1 = \rho_{a,0} \end{aligned}$$

Elle est donc vérifiée. On trouverait de même pour la 2ème relation

$$\rho_b = \rho_{b,0} ,$$

et l'on verrait également que la 3ème relation en $\rho_{\Gamma_{a,b}}$ est elle aussi vérifiée et donne bien :

$$\rho_{\Gamma_{a,b}} = K' - 1 ,$$

On verrait de la même façon que pour

$$s = K' F + 1$$

d'où :

$$\rho_{\Gamma_{a,b}} = K' ,$$

c'est la solution.

$$\rho_a = \rho_{a,1}$$

$$\rho_b = \rho_{b,1}$$

qui est à retenir.

Ceci termine la démonstration des formules du théorème X, si l'on remarque que $\frac{1}{s \pm F}$ est nul sauf pour $s = K' F + 1$, et si l'on se rappelle que le système $(7_{a,b})$ qui caractérise les composantes divisionnaires de $\alpha_{a,b}$ admet un et un seul système de solutions. (Théorèmes VIII et VIII bis).

3) Nous pouvons encore essayer de calculer les composantes divisionnaires de $\alpha(s)$, en résolvant le système formé par les relations (7) par approximations successives. Nous calculerons ensuite $\alpha(s)$ par la formule :

$$\alpha(s) = s + \sum \rho_{\Gamma} .$$

Malheureusement, nous n'avons pu démontrer la convergence de la méthode des approximations successives que dans le cas simple de 2 nombres de base a et b .

Théorème XI. Pour une sériale $\alpha_{a,b}$ ayant 2 entiers de base a et b , la

méthode des approximations successives appliquée au système :

$$(7_{I,a,b}) \quad \left| \begin{array}{l} \rho_a = \left\| \frac{s + \rho_b - \rho_p}{a - 1} \right\| \\ \rho_b = \left\| \frac{s + \rho_a - \rho_p}{b - 1} \right\| \end{array} \right.$$

où ρ_p est calculé par la formule :

$$\rho_p = \left\| \frac{s}{\Gamma_{a,b} - \frac{\Gamma_{a,b}}{a} - \frac{\Gamma_{a,b}}{b} + 1} \right\| \quad (P = \Gamma_{a,b})$$

converge, pour un choix convenable des approximations initiales. De plus à condition de supposer que s n'est pas un multiple de la fréquence, ni un multiple de la fréquence augmenté de 1, les limites des approximations successives de ρ_a et de ρ_b sont respectivement égales aux composantes divisionnaires de $\alpha(s)$.

Démonstration. Posons :

$$s' = s - \rho_p$$

Le système $(7_{I,a,b})$ s'écrit encore :

$$(7_{II,a,b}) \quad \left| \begin{array}{l} \rho_a = \left\| \frac{s' + \rho_b}{a - 1} \right\| \\ \rho_b = \left\| \frac{s' + \rho_a}{b - 1} \right\| \end{array} \right.$$

choisissons arbitrairement les approximations initiales :

$$\rho'_{0,a} \quad \text{et} \quad \rho'_{0,b}$$

et calculons les approximations successives par les formules de récurrence :

$$\rho'_{1,a} = \left\| \frac{s' + \rho'_{1-1,b}}{a - 1} \right\|$$

$$\rho'_{1,b} = \left\| \frac{s' + \rho'_{1-1,a}}{b - 1} \right\|$$

supposons que ces approximations croissent (ou ne décroissent pas) avec leur rang jusqu'à la $(i-1)^{\text{ième}}$ approximation, c'est-à-dire :

$$\rho'_{i-1,a} \geq \rho'_{i-2,a} \geq \dots \geq \rho'_{1,a} \geq \rho'_{0,a}$$

$$\rho'_{i-1,b} \geq \rho'_{i-2,b} \geq \dots \geq \rho'_{1,b} \geq \rho'_{0,b}$$

alors :

$$\rho'_{i,a} = \left\| \frac{s + \rho'_{i-1,b}}{a-1} \right\| \geq \left\| \frac{s + \rho'_{i-2,b}}{a-1} \right\| = \rho'_{i-1,a}$$

$$\rho'_{i,b} = \left\| \frac{s + \rho'_{i-1,a}}{b-1} \right\| \geq \left\| \frac{s + \rho'_{i-2,a}}{b-1} \right\| = \rho'_{i-1,b}$$

Donc les approximations successives ne décroissent pas quand leur rang croit, s'il en est ainsi pour les premières approximations, soit :

$$\rho'_{1,a} = \left\| \frac{s + \rho'_{0,b}}{a-1} \right\| \geq \rho'_{0,a}$$

$$\rho'_{1,b} = \left\| \frac{s + \rho'_{0,a}}{b-1} \right\| \geq \rho'_{0,b}$$

ce qui a lieu notamment pour le choix d'approximations initiales :

$$\rho'_{0,a} = \rho'_{0,b} = 0$$

si $s' > 0$.

De même, supposons que les approximations décroissent (ou ne croissent pas) avec leurs rangs jusqu'à la $(i-1)^{\text{ième}}$ approximation, c'est-à-dire :

$$\rho'_{i-1,a} \leq \rho'_{i-2,a} \leq \dots \leq \rho'_{1,a} \leq \rho'_{0,a}$$

$$\rho'_{i-1,b} \leq \rho'_{i-2,b} \leq \dots \leq \rho'_{1,b} \leq \rho'_{0,b}$$

Alors :

$$\rho'_{i,a} = \left\| \frac{s' + \rho'_{i-1,b}}{a-1} \right\| \leq \left\| \frac{s' + \rho'_{i-2,b}}{a-1} \right\| = \rho'_{i-1,a}$$

$$\rho'_{i,b} = \left\| \frac{s' + \rho'_{i-1,a}}{b-1} \right\| \leq \left\| \frac{s' + \rho'_{i-2,a}}{b-1} \right\| = \rho'_{i-1,b}$$

Donc les approximations successives ne croissent pas quand leur rang croit, s'il en est ainsi pour les premières approximations :

$$\rho'_{1,a} = \left\| \frac{s' + \rho'_{0,b}}{a-1} \right\| \leq \rho'_{0,a}$$

$$\rho'_{1,b} = \left\| \frac{s' + \rho'_{0,a}}{b-1} \right\| \leq \rho'_{0,b}$$

Ce qui a lieu notamment pour le choix d'approximations initiales :

$$\rho'_{0,a} = \rho'_{0,b} = 0,$$

si $s' \leq 0$.

Dans les deux cas, les approximations successives varient de façons monotones avec leur rang. De plus, elles sont bornées. En effet, supposons :

$$\rho'_{i-1,a} \leq \rho_a$$

$$\rho'_{i-1,b} \leq \rho_b$$

ce qui est le cas pour

$$s' > 0 \text{ et } \rho'_{0,a} = \rho'_{0,b} = 0,$$

et $i = 1$.

Alors :

$$\rho'_{i,a} = \left\| \frac{s' + \rho'_{i-1,b}}{a-1} \right\| \leq \left\| \frac{s' + \rho_b}{a-1} \right\| = \rho_a$$

$$\rho'_{i,b} = \left\| \frac{s' + \rho'_{i-1,a}}{b-1} \right\| \leq \left\| \frac{s' + \rho_a}{b-1} \right\| = \rho_b$$

De même, si :

$$\rho'_{i-1,a} \geq \rho_a$$

$$\rho'_{i-1,b} \geq \rho_b$$

ce qui est le cas pour $s' \leq 0$, $\rho'_{0,a} = \rho'_{0,b} = 0$ et $i = 1$,

$$\rho'_{i,a} \geq \rho_a$$

$$\rho'_{i,b} \geq \rho_b.$$

Les approximations ont donc une limite. Puisqu'elles sont entières cela nécessite que toutes les approximations soient égales à partir d'un certain rang :

$$\rho'_{n+1,a} = \rho'_{n,a}$$

$$\rho'_{n+1,b} = \rho'_{n,b} \quad \text{pour } n \geq n_0$$

Ces approximations (pour $n \geq n_0$) vérifient donc le système $(7_{II_{a,b}})$. Si l'on suppose de plus $s \neq kF$ et $s \neq kF + 1$, elles vérifient comme nous l'avons vu en $2_2)$ le système $(7_{a,b})$ et sont donc égales aux composantes divisionnaires de $\alpha_{a,b}(s)$.

Pour $s = kF$ ou $s = kF + 1$, ces approximations (pour $n \geq n_0$) vérifient seulement le système $(7_{II_{a,b}})$ équivalent au système des relations 1) et 2) (2_2) d'après le lemme VII. Elles sont donc respectivement égales à l'une des solutions $\rho_{a,0}$, $\rho_{a,1}$, $\rho_{b,0}$, $\rho_{b,1}$.

Ceci tient à ce que les relations des systèmes $(7_{II_{a,b}})$ relatifs aux valeurs de s :

$$s = kF \quad \text{et } s = kF + 1.$$

sont identiques, comme nous l'avons vu en $2_2)$. D'ailleurs le cas $s = kF$ est trivial. On sait qu'on a alors :

$$\alpha(s) = kP - 1.$$

De même, pour :

$$s = kF + 1,$$

$$\alpha(s) = kP + 1.$$

Choisissons par exemple $s > 0$. En utilisant une méthode analogue à celle que nous avons employée pour établir la formule de $\alpha_a(s)$ (IV,2), on peut calculer la limite de $\rho'_{i,a}$ et celle de $\rho'_{i,b}$ quand i augmente indéfiniment, et retrouver ainsi les formules explicites du théorème X.

4) Nous avons noté au début du paragraphe (3) que l'on pouvait essayer

de calculer les composantes divisionnaires ρ_Γ de $\alpha(s)$ en résolvant le système formé par les relations (7) par approximations successives. La démonstration de la convergence de ces approximations successives, ou en tous cas du fait qu'elles restent comprises entre des limites finies^(*), conduirait à la démonstration du théorème suivant, démonstration que nous ferons par une méthode directe :

Théorème XII : Si l'on désigne par x_Γ le reste entièrement $\alpha(s) \left[\Gamma \right]$ de la division entière par défaut de $\alpha(s)$ par le nombre de référence Γ , on a les identités suivantes :

$$\alpha(s) = s + \sum \frac{s - x_\Gamma}{\Gamma \Sigma \left(1 - \frac{1}{\Gamma}\right)}$$

$$\rho_\Gamma = \frac{1}{\Gamma} \left[s - x_\Gamma + \sum \frac{s - x_\Gamma}{\Gamma \Sigma \left(1 - \frac{1}{\Gamma}\right)} \right] \quad (\rho_\Gamma = \left\{ \frac{\alpha(s)}{\Gamma} \right\})$$

$$(s) - \frac{P_s}{\Gamma} = \sum \left[\frac{-x_\Gamma}{\Gamma \Sigma \left(1 - \frac{1}{\Gamma}\right)} \right]$$

Pour démontrer ce théorème, nous ferons d'abord les remarques suivantes :

Remarque I. Désignons par G la somme $\sum \frac{P}{\Gamma}$ ($P = \Gamma_a, \dots, 1$), et par conséquent par $\frac{G}{\Gamma}$ la somme $\sum \frac{1}{\Gamma}$

A étant un nombre réel quelconque pouvant être de la forme d'une somme $\sum F(\Gamma)$, on peut écrire :

$$\sum \frac{A}{\Gamma} = A \sum \frac{1}{\Gamma} = A \frac{G}{\Gamma}$$

Remarque II. D'après le lemme IV((III), 1) $G = \sum \frac{P}{\Gamma}$ est le nombre de multiples du système d'entiers $a, b, \dots, 1$ compris entre 1 et P ; c'est dire que :

(*) Voir sur ce problème note aux Comptes-rendus de l'Académie des Sciences t. 259, p. 15-18, séance du 6 juillet 1964.

$$0 < G < P$$

$$0 < \frac{G}{P} < 1$$

Remarque III. On a :

$$\begin{aligned} \frac{P}{F} &= \frac{F}{F} - \frac{P-F}{F} = 1 - \frac{G}{F} \\ &= 1 - \frac{\sum \frac{P}{\Gamma}}{P - \sum \frac{P}{\Gamma}} = 1 - \frac{\sum \frac{1}{\Gamma}}{1 - \sum \frac{1}{\Gamma}} \end{aligned}$$

et comme $\sum (1) = 1$, $\frac{P}{F} = 1 - \frac{\sum \frac{1}{\Gamma}}{\sum (1 - \frac{1}{\Gamma})} = 1 - \sum \frac{1}{(1 - \frac{1}{\Gamma})}$

Remarque IV. $\left\lfloor \frac{\alpha(s)}{\Gamma} \right\rfloor$ étant le quotient entier de $\alpha(s)$ par Γ , et x_Γ étant le reste correspondant, par définition de la division entière et du reste entierement,

$$\left\lfloor \frac{\alpha(s)}{\Gamma} \right\rfloor = \frac{\alpha(s) - x_\Gamma}{\Gamma}$$

Et comme :

$$\alpha(s) = s + \sum \rho_\Gamma = s + \sum \frac{\alpha(s)}{\Gamma} \quad ((1), \text{III}, 2)$$

on en déduit :

$$\alpha(s) = s + \sum \frac{\alpha(s) - x_\Gamma}{\Gamma}$$

Démonstration du théorème.

Appliquons la relation de récurrence :

$$\alpha_{(i+1)}(s) = s + \sum \frac{\alpha_{(i)}(s) - x_\Gamma}{\Gamma}$$

à partir de :

$$\alpha_{(0)}(s) = \alpha(s) = s + \sum \rho_\Gamma.$$

quand i augmente, les $\alpha_{(i)}(s)$ restent égaux à $\alpha(s)$, d'après la remarque IV.

On a :

$$\alpha_{(1)}(s) = s + \Sigma \frac{s + \Sigma \rho_{\Gamma} - x_{\Gamma}}{\Gamma}$$

ou, comme d'après la remarque I,

$$\Sigma \frac{\Sigma \rho_{\Gamma}}{\Gamma} = (\Sigma \rho_{\Gamma}) \left(\frac{G}{P}\right)$$

$$\alpha_{(1)}(s) = s + \Sigma \frac{s - x_{\Gamma}}{\Gamma} + (\Sigma \rho_{\Gamma}) \left(\frac{G}{P}\right)$$

De même

$$\begin{aligned} \alpha_{(2)}(s) &= s + \Sigma \frac{s + \Sigma \frac{s - x_{\Gamma}}{\Gamma} + (\Sigma \rho_{\Gamma}) \left(\frac{G}{P}\right) - x_{\Gamma}}{\Gamma} \\ &= s + \Sigma \frac{s - x_{\Gamma}}{\Gamma} + \Sigma \frac{s - x_{\Gamma}}{\Gamma} \left(\frac{G}{P}\right) + (\Sigma \rho_{\Gamma}) \left(\frac{G}{P}\right)^2 \\ &= s + \left(\Sigma \frac{s - x_{\Gamma}}{\Gamma}\right) \left(1 + \frac{G}{P}\right) + (\Sigma \rho_{\Gamma}) \left(\frac{G}{P}\right)^2. \end{aligned}$$

Supposons que l'on ait :

$$\alpha_{(i)}(s) = s + \left(\Sigma \frac{s - x_{\Gamma}}{\Gamma}\right) \left[1 + \frac{G}{P} + \dots + \left(\frac{G}{P}\right)^{i-1} \right] + (\Sigma \rho_{\Gamma}) \left(\frac{G}{P}\right)^i$$

Calculons $\alpha_{(i+1)}(s)$

$$\begin{aligned} \alpha_{(i+1)}(s) &= s + \Sigma \frac{s - x_{\Gamma}}{\Gamma} + \Sigma \frac{\left(\Sigma \frac{s - x_{\Gamma}}{\Gamma}\right) \left[1 + \frac{G}{P} + \dots + \left(\frac{G}{P}\right)^{i-1} \right]}{\Gamma} \\ &\quad + \Sigma \frac{(\Sigma \rho_{\Gamma}) \left(\frac{G}{P}\right)^i}{\Gamma} \end{aligned}$$

Ou, toujours d'après la remarque I :

$$\alpha_{(i+1)}(s) = s + \left(\Sigma \frac{s - x_{\Gamma}}{\Gamma}\right) + \left(\Sigma \frac{s - x_{\Gamma}}{\Gamma}\right) \left[1 + \frac{G}{P} + \dots + \left(\frac{G}{P}\right)^{i-1} \right] \frac{G}{P} + \Sigma \rho_{\Gamma} \left(\frac{G}{P}\right)^i \frac{G}{P}$$

et, en vertu de l'associativité des sommes :

$$\alpha_{(i+1)}(s) = s + \left(\sum \frac{s - x_\Gamma}{\Gamma} \right) \left[1 + \frac{G}{p} + \dots + \left(\frac{G}{p} \right)^{i-1} + \left(\frac{G}{p} \right)^i \right] + (\Sigma \rho_\Gamma) \left(\frac{G}{p} \right)^{i+1}$$

Notre formule de $\alpha_{(i)}(s)$ est donc générale.

Augmentons i indéfiniment. $\frac{G}{p}$ étant positif et inférieur à 1 (Remarque II),

la somme :

$$1 + \frac{G}{p} + \dots + \left(\frac{G}{p} \right)^i$$

admet pour limite :

$$\frac{1}{1 - \frac{G}{p}} = \frac{1}{1 - \sum \frac{1}{\Gamma}} = \frac{1}{\sum \left(1 - \frac{1}{\Gamma} \right)}$$

Le produit $(\Sigma \rho_\Gamma) \left(\frac{G}{p} \right)^{i+1}$ tend vers zéro, si bien que l'on peut écrire :

$$\alpha(s) = \lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_{(i)}(s) = s + \sum \frac{s - x_\Gamma}{\Gamma \sum \left(1 - \frac{1}{\Gamma} \right)}$$

et comme $\rho_\Gamma = \frac{\alpha(s) - x_\Gamma}{\Gamma}$

$$\rho_\Gamma = \frac{1}{\Gamma} \left[s - x_\Gamma + \sum \frac{s - x_\Gamma}{\Gamma \sum \left(1 - \frac{1}{\Gamma} \right)} \right]$$

on peut encore écrire :

$$\alpha(s) - \left[s + \sum \frac{s}{\Gamma \sum \left(1 - \frac{1}{\Gamma} \right)} \right] = \sum \frac{-x_\Gamma}{\Gamma \sum \left(1 - \frac{1}{\Gamma} \right)}$$

ou, d'après la remarque III

$$\alpha(s) - \frac{ps}{F} = \sum \frac{-x_\Gamma}{\Gamma \sum \left(1 - \frac{1}{\Gamma} \right)}$$

ce qui démontre les formules proposées. Le premier membre de la dernière de ces formules représente la différence entre $\alpha(s)$ et ce que l'on pourrait appeler sa valeur moyenne $\frac{Ps}{F}$.

Rappelons que si l'on se donne à priori, en respectant les conditions de congruence, les restes x_a, \dots, x_1 des divisions entières d'un terme inconnu d'une sériale α , (il faut qu'aucun de ces restes donnés ne soit nul), le calcul des congruences permet, à partir de ces restes, de calculer tous les restes x_Γ , et notamment le reste $x_{\Gamma_a, \dots, 1}$ c'est-à-dire le terme en question de la sériale α , à K périodes $P = \Gamma_{a, \dots, 1}$ près.

Théorème XII bis. Le théorème XII précédent reste vrai si l'on remplace

$\alpha(s)$ par un entier N donné, et si l'on désigne par s le rang dans la sériale α du plus grand terme inférieur ou égal à N , les x_Γ désignant les restes $N[\Gamma]$.

Démonstration. Il suffit, pour démontrer ce théorème, de noter que q'l'identité de la remarque IV est vraie pour tout entier N . En effet, d'après l'identité (1) (III,2), on a pour tout entier N :

$$N = s + \left\lfloor \frac{N}{\Gamma} \right\rfloor$$

ou

$$N = s + \sum \frac{N - x_\Gamma}{\Gamma}$$

par ailleurs, on a aussi :

$$n = s + \sum \rho_\Gamma.$$

si l'on pose :

$$\left\lfloor \frac{N}{\Gamma} \right\rfloor = \rho_\Gamma \quad (V, 1).$$

La démonstration du théorème précédent s'applique alors à cet entier N .

Deuxième partie.VI. Multiples d'un système d'entiers donnés - Sériales β .

1) Nous avons appelé multiple d'un système d'entiers a, b, \dots, ℓ supérieurs à 1 tout entier positif, nul, ou négatif qui est multiple d'un ou de plusieurs de ces entiers. (II,3).

Les multiples du système d'entiers a, b, \dots, ℓ , rangés dans l'ordre de croissance, constituent la sériale $\beta_{a,b,\dots,\ell}$.

L'ordre de cette sériale est le nombre λ de ses entiers de base. Chaque terme de la sériale est affecté d'un rang positif, nul ou négatif. Par convention, l'entier zéro est de rang zéro, et l'entier i est de rang 1, son opposé $-i$ de rang -1 , si nous désignons par i l'entier ou l'un des entiers pris parmi les entiers a, b, \dots, ℓ et tel qu'aucun des entiers a, b, \dots, ℓ ne lui soit inférieur.

$$N = \beta_{a,b,\dots,\ell}^{(r)}$$

désigne le terme de rang r de la sériale $\beta_{a,b,\dots,\ell}$.

Nous désignerons dès maintenant la fonction inverse de la fonction $\beta(r)$ par :

$$\boxed{\Sigma}_{a,\dots,\ell}^{(N)} = r$$

Nous démontrerons en effet plus loin que le rang r d'un terme N de la sériale $\beta_{a,\dots,\ell}$ est bien égal à $\boxed{\Sigma}_{a,\dots,\ell}^{(N)}$, expression que nous avons définie en III,1.

Exemple : sériale $\beta_{3,4}$.

$$r = \boxed{\Sigma}^{(N)} \dots -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 \dots$$

$$N = \beta^{(r)} \dots -6 -4 -3 0 3 4 6 8 9 12 \dots$$

Nous étudierons les propriétés des 2 fonctions inverses $\boxed{\Sigma}^{(N)}$ et $\beta(r)$.

2) Théorème XIII. La fonction $\beta(r)$ est la somme d'une fonction périodique et d'une fonction linéaire croissante.

Démonstration. Si l'entier N appartient à la sériale β , l'entier $N + KP$ appartient aussi à la sériale β , si K est un entier arbitraire positif, nul ou négatif, et si P est le plus petit commun multiple de tous les entiers a, b, \dots, ℓ . De plus, si le rang de N dans la sériale est r , le rang de $N + KP$ est $r + KG$, où G désigne le nombre de termes de la sériale compris dans l'intervalle.

$$0 < X \leq P.$$

Les conventions pour les rangs $\Xi(0) = 0$, $\Xi(1) = 1$, $\Xi(-1) = -1$ (i étant l'entier ou l'un des entiers a, \dots, ℓ tel qu'aucun des entiers a, \dots, ℓ ne lui soit supérieur), ont été choisies pour que cette périodicité s'étende aux rangs nuls ou négatifs.

La fonction $\beta(r)$ vérifie ainsi la relation fonctionnelle :

$$\beta(r + KG) = \beta(r) + KP$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\beta(r) = \beta\left(r \mp G\right) + \mp \frac{r}{G} \mp P$$

De la première de ces relations, on tire :

$$\beta(r + KG) - \frac{P}{G} (r + KG) = \beta(r) - \frac{P}{G} r$$

ce qui démontre le théorème, puisque G est inférieur à P .

Propriété correlative. La fonction $\Xi(N)$ vérifie la relation correlative :

$$\Xi(N + K P) = \Xi(N) + K G$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\Xi(N) = \Xi\left(N \mp G\right) + \mp \frac{N}{P} \mp G$$

Nous appellerons $P = \Gamma_{a, \dots, 1}$ la période de la série β , identique à la période de la série α correspondante, et G la fréquence de la série β . Nous donnons plus loin une expression de G en fonction des entiers de base.

Théorème XIV. Complémentaire. La courbe représentant en coordonnées

cartésiennes la fonction $\beta(r)$ admet pour centres de symétrie tous les points de la droite :

$$Y = \frac{PX}{G} \quad \text{d'abscisses } X = \frac{KG}{2} .$$

La démonstration est analogue à celle du théorème II (II,4).

VII. Calcul du rang d'un terme d'une série β .

1) Théorème XV. Si N est un terme d'une série β , son rang r dans cette série est donné par la formule :

$$r = \sum \left\lfloor \frac{N}{T} \right\rfloor = \boxed{\square}(N)$$

Si N est un entier qui ne fait pas partie de la série β , cette formule donne le rang du plus grand terme de cette série qui lui soit inférieur.

Démonstration. Notre définition des rangs des termes de la série $\beta_{a, \dots, \ell}$ a été choisie pour que le rang d'un terme positif N de la série soit égal au nombre de multiples du système d'entiers a, \dots, ℓ compris entre 1 et N et pouvant valoir N .

Par suite, si N est un terme positif de la série, d'après le lemme IV (III, 1) :

$$r = \sum \left\lfloor \frac{N}{T} \right\rfloor = \boxed{\square}(N) \quad (8)$$

Si N est un entier positif ne faisant pas partie de la série β , cette formule donne, d'après le même lemme, le nombre de multiples du système d'entiers a, \dots, ℓ compris entre 1 et N , c'est à dire le rang du plus grand terme de la série inférieur à N .

Par suite du caractère de périodicité des fonctions $\frac{N}{\Gamma}$ et donc $\Xi(N)$, ces propriétés restent vraies pour les valeurs nulle ou négatives de N , ce qui termine la démonstration du théorème.

2) En particulier, la formule (8) donne, pour $N = P$, une expression de la fréquence de la série $\beta_{a, \dots, l}$:

$$G = \Xi(P) = \sum \frac{P}{\Gamma} = \sum \frac{\Gamma_{a, \dots, l}}{\Gamma}$$

Exemple : série $\beta_{4,6}$

$$G = \frac{12}{4} + \frac{12}{6} - \frac{12}{12} = 4$$

3) Lemme VIII. Si N est un terme d'une série β , et r son rang dans cette série, on a :

$$N = r + \Psi(N) \quad (9)$$

ou

$$r = N - \Psi(N) \quad (9 \text{ bis})$$

Si N n'est pas un terme de la série β , cette formule reste vraie si l'on désigne par r le rang du plus grand terme de la série β inférieur à N .

Démonstration. Celle-ci résulte du lemme V (III, 2). En effet, si l'on remplace dans la formule

$$N = \Xi(N) + \Psi(N)$$

valable pour tout entier N , $\Xi(N)$ par r , on obtient bien :

$$N = r + \Psi(N).$$

4) Théorème XVI. Si N est un entier quelconque, et $\beta(r)$ le terme de rang r de la série β , on a :

$$(10) \quad \begin{array}{ll} N - \Psi(N) < r & , \quad \text{si } N \leq \beta(r) \\ N - \Psi(N) = r & , \quad \text{si } \beta(r) \leq N < \beta(r+1) \\ N - \Psi(N) > r & , \quad \text{si } N \geq \beta(r+1) \end{array}$$

Démonstration. Cette démonstration est identique à celle du théorème IV(III,6)

Il suffit de remplacer dans celle-ci \square par Ψ , α par β , s par r , et le théorème III par le lemme VIII ci-dessus.

VIII. Première formule pour le calcul de $\beta(r)$.

1) La formule (9) peut être traduite par une relation fonctionnelle vérifiée par la fonction $\beta(r)$:

$$\beta(r) = r + \Psi \left[\beta(r) \right] .$$

Pour calculer la valeur de $\beta(r)$ correspondant à un choix donné de l'entier r , on peut essayer de résoudre cette relation par approximations successives.

Théorème XVII. Les approximations successives θ_i définies par la formule de récurrence.

$$\theta_{i+1} = r + \Psi(\theta_i) \quad \left(\Psi(\theta_i) = \theta_i - \sum \left| \frac{\theta_i}{\Gamma} \right| \right)$$

à partir d'un entier arbitraire θ_0 , convergent vers $\beta(r)$ si

$\theta_0 < \beta(r)$, sont constantes pour $\beta(r) \leq \theta_0 \leq \beta(r+1) - 1$, et convergent vers $\beta(r+1)-1$ si $\theta_0 \geq \beta(r+1)$.

Démonstration. Celle-ci est identique à celle du théorème V (IV,1). Il suffit de remplacer dans celle-ci \square par Ψ , α par β , s par r .

Donc, si θ_0 a été choisi inférieur à $\beta(r)$, les approximations successives croissent avec l'indice i jusqu'à atteindre $\beta(r)$ puis restent invariantes. Si θ_0 a été choisi supérieur ou égal à $\beta(r+1)$, elles décroissent jusqu'à atteindre $\beta(r+1)-1$, puis restent invariantes. Enfin, si θ_0 a été choisi entre $\beta(r)$ et $\beta(r+1)-1$, elles restent invariantes.

La méthode des approximations successives conduit donc effectivement au calcul de $\beta(r)$, si r est positif en choisissant par exemple $\theta_0 = 0$ ou r (car $0 < r < \beta(r)$).

Si r est négatif, on peut appliquer la méthode des approximations successives à l'entier $r' = r-1$ en partant de l'approximation $\theta_0 = 0$;

le résultat obtenu est :

$$\beta(r' + 1) - 1 = \beta(r) - 1.$$

2) La méthode précédente permet de retrouver la formule explicite de la fonction $\beta_a(r) = ar$.

Théorème XVIII. Le terme de rang r d'une sériale β définie par un seul entier de base a est donné par la formule :

$$\beta_a(r) = ar = r + r(a-1)$$

Démonstration. Si θ_i est le $i^{\text{ème}}$ approximation, la $i + 1^{\text{ème}}$ approximation est donnée par la formule :

$$\theta_{i+1} = r + \theta_i - \frac{\theta_i}{a}$$

Or, puisque θ_i et a sont des entiers :

$$\frac{\theta_i}{a} - 1 + \frac{1}{a} \leq \frac{\theta_i}{a} \leq \frac{\theta_i}{a}$$

d'où l'on déduit :

$$r + \theta_i - \frac{\theta_i}{a} \leq \theta_{i+1} \leq r + \theta_i - \frac{\theta_i}{a} + 1 - \frac{1}{a}$$

ou encore :

$$(A) \quad r + \theta_i \left(\frac{a-1}{a} \right) \leq \theta_{i+1} \leq r+1 + (\theta_i+1) \left(\frac{a-1}{a} \right) - 1$$

Choisissons pour première approximation

$$\theta_0 = r.$$

les approximations suivantes vérifient, d'après (A), les doubles inégalités :

$$r + r \left(\frac{a-1}{a} \right) \leq \theta_1 \leq (r+1) + (r+1) \left(\frac{a-1}{a} \right) - 1$$

$$r + r \left\{ \frac{a-1}{a} \right\} + r \left(\frac{a-1}{a} \right)^2 \leq \theta_2 \leq r+1 + (r+1) \left(\frac{a-1}{a} \right) + (r+1) \left(\frac{a-1}{a} \right)^2 - 1$$

Supposons que le $i^{\text{ème}}$ approximation vérifie :

$$(B) \quad r \left[1 + \left(\frac{a-1}{a} \right) + \dots + \left(\frac{a-1}{a} \right)^i \right] \leq \theta_i \leq (r+1) \left[1 + \left(\frac{a-1}{a} \right) + \dots + \left(\frac{a-1}{a} \right)^i \right] - 1$$

D'après la relation (A), on aura encore :

$$r \left[1 + \left(\frac{a-1}{a}\right) + \left(\frac{a-1}{a}\right)^2 + \dots + \left(\frac{a-1}{a}\right)^{i+1} \right] \leq \theta_{i+1} \leq (r+1) \left[1 + \left(\frac{a-1}{a}\right) + \left(\frac{a-1}{a}\right)^2 + \dots + \left(\frac{a-1}{a}\right)^{i+1} \right] - 1$$

ce qui prouve que la relation (B) est vraie quel que soit i .

Augmentons i indéfiniment :

$$1 + \left(\frac{a-1}{a}\right) + \dots + \left(\frac{a-1}{a}\right)^i \text{ tend vers } a.$$

Supposons $r > 0$. D'où il résulte $r \ll ar$.

Le 1er membre de (B) tend vers ar en lui restant inférieur. D'où :

$$(C) \quad ar \leq \lim_{i \text{ croissant}} \theta_i$$

Supposons que :

$$\theta_i \leq ar.$$

En utilisant l'inégalité formée par les second et troisième membre de (A)

on peut écrire :

$$\theta_{i+1} \leq r+1 + (ar+1) \frac{a-1}{a} - 1 = ar + 1 - \frac{1}{a}$$

et comme θ_{i+1} est entier

$$\theta_{i+1} \leq ar.$$

Comme de plus nous avons choisi :

$$\theta_0 = r < ar,$$

il en résulte :

$$(D) \quad \lim_{i \text{ croissant}} \theta_i \leq ar$$

En rapprochant (C) et (D), on obtient finalement :

$$\beta_a(r) = \lim_{i \text{ croissant}} \theta_i = ar = r + r(a-1)$$

ce qui démontre notre théorème, puisque, par raison de périodicité cette formule est vraie pour $r \leq 0$.

3) On peut modifier le calcul des approximations successives θ_n et obtenir ainsi un développement de $\beta(r)$ sous forme d'une somme (limitée). En effet,

Théorème XIX. La $n^{\text{ième}}$ approximation θ_n est égale à la somme :

$$\begin{aligned} \theta_n = & \theta_0 + \Delta r + \left(\Delta r - \Sigma \left\lfloor \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor \right) + \left(\Delta r - \Sigma \left\lfloor \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor - \Sigma \left\lfloor \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor \right) \\ & + \dots + \left(\Delta r - \Sigma \left\lfloor \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor - \Sigma \left\lfloor \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor - \dots - \Sigma \left\lfloor \frac{v_{n-2,\Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor \right) \end{aligned}$$

où $\Delta r = r - \boxed{\theta_0}$

et où les $v_{1,\Gamma}$ sont définis par la formule de récurrence :

$$v_{i+1,\Gamma} = v_{i,\Gamma} \left[\Gamma + \Delta r - \Sigma \left\lfloor \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor - \Sigma \left\lfloor \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor - \dots - \Sigma \left\lfloor \frac{v_{i,\Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor \right]$$

avec : $v_{0,\Gamma} = \theta_0 \left[\Gamma + \Delta r \right]$

Démonstration. Posons :

$$\boxed{\theta_0} = \Sigma \left\lfloor \frac{\theta_0}{\Gamma} \right\rfloor = r_0$$

et

$$r = r_0 + \Delta r.$$

et remarquons que :

$$\theta_0 = r_0 + \psi(\theta_0) \quad (\text{Lemme VIII (VII,3)})$$

En utilisant le lemme I (I,4) pour une somme de plusieurs termes, nous pouvons écrire les premières approximations successive

$$\begin{aligned} \theta_0 & \\ \theta_1 = r + \psi(\theta_0) & = r_0 + \Delta r + \theta_0 - \Sigma \left\lfloor \frac{\theta_0}{\Gamma} \right\rfloor = \theta_0 + \Delta r. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_2 &= r + \Psi(\theta_1) = r_0 + \Delta r + \theta_0 + \Delta r - \Sigma \frac{\theta_0 + \Delta r}{\Gamma} \\
&= \theta_0 + \Delta r + \Delta r + r_0 - \Sigma \left\{ \frac{\theta_0}{\Gamma} \right\} - \Sigma \left\{ \frac{\theta_0 \int \Gamma + \Delta r}{\Gamma} \right\} \\
&= \theta_0 + \Delta r + \left(\Delta r - \Sigma \left\{ \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_3 &= r + \Psi(\theta_2) \\
&= r_0 + \Delta r + \theta_0 + \Delta r + \left(\Delta r - \Sigma \left\{ \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\} \right) - \Sigma \left\{ \frac{\theta_0 + \Delta r + \left(\Delta r - \Sigma \left\{ \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\} \right)}{\Gamma} \right\}
\end{aligned}$$

dont le dernier terme peut s'écrire, suivant le lemme I :

$$\begin{aligned}
& - \Sigma \left\{ \frac{\theta_0}{\Gamma} \right\} - \Sigma \left\{ \frac{\theta_0 \int \Gamma + \Delta r}{\Gamma} \right\} - \Sigma \left\{ \frac{(\theta_0 \int \Gamma + \Delta r) \int \Gamma + \Delta r - \Sigma \left\{ \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\}}{\Gamma} \right\} \\
& = - r_0 - \Sigma \left\{ \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\} - \Sigma \left\{ \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right\}
\end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\theta_3 = \theta_0 + \Delta r + \left(\Delta r - \Sigma \left\{ \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\} \right) + \left(\Delta r - \Sigma \left\{ \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\} - \Sigma \left\{ \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right\} \right).$$

Démontrons donc la formule générale par récurrence. Supposons que la $n^{\text{ième}}$ approximation successive soit égale à la somme :

$$\begin{aligned}
\theta_n &= \theta_0 + \Delta r + \left(\Delta r - \Sigma \left\{ \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\} \right) + \left(\Delta r - \Sigma \left\{ \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\} - \Sigma \left\{ \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right\} \right) \\
& \quad + \dots + \left(\Delta r - \Sigma \left\{ \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\} - \Sigma \left\{ \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right\} - \dots - \Sigma \left\{ \frac{v_{n-2,\Gamma}}{\Gamma} \right\} \right)
\end{aligned}$$

et calculons la $(n+1)^{\text{ième}}$ approximation :

$$\begin{aligned}
\theta_{n+1} &= r + \theta_0 + \Delta r + \left(\Delta r - \Sigma \left\{ \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\} \right) + \left(\Delta r - \Sigma \left\{ \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\} - \Sigma \left\{ \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right\} \right) \\
& \quad + \dots + \left(\Delta r - \Sigma \left\{ \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\} - \Sigma \left\{ \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right\} - \dots - \Sigma \left\{ \frac{v_{n-2,\Gamma}}{\Gamma} \right\} \right) \\
& = \underbrace{\theta_0 + \Delta r + \left(\Delta r - \Sigma \left\{ \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\} \right) + \left(\Delta r - \Sigma \left\{ \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\} - \Sigma \left\{ \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right\} \right)}_{\Gamma} \\
& \quad + \dots + \left(\Delta r - \Sigma \left\{ \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\} - \Sigma \left\{ \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right\} - \dots - \Sigma \left\{ \frac{v_{n-2,\Gamma}}{\Gamma} \right\} \right)
\end{aligned}$$

D'après le lemme I, le dernier terme de cette expression de θ_{n+1} est

égal à la somme :

$$-\Sigma \left\{ \frac{\theta_n}{\Gamma} \right\} = -\Sigma \left[\left\{ \frac{\theta_0}{\Gamma} \right\} + \left\{ \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\} + \left\{ \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right\} + \left\{ \frac{v_{2,\Gamma}}{\Gamma} \right\} + \dots + \left\{ \frac{v_{n-1,\Gamma}}{\Gamma} \right\} \right] \quad \text{ou}$$

$$-\Sigma \left\{ \frac{\theta_n}{\Gamma} \right\} = -\Sigma \left\{ \frac{\theta_0}{\Gamma} \right\} - \Sigma \left\{ \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\} - \Sigma \left\{ \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right\} - \Sigma \left\{ \frac{v_{2,\Gamma}}{\Gamma} \right\} - \dots - \Sigma \left\{ \frac{v_{n-1,\Gamma}}{\Gamma} \right\}$$

ou (11 bis)

Par ailleurs,

$$r = r_0 + \Delta r \quad \text{et} \quad r_0 = \Sigma \left\{ \frac{\theta_0}{\Gamma} \right\}$$

On en déduit, en utilisant les propriétés de distributivité et d'associativité des sommes :

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} = & \theta_0 + \Delta r + \left(\Delta r - \Sigma \left\{ \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\} \right) + \left(\Delta r - \Sigma \left\{ \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\} - \Sigma \left\{ \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right\} \right) \\ & + \left(\Delta r - \Sigma \left\{ \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\} - \Sigma \left\{ \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right\} - \Sigma \left\{ \frac{v_{2,\Gamma}}{\Gamma} \right\} \right) + \dots + \left(\Delta r - \Sigma \left\{ \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\} \right. \\ & \left. - \Sigma \left\{ \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right\} - \Sigma \left\{ \frac{v_{2,\Gamma}}{\Gamma} \right\} - \dots - \Sigma \left\{ \frac{v_{n-1,\Gamma}}{\Gamma} \right\} \right) \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration par récurrence.

4) Ce théorème permet de calculer $\beta(r)$ comme la limite :

$$\begin{aligned} \beta(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} & \left[\theta_0 + \Delta r + \left(\Delta r - \Sigma \left\{ \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\} \right) + \dots \right. \\ & \left. \dots + \left(\Delta r - \Sigma \left\{ \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\} - \Sigma \left\{ \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right\} - \dots - \Sigma \left\{ \frac{v_{n-2,\Gamma}}{\Gamma} \right\} \right) \right] \end{aligned}$$

en prenant $\theta_0 < \beta(r)$.

Comme en IV, 4, cette limite est celle d'un nombre entier non décroissant qui ne peut tendre vers l'infini ; il atteint donc sa limite pour une valeur finie n_0 de n . Pour constater que cette limite est atteinte, il suffit de vérifier que :

$$\Delta r - \Sigma \left\{ \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\} - \Sigma \left\{ \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right\} - \dots - \Sigma \left\{ \frac{v_{n-1,\Gamma}}{\Gamma} \right\} = 0$$

On a alors $n = n_0$.

5) Théorème XIX bis. La $n^{\text{ième}}$ approximation est aussi égale à l'expression.

$$\theta_n = \Gamma \left(\frac{\theta_0}{\Gamma} + \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} + \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} + \dots + \frac{v_{n-1,\Gamma}}{\Gamma} \right) + v_{n-1,\Gamma} \quad (12)$$

Démonstration. La relation (11) montre que :

$$\frac{\theta_n}{\Gamma} = \frac{\theta_0}{\Gamma} + \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} + \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} + \dots + \frac{v_{n-1,\Gamma}}{\Gamma} \quad (12_I).$$

Or la formule de récurrence déterminant les $v_{i,\Gamma}$ permet d'appliquer le lemme I bis (I,4) et d'écrire :

$$\theta_n \uparrow \Gamma = v_{n-1,\Gamma} \uparrow \Gamma$$

ce qui termine la démonstration, puisque :

$$\theta_n = \Gamma \frac{\theta_n}{\Gamma} + \theta_n \uparrow \Gamma$$

6) Théorème XIX TER COMPLEMENTAIRE. Si, pour $n \geq n_0$,

$$\theta_{n+1} = \theta_n, \text{ on a :}$$

$$0 \leq v_{n,\Gamma} < \Gamma;$$

$$n \geq n_0$$

Démonstration. En effet, la relation (12_I) montre que :

$$\frac{\theta_{n+1}}{\Gamma} - \frac{\theta_n}{\Gamma} = \frac{v_{n,\Gamma}}{\Gamma}$$

Comme le premier membre est nul pour $n \geq n_0$, le second l'est aussi.

On a alors :

$$v_{n,\Gamma} = v_{n,\Gamma} \uparrow \Gamma = \theta_{n+1} \uparrow \Gamma = \theta_n \uparrow \Gamma$$

7) Les deux théorèmes précédents permettent de calculer $\beta(r)$ par une nouvelle formule : pour $n \geq n_0$ et $\theta_0 < \beta(r)$, on peut écrire la relation (12) :

$$\beta(r) = \theta_n = \Gamma \left(\frac{\theta_0}{\Gamma} + \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} + \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} + \dots + \frac{v_{n-1,\Gamma}}{\Gamma} \right) + v_{n,\Gamma}$$

$$n \geq n_0$$

Cette formule n'est pas absolument symétrique, en ce qui concerne les indices, de celle du paragraphes IV. 7. Ceci tient à ce que les composantes divisionnaires $\frac{\alpha(s)}{\Gamma}$ et $\frac{\beta(r)}{\Gamma}$ ne jouent pas dans les deux théories, des rôles symétriques. Nous définirons plus loin les grandeurs qui jouent, pour les sériales β , un rôle symétrique à celui des composantes divisionnaires pour les sériales α .

8) Cas particulier. Pour $r > 0$, on peut prendre $\theta_0 = 0$ qui est alors, inférieur à $\beta(r)$, et les formules précédentes se simplifient, car

$$\boxed{\theta_0} = 0, \quad \Delta r = r \quad \theta_0 \uparrow \Gamma = 0,$$

d'où :

$$v_{0,\Gamma} = r \quad \text{et} \quad \theta_1 = r$$

Il est alors aussi facile de partir de :

$$\theta_0 = r$$

ce qui décale de 1 les indices des $v_{i,\Gamma}$ par rapport à ceux des θ_n .

Nous obtenons ainsi finalement :

$$\beta(r) = \lim_{n \text{ croissant}} \left[v_{0,\Gamma} + \left(v_{\Gamma} - \sum \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right) + \left(v_{0,\Gamma} - \sum \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} - \sum \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right) + \dots + \left(v_{0,\Gamma} - \sum \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} - \sum \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} - \dots - \sum \frac{v_{n-1,\Gamma}}{\Gamma} \right) \right]$$

avec :

$$v_{0,\Gamma} = r,$$

et $2^\lambda - 1$ fois :

$$\beta(r) = \Gamma \lim_{n \text{ croissant}} \left(\frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} + \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} + \dots + \frac{v_{n,\Gamma}}{\Gamma} \right) + v_{n+1,\Gamma}$$

Pour constater que les limites sont atteintes, il convient de vérifier que :

$$v_{0,\Gamma} - \sum \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} - \sum \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} - \dots - \sum \frac{v_{n,\Gamma}}{\Gamma} = 0$$

IX. Deuxième formule pour le calcul de $\beta(r)$.

Exemple numérique.

Soit à calculer $\beta_{3,4}(8)$. ($\Gamma_3 = 3$, $\Gamma_4 = 4$, $\Gamma_{3,4} = 12$)

Nous prendrons $\theta_0 = 8$, et $v_{0,\Gamma} = 8$ pour tous les Γ .

$$\left\lfloor \frac{v_{0,3}}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{8}{3} \right\rfloor = 2 \quad \left\lfloor \frac{v_{0,4}}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor = 2 \quad \left\lfloor \frac{v_{0,12}}{12} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{8}{12} \right\rfloor = 0$$

$$v_{0,\Gamma} - \sum \left\lfloor \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor = 8 - (2+2+0) = 8 - 4 = 4.$$

$$v_{1,3} = 8 \lfloor 3 + 4 = 2 + 4 = 6$$

$$v_{1,4} = 8 \lfloor 4 + 4 = 0 + 4 = 4$$

$$v_{1,12} = 8 \lfloor 12 + 4 = 8 + 4 = 12.$$

$$\left\lfloor \frac{v_{1,3}}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6}{3} \right\rfloor = 2 \quad \left\lfloor \frac{v_{1,4}}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor = 1 \quad \left\lfloor \frac{v_{1,12}}{12} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{12}{12} \right\rfloor = 1.$$

$$v_{0,\Gamma} - \sum \left\lfloor \frac{v_{0,\Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor - \sum \left\lfloor \frac{v_{1,\Gamma}}{\Gamma} \right\rfloor = 4 - (2+1-1) = 4-2 = 2.$$

etc.....

Le calcul peut se disposer ainsi qu'il suit :

$$8 =$$

$$\frac{3}{2+2+0+1}$$

$$2 + (8-4) = 2+4 = 6$$

$$0 + (4-2) = 0+2 = 2$$

$$2 + (2-0) = 2+2 = 4$$

$$1 + (2-2) = 1+0 = 1$$

$$8$$

$$\frac{12}{0+1+0+0}$$

$$8 + 4 = 12$$

$$0 + 2 = 2$$

$$2 + 2 = 4$$

$$4 + 0 = 4$$

$$8$$

$$\frac{4}{2+1+0+1}$$

$$0 + 4 = 4$$

$$0 + 2 = 2$$

$$2 + 2 = 4$$

$$0 + 0 = 0$$

On lit :

$$\begin{aligned}\beta_{3,4}(8) &= 8 + 4 + 2 + 2 + 0 = 16 \\ &= 3(2 + 2 + 0 + 1) + 1 \\ &= 4(2 + 1 + 0 + 1) + 0 \\ &= 12(0 + 1 + 0 + 0) + 4\end{aligned}$$

IX. Deuxième formule pour le calcul de $\beta(r)$.

1) Lemme IX. Si A et B sont des entiers, $B > 1$, et que A est multiple de B, ils vérifient la relation

$$\left\lfloor \frac{A}{B} \right\rfloor = \frac{A - \left\lfloor \frac{A}{B} \right\rfloor B}{B - 1}$$

Démonstration. Celle-ci est évidente si l'on remarque que :

$$\left\lfloor \frac{A}{B} \right\rfloor = \frac{A}{B}$$

puisque A est multiple de B.

Lemme IX BIS. Réciproque. Si A, B et q sont des entiers, $B > 1$, et qu'ils vérifient la relation :

$$q = \frac{A - q}{B - 1},$$

q est le quotient $\frac{A}{B}$, et par conséquent A est multiple de B.

Démonstration. On peut écrire :

$$A - q = (B - 1)q = Bq - q$$

d'où

$$\frac{A}{B} = q.$$

$\frac{A}{B}$ est donc entier, et A est multiple de B :

$$\frac{A}{B} = \left\lfloor \frac{A}{B} \right\rfloor.$$

Lemme IX TER. Complémentaire. Si A et B sont des entiers $B > 1$, et que A

est multiple de B, les restes des divisions entières de A par B

et de $A - \frac{A}{B}$ par $B - 1$ sont nuls et donc égaux.

Ceci résulte des lemmes précédents.

Théorème XX. Si l'entier N est multiple du nombre de référence Γ , sa

composante divisionnaire ρ_Γ vérifie la relation :

$$\rho_\Gamma = \frac{s + \Sigma' \rho_\Gamma}{\Gamma - 1} \quad (s = \Psi(N)).$$

Démonstration. D'après la formule (1) (III,2),

$$N = s + \Sigma \rho_\Gamma \quad (\rho_\Gamma = \lfloor \frac{N}{\Gamma} \rfloor \quad (V,1)).$$

Si N est multiple de Γ , en utilisant le lemme IX, on obtient :

$$\rho_\Gamma = \lfloor \frac{N}{\Gamma} \rfloor = \frac{s + \Sigma \rho_\Gamma - \rho_\Gamma}{\Gamma - 1} = \frac{s + \Sigma' \rho_\Gamma}{\Gamma - 1}$$

ce qui détermine la démonstration.

Théorème XX BIX. Réciproque : Si $2^\lambda - 1$ entiers ρ_Γ étant donnés, l'un

d'eux vérifie la relation :

$$\rho_\Gamma = \frac{s + \Sigma' \rho_\Gamma}{\Gamma - 1}$$

ρ_Γ est la composante divisionnaire $\lfloor \frac{N}{\Gamma} \rfloor$ du nombre entier $N = s + \Sigma \rho_\Gamma$

et cet entier N est multiple de Γ .

Démonstration. Il suffit de poser :

$$s + \Sigma \rho_\Gamma = N$$

et d'appliquer le lemme IX bis pour démontrer ce théorème.

2) Nous appellerons "composantes contredivisionnaires" d'un entier N (pour le système d'entiers de base a, b, \dots, ℓ), les différences :

$$\sigma_\Gamma = N - \lfloor \frac{N}{\Gamma} \rfloor = N - \rho_\Gamma.$$

Or la relation fonctionnelle vérifiée par $\beta(r)$ (VIII, 1) peut s'écrire :

$$\beta(r) = r + \left[\beta(r) - \Sigma \lfloor \frac{\beta(r)}{\Gamma} \rfloor \right]$$

ou, comme, quel que soit X

$$\Sigma(X) = X,$$

$$\beta(r) = r + \Sigma \left[\beta(r) - \lfloor \frac{\beta(r)}{\Gamma} \rfloor \right]$$

et

$$\beta(r) = r + \Sigma \sigma_\Gamma \quad (13)$$

où les σ_Γ sont les composantes contredivisionnaires de $\beta(r)$.

Si l'on remarque que :

$$N = s + \Sigma \rho_{\Gamma} \quad ((1) \text{ (III,2)}),$$

on en déduit :

$$\sigma_{\Gamma} = s + \Sigma' \rho_{\Gamma} \quad (14).$$

Théorème XXI (1ère partie). Si $\beta(r)$ est multiple d'un nombre de

référence Γ , la composante contredivisionnaire σ_{Γ} de $\beta(r)$ vérifie

la relation :

$$\sigma_{\Gamma} = r + \Sigma \sigma_{\Gamma} - \frac{\sigma_{\Gamma}}{\Gamma - 1} \quad (15).$$

Démonstration. Le premier membre σ_{Γ} est égal à $s + \Sigma' \rho_{\Gamma}$, d'après la relation

(14). Par ailleurs, d'après la relation (13) :

$$r + \Sigma \sigma_{\Gamma} = \beta(r) = s + \Sigma \rho_{\Gamma}$$

et, d'après le théorème XX,

$$\frac{\sigma_{\Gamma}}{\Gamma - 1} = \frac{s + \Sigma' \rho_{\Gamma}}{\Gamma - 1} = \rho_{\Gamma}.$$

Le deuxième membre de la relation (15) est donc aussi égal à $s + \Sigma' \rho_{\Gamma}$

ce qui termine la démonstration.

Théorème XXI. (2ème partie) : Si $\beta(r)$ est contremultiple d'un nombre de

référence Γ , la composante contredivisionnaire σ_{Γ} de $\beta(r)$ vérifie

la relation :

$$\sigma_{\Gamma} = r + \Sigma \sigma_{\Gamma} - \frac{\sigma_{\Gamma}}{\Gamma - 1} \quad (15_{\Gamma})$$

Démonstration. On a :

$$\sigma_{\Gamma} = s + \Sigma' \rho_{\Gamma} \quad (14).$$

Par ailleurs,

$$\frac{s + \Sigma' \rho_{\Gamma}}{\Gamma - 1} = \rho_{\Gamma} \quad (\text{théorème VIII (V,1)})/$$

La suite de la démonstration est la même que pour la 1ère partie du théorème.

Théorème XXI BIS. Réciproque : Si $2^\lambda - 1$ entiers σ_Γ donnés vérifient au moins une relation de la forme (15), et $2^\lambda - 2$ relations soit de la forme (15), soit de la forme (15_Γ), ce sont les composantes contredivisionnaires de $\beta(r)$, et par suite :

$$\beta(r) = r + \Sigma\sigma_\Gamma.$$

Démonstration. Soit pour un des entiers σ_Γ la relation :

$$\sigma_\Gamma = r + \Sigma\sigma_\Gamma - \frac{\sigma_\Gamma}{\Gamma - 1}$$

vérifiée.

On en déduit :

$$r + \Sigma\sigma_\Gamma = \frac{\Gamma\sigma_\Gamma}{\Gamma - 1}$$

ou

$$\frac{(r + \Sigma\sigma_\Gamma)(\Gamma - 1)}{\Gamma} = \sigma_\Gamma$$

Regardons la somme $r + \Sigma\sigma_\Gamma$ comme un nombre entier N. Comme Γ et $\Gamma - 1$ n'admettent que l'unité comme plus grand commun diviseur, il en résulte que N est un multiple du nombre de référence Γ , et est donc un terme de la sériale β .

La composante contredivisionnaire d'indice Γ de N est par définition :

$$r + \Sigma\sigma_\Gamma - \frac{r + \Sigma\sigma_\Gamma}{\Gamma} = \frac{(\Gamma - 1)(r + \Sigma\sigma_\Gamma)}{\Gamma}$$

ce qui montre bien que σ_Γ est la composante contredivisionnaire d'indice Γ de $r + \Sigma\sigma_\Gamma$.

Soit maintenant, s'il en existe, un des entiers donnés σ_Γ vérifiant la relation :

$$\sigma_\Gamma = r + \Sigma\sigma_\Gamma - \# \frac{\sigma_\Gamma}{\Gamma - 1} \# .$$

On en déduit :

$$N = r + \Sigma\sigma_\Gamma = \sigma_\Gamma + \# \frac{\sigma_\Gamma}{\Gamma - 1} \# .$$

et, d'après le théorème VI (IV, 2) :

$$N = \alpha_\Gamma(\sigma_\Gamma).$$

N est donc contremultiple du nombre de référence Γ . Mais, d'après le théorème IX (V,2) :

$$\left\| \frac{\sigma_{\Gamma}}{\Gamma - 1} \right\| = \left\| \frac{N}{\Gamma} \right\|$$

et, par suite :

$$r + \Sigma \sigma_{\Gamma} - \left\| \frac{\sigma_{\Gamma}}{\Gamma - 1} \right\| = N - \left\| \frac{N}{\Gamma} \right\|$$

ce qui montre bien que σ_{Γ} est la composante contredivisionnaire d'indice Γ de $N = r + \Sigma \sigma_{\Gamma}$. On en déduit finalement que $N = r + \Sigma \sigma_{\Gamma}$ est le terme de rang r de la sériale β , puisque ce terme est unique.

Théorème XXI TER. Complémentaire : (1ère partie) Si $\beta(r)$ est multiple d'un nombre de référence Γ , le reste de la division entière de σ_{Γ} par $\Gamma - 1$ est nul, et par conséquent égal au reste de la division entière de $\beta(r)$ par Γ .

Démonstration. Celle-ci résulte du théorème XXI (1ère partie).

Théorème XXI TER. (2ème partie) : Si $\beta(r)$ est contremultiple d'un nombre de référence Γ , le reste premièrement $\sigma_{\Gamma} \overline{[\Gamma - 1]}$ est égal au reste entièrement $\beta(r) \overline{[\Gamma]}$.

Démonstration. On a :

$$\sigma_{\Gamma} = \beta(r) - \left\| \frac{\beta(r)}{\Gamma} \right\|$$

En appliquant le lemme III ter (I,6), il vient :

$$\sigma_{\Gamma} \overline{[\Gamma - 1]} = \beta(r) \overline{[\Gamma]} ,$$

ce qui termine la démonstration.

3) On peut utiliser le théorème XXI (1ère partie) pour retrouver la formule du terme de rang r de la sériale $\beta_a(r)$ à un seul entier de base :

Théorème XXII. La composante contredivisionnaire σ_a de $\beta_a(r)$ est égale à $r(a-1)$, et par suite :

$$\beta_a(r) = r + r(a-1)$$

Démonstration. Par définition, $\beta_a(r)$ est multiple ^{de a} Γ . D'après le théorème XXI (1ère partie), on a donc :

$$\sigma_a = r + \Sigma \sigma_{\Gamma} - \frac{\sigma_a}{a-1} .$$

Or :

$$\Sigma \sigma_{\Gamma} = \sigma_a$$

On en déduit :

$$r = \frac{\sigma_a}{a-1}$$

et

$$\sigma_a = r(a-1)$$

et finalement, en utilisant la formule (13) :

$$\beta_a(r) = r + \Sigma \sigma_{\Gamma} = r + \sigma_a = r + r(a-1)$$

ce qui termine la démonstration .

4) Si l'on connaissait par avance, ce qui n'est généralement pas le cas, les nombres de référence dont $\beta(r)$ est ou non multiple, on pourrait tenter d'appliquer la méthode des approximations successives pour résoudre le système formé par les $2^{\lambda}-1$ relations (15) ou (15 _{Γ}).

La démonstration du fait que ces approximations successives restent, quand leur numéro d'ordre est suffisamment élevé, comprises entre des limites finies relativement voisines des valeurs des composantes contredivisionnaires Γ de $\beta(r)$, conduirait à la démonstration du théorème suivant, démonstration que nous ferons par une méthode directe.

Théorème XXIII. Si l'on désigne par x_{Γ} le reste entièrement $\beta(r) | \Gamma$ de la division entière par défaut de $\beta(r)$ par le nombre de référence

Γ , on a les identités suivantes :

$$\beta(r) = r + \Sigma \left[\left(r + \frac{x_{\Gamma}}{\Gamma-1} \right) \frac{1 - \frac{1}{\Gamma}}{\Sigma \frac{1}{\Gamma}} \right]$$

(*) Voir sur ce problème, note aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences, T. 259 p. 269-272
Séance du 15 juillet 1964.

$$\sigma_{\Gamma} = \left(1 - \frac{1}{\Gamma}\right) \left[r + \frac{x_{\Gamma}}{\Gamma-1} + \Sigma \left[\left(r + \frac{x_{\Gamma}}{\Gamma-1}\right) \frac{1 - \frac{1}{\Gamma}}{\Sigma \frac{1}{\Gamma}} \right] \right]$$

$$\beta(r) - \frac{P}{G} = \Sigma \frac{x_{\Gamma}}{\Gamma \Sigma \frac{1}{\Gamma}}$$

Pour démontrer ce théorème, nous ferons d'abord les remarques suivantes :

Remarque I. On a :

$$\frac{F}{P} = \frac{P \Sigma \frac{1}{\Gamma}}{P} = 1 - \Sigma \frac{1}{\Gamma} = \Sigma \left(1 - \frac{1}{\Gamma}\right)$$

et réciproquement :

$$1 - \frac{F}{P} = \Sigma \frac{1}{\Gamma}.$$

Remarque II. F étant le nombre de termes de la série α compris dans un intervalle égal à une période $P = \Gamma a, \dots, 2,$

$$0 < \frac{F}{P} < 1.$$

Remarque III.

$$\frac{P}{G} = \frac{P}{\Sigma \frac{P}{\Gamma}} = \frac{1}{\Sigma \frac{1}{\Gamma}}$$

et par ailleurs, quel que soit A :

$$A \left(\frac{1}{\Sigma \frac{1}{\Gamma}}\right) = A + A \left(\frac{1 - \Sigma \frac{1}{\Gamma}}{\Sigma \frac{1}{\Gamma}}\right) = A + A \frac{\Sigma \left(1 - \frac{1}{\Gamma}\right)}{\Sigma \frac{1}{\Gamma}}$$

$$= A + \Sigma \left(A \frac{1 - \frac{1}{\Gamma}}{\Sigma \frac{1}{\Gamma}}\right)$$

et aussi, quel que soit $F(\Gamma)$:

$$\Sigma \frac{F(\Gamma)}{\Gamma \Sigma \frac{1}{\Gamma}} = \Sigma \left(\frac{F(\Gamma)}{\Gamma-1} \cdot \frac{\Gamma-1}{\Sigma \frac{1}{\Gamma}}\right) = \Sigma \left(\frac{F(\Gamma)}{\Gamma-1} \cdot \frac{1 - \frac{1}{\Gamma}}{\Sigma \frac{1}{\Gamma}}\right)$$

Remarque IV. En utilisant le lemme VIII (VII,3), on peut écrire l'identité suivante :

$$\beta(r) = r + \Psi [\beta(r)] = r + \beta(r) - \Sigma \frac{\beta(r)}{\Gamma}$$

ou encore :

$$\beta(r) = r + \beta(r) - \Sigma \frac{\beta(r) - x_{\Gamma}}{\Gamma}$$

si x_{Γ} désigne le reste entièrement $\beta(r)[\Gamma]$.